

Secretaría de Educación del Gobierno del Estado
Universidad Pedagógica Nacional
Unidad 241

**“CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE PROFESORES EN
FORMACIÓN DE PRIMARIA. ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE
RAZÓN”**

TESIS:

**Que para obtener el grado de Doctor en Desarrollo Educativo con
Énfasis en Formación de Profesores.**

PRESENTA:

Ana María Reyes Camacho

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Leticia Sosa Guerrero

San Luis Potosí, S.L.P.

Junio 2018

Doctorado Regional en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores

Estados que integran la Región:

Coahuila

Nuevo León

Tamaulipas

San Luis Potosí

Zacatecas

ANEXOS

ANEXO1. Planificación de Daniela	514
ANEXO 2. Planificación de Israel.....	519
ANEXO 3. Entrevista Semiestructurada 1 de Daniela	527
ANEXO 4. Entrevista Semiestructurada 1 de Israel.....	546
ANEXO 5. Videograbación de clase de Daniela	573
ANEXO 6. Videograbación de clase de Israel (1).....	589
ANEXO 7. Videograbación de clase de Israel (2).....	612
ANEXO 8. Entrevista Semiestructurada 2 de Daniela	629
ANEXO 9. Entrevista Semiestructurada 2 de Israel.....	649
ANEXO 10. Análisis de la Práctica de Daniela.....	669
ANEXO 11. Análisis de la Práctica de Israel	688

ANEXO1. Planificación de Daniela

Competencias que se favorecen: Validar procedimientos y resultados, Comunicar información matemática y Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizaje Esperado: Que los niños aprendan la razón como un significado de la fracción

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Análisis a priori:

A partir del diseño de las actividades o planteamientos que se realizarán en la clase, se toma en cuenta uno de los posibles conocimientos previos de los alumnos, el cual consiste en que éstos deben conocer lo que las fracciones representan dentro de un entero o ciertas cantidades, según sea la situación. Hay que considerar las posibles dificultades a las cuales se enfrentarán al momento de resolver los problemas, se puede presentar que los alumnos no establezcan la relación entre las dos cantidades que se están comparando, confusión de lo que representa una fracción y una razón, no entender de como contestar las tablas, o relacionar los resultados con las frases que se requieren completar, dudas en cuanto al uso de los dos puntos (:) para leer las razones, la diferencia entre una razón y una fracción.

Para lo anterior, ¿qué haré?

Es importante la utilización de esquemas que representen de manera simbólica y numérica las comparaciones y representaciones fraccionarias que se están haciendo para establecer su relación. Realizaré la diferenciación de una razón y una fracción mediante un cuadro comparativo, para que los alumnos enfrentados a la misma situación problemática expresen el resultado mediante una razón y luego en una fracción. Resolver cualquier duda en el proceso de llenado de las tablas, solicitando al grupo o un compañero que pueda apoyar. ¿Qué procedimientos pueden utilizar los alumnos? Es probable que se recurra a la división y multiplicación, las representaciones gráficas, los alumnos pueden expresar una forma de la fracción no simplificada por lo que hay que inducirlos para que lo hagan.

INICIO

VERIFICANDO CONOCIMIENTOS PREVIOS *(Las representaciones que tiene una fracción en sus diferentes formas como la gráfica y la numérica)*

- Mostraré una caja con algunas divisiones con cartoncillo. Preguntaré a los alumnos: -¿En cuántas partes está dividida la caja? (Con solo un cartoncillo atravesado a la mitad de la caja). Después pondré una botella de agua en una de las mitades, para cuestionar a los alumnos: -¿Qué parte de la caja está ocupando la botella? Luego colocaré un cartoncillo atravesando a la mitad del cartoncillo anterior y volveré a cuestionar: Y ahora, ¿en cuántas partes está dividida la caja? Y volveré a colocar una botella de jugo en una de las partes para finalmente solicitar a los alumnos darle respuesta a esta pregunta: -¿Qué parte de la caja está ocupando la botella?

-Pasaré a 5 alumnos. Cada uno tomará una tarjeta donde estará anotada una fracción. En el pintarrón colocaré una lámina con 5 pequeños y simples ejercicios de representaciones con fracciones. De manera grupal, se realizará el razonamiento y los alumnos indicarán qué

fracción corresponde a cada ejercicio, indicándole a su compañero coloque la tarjeta en la parte de la lámina donde se encuentre éste.

(En la lámina se coloca la representación que tiene una fracción cuando se refiere a figuras geométricas fragmentadas en partes iguales, es decir, de forma gráfica. También fracciones para significar partes de cantidades tomándolas en cuenta como un entero, de forma numérica. Se trata de abarcar lo que puede ser representado mediante fracciones. Así se conocerá si los alumnos relacionan las representaciones que se pueden tener y como se opera con las diferentes formas ya sea gráfica y/o numérica)

DESARROLLO

PROBLEMA A RESOLVER (Desafío matemático a enfrentar)

-Los alumnos resolverán un problema planteado en la hoja de trabajo 1, de manera individual, pidiendo que anoten sus procedimientos se les dará un tiempo estimado de 15 min.

ESCUELA: _____
NOMBRE DEL ALUMNO: _____
GRADO: _____ GRUPO: _____

1. Resuelve el siguiente planteamiento de manera individual, puedes usar calculadora pero anota tus procedimientos.

En la empacadora de lechugas de Loreto, trabajan Manuel y Sofia, ellos son los encargados de hacer los pedidos de las cajas que se ocuparán para empacar las lechugas que se cosechan. Ayúdales a encontrar lo siguiente:

Si en 4 cajas se empacan 64 lechugas...

1. ¿Cuántas cajas se ocuparán para empacar 112 lechugas? _____
2. ¿Cuántas cajas se ocuparán para 32 lechugas? _____
3. ¿Qué parte de la caja corresponde a una lechuga? _____
4. ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas? _____

PROCEDIMIENTO:

(En esta hoja de trabajo se presenta una situación que es el problema central de la clase en el que se involucra la representación de relaciones entre cantidades a manera de razón y, a su vez en fracción, encontrando el valor unitario. Este problema se presenta en primera instancia para que los alumnos se enfrenten al desafío de resolverlo, lo cual lo tendrán que hacer con las herramientas que cuenten previamente)

-Se pedirá a un mínimo de tres o alumnos compartan su procedimiento así como sus resultados. Se hará la formulación sin que todavía se involucre la validación. Los resultados se registrarán en el pintarrón para posteriormente retomarlos.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO (*Elementos necesarios para resolver el problema central*)

-Pediré a los alumnos, que por ahora no atiendan el problema de la hoja de trabajo 1.

-Les entregaré la hoja de trabajo 2, donde hay tres pequeños planteamientos, los cuales se resolverán de manera grupal.

-Se comenzará por contestar el planteamiento 1: “Pastel partido”

“Pastel partido”

1. Un pastel es repartido a 4 niños ¿Qué parte de pastel le toca a cada uno? _____

2. Si ahora son 8 niños y les toca una parte de pastel igual a los niños anteriores ¿Cuántos pasteles son repartidos para estos 8 niños? _____

3. Contesta la siguiente tabla:

No. de Pasteles	No. de Niños
1	
	8

4. Completa las frases:

1 pastel para _____
_____ para 8 niños

(En el planteamiento 1, se pretende rescatar **la manera en cómo se expresa una razón**, tomando como primera parte una fracción de $\frac{1}{4}$, que es la parte que le corresponde de pastel a un niño y, en cuatro niños, se forma el pastel entero. Después se pide buscar el número de pasteles para ser repartidos en la misma cantidad de $\frac{1}{4}$, pero ahora para 8 niños. Enseguida se propone una tabla para que los alumnos tengan mayor facilidad de establecer las relaciones entre el número de niños y de pasteles; todo esto para llegar a representar estas relaciones al momento de leerlas como razones, las cuales se solicita a los alumnos que completen: 1 pastel para 4 niños y 2 pasteles para 8 niños)

-Se dará paso a contestar el planteamiento 2: “Caritas y Corazones”

“Caritas y corazones”

1. ¿Cuántos corazones hay en el rectángulo? _____

2. ¿Cuántas caritas? _____

3. Si a los corazones se les repartiera el número total de caritas ¿Cuántas caritas le tocan a cada corazón? _____

4. En el rectángulo hay:

corazones para caritas

:

PARA SABER MÁS

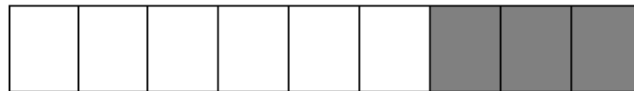
Se utiliza el símbolo de los dos puntos (:) para indicar una comparación entre dos cantidades.

(El elemento que se pretende incorporar ahora es **expresar la razón de manera numérica** con el uso de los dos puntos (:)) que se desprenderá de la forma verbal: 4 corazones para 8 caritas, que es igual a 4:8. En este apartado la ayuda que se les da a los alumnos es informarles que para representar razones se utilizan los dos puntos, en un pequeño espacio de la hoja de trabajo bajo el apartado “Para saber más”)

-Se continuará contestando el planteamiento 3: “Tiras de papel”

"Tiras de papel"

Observa la siguiente tira de papel:



1. ¿Qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros? _____

2. ¿Cuántas tiras de papel hay? _____

3. ¿Cuántos cuadritos oscuros hay en la tira de papel? _____

En tira hay cuadritos oscuros.



Contesta el siguiente cuestionamiento:

Es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción.

A) FRACCIÓN B) SUMA C) RAZÓN

REGISTREMOS LOS RESULTADOS

PLANTEAMIENTOS		FRACCIÓN
Pastel partido		
Caritas y corazones		
Tiras de papel		

(El elemento que ahora descubrirán los alumnos es que **las razones también pueden ser representadas en fracciones**, pues $1:3$ es traducido como $1/3$, es una tira de papel dividida en 9 cuadros y tres de ellos están oscuros, por lo tanto, como es de 1 a 3, es decir, que por 1 tira de papel hay tres cuadritos oscuros, es igual a decir, que un tercio de esa misma tira de papel está ocupado por los cuadros oscuros)

-Para concluir se leerá otro apartado donde los alumnos al leer la definición, la relacionarán con el concepto de **Razón**. Después se completará la tabla 2. "¿Razones es Fracciones?" continuando el trabajo de manera grupal. (A partir de las razones que se obtuvieron en los tres planteamientos anteriores, serán representados por fracciones y viceversa, mediante un cuadro comparativo, con la finalidad de que los alumnos reconozcan las dos formas de expresar medidas fraccionarias)

CIERRE

-Pediré a los alumnos que retomen el problema inicial y solicitaré que analicen nuevamente sus respuestas y procedimientos.

-Se pasará a validar los resultados (Ahora los alumnos cuentan con los elementos para resolver eficazmente el problema).

ANEXO 2. Planificación de Israel

Asignatura: Matemáticas.

Tema: La razón como fracción.

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Propósito:

Identificar el papel de la noción de razón en las matemáticas y su vínculo con la noción de fracción.

Aprendizaje esperado:

- Usa fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.

- Validar procedimientos y resultados.

- Comunicar información matemática.

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Preparación del medio

Valoración de conocimientos previos:

-Leer un cuento a los alumnos titulado “La gran fiesta”

Había una vez en un lugar muy muy lejano una ciudad donde reinaba la justicia, no había criminal que se le escapara al gran guardián del planeta.... ¿Saben quién es?... así es, se trata del Capitán de las tres “R” (Recicla, Reúsa y Reduce), él junto con su pandilla de guardianes defienden la limpieza del planeta y pelean en contra de la contaminación y de cualquiera que se atreva a tirar basura y a desperdiciar los recursos que la naturaleza nos da. Un día el Alcalde de Cuidad “limpieza” organizó una fiesta para el capitán “R” por su gran trabajo y por mantener la ciudad fuera de basura y de los desperdicios. Toda la ciudad estaba invitada a este gran evento, en especial los niños, ya que querían celebrar juntos con su gran súper héroe. Después de la fiesta habría un baile en el que tocarían “Los 5 de Zacatecas”; el Alcalde de la ciudad prometió a todos sus invitados un gran festín en donde habría ricos antojitos y de postres pasteles de todos los sabores. También prometió traer toda una feria con juegos y puestos para que todos se divirtieran.

El Alcalde al quererse lucir para festejar a lo grande al Capitán “R”, no se dio cuenta que había gastado mucho dinero en contratar al grupo, en el mobiliario, en la feria y en la comida, así que tendría que economizar en los postres, ya que no los había comprado todavía y no le podía quedar mal al pueblo porque se los había prometido, así que tuvo que ir a preguntar los precios a las pastelerías del pueblo para ver en dónde le convenía comprarlos.

El Alcalde es algo distraído con las cuentas y no se le dan mucho las matemáticas, así que ahora te toca a ti ayudarlo a decidir en dónde le conviene hacer la compra de los pasteles.

Se les presentará a los alumnos a través de una proyección las dos ofertas de las dos pastelerías, se aclarará que el pastel es del mismo tamaño en los dos establecimientos. La pregunta central será, ¿en cuál de las dos pastelerías le conviene hacer la compra?

Se abrirá un espacio para la argumentación de la pregunta.

En este primer momento se trabajará de forma individual, utilizando solamente lápiz y papel.

SUSPIROS
PASTELERÍAS

3x2
¡Lleva 3, paga 2!

\$180.00

La Casa de los Pasteles

\$150.00

Organización del grupo:

Enseguida se saldrá un momento a fuera del salón para realizar una dinámica titulada “El trenecito”, ésta permitirá formar 5 equipos (el número de equipos puede variar según el número de los estudiantes).

Materiales:

Hoja de trabajo.

DESARROLLO

Consigna:

Organizados en equipos, resuelvan los problemas que parecen en la hoja de trabajo 1. Tienen 20 minutos para realizar la actividad y se podrá hacer uso de la calculadora.

Devolución de la consigna:

Preguntar a un alumno sobre qué es lo que van a realizar, con el propósito de que no existan dudas con base en la consigna.

Hoja de trabajo 1

1. Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas sin realizar operaciones. Justifiquen sus respuestas.

En la mesa A se reparte un pastel entre 5 invitados, en la mesa B se reparten 2 pasteles entre 7 invitados, ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado?

¿Por qué?

Carlos y sus amigos fueron a saludar al Capitán “R” y él los invitó a un puesto de la feria que había contratado el Alcalde. Encontraron dos puestos de “truenas globos” con diferentes

promociones. En el puesto de Don Benjamín tiene que tronar 6 globos con 8 dardos para ganarse un regalo, en el puesto de Don Octavio tiene que tronar 7 globos con 10 dardos para ganarse el regalo. ¿En cuál de los dos puestos le conviene jugar para llevarse un regalo?

Justifiquen su respuesta

Carlos quiso participar en el puesto de Don Benjamín. La tabla de abajo muestra los registros de tiros que hizo Carlos en 3 rondas.

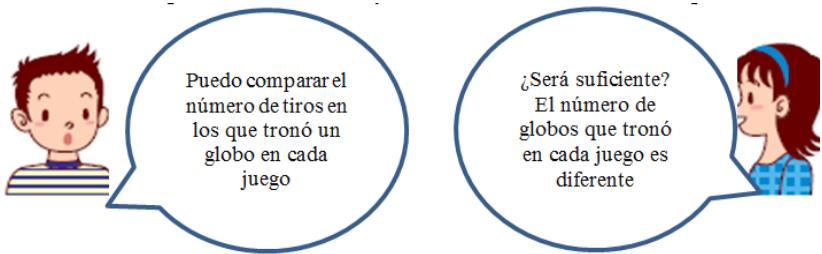
Juego 1								
Juego 2								
Juego 3								


Globos tronados


Tiros fallidos

¿Creen que en algún juego ganó un premio?

Piensa cómo comparar los resultados y discute tus ideas con tus compañeros.



Haz un registro de el número de tiros en los que tronó el globo y el número de lanzamientos.

	Juego 1	Juego 2	Juego 3
Globos tronados			
Número de lanzamientos			

Expresa como fracciones los datos de la tabla anterior, usa el **número de globos tronados como numerador** y el **número del total de lanzamientos como denominador**.

Ahora **convierte las fracciones** anteriores **en números decimales**.

Fase de acción:

- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 1, los alumnos comienzan a realizar conjeturas mentales, pensando en cuáles promociones serán las idóneas según la pregunta planteada. Cada equipo debe hacerse cargo del problema planteado haciendo sus propias analogías y asimilando la actividad de acuerdo a lo que ya conoce y a lo que se realizó en la valoración de conocimientos previos.
- El maestro sólo interviene para solucionar dudas en algún aspecto, pero lo hace mediante devoluciones para poner al alumno en situación a-didáctica.
- En esta misma fase se contestarán las preguntas que se incluyeron en la hoja de trabajo 1.

Fase de formulación-validación:

- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las preguntas planteadas y qué les permitió llegar a esos resultados. Los alumnos pueden pasar al frente para representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación de sus compañeros, para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que permitieron llegar a lo deseado.

Fase de institucionalización:

Se dará una breve introducción a la razón de manera formal. Para ello, se les presentará a los alumnos la diapositiva 2, que muestra la relación que guarda el número de globos tronados con el número de dardos. Para una mejor comprensión en este primer momento, se presentará la diapositiva 3 como ejercicio de retroalimentación.

Consigna 2

Una vez analizado lo anterior se les entregará una hoja de trabajo 2. Organizados en los mismos equipos resuelven los problemas que aparecen en sus hojas, menos la última actividad, ésta se separa del resto con una línea negra, no la contesten todavía, recuerden que no se puede estar platicando con otros equipos. Tienen 20 minutos para terminar, de igual manera, se podrá hacer uso de la calculadora.

Hoja de trabajo 2

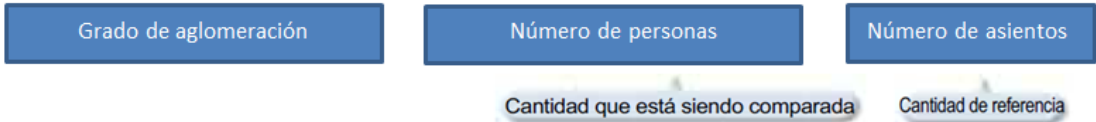
Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la tienda “Fiesta Alegre” le rentaron una mesa “chica” para 130 personas y en la tienda “Todo para tu fiesta” le rentaron una mesa “grande” para 520 personas. Carlos y sus amigos registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.

Número de personas y asientos

	Mesa “Chica”	Mesa “Grande”
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Cuál mesa se encuentra más llena?

Para saber que tan llena se encuentra cada mesa, el grado de aglomeración se describe como un número que permite comparar el número de personas sentadas respecto al número de asientos.

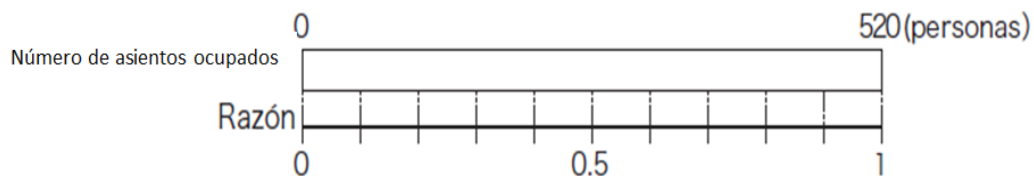


Encuentra que tan cerca están de agotar su capacidad las mesas.

Mesa chica $117 \div 130 =$

Mesa grande $\div$ $=$

Expresa el grado de aglomeración de la mesa grande coloreando el siguiente gráfico.



Fase de acción:

- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 2, los alumnos comienzan a realizar conjeturas mentales y se espera que el trabajo en equipo trate de brindar más ideas para resolver los problemas.

Fase de formulación-validación:

- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las preguntas y qué les permitió llegar a esos resultados. Pueden pasar al frente para representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que permitieron llegar a lo deseado.

Fase de institucionalización:

A manera de conclusión de la hoja de trabajo 2 se les presentará a los alumnos la diapositiva 4, en donde a grandes rasgos se clarifica lo que estuvieron realizando al comparar la razón de dos cantidades. En este punto será necesario hacer mención del concepto de Razón. Para retroalimentar lo institucionalizado se contestará el último ejercicio que quedó pendiente en la segunda hoja.

Consigna 3

Para finalizar se les entregará una hoja de trabajo 3, organizados en los mismos equipos resuelvan los problemas que aparecen en su hoja, recuerden que no se puede estar platicando con otros equipos. Tienen 10 minutos para terminar, de igual manera se podrá hacer uso de la calculadora.

Hoja de trabajo 3

Para la comida el Alcalde quiere mandar preparar un rico pozole, para preparar una ración para 5 personas se necesitan, entre otros, los siguientes ingredientes y sus respectivas cantidades.

Ingredientes	Cantidad
Maíz	1 kg
Carne	750 g
Chile guajillo	$\frac{1}{4}$ kg
Agua	1.5 L
Sal	Al gusto

¿Cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere preparar para 8 personas?

Ingredientes	Cantidad
Maíz	
Carne	
Chile guajillo	
Agua	
Sal	

Fase de acción:

- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 3 a los alumnos comienzan a realizar conjeturas mentales.

Fase de formulación-validación:

- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las preguntas planteadas y qué les permitió llegar a esos resultados. Pueden pasar al frente para representarlas al pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que permitieron llegar a lo deseado.

Fase de institucionalización:

256 En este último momento se les hablará a los alumnos que lo que estuvimos realizando fue
257 comparar razones y se dará la siguiente definición más sintética:

258 *Una razón es el cociente entre dos cantidades.*

259 Se pondrá un ejemplo:

260 En el ejercicio del pozole la razón entre la cantidad de maíz y el número de personas es:

261 Cantidad de maíz 1000 gramos

262 ----- = -----

263 Número de personas 5

264 El número obtenido al simplificar la fracción anterior es el maíz añadido para cada persona.

265 Así es más fácil saber la cantidad de maíz, por ejemplo para 7 personas.

266 Simplemente se calcula:

267 $7 \times 1000/5 = 1.4 \text{ kg.}$ o $7 \times 200\text{gr.} = 1400 \text{ gr.}$ O 1.4 Kg.

268 Podemos realizar el mismo procedimiento para saber la cantidad unitaria, ya teniendo esta
269 cantidad es más fácil saber las demás.

270 Para comprobar lo anterior y como última actividad se les presentará la diapositiva 5 en
271 donde los alumnos tratarán de encontrar la cantidad de ingredientes del pozole para una
272 persona.

ANEXO 3. Entrevista Semiestructurada 1 de Daniela

- 1 E: ¿Cuál es el grado donde va a poner en práctica esta planificación?
2 Daniela: El tema son las fracciones y se va a dar en el grado de quinto.
3 E: Y en este caso, ¿cuál eje de las matemáticas que estaría abordando?
4 Daniela: Se maneja lo que es el sentido numérico y el pensamiento algebraico; sentido
5 numérico porque las fracciones se componen de números y pensamiento algebraico porque
6 las fracciones se llevan con base en algoritmos y estructuras. Además, se abordan con base
7 en la resolución de problemas.
8 E: ¿Cuáles son las competencias matemáticas que pretende favorecer en este plan de clase?
9 Daniela: Se pretende favorecer lo que es la comunicación de información matemática, al
10 momento de que los niños están formulando y validando los resultados y, manejar técnicas
11 eficientemente.
12 E: Y en términos concretos, ¿cuál es el aprendizaje esperado de este plan de clase?
13 Daniela: El aprendizaje esperado es que los alumnos conozcan lo que es la fracción en
14 razón de la razón, cómo se ve la razón representada en fracciones.
15 E: ¿Entonces podríamos decir que este plan de clase tiene una relación con el estudio de
16 las fracciones en la escuela primaria?
17 Daniela: Sí tiene una relación con el estudio de las fracciones. Cuando se ve la razón en las
18 fracciones, no involucra únicamente lo que son las fracciones, sino que se relaciona con un
19 tema de proporcionalidad, que es base de los conocimientos previos que deben tener los
20 alumnos para poder comprender lo que son las fracciones cuando lo hablamos en forma de
21 razón.
22 E: Entonces, en su plan de clase, de manera específica, se aborda el significado de la
23 fracción como [...]
24 Daniela: Razón
25 E: Y, ¿cuál cree que son los significados o partes de la fracción que se abordan en los
26 grados anteriores?
27 Daniela: Los significados de la fracción primero se abordan como enteros, y luego se le
28 explica al niño que esta fracción, por ejemplo, en un dibujo (se levanta y realiza un
29 círculo), a los niños se les empieza con representaciones gráficas, es decir, que este círculo
30 representa un entero y se representa con un uno (escribe 1) y luego se empieza con medio
31 (representa en un círculo un entero y luego un medio). Entonces cuando los niños logran
32 identificar que todo esto es un entero (sombrea el círculo) y la mitad de esto es un medio (lo
33 sombrea), se va a lo que es la representación numérica. Entonces a los niños siempre se les
34 explica que el de arriba es el numerador y el de abajo el denominador, es decir, las dos
35 partes de la fracción; el que numera cuántas partes de una fracción hay (señala el uno de
36 $\frac{1}{2}$).
37 E: ¿Cuáles significados de la fracción, podríamos decir, se abordan antes?
38 Daniela: [...] como parte de un todo, por ejemplo, este medio como parte de un entero
39 (señala el medio representado en un círculo). Entonces ya se empieza con lo que es la
40 comparación básicamente (señala los dos círculos: el que está completamente sombreado y
41 el que solo tiene sombreada la mitad).
42 E: ¿Y cuáles significados se abordarán en sexto grado?
43 Daniela: En sexto grado, yo pienso que ya es más relacionado a lo que son comparación
44 entre cantidades (señala los círculos que se encuentran en el pintarrón), por ejemplo, si este

45 medio, lo junto con este otro cuarto, de otro entero (lo dibuja), es decir, la suma de
46 fracciones, al igual, que la multiplicación de fracciones. Por ejemplo, cuánto es este medio
47 si lo multiplico por este cuarto (señala las figuras), aunque ahí a los niños se les dificulta un
48 poquito más entender la fracción de fracciones, porque a la mejor no han entendido lo de
49 los decimales, ya ve que están un poquito más relacionados. Entonces como se les dificulta
50 más a los niños, yo pienso que es un tema que se aborda en sexto grado donde ya tienen
51 más bases para entenderlo.

52 E: Y en términos concretos, ¿cuál sería ese significados que se aborda en sexto o cómo le
53 llamaríamos a esto que dice que se ve en sexto grado?

54 Daniela: Sería un conocimiento más abstracto para los de sexto grado.

55 E: En términos generales, ¿cómo organizó su plan de clase?

56 Daniela: Primero parto de verificar los conocimientos previos, me refiero a identificar si los
57 alumnos saben qué representa una fracción gráficamente y lo relacionan con el término
58 numérico. Entonces, me baso en analizar los conocimientos previos: que los niños
59 identifiquen las fracciones gráficamente o como parte de cantidades. Por ejemplo si tengo
60 100 (escribe el cien en el pintarrón) cuánto es un medio de 100 y también en lo que son
61 medidas de volumen. Por ejemplo, en una botella con unidades de medidas de volumen
62 (dibuja un recipiente), cuánta parte de agua ocupa este recipiente (señala en el dibujo del
63 recipiente $1/5$). Entonces, en los conocimientos previos tengo pensado saber si los alumnos
64 saben esta relación de lo gráfico con lo numérico y, luego, de lo numérico cuánto
65 representa cierta parte de fracción y luego es el volumen, por ejemplo con líquidos.
66 Después se les plantea una situación problemática que sería la parte más fuerte de la clase,
67 en esta situación los alumnos hacen lo que es la fase de acción, contestan el problema, sin
68 ayuda, de manera individual y nada más se les da oportunidad de utilizar los conocimientos
69 que tienen como base. Después de ese problema central, se les pide a los alumnos que
70 intercambien sus resultados, que formulen y en una tablita van a registrar sus
71 procedimientos y su resultado. Pero no se va a socializar en el grupo, sino que esa actividad
72 se va a quedar como [...], se va a cortar o sea como que hasta ahí se va a quedar no se va a
73 socializar nada, ni se va a validar nada. Hasta después se va a hacer como una serie de
74 actividades en donde al alumno se le van a dar tres problemas. Al alumno se le va a dar en
75 el primer problema un elemento que le va a servir para solucionar el problema central. En
76 el segundo problema va a ser otro elemento para el mismo y, en el tercero, se consolidan
77 los otros dos elementos que ocupan para resolver el problema principal. El problema
78 principal se basa en hacer una comparación de cantidades que es en lo que se basa la razón;
79 esa comparación de cantidades la van expresar de forma fraccionaria. Entonces los
80 problemas que se van a realizar primero empiezan a hacer como comparaciones entre [...]
81 primero de reparto y después cómo se representaría con una fracción y de la fracción los
82 lleva al uso de la razón. Por ejemplo, en el primer problema es 4 niños (lo escribe en el
83 pintarrón) se reparten un pastel, entonces cuánto le toca a cada niño y sería un cuarto
84 (representa en forma gráfica y fraccionaria un cuarto). Enseguida les comento, por ejemplo,
85 a ocho niños les va a tocar la misma cantidad de pastel que a estos otros (señala un cuarto)
86 y les cuestiono, ¿cuántos pasteles se les van a repartir o se ocuparán para repartírselos?,
87 serían dos pasteles divididos en cuartos (representa gráficamente dos pasteles en forma de
88 círculo divididos en cuartos). Entonces aquí se hace una comparación de 1 pastel para 4
89 niños (escribe en el pintarrón $1:4$), o sea a los niños se les quiere llevar de la representación
90 fraccionaria a la representación en forma de razón y le encuentren la relación, por ejemplo,

91 1 pastel para cuatro niños (señala 1:4) se entiende en la razón y en la fracción es un cuarto
92 de pastel para cada niño, como si fuera un pastel para cuatro niños.

93 E: Ese momento de acción que señala en el principio, ¿está tal y cual en el plan de clase? O
94 ¿cómo está estructurado? En términos generales, por cuáles apartados está organizado.

95 Daniela: Es que yo considero, por ejemplo, se debe partir de un problema y ya cuando el
96 niño no encuentre los elementos pues tiene la necesidad de encontrar cómo se va a resolver.
97 Si por ejemplo, al niño le decimos a ver pasa y pon tu procedimiento, a lo mejor muchos no
98 lo van a entender y es porque no cuentan con estas bases. Esto es como la base para
99 resolver (señala el ejemplo de 4-circulo-1/4; 8-circulo-1:4) el problema inicial y después de
100 que se analiza esto con los niños [...] las actividades van a ser de manera grupal para que
101 no se vayan a perder y después de analizar esto, ahora con lo que ya saben, a partir de estos
102 tres planteamientos, ahora si van a resolver el problema inicial para ver en qué cambian su
103 procedimiento. Por eso los procedimientos se van a registrar en un cuadrito para hacer la
104 comparación. Primero, antes de que no tenían estos elementos y, después, para saber cuál es
105 el resultado y si a los alumnos se les hace más fácil porque a veces en las situaciones
106 didácticas a los alumnos se les dificulta mucho resolver el problema, porque a lo mejor
107 representa un desafío que no alcanzan a resolver. Entonces cuando no lo entienden pues se
108 queda hasta ahí el tema y ya pues los elementos no se les dan tal y cual y, aquí por ejemplo
109 se les plantea la situación problema (señala en el pintarrón), lo que ocupan para resolverlo y
110 luego ya para resolver ya con lo que conocen.

111 E: Y de acuerdo a como está estructurado del plan de clase ¿es una situación didáctica?

112 Daniela: No precisamente una situación didáctica, más bien diría [...] se basa en una
113 situación didáctica, pero en lo que es la fase de la formulación y validación, no se da tal y
114 cual después de la acción, porque tenemos acostumbrados a que después de la acción sigue
115 la formulación, validación, socialización y luego al final se da la institucionalización. En
116 esta planeación, después de la acción se da como una pequeña secuencia didáctica que
117 serían los tres planteamientos porque son actividades que están relacionadas. Entonces no
118 sería la situación didáctica como tal, sino que se pone una pero pequeña situación didáctica,
119 una pequeña secuencia didáctica no tan grande y después de esa secuencia didáctica, ahora
120 si se va otra vez a lo que es la formulación, y ahora si nos vamos a lo que es a socializar, a
121 validar los resultados y a comparar entre el primer procedimiento que se hizo y el segundo
122 procedimiento y se pasa a lo que es la institucionalización al final.

123 E: Y estos conceptos que veo en la planeación: inicio, desarrollo, cierre ¿de dónde vienen?

124 Daniela: Es por lo general la estructura con la que se le reconoce al plan de clase, por
125 ejemplo, bueno pues a mí me sirven para darme cuenta cómo voy a iniciar, con qué voy a
126 empezar, con esto y luego esto, y luego ya el desarrollo, en todo el desarrollo qué voy a
127 estar haciendo; para cerrar, la actividad de cerrar me tiene que abarcar todo lo que hice
128 desde el inicio y en todo el desarrollo; con estas tres partes es fácil identificar primero esto,
129 y luego esto.

130 E: ¿Está la situación didáctica dentro de todo esto?

131 Daniela: [...] está la situación didáctica.

132 E: ¿Cómo se hace presente?

133 Daniela: Por ejemplo, la situación didáctica se empieza [...] bueno parte de acomodar el
134 medio y luego los conocimientos previos.

135 E: ¿Y eso dónde está?

136 Daniela: Se incluye en el inicio, que es la parte que menciono que también señalo ahí,
137 después comienza con el desarrollo, ya sería el planteamiento inicial y se dan las pequeñas

138 actividades que ya le había mencionado, se da el planteamiento en el desarrollo y después
 139 las actividades que no corresponden a una situación didáctica, pero que se incluyen como a
 140 manera de ver qué pasa, para ver si se favorecen los aprendizajes de los alumnos; en lo que
 141 es la socialización, validación y, finalmente la institucionalización, se centran en lo que es
 142 la etapa de cierre en la planeación.

143 E: Ok. Aquí sería interesante agregar en cuántas sesiones se van a trabajar estas actividades.
 144 Daniela: Abarcaría dos sesiones, porque cuando inicio con el rescate de los conocimientos
 145 previos es un tiempo mínimo el que se utiliza, creo que se abarca en 10 minutos al inicio,
 146 en la resolución del planteamiento inicial nada más se les da 15 minutos a los alumnos,
 147 pero, por ejemplo, para el desarrollo de la pequeña secuencia didáctica, después del
 148 planteamiento sí necesitan de tiempo, es como si fuera [...] bueno para esa primera
 149 secuencia didáctica como la mitad de una sesión. Entonces para toda la situación didáctica,
 150 así como está diseñada, el grado de complejidad del tema que se aborda necesita de dos
 151 sesiones.

152 E: Entonces en tiempo aproximadamente, ¿cuántos minutos se aplicaría?
 153 Daniela: Serían entre una hora y media y dos horas.

154 E: Hace algunos momentos comentamos, en términos generales, algunas actividades del
 155 plan de clase, ahora sería interesante comentar en cuáles materiales se apoyó para diseñar
 156 estas actividades, de dónde surgieron o si usted las diseñó.

157 Daniela: En la descripción de la situación didáctica que hace Panizza sobre las fases y en
 158 qué consiste cada una. Para el desarrollo y diseño de las actividades a implementar me basé
 159 en lo que fue el programa de estudios y el libro para el alumno desafíos matemáticos y
 160 algunos fueron diseñados de mi persona. Partí de lo que son las competencias, del eje que
 161 se aborda aquí y del aprendizaje esperado, sobre todo, traté de plantear las actividades que
 162 llevarán a lograr estos tres aspectos. Sobre todo que cómo es el tema de las fracciones para
 163 que se les presente a los alumnos de una manera más fácil.

164 E: ¿Y qué dicen los materiales de estudio, por ejemplo, los programas de estudio sobre lo
 165 que deben de aprender de fracciones en quinto grado?

166 Daniela: Dicen que, por ejemplo, si esa información está dentro del sentido numérico y
 167 pensamiento algebraico, dice que abarca lo que son los problemas matemáticos y entre ellos
 168 los fraccionarios, el niño ya debe de establecer la relación entre, por ejemplo entre las
 169 operaciones que se hacen con las fracciones: suma, resta, multiplicación y división, pero
 170 que no las deben de ver de manera aislada, sino que lo deben de relacionar a situaciones
 171 que estén contextualizadas y que mejor que en problemas de matemáticas, relacionados a
 172 una situación.

173 E: ¿Qué otras cuestiones pueden ver los alumnos en relación a fracciones?

174 Daniela: Ven por ejemplo, cuánto es la fracción, lo que es de un todo y luego ya la fracción
 175 en cantidades, por ejemplo de 500 cuánto es un cuarto, un octavo; establece sobre todo la
 176 relación de la fracción con el porcentaje y la fracción como repartición de [...] que sería la
 177 división.

178 E: En la parte del inicio hay un fragmento donde dice: “hay que considerar las posibles
 179 dificultades a las cuales se enfrentarán al momento de resolver los problemas. Se puede
 180 presentar que los alumnos no establezcan la relación entre las dos cantidades que se están
 181 comparando. Confusión de lo que representa una fracción y una razón”. Y aquí la pregunta
 182 es ¿por qué cree que se pueden presentar estas dificultades en los alumnos?, ¿a qué se
 183 debe?

Daniela: Puede deberse a que no establezcan la relación entre las dos cantidades, por ejemplo, a que no conocen lo que es la [...] (borra el pintarrón) que se les dificulte entender que este pastel, bueno va a estar partido en cuatro (círculo dividido en cuatro partes), que este pastel para cuatro niños les va a tocar de un cuarto (escribe un cuarto) y, por ejemplo, cuando se vea en forma de razón, que de uno a cuatro [...] (lo representa 1:4) un pastel para cuatro, si se entiende que es un pastel para cuatro niños, pero se pueden confundir cuando dicen pero es que a un niño le va a tocar nada más un cuarto, bueno la dificultad va a estar en pasar la fracción a lo que es la razón (señala $\frac{1}{4}$ - 1:4). Si tienen un cuarto para un niño van a decir es nada más un pedacito de pastel pero, por ejemplo, aquí me está diciendo que un pastel entero para los cuatro niños, cuál es la relación entonces. Aquí lo que realizaría es explicarles que un pastel es para cuatro niños, pero que a cada niño le va a tocar un cuarto y, por ejemplo, que cuatro cuartos van a constituir lo que es un entero (los cuatro cuartos que escribe los relaciona con el uno de la razón que escribió anteriormente).

E: ¿Por qué cree que surge esa dificultad?

Daniela: Considero yo que puede surgir porque anteriormente a los niños no se les dio la base de [...] no ven a la fracción en problemas de repartición, por ejemplo un entero para 6 niños (dibuja un rectángulo y escribe el número 6) de a cuánto les toca. Entonces como que se les dificulta dividir y más si abordaron el tema de la división de fracción empezando con un $\frac{1}{6}$ entre $\frac{1}{5}$ (lo escribe), aquí no establecen la relación. Entonces abordaron la fracción como la fracción en división en simple operación, pero no lo llevaron a operaciones concretas (señala las representaciones gráficas que tiene en el pintarrón).

E: ¿Cómo podemos definir en su caso la razón y la fracción?

Daniela: La razón la definiríamos como la comparación de dos cantidades, pero estas cantidades están relacionadas. Por ejemplo, en el último planteamiento “Tiras de papel”, se explica está una tira de papel dividida en nueve cuadritos y tres cuadritos están oscuros. Aquí se hace la comparación de que en una tira de papel hay tres cuadritos oscuros (escribe: 1:3), esa sería la razón. Entonces si yo tengo dos tiras de papel, por lo tanto, van a ser seis cuadritos oscuros (escribe: 2:6) porque en cada tira de papel hay tres. Realizo la comparación de esto (señala 1:3) y ya en fracción lo que se menciona es cuánto ocupan estos tres cuadritos dentro de la tira de papel, por ejemplo, sería $\frac{9}{9}$ (escribe: $\frac{9}{9}$) y están ocupados lo que son tres cuadritos. Si le quitamos aquí lo que son los tres oscuros quedan $\frac{6}{9}$ (lo escribe) y más $\frac{3}{9}$ (lo escribe). Si simplificamos $\frac{3}{9}$ sería $\frac{1}{3}$ (lo escribe), un tercio ocupa [...] de esa tira de papel (señala el 1 de 1:3) un tercio está ocupado por esos tres cuadritos que hay en cada tira de papel.

E: Y si le dijéramos a ver demuéstrenos por qué es una razón y por qué es una fracción, ¿le agregaría alguna otra cosa a lo que aquí está diciendo?

Daniela: Sí, sería una razón porque aquí tengo, por ejemplo, mi tira de papel y hasta aquí está dividida en 9 partes (dibuja un rectángulo y lo divide en novenos, pero solo marca tres). Es una razón porque si yo pongo otra tira de papel (la dibuja dividida en 9 partes y sólo sombrea 3) y luego pongo otra (dibuja otra tira de papel con las mismas divisiones). Es una razón porque en cada tira de papel cuántos cuadritos va a haber oscuros: tres, en razón de uno son tres. Entonces está razón (señala 1:3) me va a ayudar para obtener las otras cantidades. Por ejemplo, por eso al inicio le decía que este tema se relaciona también con lo que es la proporcionalidad, porque la razón dentro de la proporcionalidad se ve como la constante, en este caso, estos tres cuadritos son (señala los nueve cuadritos oscuros en los tres rectángulos) la constante de proporcionalidad que aquí se traduce como razón. Por eso, si tenemos tres tiras de papel van a ser 9 cuadritos (escribe 3:9) y se van a comparar las

231 cantidades en razón de qué, de uno a tres (señala 1:3) y ésta razón (1:3) me permite sacar
232 otras cantidades, por ejemplo, si es de 4 tiras de papel a 12 (escribe 4:12) en razón de qué
233 [...] de este primero (señala 1:3).

234 E: ¿Y cómo se le llamaría a estas dos cantidades que acaba de poner, estas dos razones?

235 Daniela: A estas dos razones (señala 3:9 y 4:12) [...] es la relación entre [...] en 3 tiras hay
236 9 y en 4 hay 12, ¿cómo se le llamaría? Por ejemplo, lo que [...] bueno se hace en tablita:

1	3
3	9
4	12

237 pues a esto se le llamaría lo que son los resultados, por ejemplo, si se ve de manera
238 proporcional, si se establecen las relaciones empezando por el valor unitario, sería uno
239 (escribe 1) y pues ya el valor unitario nos va a poder dar lo que son estas (señala las dos
240 últimas filas de la tabla). [...] el nombre que les daría depende del problema que estuviera
241 relacionado, por ejemplo, se podría relacionar que en una caja hay tres chocolates. Entonces
242 en tres cajas cuántos hay. En estas podríamos manejarlas como incógnitas (borra el nueve
243 de la tabla).

244 E: ¿Y cuál es la relación del valor unitario con la razón?

245 Daniela: La razón del valor unitario es que el valor unitario se puede representar como
246 razón y si sacamos la razón tenemos el valor unitario (señala 1:3), como quien dice es lo
247 mismo, pero se interpreta de diferente manera, y ya pues el valor unitario y la razón
248 también podríamos decir que es la constante de proporcionalidad.

249 E: ¿Y esto a qué tema nos introduce entonces?

250 Daniela: Lo que es la constante de proporcionalidad [...]

251 E: La razón

252 Daniela: Bueno ya cuando la razón se ve como una fracción (borra el pintarrón) [...]

253 E: Antes de que avancemos, para cerrar eso [...] dijimos cómo definiríamos una razón,
254 cómo argumentaríamos, cómo demostraríamos qué es una razón y, cómo demostrar qué es
255 una fracción.

256 Daniela: Bueno, cuando es una fracción, sería de manera gráfica (dibuja un rectángulo
257 dividido en nueve partes y sombrea tres) [...] ya dijimos que en una tira de papel hay tres
258 cuadritos, pero qué espacio del total de esa tira de papel ocupan esos tres cuadritos oscuros,
259 aquí es cuando se saca si son nueve partes el entero va a ser nueve novenos (escribe 9/9) y
260 como son tres novenos, tres de ellos están ocupados por los cuadritos oscuros, entonces
261 serían tres de los nueve (escribe 3/9) y si lo simplificamos quedaría un tercio (escribe 1/3);
262 un tercio de esta tira ocupan estos tres cuadritos (señala en el rectángulo). Es como otra
263 manera de representar lo que es la razón. La razón es la comparación entre las dos
264 cantidades (señala 1:3); esta es la diferencia, por ejemplo, cuántos cuadros sombreados le
265 corresponden a cada tira (señala tres rectángulos dibujados) y, la fracción, me va a estar
266 representando el espacio que se ocupa en función del entero. Aquí hay que tener mucho
267 cuidado cuando se está dando ese tema a los niños porque como manejan los mismos
268 números 1-1 3-3 (señala 1:3 y 1/3) puede haber confusiones qué es una razón y qué es una
269 fracción. Por eso, en el planteamiento tres, se buscó que primero empezaran de uno (señala
270 1/3) y vean la manera en que se puede pasar a otro (señala 1:3) y que se puede representar
271 lo mismo pero se lee o se interpreta de otra manera.

272 E: Avanzando un poquito, en el apartado del inicio del plan de clase, usted se pregunta qué
 273 procedimientos pueden utilizar los alumnos, luego dice es probable que se recurra a la
 274 división y a la multiplicación, por qué a estas dos operaciones.

275 Daniela: La división porque se está repartiendo, en lo que es el primer planteamiento y, lo
 276 que es la multiplicación, porque en el problema central, lo que les estoy pidiendo a los
 277 alumnos es que interpreten que, si en cuatro cajas se empacan sesenta y cuatro lechugas,
 278 para cuatro cajas son 64 lechugas. Entonces, para saber cuántas lechugas van en una caja,
 279 pues se haría lo que es la división, por eso digo que pueden recuperar esta división. Ahora,
 280 con respecto a la multiplicación se voltean las incógnitas, se voltean las variables en el
 281 problema; ya sería si en una caja tengo dieciséis lechugas, cuántas ocupo para llenar [...]
 282 por ejemplo, las otro cuatro cajas; a partir de eso se desprende lo que es la fracción y luego
 283 que lo den a conocer como un razón. Por eso pueden utilizar lo que es la multiplicación y la
 284 división.

285 E: Adelante de eso, usted dice que los alumnos pueden expresar una forma de la fracción
 286 no simplificada, por lo que hay que inducirlos para que lo hagan, ¿por qué inducirlos si no
 287 lo hacen?

288 Daniela: Porque por ejemplo, ya se tiene la razón (1:3) de la tira de papel, ahora dicen pero
 289 qué parte de esta tira de papel está ocupado por los cuadritos oscuros. Entonces aquí como
 290 le dije de nueve pueden poner $\frac{3}{9}$, pero para que encuentren la relación entre la fracción y
 291 la razón (señala 1:3), la fracción tiene que estar simplificada, porque si no este tres (señala
 292 el $\frac{3}{9}$) no va a corresponder con el 1 (lo señala de 1:3) y este nueve con el tres. Entonces se
 293 tiene que inducir a esa simplificación, que sería un tercio, para que encuentre la manera de
 294 representar lo mismo en lo que es la fracción y la razón (señala $\frac{1}{3}$ - 1:3) pero que se
 295 interpreta de manera diferente y si lo ven así $\frac{3}{9}$ a la mejor no van a entender que es $\frac{1}{3}$ o
 296 que en 1 son 3, van a decir 3 son 9 y no van a encontrar esa relación de 1 para 3 (1:3). Por
 297 eso simplificarlo, porque en la razón la fracción se traduce a manera simplificada.

298 E: Después de eso, en el inicio de su plan de clase dice que va a comenzar a abordar la
 299 representación de fracciones con figuras geométricas y unidades de medida como mililitros;
 300 ¿por qué abordar la representación de fracciones con lo anterior? En términos generales
 301 comentarlo, aunque ya había citado algo.

302 Daniela: Bueno, en el primero con figuras geométricas para saber si relacionan estas
 303 representaciones (señala los círculos) con su fracción en forma numérica y, la segunda, con
 304 mililitros porque, por ejemplo, en el problema principal lo que se aborda es volumen,
 305 porque por ejemplo, son 16 lechugas para una caja. Ahora, qué parte de esa caja ocupa cada
 306 lechuga, como quien dice se va a medir el volumen en la caja, por eso en los mililitros,
 307 pues siempre se va a utilizar el valor de volumen, por eso lo manejo, para ver si tienen un
 308 poquito de conocimiento de relación entre las fracciones y la noción de volumen, si es para
 309 conocer lo de los conocimientos previos.

310 E: Y avanzando en ese sentido, ¿por qué el problema principal de la hoja 1 surge en este
 311 contexto, es decir, en el de las lechugas?

312 Daniela: Porque los niños son de una escuela de la cabecera municipal de Loreto,
 313 Zacatecas. Muy cerca de la cabecera está una empacadora de lechugas, entonces los niños
 314 tienen más conocimiento de que han visto a los lechugeros [...] por eso, así se va a
 315 empezar la clase, para platicar sobre los lechugeros, si conocen una empacadora cerca; el
 316 propósito es se contextualice el problema. Así, se utilizan estos recursos para que los niños
 317 los relacionen con algo de su comunidad.

318 E: ¿Cuáles son los contextos que cree más apropiados para favorecer la enseñanza de la
 319 razón como fracción aparte de lo de las lechugas?

320 Daniela: Los contextos [...] bueno eso es donde se relaciona el alumno. En el
 321 planteamiento uno, se plantea con la repartición de pasteles, los niños están muy en
 322 contacto con las rebanadas de pastel. En el planteamiento dos donde hago mención de
 323 caritas y corazones es como relacionar cantidades de estampitas que ellos a veces manejan
 324 y con las cuales están relacionadas para hacer reparticiones. Bueno [...] las fracciones se
 325 deben de encontrar en cualquier parte, nada más sería como darle el enfoque o la relación a
 326 una fracción, por ejemplo, también cuando manejan dinero; dame la mitad de lo que traes o
 327 ahora me vas a dar [...] aunque no es muy común que digan te voy a dar tres cuartos de lo
 328 que yo tengo, pero siempre si se manejan entre partes de un todo y, mientras manejen eso,
 329 los niños van a estar muy relacionados con las fracciones. Lo importante aquí es aterrizar
 330 esa relación.

331 E: ¿Cuáles cree que serán los procedimientos y estrategias que emplearán los niños para
 332 resolver la actividad 1 o el problema central como usted lo denomina en el plan de clase?

333 Daniela: Como estrategia utilizarían lo que son las operaciones aritméticas, de
 334 multiplicación y división y, como procedimiento, debido a que hago mención de cajas y
 335 lechugas, pueden hacer los dibujos. Entonces sería gráficamente o con operaciones, aunque
 336 también por la serie de preguntas que se les hacen, puede que los niños realicen una tablita
 337 [...].

338 E: ¿Dónde cree que pueden realizar una tablita? ¿Para cuál de estas preguntas?

339 Daniela: Para la primera pregunta, porque dice si en 4 cajas empacan 64 lechugas ¿cuántas
 340 cajas se ocuparán para empacar 120 lechugas? Realizarían una tablita porque puede que los
 341 niños busquen el valor unitario para encontrar en una caja cuántas lechugas hay y, ahora,
 342 una caja son estas [...] y cuatro caja son estas [...], pero en 112 lechugas, cuántas cajas van
 343 a ser. A partir de la tablita pueden establecer una relación y el procedimiento de estrategia
 344 que utilicen sería la regla de tres.

345 E: ¿Las otras preguntas también se contestarían con esa tablita?

346 Daniela: Si, por ejemplo, la segunda ¿cuántas cajas se ocuparán para 32 lechugas? Pueden
 347 incluir lo que es también la tablita. Luego dice, qué parte de la caja corresponde a una
 348 lechuga. Ahí es para que los niños lo pongan de manera de fracción, por ejemplo, si en una
 349 caja hay 16 lechugas, 1 lechuga qué parte de la caja va a ocupar. Ah pues un dieciseisavo
 350 que es a lo que se quiere llegar.

351 E: En la última pregunta, ¿qué cree que los niños realicen para contestarla?

352 Daniela: La última pregunta si va a estar un poquito difícil para ellos, porque a lo mejor no
 353 van a estar muy familiarizados con el concepto de razón, va a preguntar y la razón qué es.

354 E: Y ¿qué les explicaría?

355 Daniela: Dice cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas. Cuando lo estén
 356 resolviendo no se les va a explicar nada, se les va a decir contéstalo como tú puedas, con lo
 357 que tú sabes.

358 E: Y cómo cree que lo van a contestar con lo que ellos puedan, qué respuestas le darán.

359 Daniela: A lo mejor [...] eh cuál es la razón entre (da lectura) las cantidades de cajas y de
 360 lechugas [...]

361 E: ¿Qué procedimiento, qué estrategias cree que van a emplear los niños para encontrar la
 362 respuesta?

363 Daniela: Yo pienso que ahí los niños ni siquiera van a hacer el intento de realizar un
 364 procedimiento, porque si no entienden razón, no van a saber si voy a dividir, voy a

365 multiplicar, voy a restar, voy a sumar, porque siempre se da con base en una operación
366 cualquier pregunta de un problema de matemáticas [...]
367 E: ¿Cuál respuesta le darían los niños?
368 Daniela: A lo mejor dirían que para una caja son dieciséis lechugas, bueno, que eso sería la
369 respuesta, pero, por ejemplo, en una caja caben 16 lechugas o en 4 cajas son 64 lechugas...
370 E: ¿Usted qué respuesta quiere para esa pregunta?
371 Daniela: Podrían establecer relación entre las preguntas anteriores [...]
372 E: ¿Y cuál sería la respuesta correcta a esta pregunta?
373 Daniela: Para una caja son 16 lechugas, pues ya la manera de representarlo de ponerlo en
374 fracción, pues que una lechuga ocupa un dieciseisavo de la parte de la caja.
375 E: Dijimos que las anteriores serían algunas dificultades de los alumnos y, respecto a estas
376 preguntas, ¿cuáles cree que pueden ser algunas fortalezas o habilidades que tienen los
377 niños?
378 Daniela: Por ejemplo, cuándo dice que parte de la caja corresponde a una lechuga, yo
379 pienso que una de sus fortalezas, que ya está muy desarrollada es [...] que empiezan a ver
380 las fracciones, se utiliza mucho este método que es a partir del dibujo, de forma de las
381 representaciones gráficas. Entonces, puede que lo utilicen, pero en el problema no se le
382 facilita mucho al niño realizarlo y que le puede ayudar a encontrar la repuesta para la
383 penúltima y última pregunta [...] por eso surgió mi idea de darles a los niños los siguientes
384 tres planteamientos, los que se les dan después del problema central para que puedan
385 entender lo que es la razón [...] esto lo puedo resolver así y establecer una relación entre
386 una y otra; porque si me preguntan cuál es la razón [...] se termina lo que es la fase de
387 acción y se van a la formulación y validación y no llegan a lo que es esta respuesta de la
388 razón, yo al momento de institucionalizar se los voy a explicar así (señala 1:3), pero no lo
389 van a entender, se les va a hacer difícil. Entonces por eso los tres planteamientos
390 posteriores para que digan a la razón es esto y me sale por esto; los planteamientos están
391 muy sencillos para que puedan encontrar razón y fracción.
392 E: Entonces si los niños ya hicieron la actividad, se la entregan, ¿cuando terminen se va a
393 quedar así con la hojita contestada?, ¿sin validar?
394 Daniela: No, si va a haber la validación cuando hacen la actividad y luego desarrollamos las
395 otras actividades posteriores [...]
396 E: Pero, ¿en cuanto terminen las otras actividades se va a validar o se siguen con los otros
397 planteamientos?
398 Daniela: ¿Cuando termine esa actividad?
399 E: Si
400 Daniela: Es que esa actividad principal se va a contestar primero y luego van a hacer los
401 planteamientos posteriores y se va a volver a retomar esa actividad.
402 E: ¿En qué momento?
403 Daniela: Después de haber resuelto los tres planteamientos se va a retomar esa actividad, se
404 les va a decir a los alumnos que ahora con el cuadro comparativo que hicieron vuelvan a
405 resolver el problema central con lo que ahora ya saben y ya se hace el procedimiento.
406 Ahora en lo que es el momento de validación, los alumnos van a compartir cuál fue su
407 procedimiento antes y su procedimiento después, así como sus repuestas de antes y sus
408 repuestas de después. Si todavía coinciden o en qué han cambiado. Por eso se retoma en el
409 cierre.
410 E: Entonces, los alumnos lo contestan como ellos pueden y se queda y se continúa con los
411 otros tres planteamientos. Después de esto, nos vamos a los planteamientos que vienen, son

412 tres. En sentido, realizaríamos las mismas reflexiones, si nos ubicamos en el planteamiento
 413 uno, en términos concretos, cuáles serían los procedimientos y cuáles serían las estrategias
 414 que emplearían los alumnos para resolverlo.

415 Daniela: Primero dice un pastel es repartido a 4 niños, ¿qué parte del pastel le toca a cada
 416 niño? Se le está dando un poco de ayuda al niño, porque tiene dibujados dos círculos y
 417 puede utilizar esto como referencia de pastel. Entonces la estrategia que utilizaría es dividir
 418 los círculos y poner en cada parte del pastel que a un niño le tocaría un cuarto y luego
 419 cuando se les pregunta, que ahora son ocho niños, pero les va a tocar la misma cantidad de
 420 pastel que a los cuatro niños anteriores, entonces ¿cuántos pasteles serían? Aquí pueden
 421 utilizar la operación de la multiplicación, nada más se multiplicaría por dos o si todavía no
 422 llegan a ese tipo de procedimiento, también se les da otro circulito donde pueden dividir en
 423 cuatro partes y establecer “a para los ocho niños”, si les toca la misma cantidad de pastel
 424 van a ser dos pasteles y después se les pide que organicen esas dos respuestas, que las
 425 estructuren que encuentren la relación, por eso se pone una tablita [...] dice número de
 426 pasteles 1, luego número de niños 4; número de pasteles 2 y número de niños 8, tomando
 427 en cuenta que a cada niño le va a tocar la misma cantidad de pastel y luego se empieza en el
 428 cuadrito azul que está en la parte final de ese primer planteamiento de un pastel para [...]
 429 cuántos niños [...], para dos y dos pasteles para cuántos niños, para ocho, porque se
 430 empieza con lo que es la comparación entre cantidades, donde se les empieza a dar la
 431 noción [...] bueno es la base para entender la razón; a ver si dos pasteles para ocho niños,
 432 un pastel para cuatro niños, tomando en cuenta que esto es la misma cantidad.

433 E: ¿Cree que los niños tengan algunas dificultades en la resolución del planteamiento 1?

434 Daniela: No, porque a partir de los conocimientos que ya tienen los niños tomando y el
 435 grado en que están sería muy fácil. Yo pienso que no habría dificultades, pero la parte
 436 nueva que se les presenta es la comparación que se hace al final, es como un primer
 437 antecedente.

438 E: ¿Y cree que puede haber dificultades?

439 Daniela: No, tampoco porque un pastel para cuántos niños, para cuatro; por eso, se les pone
 440 la tablita para que establezcan esa relación y para que no tengan dificultades.

441 E: En este sentido, ¿cuáles son las fortalezas que tienen los niños respecto a esta actividad?

442 Daniela: En lo que es este planteamiento, las fortalezas que tienen los niños es que ya saben
 443 dividir gráficamente o repartir los pasteles, porque es un reparto muy simple que desde
 444 tercero se aborda.

445 E: Entonces, donde se menciona que un pastel es repartido en cuatro niños ¿qué parte del
 446 pastel le toca a cada uno?, ¿cuál es la respuesta correcta?

447 Daniela: Sería $\frac{1}{4}$ y en el siguiente dos pasteles (da lectura al enunciado al que responde esta
 448 pregunta).

449 E: ¿Y en la tablita?

450 Daniela: Número de pasteles es uno y número de niños 4; número de niños 8 y números de
 451 pasteles 2.

452 E: Para llenar esa tabla, ¿qué realizarán los niños?

453 Daniela: Van a recurrir a las preguntas de los dos planteamientos anteriores donde se va a
 454 trabajar la división y el reparto de pasteles.

455 E: Y en el caso del planteamiento dos, ¿cuáles cree que serán los procedimientos y
 456 estrategias que emplearán los niños para resolverlo?

457 Daniela: Antes de llegar al planteamiento 2, la parte que considero importante del
 458 planteamiento 1 [...] el elemento que se rescata y que es el que les va a servir para contestar

459 el problema central, es que se haga la comparación de las cantidades que no pase de un
 460 pastel para los cuatro niños y de dos para los 8 niños. Ahora se pasan a lo que es el
 461 planteamiento 2 de cajas y corazones.

462 E: ¿Cómo se van a trabajar los tres planteamientos?

463 Daniela: Se trabajan de manera grupal las tres actividades para que vayan al mismo ritmo y
 464 en cuanto tengas dudas aclararlas con los mismos compañeros. En lo que son caritas y
 465 corazones [...] Bueno, cuando me refiero a forma grupal se van a contestar las preguntas,
 466 quiero decir que vamos a leer la pregunta, pero ellos van a contestar cómo puedan, cada
 467 uno y ya después, se dan como pequeñas socializaciones y se valida. Se va dando de
 468 manera guiada pero no contestando entre todos, por ejemplo, es 8 y todos pónganle 8, no
 469 así no, si no que cada niño lo reflexione. En el problema 2 “caritas y corazones”, dice:
 470 “cuántos corazones hay en el rectángulo”, aquí tampoco van a tener dificultad porque en
 471 ese espacio se les está dando la cantidad de corazones dibujados y las caritas también; lo
 472 que se quiere lograr es que los niños reconozcan este símbolo (señala :) para representar las
 473 razones [...] porque en fracciones ya sabemos que es la rayita aquí (señala $\frac{3}{9}$), pero para
 474 representar la razón se utilizan estos dos puntitos (señala : en el pintarrón). Entonces se les
 475 pone una situación muy simple de caritas y corazoncitos, pero con el único objetivo de que
 476 identifiquen esto dos puntitos para representar las razones. Por eso se les pone un cuadrito
 477 de “para saber más...”

478 E: ¿Cuál cree que es el procedimiento que van a seguir los niños para contestar esto?

479 Daniela: Por ejemplo, dice cuántos corazones hay en el rectángulo, los van a contar, van a
 480 empear técnicas de conteo y en cuántas caritas, lo mismo. Enseguida dice: si los corazones
 481 se les repartirán el número total de caritas, cuántas caritas quedan en cada corazón; aquí
 482 pueden utilizar lo que es de manera gráfica, pongo mis cuatro corazones y mis ocho caritas
 483 y, primero de una en una se relacionan y así son dos caritas por cada corazón. Pero,
 484 considero que a lo mejor el procedimiento que van a utilizar es la operación convencional
 485 de la división, que sería de ocho entre los cuatro corazones les tocaría de a dos, pero,
 486 también como son niños de quinto pues lo van a hacer de manera mental, de manera
 487 mecánica, porque están muy relacionados con ese tipo de divisiones que son muy simples,
 488 de 8 entre 4 dos, por lo cual no les va a representar dificultad.

489 E: ¿Y para llenar la siguiente actividad del planteamiento dos? Dice “en el rectángulo
 490 hay...”

491 Daniela: Las caritas y los corazones están dentro de ese rectángulo, ahora se va a tomar en
 492 cuenta ese rectángulo como un entero y van a contar. Entonces se agrega el cuadrito en
 493 blanco y luego dice corazones, cuántos corazones: cuatro; para que vayan poniendo cuatro
 494 corazones para cuántas caritas, para ocho caritas; ahí se hace la comparación de lo que es la
 495 razón, se hace el enunciado de cómo se lee la razón.

496 E: Entonces, ¿en el rectángulo sería cuatro corazones para ocho caritas? ¿Y en la parte de
 497 abajo?

498 Daniela: Sí y en la parte de abajo ya no sería poner un enunciado, sino por la simple
 499 representación (señala $1:3$), se bajaría el 4, los dos puntos y 8; serían 4 para 8; ahora el niño
 500 va a decir, pero por qué esos dos puntos, para qué y, para eso está lo que es el recuadro de
 501 información.

502 E: ¿Usted qué les diría si le preguntan para qué son esos dos puntitos aunque hayan leído?

503 Daniela: Por ejemplo, tomaría la fracción $\frac{1}{3}$ y les preguntaría, ¿cómo sabemos que esta es
 504 una fracción?, van a contestar porque tiene la rayita (señala $\frac{1}{3}$) y les voy a decir que así
 505 como nos sirve la rayita para representar lo que es la fracción, también para representar este

506 tipo de comparaciones se utilizan estos dos puntitos, aunque todavía no lo voy a manejar
507 como razón. Ahora los niños van a tomar como referencia lo que es el cuadrado.
508 E: Y si le preguntan ¿maestra cómo se le dice: uno dos puntos tres?
509 Daniela: Está en lo que es el cuadrado, dice que se utiliza para indicar lo que es comparación
510 de dos cantidades y les voy a decir muy bien, ¿cómo se lee? Va a estar abajo el 4, los dos
511 puntitos y el 8. Si me preguntan cómo se lee, les voy a decir que tomen como referencia lo
512 que antes hicieron que sería: cuatro corazones para ocho caritas. Ahora si le quitamos la
513 palabra corazones y la palabra caritas sería: 4 para 8.
514 E: Entonces para que pueda existir el “para” ¿tienen que existir los dos puntitos aquí?
515 Daniela: Sí, para que se dé la comparación.
516 E: ¿Entonces asociaría esa palabra con los dos puntitos?
517 Daniela: En un primer momento sí, porque después las representaciones de manera
518 convencional se leerían 4 a 8.
519 E: ¿Y eso cuándo se los va a decir?
520 Daniela: Eso sería al final, en el tercer planteamiento, es que se empieza de lo menos
521 complejo a lo más complejo.
522 E: Entonces antes de avanzar al tercer planteamiento, para que nos platique cómo va a
523 hacer esa presentación, cómo va a introducir ese lenguaje, ahí nuevamente preguntaríamos,
524 ¿cree que tengan algunas dificultades los alumnos para resolver el planteamiento 2?
525 Daniela: No, no tendrían ninguna dificultad, aunque quizá si surgiría la duda de por qué
526 esos dos puntitos, porque sería nuevo para ellos y si sería nuevo porque en los libros para el
527 alumno no viene manejado ese símbolo, casi se maneja hasta lo que es en el nivel
528 secundaria.
529 E: ¿Usted de dónde sacó los dos puntos? ¿Por qué cree conveniente agregarlos?
530 Daniela: Por ejemplo, si nada más manejamos razones por simple enunciado, pues el niño
531 no va a entender y va a decir que va a ser como una manera de leerlo, pero considero que se
532 debe de agregar para que los niños diferencien de las fracciones.
533 E: ¿Cuáles son las fortalezas de los niños al resolver el planteamiento dos?
534 Daniela: Lo que es la operación de división y pues al momento de completar los espacios
535 en blanco, no habría mayor dificultad para ellos.
536 E: Del planteamiento 3, ¿cuáles son los procedimientos y estrategias que los alumnos
537 emplearían para resolver la primera pregunta “observa la siguiente tira de papel, ¿qué
538 fracción de la tira de papel ocupan los cuadrados oscuros?” ¿Qué respuesta darían los niños?
539 Daniela: Contarían el total de cuadrados que serían nueve y como dice qué fracción,
540 entonces van a representarlo y como están acostumbrados que son 3 y son 9. Entonces dirán
541 son tres novenos ($3/9$), por eso lo importante de introducirlos a la forma simplificada de las
542 fracciones, aunque aquí no tendrían tanta dificultad porque se les está poniendo de manera
543 gráfica.
544 E: Y luego dice, ¿cuántas tiras de papel hay? Aquí, ¿qué cree que le contestarán los
545 alumnos?
546 Daniela: Puede que contesten que hay nueve porque son los nueve cuadrados, pero desde la
547 primera indicación dice “observa la siguiente tira de papel”, es decir, que nada más hay
548 una. Y luego dice cuántos cuadrados oscuros hay en la tira de papel; aquí pueden contar
549 cada uno de los cuadrados y señalar que son tres y, si se relacionan esas dos cantidades, si en
550 la primera respuesta dieron $3/9$ van a poder llegar a la manera simplificada que son $1/3$.
551 E: Pero, ¿aquí pide simplificar?
552 Daniela: No, por eso se menciona que se va a inducir a la simplificación.

553 E: Donde dice: **en** ¿qué se va a escribir?

554 Daniela: Se va a escribir en una tira hay tres cuadritos oscuros.

555 E: ¿Cree que los niños contesten de manera inmediata?

556 Daniela: Si porque ya tienen la experiencia previa del planteamiento 2, donde también

557 llenaron los espacios en blanco.

558 E: Y en la parte de abajo qué cree que contesten, porque ahí no se encuentra ninguna

559 indicación (lee en una tira hay, pero luego están las flechitas).

560 Daniela: Van a bajar lo que es la información, bueno los números, algo parecido a lo que ya

561 hicieron anteriormente, por lo cual no tendrán dificultades. Entonces bajarían el 1 y el 3.

562 E: ¿Cree que los niños tengan algunas dificultades en el planteamiento tres?

563 Daniela: Yo pienso que no, la pregunta que se me hace un poquito más complicada es la

564 primera (¿qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros?), pero con el dibujo

565 que se pone los niños no van a tener problemas. Ahí lo utilizo como un antecedente antes

566 de pasar a la fracción, porque ya se vieron dos razones, lo que fue el planteamiento 2 y este

567 que es el planteamiento 3 en donde se están viendo razones, pero ahora sigue la fracción.

568 E: En el planteamiento 3, ¿existe un momento donde señala este nuevo lenguaje de decir

569 que los dos puntos se trabajen como “a”?

570 Daniela: Sí, en una tira de papel hay tres cuadritos oscuros, en el otro se manejaba **para** y

571 aquí se está manejando **a**. Entonces no específicamente va a ser para-a, sino por eso se va a

572 llegar a institucionalizar que se lee **1 a 3**, hasta el cierre.

573 E: ¿De qué manera cree que van a leer esto los alumnos cuando lo llenen?

574 Daniela: Van a leerlo quizá igual que el enunciado de arriba, que en una tira de papel hay

575 tres cuadritos ó pueden decir 1 a 3.

576 E: Después de este planteamiento sigue [...]

577 Daniela: Contestar la pregunta donde ya se relaciona el término de razón. Dice: contesta el

578 siguiente cuestionamiento: Es la comparación entre dos cantidades, que ya se estuvo

579 haciendo previamente, se puede representar mediante una fracción; ahí dice que puedo

580 decir que dos cantidades se relacionan mediante una fracción. Entonces la pregunta es:

581 cómo se le llamaría a la comparación que se hace entre esas dos cantidades, que se pueden

582 representar mediante una fracción. Entonces la respuesta correcta es razón.

583 E: ¿Qué cree que subrayen los niños?

584 Daniela: Fracción no, porque es lo que ya se está descartando en el planteamiento de la

585 pregunta, fracción no puede ser, suma tampoco porque no se estuvieron haciendo sumas.

586 Entonces el único término que les queda es razón y quizá no lo sacan porque ya lo conocen,

587 sino por lógica que es la única que les queda. Yo lo veo como una manera de introducir un

588 término nuevo a lo que es lenguaje de las matemáticas.

589 E: Entonces los niños la van a contestar [...]

590 Daniela: No porque conozcan el término, sino porque conocen los otros dos y no lo van a

591 relacionar con lo que les está diciendo. En la institucionalización se les va a decir que a esto

592 que acabamos de hacer (señala 1:3) se le llama razón.

593 En registremos los resultados es para que ahora si establezcan cómo se pueden representar

594 de diferentes maneras las cantidades en lo que es la fracción y la razón. Por ejemplo, en la

595 fracción, en el primer planteamiento del pastel quedaría un cuarto (escribe $\frac{1}{4}$) y en razón

596 sería de 1 a 4 (escribe 1:4). Ahí es en el momento que les digo que se puede leer de uno a

597 cuatro, lo cual van a representar con números y los puntitos.

598 E: ¿Cree que los niños de inmediato contesten esto?

599 Daniela: Lo de fracción ya lo tienen y lo de razón sólo sería indicarles que se fijen en la
600 respuesta que dieron al planteamiento uno, porque ahí también se manejan las dos
601 cantidades y que un pastel es para cuatro niños y les voy a decir “fíjense bien cómo
602 pusimos la razón: un pastel es para cuatro niños esa es la razón; ahora a cada niño cuánto
603 les toca del pastel: $\frac{1}{4}$, esa es la fracción, la fracción indica cuánto les toca de pastel y la
604 razón nos dice cuántos pasteles para cuántos niños”.

605 E: Entonces según comenta qué van a llenar primero los niños: ¿lo de razón o fracción?

606 Daniela: Primero van a llenar lo que es la fracción, porque en razón a lo mejor si van a
607 tener un poquito de dificultad porque apenas lo estamos viendo y pues se les va a pedir que
608 regresen al planteamiento anterior. En lo que sigue de caritas y corazones y como eso ya lo
609 representamos con puntitos, vamos a decir entonces la razón de caritas y corazones es esto.
610 Por ejemplo, cuatro corazones para ocho caritas (lo representa 4:8) y la que tenía arriba, la
611 de los pasteles sería un pastel para cuatro niños (1:4) y la fracción sería $\frac{1}{4}$. Entonces les voy
612 a preguntar a los niños muy bien, ahora cuánto sería en fracción (señala 4:8), yo sé que para
613 cuatro corazones hay ocho caritas, pero en fracción sería que los niños lograrán identificar
614 este como el numerador (señala el 1 de la razón 1:4 y lo compara con $\frac{1}{4}$) y este como el
615 denominador (señala el 4). Al establecer esa relación pueden sacar $\frac{4}{8}$ de 4:8. Ahora aquí
616 viene la importancia de que los niños establezcan la simplificación, pueden dejar la fracción
617 así (señala 4/8), pero si se simplifica quedaría $\frac{1}{2}$, una mitad de un corazón para cada carita
618 y, de manera gráfica (dibuja cuatro corazones y ocho caritas), serían un corazón para dos
619 caritas (divide el corazón en dos partes y cada una la relaciona con una carita y escribe 1:2)
620 [...] y entonces le quedaría un medio para éste y un medio para éste (señala la figura del
621 corazón y las caritas). Aunque veo más viable que lo mencionen de manera no simplificada
622 para que no se pierda de vista que son cuatro para ocho (señala 4:8) y luego un medio mejor
623 lo dejen como $\frac{4}{8}$. Sólo voy a pedir que lo simplifiquen en caso de que tengan una duda
624 sobre qué representa $\frac{4}{8}$, por ejemplo, si me preguntan maestra ¿esto a qué se refiere?, si
625 les voy a pedir que la simplifiquen y les voy a poner este ejemplo para que lo comprendan
626 de manera más clara (señala los dibujos de caritas y corazones en el pintarrón).

627 E: Comente en términos generales, qué van a realizar en el cierre.

628 Daniela: En el cierre se va a replantear lo que es la situación problemática central y los
629 niños van a verificar su procedimiento, pero a base de hacer otro y después conocer cuáles
630 son las respuestas de los niños, después de haber analizado estos tres planteamientos y de
631 conocer todo esto (señala lo escrito en el pintarrón). En el cierre se le va a dar un poco de
632 más enfoque a lo que es la última pregunta del problema central, por ejemplo, cuál es la
633 razón de la cantidad de cajas con respecto a la cantidad de lechugas.

634 E: ¿Y por qué retomar en el cierre la actividad inicial?

635 Daniela: Porque considero que con estos tres planteamientos los niños ya tienen más
636 elementos para poder resolverlo y, lo pongo hasta el cierre, para poder dar la
637 institucionalización de la razón. Bueno, la validación de los resultados de los
638 procedimientos y ya después institucionalizar y, que en la institucionalización y la
639 validación, no tenga que recurrir a explicar todo esto (señala lo escrito en el pintarrón) para
640 que puedan entender el problema.

641 E: Después de que contesten la hoja de trabajo del problema central, ¿cuáles cree que serán
642 las reflexiones a las que puedan llegar los niños en relación a la última pregunta?

643 Daniela: Lo que es la última pregunta [...] dice ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas
644 y la de lechugas? Pueden llegar a la reflexión de encontrar el valor unitario, de una caja es
645 para dieciséis lechugas, de una a dieciséis, o si no de dos a lo que son treinta y dos

646 lechugas, que es lo que se pregunta en el segundo cuestionamiento y pueden llegar a ese
647 tipo de reflexiones. Pueden decir “maestra entonces es como poner la cantidad de lechugas
648 que hay por cada caja y lo que representa la fracción es como un dieciseisavo”.

649 E: En términos generales, si va a institucionalizar, qué les va a decir respecto a qué es la
650 razón.

651 Daniela: La razón, les voy a decir que es la comparación de dos cantidades, de dos
652 números, pues ellos previamente lo vieron en lo que estaba en el cuestionamiento y en el
653 recuadrito que se les hizo. Es la comparación entre estas dos cantidades y es lo que me dice
654 cuánto corresponde para cada elemento, por ejemplo, cuántas lechugas le corresponden a
655 una sola caja y me permite comparar que una caja es para dieciséis lechugas, dos es para
656 treinta y dos y, así sucesivamente; además, que esa razón también representa lo que es el
657 espacio que ocupa la lechuga dentro de esa caja, un dieciseisavo [...] se utilizan los mismos
658 términos numéricos, aquí por ejemplo (señala en el pintarrón $1:3$ y $1/3$), que se lee y
659 representa cosas diferentes pero relacionadas, que vean diferente la razón y la fracción,
660 pero que son cosas que van relacionadas en la misma situación problemática.

661 E: ¿Cuándo va a introducir este lenguaje que los dos puntos se pueden interpretar como
662 “a”?

663 Daniela: Eso se les da cuando los niños están contestando la tablita que se puede leer, por
664 ejemplo, como en las tres situaciones se lee de manera diferente “para, hay”, que no
665 siempre se va a leer para o hay, si no que en términos ya más convencionales siempre se va
666 a leer 1 a 3 (señala $1:3$), aunque ya adaptada a cualquier situación problemática es uno para
667 tres, para entenderlo mejor. Pero convencionalmente es “a”.

668 E: ¿En la tabla les va a pedir que pongan 1, los dos puntos y, por ejemplo, 3?

669 Daniela: Si, y ya si ellos consideran poner cómo se lee.

670 E: ¿Cree conveniente que pongan cómo se lee o no?

671 Daniela: Sí creo que es conveniente, porque como es un signo que no han utilizado mucho,
672 a la mejor es la primera vez que escriban cómo se lee, porque si no después se van a
673 preguntar y esto cómo era y para qué me sirve.

674 E: Entonces si les pide que cómo se lee, ¿cuál es la respuesta que espera?

675 Daniela: Yo pienso que van a poner de 1 a 3, porque apenas se los había explicado. En caso
676 de que no, pues volvería a replantearles un ejemplo de uno de los planteamientos, este
677 pastel para estos niños y bien aquí estás diciendo que uno para cuatro, pero si ahora lo
678 representamos como una razón vamos a decir que es uno a cuatro, que es esto a esto.

679 E: Entonces usted los va llevar a que vayan a nombrarlo como 1 a 4. De todo lo planteado
680 anteriormente, ¿cuál cree que es la actividad medular?

681 Daniela: Es la parte final porque ahí me voy a dar cuenta si a los niños les sirvieron estos
682 tres planteamientos para reflexionar de cómo poder resolver la primera situación. Entonces
683 es la última parte en el cierre, pero es donde se retoma la actividad central e implícitamente
684 los tres planteamientos.

685 E: En términos generales, ¿cuáles cree que son los momentos que caracterizan los modos
686 en que los alumnos aprenden el significado de la fracción como razón?

687 Daniela: Primer momento, que tenga un significado claro de lo que son las fracciones, si no
688 entiende lo que son las fracciones va a ser muy difícil que aterrice en lo que son las
689 razones, pero se van a evaluar los conocimientos previos. Segundo momento, es llevarlos a
690 comparar entre dos cantidades, pero a través de una situación que implique fracciones.

691 E: ¿Qué papel tienen que desempeñar los alumnos para resolver esas actividades?

692 Daniela: Deben aplicar sus conocimientos previos y tomar en cuenta todos los referentes
693 que se les dan en el problema. Su papel va a depender del conocimiento que tengan sobre
694 las fracciones.

695 E: ¿Cuáles cree que son los modos o maneras en que se puede enseñar la fracción como
696 razón?

697 Daniela: A partir de la representación de cantidades de manera gráfica, porque si se les da
698 de “1 a 3”, luego quizá no van a entender de porque uno y por qué 3, y si se les pone
699 primero una tira tres cuadritos, si se llega a utilizar primero esto (señala las tiras) es una
700 manera de ver que se reconoce la fracción como parte de un entero, ahora vamos a lo que es
701 la razón [...] Bueno, si nada más se les enseña es un $1/3$; la razón de los cuadritos es de 1 a
702 3, no lo van a relacionar pronto. Entonces, la manera de abordarlo es a partir de lo más
703 concreto, de lo más tangible e ir a lo más abstracto, porque por eso a muchos se les hace
704 difícil las fracciones.

705 E: Aquí ¿cuál es el papel que juega el alumno?

706 Daniela: Pudiera parecer que es un papel pasivo porque ya se le están dando los elementos,
707 pero aunque se les dan no se les menciona cómo. Entonces desempeña un papel activo para
708 que el mismo establezca la relación entre la fracción y lo que representa gráficamente y,
709 que luego, lo lleve a representarlo con lo que son las razones.

710 E: ¿Qué se debe tomar en cuenta para planear una clase con un contenido como este?,
711 ¿cuáles momentos se deben de prever?

712 Daniela: Debe de tomar en cuenta lo que ya saben los alumnos, los conocimientos que
713 tienen, debe de considerar que a veces los niños no tienen muy claro el tema de las
714 fracciones y que al introducirlos al de las razones se van a confundir. Yo intenté planificar
715 la serie de estrategias pequeñas, que serían como tips para los niños para poder llevarlos a
716 descubrir cómo se traduce de una fracción a una razón a partir de los planteamientos.

717 E: En el caso de las matemáticas, ¿existen quiénes digan cómo se deben de enseñar? o
718 ¿Qué momentos debe de haber para favorecer un aprendizaje significativo en los niños?

719 Daniela: En matemáticas se señalan muchos momentos, por ejemplo, en la fase de acción es
720 un momento significativo para un alumno porque está trabajando de manera didáctica, pero
721 por ejemplo, en la fase de formulación se puede favorecer el conocimiento de otro alumno,
722 porque un compañero ya le explicó cómo realizó su procedimiento, entonces se puede
723 decir, pues se favorece exactamente en la validación o en la institucionalización porque el
724 alumno pone en juego su conocimiento de diferentes maneras, en diferentes momentos, en
725 cada uno es diferente.

726 E: ¿Estas fases de dónde vienen?

727 Daniela: Vienen de la teoría de las situaciones didácticas, la caracteriza su problema
728 principal, su situación problemática y se compone de fases, donde a partir de una misma
729 situación problemática se aborda de manera diferente, por ejemplo, en la acción, la manera
730 de abordar esa problemática es nada más el alumno sin intervención del maestro y ya lo que
731 es la validación se da de manera colaborativa, aquí si interviene el maestro, pero no de
732 manera directa porque es como un orientador, lo tomé en cuenta en el momento que
733 planificaba las tres actividades; esto no lo ubicaría en ninguna fase porque en la fase de
734 formulación los alumnos se comunican sus procedimientos, pero en lo que sería la
735 institucionalización tampoco, porque ahí también se deja que los niños trabajen por sí solos
736 y en lo que es la fase de validación tampoco, porque ahí no son únicamente los niños los
737 que están validando, sino que se están apoyando a partir de los ejercicios de los
738 planteamientos. Estas fases si las recomiendo para enseñar un contenido en matemáticas

739 porque a los niños se les presenta un reto o desafío, aunque a muchos niños se les va a
740 hacer aburrido porque no lo van a entender en el primer momento, y a otros niños les va a
741 gustar porque van a encontrar diferentes procedimientos y, las siguientes fases, permiten
742 que esos niños que no entendieron el problema lo hagan posteriormente y se crea un
743 aprendizaje significativo si lograron entender la resolución porque lograron vencer ese reto
744 que se les puso al principio de la clase.

745 E: ¿Cree que en la educación primaria el estudio de la razón como significado de la
746 fracción, es uno de los contenidos que más interesa a los niños?

747 Daniela: No, porque proviene de una materia que a muchos niños se les hace aburrida o
748 difícil las matemáticas.

749 E: ¿Por qué cree que a los niños se les hace aburrida o difícil?

750 Daniela: Porque a la mejor no se les implementan las estrategias que llamen su atención,
751 pero sobre todo porque algunos de los contenidos que se les enseñan de matemáticas sólo
752 consisten en resolver operaciones y no se les da una aplicación en la vida cotidiana, no las
753 contextualizan. Los procedimientos, las técnicas, los métodos, las operaciones
754 convencionales, los números a veces los niños no los encuentran necesarios, no tiene esa
755 necesidad de saber. Entonces no se les hace interesante y no les llama la atención. Quizá los
756 niños sólo manejan sumas y restas porque están en contacto con el dinero, pero por
757 ejemplo, en fracciones, no contextualizan, no las aterrizan a lo que es la vida cotidiana, no
758 las relacionan mucho. Entonces, existen dos razones principales, primero se les hacen
759 difíciles porque las ven así (señala $\frac{3}{9}$ y $\frac{1}{3}$) y no entienden qué representan, para qué eso;
760 segundo, no las contextualizan, no las aterrizan en su vida cotidiana y no le encuentran una
761 utilidad y por eso no tiene mucho significado. Puede ser que el niño si va a hacer el
762 esfuerzo por aprender las fracciones a través de problemas de fracciones pero sólo por
763 cumplir en la asignatura y no por otra cosa, por pasar un examen.

764 E: ¿En su plan de clase toma en cuenta estos comentarios que dice?

765 Daniela: Si los aterrizo en su vida y está muy presente en el planteamiento 1 porque el niño
766 está en contacto con la repartición de alimentos como los pasteles, las fracciones le sirven
767 para saber qué parte del pastel le toca a cada niño en una fiesta, cuántas rebanadas tengo
768 que ir preparando.

769 E: ¿Cuál es el conocimiento matemático que cree usted debe poseer un profesor para
770 enseñar este aprendizaje esperado a un grupo de alumnos en la escuela primaria?

771 Daniela: Debe conocer la fracción en todas sus representaciones, principalmente la fracción
772 como razón, la fracción representada en porcentaje, parte de un todo; las distintas
773 representaciones de las fracciones y más que nada tener muy claro este conocimiento
774 matemático en la vida del niño.

775 E: ¿Cuáles son los conocimientos que qué cree debe de tener un profesor acerca de cómo
776 aprenden los alumnos, en este caso la fracción como razón?

777 Daniela: Eso se relaciona con lo que es la construcción del conocimiento. Entonces la
778 situación didáctica tiene fases, cada uno de estos momentos contribuye al proceso del
779 conocimiento que los alumnos van teniendo para llegar a ese nuevo saber. Principalmente
780 debe de conocer lo que es las fases de las situaciones didácticas, porque de manera
781 implícita está la manera en cómo los niños van aprendiendo.

782 E: En toda la clase, ¿cuáles son los planteamientos que pueden resultar fáciles de resolver
783 para los alumnos?

784 Daniela: Cuando se les pide que representen cuántos corazones hay, cuántas caritas, al
785 momento de repartir el pastel en cuatro partes. Difíciles serían la penúltima y última

786 pregunta del problema central, cuando se les habla sobre cuál es la razón de [...] que sería
787 el de la hoja de trabajo 1, debido al término que se establece: la razón.

788 E: De manera personal, ¿cuál es su opinión sobre este significado de la fracción que está
789 abordando?

790 Daniela: La razón como significado de la fracción a simple vista se puede decir, las razones
791 para que me van a servir a mí, puede ser como un antecedente para abordar el tema de la
792 proporcionalidad o un factor que lleve a los niños a comprender mejor cómo sacar la
793 constante de proporcionalidad, del valor unitario, la importancia de tener la constante para
794 poder resolver problemas proporcionales, sobre todo cuando se hacen cuadros de doble
795 entrada, entonces cuando yo ya tengo la razón digo, por cada uno va a haber estos tantos y
796 multiplico por estos o divido (señala 1:3) para saber cuántos.

797 E: ¿Cómo se hace presente el enfoque de las matemáticas en su plan de clase?

798 Daniela: El enfoque de las matemáticas se hace presente desde el momento en que se inicia
799 la clase, cuando los niños por sí solos están construyendo, pero yo no diría que en toda su
800 totalidad, porque en algunos planteamientos se les está dando poquita ayuda a los niños,
801 pero se deben de tomar en cuenta las dificultades que pueden tener los niños para
802 entenderlo.

803 E: ¿Cuál es el enfoque de las matemáticas?

804 Daniela: Es que el niño resuelva problemas y los reflexione, se abarca en todos los grados
805 de la escuela primaria. En mi planificación se contribuiría en una mínima parte, pero a un
806 porcentaje alto de problematizar. Mi planeación sería parte para favorecer un 70% del
807 enfoque de las matemáticas que se debe de abordar en este grado, en la escuela primaria.

808 E: Para concluir, ¿cuáles son sus expectativas al aplicar este plan de clase?

809 Daniela: Es no tanto que el niño resuelva el problema que se está planteando al principio,
810 sino lograr que el niño reflexione ante lo que es el concepto de razón, tal y cual
811 numéricamente (señala 1:3) y que no lo vea aislado de las fracciones.

812 E: ¿Cree que con este plan de clase se logrará eso?

813 Daniela: Si lo favorece, pero quizá después de trabajar esta clase para los niños todavía
814 quedarían muchas dudas, problemas que resolver porque nada más es una clase y el
815 conocimiento debe de llevar un seguimiento, quizá no quedaría muy claro para los niños,
816 pero si se está intentando abordar lo que es la razón; en un primer momento, necesitaría de
817 volver a traducir la razón en otras situaciones problemáticas para que puedan llegar a
818 comprenderla. Si contribuye para iniciar al niño, a lo mejor esta planeación pide mucho de
819 que el niño llegue a comprender la fracción como razón, pero servirá como un antecedente
820 para posteriormente se le pueda seguir.

821 Reflexión adicional [...]

822 Daniela: Cuando comencé con el diseño de la planeación de este tema, lo que más se me
823 hizo difícil fue el momento de la transposición didáctica donde el maestro toma el
824 conocimiento y lo acomoda de manera que lo pueda dar a conocer al niño, como que si es
825 un poco difícil porque aunque no es un tema muy complejo, a veces uno no lo ve muy claro
826 cómo la razón puede ser parte de la fracción. Entonces es difícil al momento de diseñar los
827 problemas, analizar si van a entender esto o qué les pongo primero para que entiendan qué
828 es una razón. Por lo que el maestro debe de tener un dominio amplio de lo que es la
829 fracción como razón para poder dárselo a conocer a los alumnos. Si no hay un
830 conocimiento sobre el tema, no es fácil abordar este tema, porque a la mejor revisas que
831 estén bien planteados los problemas, pero quizá cuando un niño tenga alguna duda o
832 cuando se están manejando las respuestas de manera grupal y arrojen algunas respuestas

833 que son erróneas, no se va a contar con los elementos para decir que algo no puede ser y,
834 además, no se va a tener la ruta para guiar al niño cuando se vaya equivocando. Al conocer
835 cómo está estructurado el conocimiento del tema es más fácil llevarlo a planificación por
836 situación didáctica y darlo a conocer al niño. Entre más se conozca del tema, mayores serán
837 las posibilidades del docente para atender las dificultades de los alumnos.

ANEXO 4. Entrevista Semiestructurada 1 de Israel

1 E: El día de hoy nos encontramos aquí para realizar una entrevista a partir de una
2 planificación que usted diseñó para una clase de matemáticas. En este sentido, vamos a
3 comenzar en un primer momento a contextualizar la información sobre este contenido,
4 después nos adentraremos en el desarrollo de cada una de las actividades. Para empezar,
5 sería interesante que nos comentara, ¿cuál es el grupo donde va aplicar este plan de clases?

6 Israel: Es un grupo de quinto año con aproximadamente 35 y 37 alumnos.

7 E: ¿Cuál es el eje de las matemáticas o los ejes que se hacen presentes en su planificación?

8 Israel: El eje que se hace más presente es el de sentido numérico y pensamiento algebraico.

9 E: ¿Cuáles son las competencias matemáticas que se están favoreciendo con el desarrollo
10 de esta planificación?

11 Israel: Con el desarrollo de esta planificación me enfoco básicamente a tres competencias;
12 la primera sería que el alumno trabaje de manera autónoma, otra competencia que pretendo
13 manejar es que los alumnos formulen, validen y argumenten sus resultados y, la otra
14 competencia, es que comuniquen información matemática.

15 E: A partir de esta información que brinda, ¿cuál es el aprendizaje esperado?

16 Israel: El aprendizaje esperado es que los niños expresen por medio de razón o cociente una
17 comparación de dos cantidades, ese sería más que nada el aprendizaje esperado y el saber
18 en juego.

19 E: ¿Existe una relación entre ese aprendizaje esperado y el estudio de las fracciones en la
20 escuela primaria?

21 Israel: Si existe una relación porque en el libro de matemáticas de quinto grado estuve
22 analizando estas partes y mencionaba que los niños expresen por medio de razones, le añadí
23 lo que fue también por medio de un cociente una relación que hay entre dos cantidades. Por
24 eso, creo que existe esta relación de este aprendizaje esperado con lo que plantean los libros
25 y programas.

26 E: ¿Y de dónde rescató o cómo llegó a tomar la decisión de agregarle esto de cociente?

27 Israel: De cociente, agregué esto porque analizando ese libro da una pequeña definición de
28 lo que es una fracción, de lo que es una razón y menciona que una razón es el cociente entre
29 dos cantidades. Por eso lo quise añadir porque se puede expresar una razón por medio de
30 una fracción o también por medio de un cociente.

31 E: ¿Cuál es el libro en el que encontró eso que señala?

32 Israel: Es el libro de matemáticas del ciclo escolar 2012 2013 porque si ahora vemos los
33 libros de texto de desafíos matemáticos no lo podemos encontrar en quinto año, podemos
34 ver esta actividad más en sexto grado, pero en los libros anteriores, casi al final viene esta
35 actividad, aunque lo trabaja más como razón por proporcionalidad, no tanto como comparar
36 cantidad sino una razón como proporcionalidad

37 E: ¿Qué entendemos por una razón como proporcionalidad?

38 Israel: Como proporcionalidad [...] aquí necesitaría poner un ejemplo, entiendo que una
39 razón como proporcionalidad es sacar lo unitario. Por ejemplo estuve analizando lo que fue
40 esta actividad en el libro de matemáticas de quinto año y la plantea como lo clásico de las
41 ofertas, por ejemplo, si compramos ocho lápices nos regalan dos, son dos de regalo (escribe
42 en el pintarrón 8 lápices 2 de regalo). Entonces menciona que los niños aquí, por ejemplo,
43 hagan una pequeña tablita de tres entradas (realiza la tabla en el pintarrón); aquí podemos
44 poner la cantidad de lápices (primera columna), aquí podemos poner los de regalo (segunda

columna) y aquí la razón (tercera columna). La cantidad inicial ocho lápices nos regalan. Entonces la razón sería dos de regalo por ocho lápices (escribe 8 debajo de cantidad, 2 debajo de regalo y $\frac{2}{8}$ debajo de razón). Ahora vamos por más que sería lo doble, por dieciséis nos regalarían cuatro, por veinticuatro nos regalarían seis y así sucesivamente, por ejemplo, aquí se les deja a los niños algunas incógnitas (agrega 16; 24; ? y 4; 6; ?) y se les dan algunos resultados y eso trata básicamente la razón por proporcionalidad (escribe $\frac{4}{16}$; $\frac{6}{24}$) es encontrar el valor unitario. Por ejemplo, si compras ocho lápices que compras te regalan, pues por cada cuatro lápices que compras te regalan uno; ese sería el valor unitario. A partir de éste podemos obtener los demás resultados. Ahora para dieciséis sería encontrar (señala $\frac{1}{4}$), cuánto por cuatro me da dieciséis, sería cuatro; es establecer como proporcionalidad. Aquí tenemos que en todos los casos nos va a dar un cuatro y éste sería el valor unitario y nos sirve para no hacer una lista y encontrar el valor para cuarenta. Así, multiplicamos, por ejemplo, si por cada cuatro lápices me regalan uno, busco un número que multiplicado por cuatro me dé cuarenta y ese número va a ser la cantidad de lápices de regalo y, básicamente, lo que trata esta actividad de matemáticas es ver lo que es la razón por proporcionalidad.

E: Esto que señala del valor unitario, ¿qué relación tiene con la razón?

Israel: Una razón podemos decir que es la comparación de dos cantidades, por ejemplo, aquí estamos mencionando una cantidad que es los lápices de regalo y, otra cantidad, sería los lápices que yo compré. Aquí la comparación es que por cada cuatro lápices que yo compro obtengo un lápiz de regalo y eso sería una razón, una comparación entre dos cantidades. La razón la podemos trabajar de diferentes formas, después lo vamos a ver en la actividad, por ejemplo, comparar estas dos cantidades o comparar otras que son distintas, por ejemplo, podemos comparar esta (señala en el pintarrón) con otra información que les pueda dar a los niños, quizá esta sería una actividad muy favorable para comenzar a trabajar con los niños la razón, pero aquí se trabaja la proporcionalidad, no se trabaja tanto de comparar, por ejemplo de comparar de que [...] si se llega a que por cuatro lápices que tenga me regalan uno, pero más que nada se trata de encontrar ese valor unitario para obtener los demás datos; eso se hace en proporcionalidad, por eso mencionaba el libro que esta razón que se trabaja es por proporcionalidad y también en lo que estuve investigando cuando estaba haciendo mi actividad era que al trabajar los niños la razón, estamos ayudando a adquirir otros conceptos como la proporcionalidad, la probabilidad y también favorecemos otras nociones de fracción.

E: Para concluir con esto, ¿usted pudiera decir que razón y valor unitario como señala aquí es lo mismo?

Israel: Lo que se trataba aquí es llegar a este valor unitario (señala $\frac{1}{4}$). Aquí a lo mejor pudiera decir que sí porque estos resultados (encierra $\frac{2}{8}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{6}{24}$) que sería la razón al fin van a llegar a este valor (señala $\frac{1}{4}$) si lo simplificamos más [...] se trata de que los niños vean que existe una cierta proporción entre todas estas cantidades que me van dando y aquí puedo decir que la razón se trabaja como proporción.

E: ¿Qué entendemos por proporción?

Israel: Proporción es que va en aumento, lleva un cierto patrón, por ejemplo, de aquí dos octavos, cuatro dieciseisavos y cuatro veinticuatroavos o, por ejemplo, lo clásico, dos, cuatro, seis, ocho, diez que lleva una proporción cada vez de dos.

E: ¿Cuáles significados de la fracción cree que se abordan en los grados anteriores a quinto?

Israel: Casi siempre la fracción como razón la encontramos en las definiciones, casi al final,

92 por ejemplo, en lo que me estuve informando para realizar la actividad buscaba el concepto
93 de fracción y las partes porque de repente pudiéramos entender que el concepto de fracción
94 perdón igual es una fracción porque a veces lo queremos ver de forma holística o íntegra,
95 cuando nosotros desconocemos que la podemos ver desde diferentes puntos conceptuales,
96 por ejemplo, está la fracción como parte-todo, la fracción como cociente, la fracción por
97 proporción, la fracción como medida y casi siempre encontramos que esta definición de
98 fracción de como razón se encuentra en el penúltimo lugar y, al último, se encuentra la
99 fracción por proporción [...] y vemos, por ejemplo, los niños lo que han trabajado antes de
100 la razón como fracción son las conceptualizaciones de fracción como parte-todo, cociente y
101 medida.

102 E: En sexto grado, ¿cómo estudian los niños los significados de las fracciones?

103 Israel: Creo se abordan otras conceptualización de fracciones, por ejemplo, la fracción
104 mixta, cosas más grandes o sería un sería un repaso de éstas. Me doy cuenta que a veces no
105 se les da a conocer bien a los niños qué queremos favorecer con ellos y, en ocasiones, se ve
106 la fracción como un todo, no como medida, no como razón, no como parte todo, sino
107 simplemente como fracción, sin embargo, nosotros podemos intencionar clases para que
108 los niños adquieran este significado que tiene cada parte de la fracción, como lo decía cada
109 concepto que se trabaja de fracción tiene su propio propósito.

110 E: Usted dice que investigó para poder realizar su planificación. En ese sentido, nos pudiera
111 compartir cuáles otras fuentes revisó.

112 Israel: Accedí a fuentes de internet como revistas de investigación que encontré en formato
113 pdf; mediante esta investigación buscaba ejemplos de actividades que trabajaran la razón,
114 sin embargo, no mencionaba mucho, sólo algunos conceptos, algunos estudios de caso,
115 resultados. Encontré que muchas veces la falta de conocimiento de los diferentes
116 significados de la fracción, provoca dificultades a los docentes para trabajarla.

117 E: Para diseñar sus actividades, ¿en cuáles otros materiales de apoyo?

118 Israel: Me apoyé básicamente en un material que se nos proporcionó en aritmética, son
119 libros japoneses adaptados al español, es un material que se les entregó a las escuelas
120 normales y me basé en el tomo dos del libro de quinto año.

121 E: ¿Para cuántas sesiones es su planificación?

122 Israel: Lo quisiera trabajar en una, pero los tiempos quizá no lo van a permitir porque a
123 veces a los niños se les puede hacer un poquito tedioso y cuando esto pasa me imagino que
124 los niños ya no rinden. En este sentido, lo ideal sería para dos sesiones. El tiempo vararía,
125 la más larga puede ser la primera sesión de una hora o una hora y media y, la segunda
126 sesión la podemos trabajar quizá en unos cuarenta minutos.

127 E: Ahora nos vamos a ir de manera específica al contenido de su planificación. En un
128 primer momento encontramos que después de algunos datos que nos comentó como el
129 aprendizaje esperado, la duración de la clase, el eje, se hacen presentes los conceptos de
130 situación didáctica, ¿cómo definiría una situación didáctica?

131 Israel: Una situación didáctica la tengo conceptualizada como una situación intencionada
132 por el docente con el fin de que los alumnos adquieren un saber determinado, en este caso,
133 con la situación que está planteada, ese saber que se ha determinado es la fracción como
134 razón.

135 E: Después de señalar qué es una situación didáctica vemos otro concepto que se denomina
136 preparación del medio, ¿qué es la preparación del medio?, ¿cuál es el propósito de que
137 exista una preparación del medio?

138 Israel: La preparación del medio tiene mucho significado porque es uno de los primeros
 139 momentos de la clase donde se organiza al grupo en equipos, se valoran los conocimientos
 140 previos y se les entrega el material. Por eso viene primero esta fase antes de dar una
 141 consigna, porque primero los niños deben de tener su material, estar organizados y después
 142 se hace una valoración de conocimientos previos. Básicamente eso consiste la preparación
 143 del medio, preparar el medio en el que vamos a trabajar, darle las condiciones que son el
 144 material y la organización del grupo.

145 E: Después de la preparación del medio vemos que se plantea una situación a partir de una
 146 feria, ¿por qué este contexto?, ¿por qué habla de una feria?

147 Israel: Creo que contándoles un pequeño cuento, una pequeña historia, puede que llame la
 148 atención de los alumnos. El enfoque nos dice que debemos trabajar situaciones problema
 149 que sean del contexto o que sean reales, creo que aquí no se pierde nada al tratar de trabajar
 150 situaciones que son un poco ficticias, aunque se trata de contextualizar a los niños. Parto de
 151 esta historia porque quiero sea una clase interesante, algo un poquito fuera de lo que vemos,
 152 ya que me parece aparte de contextualizar al niño en su entorno, por ejemplo, hablar del
 153 tianguis, también le podemos ayudar a construir mentalmente en matemáticas, a razonar y a
 154 desarrollar su imaginación.

155 E: Usted señala que después de plantear la situación de la fiesta les va a presentar una
 156 proyección donde vienen dos ofertas de dos pastelerías y la pregunta que tienen que
 157 contestar se refiere, ¿en cuál de las dos pastelerías le conviene hacer la compra al señor del
 158 que habla en la historia? Entonces, ¿usted va a poner la proyección ustedes y va a
 159 cuestionar a los niños?

160 Israel: Los voy a hacer en lámina.

161 E: ¿Cuáles procedimientos cree van a seguir los niños para dar respuesta a su pregunta?

162 Israel: Antes quiero partir con esta actividad porque a lo mejor esto es una pequeña forma
 163 de trabajar, no tanto la razón porque la tenemos que expresar como una fracción y si se
 164 puede, pero quiero en este primer momento trabajar simplemente la comparación, por
 165 ejemplo, en los libros de quinto año plantea de una manera sencilla, pero muy significativa,
 166 que es mediante las ofertas, como el caso de los lápices que por tantos lápices te regalamos
 167 estos. Aquí menciona que tenemos dos pastelerías: la pastelería suspiros y la casa de los
 168 pasteles (escribe los nombres en el pintarrón). Se les va a hablar a los niños que en la casa de
 169 los suspiros hay una oferta, por cada tres pasteles que compren solamente pagas dos
 170 (escribe 3×2). A lo mejor, en este momento estamos hablando de nociones de fracción, que
 171 por cada dos pasteles que compres te regalamos uno. Les voy a mencionar a los niños que
 172 los pasteles van a ser del mismo tamaño. En la casa de los suspiros el pastel costaba 180
 173 pesos, pero en la casa de los pasteles uno cuesta 150 pesos (escribe ambas cantidades en el
 174 pintarrón). Se les puede cuestionar a los niños por qué creen que este cuesta más caro o más
 175 barato. Aquí sería hacer esa aclaración de que los pasteles son iguales para que no creen
 176 que este cuesta más porque está más grande y este porque está más chiquito cueste menos o
 177 porque sabe más rico [...] Luego les pregunto, ¿dónde conviene hacer la compra?
 178 Considero se van a basar en esta oferta (señala la de los suspiros 3×2), van a decir pues
 179 donde conviene hacer la compra si él quiere comprar, por ejemplo, tres pasteles; quizá los
 180 niños van a realizar una operación, van a decir aquí si compraría tres donde cada uno
 181 cuesta ciento cincuenta [...] aquí tenemos lo que estamos mencionando un valor unitario,
 182 que sería que un pastel cuesta ciento cincuenta y, por ejemplo, ahora aquí sería cuánto van a
 183 costar tres pasteles (escribe 3). Los niños pueden hacer una multiplicación y decir que tres
 184 pasteles costarían cuatrocientos (escribe 450). En los suspiros, según la oferta compraría

185 tres,pero solamente pagaría dos y, cuánto pagaría aquí, pues sería multiplicando 180×2
186 que sería aquí 360 (lo escribe en el pintarrón). Otra forma que creo los niños pudieran hacer
187 en esta parte sería multiplicando 180 por tres que serían 540 y restándole 180, porque sería
188 por ejemplo compró tres pasteles de $180 \times 3 = 540$ (lo escribe en el pintarrón) y le resto uno
189 porque nada más pagaría dos y me daría ese resultado (señala 360). Si compramos tres
190 dónde conviene hacer la compra, espero los niños digan en la pastelería suspiros; esta es
191 una forma de estar comparando precios, por ejemplo, en este me sale más barato (señala
192 450), cuánto, pues noventa pesos. Muy bien, pero ahora si sólo quiero comprar uno,
193 entonces dónde le costaría más comprar. Aquí vemos que dependiendo de la cantidad que
194 se quieran comprar pueden tener diferentes opciones de donde se puede hacer la compra.
195 E: En la pregunta que hace dice de manera específica el número de pasteles [...]
196 Israel: No, porque en un momento espero que los niños resuelvan primero esto (señala lo
197 que está en el pintarrón) y me imagino por qué se van a enfocar mucho a la oferta (señala
198 los suspiros 3×2). Después les planteo [...] voy a revisar qué tan conveniente es decirles
199 dónde le conviene más si son tres; primero quiero dejarlo a ver si los niños se enfocan en
200 esto, porque me imagino que eso va a pasar, se van a enfocar primero en la oferta, más que
201 en el valor unitario. Después si quieren comprar uno, dónde le conviene comprar y si
202 quisiera comprar más de tres dónde le conviene hacer esta compra.
203 E: De acuerdo a los procedimientos que cree van a realizar los niños, por cuaál pastelería se
204 van a inclinar, cuál cree es la respuesta que le van a dar.
205 Israel: Como dijimos se invita a toda la población y no sólo ocupamos un pastel, ocupamos
206 más pasteles, la respuesta que creo los niños van a poner es de la pastelería suspiros.
207 E: ¿Cuál es la respuesta correcta?
208 Israel: Suspiros.
209 E: ¿Cuál sería el procedimiento que señalaría como el correcto para que los niños definan
210 cuál pastelería les conviene más?
211 Israel: Aquí estamos hablando de dos formas de llegar a los resultados [...] la forma
212 convencional en que espero que lo resuelvan sería multiplicando ($180 \times 2 = 360$; $150 \times 3 =$
213 450 ; $180 \times 3 = 540 - 180 = 360$).
214 E: ¿Cree puedan existir algunas dificultades en los alumnos para resolver esta actividad?
215 Israel: Aunque se puede trabajar como razón, aquí sólo es de comparar estas cantidades
216 (señala las cantidades de los pasteles) y ver dónde me conviene hacer la compra. No creo
217 que exista una dificultad por parte de los niños porque revisando los libros me doy cuenta
218 que es la forma que los niños están acostumbrados a trabajar; mediante las ofertas, y quizá
219 es algo que se ve en su contexto, cuando dicen “vamos primero a checar precios a las
220 tiendas y a ver dónde me conviene comprar, que esté más barato y que sea lo mismo”. Por
221 lo tanto, me imagino aquí no hay mayor dificultad sólo van a multiplicar.
222 E: ¿Cuáles serían las fortalezas?
223 Israel: Las fortalezas serían los niños conocen que son actividades relacionadas con las
224 ofertas que están en su contexto.
225 E: Pasamos a otra parte de su situación didáctica, nos dijo que no es un plan de clase
226 cualquiera, es una situación didáctica [...] existe un aparta donde viene una consigna, ¿qué
227 entendemos por consigna?, ¿por qué plantear consigna?
228 Israel: Una consigna son las indicaciones que se le dan a los alumnos sobre lo que van a
229 resolver, lleva ciertos indicadores; el primer indicador, tiene que ser clara y objetiva porque
230 de aquí parte lo que los niños van a trabajar, por ejemplo, van a hacer esto [...] no debe
231 haber dudas en una parte de la consigna, algo que los confunda, por lo cual debe de ser

232 clara sobre lo que los niños van a realizar. Dentro de la consigna va el tiempo y algunas
233 restricciones, por ejemplo, tienen de media hora a cuarenta minutos para realizar la
234 actividad. ¿Por qué es importante definir el tiempo? Por lo general, cuando a los niños los
235 reunimos en equipo, tienen muchos temas para socializar y el darles un límite de tiempo es
236 como estarlos apresurando un poquito para tenerlos más concentrados en el trabajo y, ¿por
237 qué las restricciones? porque es como en todo, hay ciertas reglas, se les puede decir a los
238 niños que en los equipos no pueden estar platicando con otros equipos, nadie debe de estar
239 parado, se puede o no se puede usar calculadora, entre otro tipo de restricciones; todo eso
240 encierra el concepto de consigna, que básicamente son las indicaciones que el maestro da a
241 los alumnos.

242 E: En esta situación didáctica, ¿cuál es la consigna que usted pretende dar en este
243 momento?

244 Israel: La consigna que pretendo dar en este momento es organizar a los niños en equipos y
245 resolver los siguientes problemas sin realizar operaciones y que justifiquen su respuesta.

246 E: Enseguida hay otro concepto que es devolución de la consigna, ¿qué se entiende por
247 devolución de la consigna?

248 Israel: Este concepto lo trabajo como una estrategia porque como mencionaba, la consigna
249 tiene que ser clara, pero la mayoría de las veces hay niños que no la hay no la llegan a
250 procesar, por ejemplo, se les dice van a resolver esta hoja de trabajo, pero con esa frase
251 pueden existir algunas dudas en los alumnos y se queden callados, aunque nunca falta el
252 alumno que está distraído y que no escuchó. Entonces se hace esta devolución de la
253 consigna, por ejemplo, a alguien que esté distraído y le digo explícame lo que vamos a
254 hacer e igual puede explicarlo y me quedo más seguro de que si entendieron lo que les dije
255 y entendieron la actividad, así como los demás. En términos generales, la devolución de la
256 consigna ayuda a que el docente vea si los niños comprendieron lo que les quiso dar a
257 entender porque a veces puede que esté muy subjetivo o muy abstracto lo que uno les
258 plantea. Así, permite ver si captaron la idea de lo que van a hacer y cómo lo van a resolver;
259 lo anterior, evita estar uno por uno dándoles las indicaciones.

260 E: Enseguida viene otro apartado que denomina fase de acción dentro de su situación
261 didáctica, ¿cuál es el propósito de esta fase de acción?

262 Israel: Esta fase de acción es como su nombre lo dice [...] donde los alumnos empiezan a
263 hacer conjeturas mentales empiezan a trabajar, crear analogías. Aquí ponemos en acción
264 todo lo que los alumnos quizá saben, es decir, un conocimiento lo ponemos en marcha a
265 trabajar; todos los momentos son importantes, todos llevan su esencia, pero la fase de
266 acción me imagino es de las más importantes porque es donde se realiza todo el trabajo,
267 aquí es donde los alumnos empiezan a realizar sus hojas de trabajo, a resolver con sus
268 propias formas de trabajo empiezan a realizar sus hojas de trabajos, sus operaciones y se
269 queda en sus procedimientos.

270 E: Usted señala ahorita es donde los alumnos hacen sus hojas de trabajo. Vamos a empezar
271 a trabajar con las actividades que vienen en la hoja de trabajo uno con el propósito de
272 recatar cada una de las actividades que se plantean para primero tratar de precisar cómo las
273 pueden resolver los alumnos. Entonces comenzamos con el punto uno de esta hoja de
274 trabajo donde dice “en la mesa A se reparte un pastel entre cinco invitados” y luego “en la
275 mesa B se reparten dos pasteles entre siete invitados”; la pregunta es, ¿en cuál mesa le toca
276 más pastel a cada invitado? Usted quiere que los niños contesten esa pregunta y la
277 justifiquen. Poniéndonos en el lugar del alumno, cuando lean ellos este cuestionamiento,
278 ¿cuál cree que es el procedimiento que van a emplear para dar respuesta a la pregunta?

279 Israel: La intención y bien lo señala la consigna es que en este primer momento ellos no
 280 realicen ninguna operación, sino simplemente vean una comparación sin conocer bien su
 281 resultado, por ejemplo, en un primer momento que se reparte un pastel (escribe $1/5$), a lo
 282 mejor los niños no van a ver así de que un pastel para cinco personas (dibuja un círculo) y,
 283 aquí, por ejemplo, no estarían realizando ninguna operación, sólo la partición (divide el
 284 círculo en cinco partes iguales) pero no lo podemos considerar como una operación y, la
 285 otra nos dice que son dos pasteles para siete personas (dibuja dos círculos en el pintarrón).
 286 E: Espera que los niños pueden dividir los pasteles, pero no hacer ninguna operación, ¿cree
 287 usted que los niños van hacer eso que usted está haciendo ahorita?

288 Israel: Sí, donde creo que van a tener más problema es en esta parte (señala los dos
 289 pasteles), pueden decir, ¿cómo voy a dividir dos pasteles entre siete personas? es donde los
 290 niños quizá no lo van a poder expresar en forma gráfica, pero sí creo que lo puedan
 291 expresar en una forma mental, ya después lo vamos a resolver con operación.

292 E: En forma mental, ¿qué cree ellos pensarían?

293 Israel: En la operación, por ejemplo, a lo mejor podemos juntar estos dos pasteles en un
 294 pastel más grande, pero se batallaría porque quizá no tenemos cuánto pesa cada uno o una
 295 cierta medida de referencia de cada pastel. Entonces aquí no creo que los puedan juntar en
 296 un pastel más grande y dividirlo entre siete porque lo podemos desconocer un poquito,
 297 pero, por ejemplo, los niños mentalmente pueden hacer lo siguiente: si dos pasteles le tocan
 298 a siete personas, entonces un pastel para cuántas personas estaría. Aquí podemos decir que
 299 para tres punto cinco (escribe 3.5), aunque sería relativo porque no le podemos dar a media
 300 persona.

301 E: ¿Cuál cree que sería la respuesta de los niños?

302 Israel: La respuesta de los niños es que en la mesa B les toca más pastel.

303 E: ¿Espera que los niños y pongan esa respuesta?

304 Israel: Sí, aunque también me imagino también van a existir otros que digan aquí (señala
 305 $1/5$ y el círculo dividido en cinco partes iguales). Entonces aquí es donde quiero después
 306 exista una confrontación.

307 E: Respecto a los que digan que es la mesa B, ¿cómo cree que ellos van a justificar su
 308 respuesta?

309 Israel: Pueden decir porque en la mesa B les tocan dos pasteles a siete personas. En este
 310 caso, lo que creo que van a hacer los niños es como le mencionaba, un pastel le tocaría a
 311 tres punto cinco personas o podemos ir por el lado contrario, por ejemplo, tenemos dos
 312 resultados, a lo mejor (agrega $2/7$) los niños van a decir en este porque es un pastel y son
 313 menos personas (encierra $1/5$) que en este (señala $2/7$) y otros quizá van a decir son más
 314 pasteles y son menos personas. Entonces quizá los niños pueden hacer una comparación del
 315 doble de ésta (señala $1/5$), si un pastel le toca a cinco personas, dos pasteles a cuántas
 316 personas le tocaría (escribe $2/10$); veremos que aquí es la misma cantidad de pasteles
 317 (señala $2/7$), pero en éste son menos personas; son algunas consideraciones que creo los
 318 niños pueden hacer porque estuvimos, ahora sí que trabajando, si fuera en uno, dos y tres.

319 E: ¿Cuál es la respuesta correcta?

320 Israel: En la mesa B les toca mayor cantidad de pastel a los invitados.

321 E: Usted ya señaló algunas dificultades que pueden tener los alumnos al resolver [...]

322 Israel: Sí, porque este está un poquito abstracto (encierra 7 de $2/7$) o de representar, porque
 323 por ejemplo este valor (remarca el 5 de $1/5$), no sería difícil de partir aquí (señala un círculo
 324 de $1/5$), sin embargo, el otro si está un poquito más complicado (señala los dos círculos que
 325 están cerca de $2/7$).

326 E: En relación a eso, ¿cuáles fortalezas o habilidades pudieran tener los niños?

327 Israel: Se les facilitaría en ésta, el partir (señala el círculo de $\frac{1}{5}$) esto porque desde muy

328 temprana edad acostumbramos a los niños a trabajar las fracciones de un entero que se

329 parte, que está dividido en partes iguales. Entonces esa es una habilidad que los niños ya

330 tienen de un entero o una unidad partirla, dividirla en partes iguales; esto es una habilidad

331 que los niños tienen y otra habilidad que espero que ellos sería, por ejemplo, no irnos a

332 simplificar fracciones, sino a lo doble, si fueran tres o si fueran cuatro; esas creo que son

333 habilidades que los niños han estado trabajando o algunas fortalezas que creo que tiene, así

334 como el empleo de su imaginación que ellos tienen, por ejemplo, como mencionaba una de

335 las competencias y el enfoque es que los niños aprendan a resolver problemas de diferente

336 forma, se da esto debido a los antecedentes que los niños tienen y como vemos que los

337 niños tienen diferentes antecedentes, ellos van construyendo su conocimiento de forma

338 distinta, no van a tener la misma forma de resolverlos, por eso se pretende que bajo el

339 trabajo en equipo vayan proporcionando diferente información para ir llegando al resultado

340 y aquí está lo curioso, lo interesante de ver cómo los niños lo resuelven en equipo.

341 E: En el siguiente planteamiento dice “Carlos y sus amigos fueron a saludar al capitán R, él

342 los invitó a un puesto de la feria que había contratado el alcalde, encontraron dos puestos de

343 truenas globos con diferentes promociones” (escribe en el pintarrón Benjamín 6 y 8); aquí

344 señala que en el puesto de don Benjamín tienen que tronarse seis globos con ocho dardos

345 para ganarse un regalo y, en el puesto de don Octavio, tienen que tronar siete globos con

346 diez dardos para ganarse el regalo. La pregunta, ¿en cuál de los dos puestos le conviene

347 jugar para llevarse un regalo?, luego dice justifique su respuesta. Aquí pueden hacer

348 operaciones [...] ese sentido, ¿cuál cree que va a ser el procedimiento o los procedimientos

349 que van a realizar los niños?

350 Israel: Lo que pueden hacer los niños [...] quizá estaríamos trabajando también un poquito

351 de probabilidad en relación a los globos que se truenan y el regalo [...] Bueno, aquí lo que

352 tratamos de ver es que, es igual, lo podemos trabajar mediante las ofertas, en este caso, es

353 una promoción, dice que hay dos puestos iguales, los puestos son los mismos de truenas

354 globos, pero hay una ligera diferencia, por ejemplo, aquí ya no estamos comparando por

355 cada ocho tiros de dan seis, aquí estamos trabajando la razón mediante dos actividades

356 (señala 6 y 8; 7 y 10); es donde mencionaba que a veces la razón la podemos trabajar

357 mediante esto, que sería el valor o una comparación entre dos cantidades; igual se trabaja la

358 simple comparación, pero aquí vamos un poquito más complejo hacia ese contraste.

359 Entonces, por ejemplo, aquí creo tratamos que los niños vean un primer concepto de razón

360 que sería la razón como [...] bueno, uno de los conceptos que encontré decía que es el

361 cociente de dos cantidades y el cociente lo entiendo como el resultado en forma de número

362 o en decimal. Entonces qué es lo que pretendo aquí, en cuál hay más probabilidad, pues a lo

363 mejor aquí espero que los niños hagan es lo resuelvan mediante una división o mediante un

364 cociente (escribe $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{10}$); para esto, en las siguientes actividades lo vamos a ver punto

365 por punto. Aquí vemos que por cada ocho tiros deben de tronarse seis globos, quiere decir

366 que se le pueden escapar dos, puede fallar dos, pero aquí los niños van a decir que a lo

367 mejor este está bien (señala 6 y 8) porque son sólo ocho tiros, puedes fallar dos y son

368 menos tiros, luego van a decir no, pero en este puedes fallar tres, pero lo que vemos

369 también es que son más dardos. Básicamente espero que los niños comparen lo que es su

370 cociente, por ejemplo, que vean al dividir esto (señala $\frac{7}{10}$) tiene lo que es punto siete (lo

371 escribe .7) y aquí es donde va a estar lo interesante, el dividir este (señala $\frac{6}{8}$) es punto

372 setenta y cinco (lo escribe en el pintarrón .75). Aquí dijimos al observar estas dos

373 cantidades (señala .70 y .75) nos tenemos que fijar en cuál es mayor, a lo mejor la
374 probabilidad de que se gane ese premio, por ejemplo, aquí la probabilidad de que se gane
375 este premio puede ser [...] quizá podemos entrar un poquito a lo que es el porcentaje a un
376 setenta y cinco por ciento (escribe en el pintarrón 75%) y, en el otro, la probabilidad es de
377 un setenta por ciento (escribe 70%). Entonces, en cuál de los dos le conviene jugar, en cuál
378 tiene mayor posibilidad de ganar y sería en el puesto de don Benjamín.

379 E: ¿Cree que los niños van a elegir el puesto de don Benjamín?

380 Israel: Me imagino que aquí va a existir esa confusión, quizá de que aquí son más (señala
381 7/10), pero también te dan más libertad para que falles, y pueden decir en el otro, aquí son
382 menos que este (señala 6/8), pero tienes menos tiros que fallar. Entonces quiero que
383 comparen estas cantidades, a lo mejor aquí va a estar un poquito más sencillo (señala 7/10);
384 si nos metemos al valor unitario, de que por cada cuatro tiros pueden tronar tres (escribe $\frac{3}{4}$)
385 o tienen un margen de error para fallar y, sin embargo, ésta (señala 7/10) no la podemos
386 hacer más pequeña.

387 E: Usted dice que la correcta es elegir a Benjamín pero, ¿cree que todos los niños o una
388 parte le contesten a Benjamín?

389 Israel: Creo que una parte también va a contestar con Octavio [...] después quiero que en
390 las demás fases quiero que las demás fases haya ese debate, que esa confusión, que exista
391 esa situación problema, porque lo vemos que de repente si puede estar un poquito
392 complejo, un poquito más abstracto. Entonces, por ejemplo, si estuviera más sencillo, a
393 veces hasta los niños en lo que es la fase de formulación o validación dicen eso ya lo
394 sabemos todos, por eso quiero que exista esa confusión intencionada para que se propicie el
395 debate donde los niños digan “Benjamín porque [...] argumenten, por ejemplo, aquí son
396 más tiros (señala 7/10) y puedes fallar más, pero también de que otros niños digan (señala
397 6/8) es que aquí son menos tiros, pero también aquí sólo puedes fallar dos veces y acá tres.
398 Entonces quiero exista ese debate, me interesa aquí mencionen cómo lo resolvieron y no
399 solo aquí son ocho y tienes que anotar seis y pueden fallar dos.

400 E: ¿Cómo van a justificar su respuesta los elijan el puesto de Octavio?

401 Israel: En ese momento no creo que los niños lo resuelvan en forma de operación, sino más
402 de comparación, a lo mejor lo van a escribir es que son más tiros y puedes fallar tres [...] porque
403 también se les va a indicar cuántos puedes fallar y cuántos tienes que anotar.
404 Entonces puede que los niños al argumentar su respuesta señalen que en el puesto de don
405 Octavio porque puedes fallar más veces que en el de Benjamín.

406 E: Los que elijan Benjamín qué escribirían para justificar su respuesta

407 Israel: Los niños van a escribir este que son menos dardos que en este (señala 7/10), por
408 ejemplo, son menos dardos que con Octavio y, por lo tanto, tiene más probabilidad de
409 ganar, por lo mismo de que son menos cantidad, posteriormente trabajando la siguiente
410 actividad para a haber pauta a trabajar esto.

411 E: Después de esto viene “Carlos quiso participar en el puesto de don Benjamín la tabla de
412 abajo muestra los registros de tiros que hizo Carlos en tres rondas”, está la tablita. La
413 pregunta, ¿cree que en algún juego ganó un premio? Para contestar nuevamente esta
414 pregunta que harían los niños.

415 Israel: Primer tratamos que realicen una lectura de la información que nos proporciona la
416 tabla y trabajamos el manejo de la información. Lo primero que los niños observarían es de
417 cuál puesto estamos hablando, ¿de Benjamín o de Octavio? Sería en el de Don Benjamín
418 (escribe Benjamín) y aquí dice que te da ocho dardos (escribe 8 dardos) y con estos ocho
419 dardos tienes que tronar un mínimo de seis globos, espero [...] Aparecen algunas

420 acotaciones o simbologías, que las rueditas son los globos tronados y las equis los tiros
 421 fallados. Entonces él tiene tres rondas: juego uno, juego dos y juegos tres (escribe juego 1,
 422 juego 2 y juego 3). En el juego uno espero observen, que hagan esa comparación, cuántos
 423 de los dardos que tiró tronaron un globo y, por ejemplo, aquí van a contar uno, dos, tres,
 424 cuatro, cinco, son cinco (escribe 5-8), a lo mejor no lo van a hacer así simplemente los
 425 cinco. En el segundo, uno, dos, tres, cuatro de los seis globos que debería de tronar (escribe
 426 4) y, en el último, son uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (escribe 6); quiero que al tratar de
 427 trabajar esta información los niños vean si cumple el propósito para ganarse el premio, que
 428 es tronar un mínimo de seis globos. ¿Creen que en algún momento los tres juegos si ganó?
 429 Espero que los niños mencionen que en el juego tres porque como sí tronó los seis globos y
 430 era lo que se debería de tronar, si ganó el premio.

431 E: ¿Cree que los niños tengan dificultades para resolver esta actividad?

432 Israel: No, esta actividad siento es un poco más de observación, no es tanto de hacer
 433 operaciones, es simplemente de observación. Entonces aquí no creo que exista una duda o
 434 alguna complicación como los casos anteriores donde sí se problematiza. Aquí se estaría
 435 checando, ver la capacidad que tienen los alumnos para tratar esa información que se les
 436 proporciona o a lo mejor lectura de tablas.

437 E: ¿Cree que los niños van a resolver con facilidad lo que se plantea?

438 Israel: En este caso yo considero que sí.

439 E: Después de esto siguen trabajando en su hoja número uno, dice “piensa cómo comparar
 440 los resultados y discute tus ideas con tus compañeros”. Vienen dos niños, uno dice “puedo
 441 comparar el número de tiros en los que tronó un globo en cada juego” y luego la niña dice
 442 “¿será suficiente? el número de globos que tronó en cada juego es diferente”; ¿cuál es el
 443 propósito de esta conversación?

444 Israel: Muy bien, un niño dice “puedo comparar el número de tiros de tronó en cada juego”.
 445 Por ejemplo, el número de tiros que tronó habíamos dicho eran cinco, cuatro y seis (escribe
 446 en el pintarrón 5, 4 y 6), pero, ¿cuál es el propósito de la conversación de la muchacha?
 447 Bueno aquí tronamos cinco globos, aquí cuatro y aquí seis (señala las cantidades en el
 448 pintarrón), la muchacha le dice: ¿ya con eso es suficiente? Le quiere decir como que
 449 todavía le falta algo, le dice “el número de globos que tronó en cada juego es diferente, por
 450 ejemplo, dijimos que cuatro es diferente a cinco y a seis y que sólo en unos de los juegos
 451 había ganado [...] Con esto a qué voy, que solamente con expresar el número de los globos
 452 que tronó no basta. Entonces, ¿de qué otra forma lo podemos hacer? Para esto es a lo que
 453 vamos a llamar como un número de referencia a lo que vamos a tener, ¿cuál es ahora si el
 454 número de referencia? como lo habíamos mencionado es los globos tronados con el número
 455 total de lanzamientos o de dardos (lo escribe en el pintarrón) que se complementa ahora si
 456 esta información, por ejemplo, tronó cinco globos de cuántos lanzamientos, pues de ocho;
 457 tronó cuatro globos, de cuántos lanzamientos, de los mismos, igual tronó seis globos, de
 458 cuántos lanzamientos, de los mismos (escribe 8). Entonces aquí es a lo mejor donde vamos
 459 a entrar más a lo que es la razón al comparar estas cantidades.

460 E: En la tabla dice haz un registro del número de tiros en los que tronó el globo y el número
 461 de lanzamientos [...]

462 Israel: Aquí intencionamos a los alumnos a que reflexionen, en este caso, (señala lo que
 463 está escrito en el pintarrón), no solamente con escribir los números de tronados es
 464 suficiente, sino que tenemos también que especificar el número de lanzamientos. De todos
 465 modos está la conversación para que discutan, pero con la tabla se les hace una forma más
 466 sencilla de lo que les hacía falta.

467 E: Entonces, ¿con qué van a llenar esta tabla los niños?

468 Israel: Con la información de la tabla anterior.

469 E: ¿Cree que existan dificultades?

470 Israel: Igual aquí estamos trabajando en el tratamiento de la información. Por ejemplo, en el

471 juego uno, es como transformar los resultados, esas rueditas, esas tachitas a números. Por

472 ejemplo, globos tronados cuántos, cuántas rueditas, que cinco, de cuántos lanzamientos

473 [...] tenemos que contar tanto las veces en las que tronó como las veces en las que no tronó;

474 en total son ocho lanzamientos los que tienen permitidas realizar en esto.

475 E: Enseguida dice “expresa con fracciones los datos de la tabla anterior, usa el número de

476 globos tronados como numerador y el número del total de lanzamientos como

477 denominador”, ¿por qué a hacer esta aclaración?

478 Israel: Porque quizá van existir niños que al decir “expresa lo siguiente como una fracción”,

479 puede ser que digan “pues el ocho son ocho lanzamientos pero tronó cinco (escribe $8/5$)” a

480 lo mejor puede ser que los niños digan “es lo mismo que decir son cinco lanzamientos y

481 tronó ocho (escribe $5/8$)”; por eso, se hace esa aclaración de que el número de globos

482 tronados vaya en el numerador y el total de lanzamientos en el denominador para que en la

483 siguiente actividad no exista ningún inconveniente en hacerlo de forma de cociente.

484 E: Usted aquí señala “expresa con fracciones”, ¿es lo mismo una fracción que una razón? o

485 ¿qué entendemos por fracción?

486 Israel: Una fracción lo entiendo como un número que se expresa de la forma siguiente a

487 sobre b (escribe en el pintarrón a/b), pero hay algunas condiciones, por ejemplo, para que

488 sea una fracción a y b tienen que ser números enteros y b tiene que ser diferente de cero

489 (escribe en el pintarrón a y $b=\text{enteros}$ y $b \neq 0$); esto se entiende de forma que se entiende de

490 forma que una unidad o un entero lo partimos en partes, está dividido en partes iguales y se

491 expresa como (encierra la b de a/b) una unidad, estamos hablando de unidades, de enteros,

492 un entero o una unidad se expresa así de forma de un entero. Entonces significaría una

493 parte, que sería lo que se toma de ese entero, la parte que se toma, por ejemplo, así (escribe

494 $2/4$). Así, entiendo una fracción que se entiende como donde a y b son dos números enteros

495 y b es diferente de cero. También se entiende como el resultado de dividir una unidad en

496 partes iguales, por ejemplo, cuatro y después tomar de esa unidad una parte, por ejemplo,

497 aquí dos (encierra el 2 de $2/4$); aquí a la a la podemos llamar numerador y a b denominador.

498 E: ¿Qué podemos decir sobre el concepto de razón son iguales o son diferentes?

499 Israel: Sí son diferentes porque [...] a lo mejor una está vinculada con la otra, las dos están

500 relacionadas, pero considero que no son lo mismo [...] quizá este concepto de fracción es

501 un poco complejo y se puede entender de muchas formas debido a sus múltiples campos en

502 los que se puede ver o mediante la utilización que se le dé. Lo que entiendo por una razón

503 sería como una comparación de dos cantidades (escribe $2/4$) [...] implícitas lo que es la

504 razón y la fracción, pero depende del modo en lo que se trabaje, por ejemplo, aquí pongo un

505 medio (escribe $1/2$), si viéramos esta fracción como una razón diríamos que de cada dos lo

506 que sea tomamos sólo uno (señala 1 de $1/2$), si lo viéramos como una razón como una

507 comparación de que por cada dos tomamos uno, igual, por ejemplo aquí, que de cada ocho

508 lanzamientos tiró uno.

509 E: ¿Cuál concepto estaríamos trabajando?

510 Israel: Como razón una comparación entre dos y uno (señala $1/2$), por ejemplo, aquí compró

511 dos y se llevó uno, igual aquí, que lanzó ocho y tronó cinco. Al trabajar esta fracción como

512 medida también cambia su concepto porque puede decir medio kilo, medio litro o medio de

513 otras cosas (escribe $1/2$ l). Entonces no siempre una fracción la podemos ver como una

514 razón.

515 E: Por último, en la hoja de trabajo uno dice “ahora convierte las fracciones anteriores a

516 número decimal”, ¿Por qué pide que las conviertan en números decimales?

517 Israel: Porque aquí espero trabajar la razón como cociente y un cociente lo entiendo

518 como el resultado por la acción de dividir. Entonces al llegar a este cociente vemos que la

519 primera por ejemplo fueron cero punto seiscientos veinticinco (escribe 0.625) y en la otra

520 fueron cero punto setecientos cincuenta; estas son las respuestas correctas (escribe en el

521 pintarrón 0.50).

522 E: ¿Cree que existan dificultades en los niños para obtener los números decimales?

523 Israel: Quizá, depende de cómo lo hayan trabajado, porque en lo que estoy trabajando

524 ahorita con mis niños de quinto año, están empezando a ver lo que es la división con puntos

525 decimales, digo la división por los puntos pero, a veces, puede que existan confusiones

526 cuando estemos analizando que punto setecientos cincuenta (escribe 0.750) vale más que

527 punto cinco (escribe 0.5); quizá son los obstáculos a los que se van enfrentar los niños, pero

528 otras dificultades no creo, porque ellos han trabajado en cuánto es un medio, pues uno entre

529 dos (escribe $\frac{1}{2}$). En este caso, sería cuánto es la acción de dividir cuatro entre ocho; aquí

530 básicamente es que los niños dividan el numerador entre el denominador.

531 E: Con esto terminaríamos con la hoja de trabajo número uno. Luego en su situación

532 didáctica viene otro momento que se denomina fase de formulación-validación y

533 nuevamente la idea es que nos contextualice, qué se entiende por fase de formulación

534 validación.

535 Israel: Esta fase no la alcance a corregir porque me estuvieron llamando la atención en mis

536 planeaciones de por qué las junto, me dijeron debo de expresar las como momentos

537 separados, no recuerdo en qué documento encontré las podemos juntar [...] Encontré un

538 documento donde decía fase acción-devolución y otra fase formulación-validación. Lo

539 agregué aquí porque en este momento estas dos fases, estos dos momentos los veo muy

540 estrechamente relacionados porque tanto un niño [...] lo veo como un circulito, por

541 ejemplo, porque tanto un niño emite un mensaje como se valida o se rechaza y vuelve a ser

542 lo mismo, por ejemplo, no se emiten primero todos los mensajes y de todos los resultados

543 después se valida uno por uno, sino por ejemplo, quizá un equipo formula, dice su mensaje

544 a sus demás compañeros; esta es la definición de formulación, que es emitir un mensaje a

545 los demás compañeros o decir cómo lo resolvieron, a lo mejor dando argumentos, pero en

546 la validación, te valido si acepto o no ese mensaje que tú me estás dando a entender.

547 Entonces lo acepto o rechazo. Después de esto volvemos al planteamiento siguiente, otra

548 vez la formulación y después se valida si se acepta se rechaza y después con el siguiente.

549 Aquí quise hacer aquí formulación-validación como que se formula y se valida, se vuelve a

550 formular y se vuelve a validar.

551 E: Nos dijo qué es formulación, ahora, qué entendemos por validación.

552 Israel: Validación [...] dijimos que la formulación es donde los niños emiten un mensaje a

553 sus compañeros que son los receptores. Entonces también quizá hasta podemos hacer lo de

554 la función apelativa, de convencerlos con sus argumentos y, la validación, pues trata de que

555 el resto de los demás compañeros, simplemente acepte o rechace ese mensaje que fue

556 previamente dado.

557 E: ¿Esto se va a realizar con la hoja de trabajo uno?

558 Israel: Sí. ¿Cómo se hace esta argumentación? Pues tratando de convencer a los demás,

559 tratando de decir los argumentos, las operaciones y los resultados [...] en la validación se

560 hace más que nada a ver si los procedimientos de él coinciden con los míos y si no estamos

561 viendo que no te válido porque tienes diferentes procedimientos a los míos y quizá estás
562 mal, por ejemplo, digamos que ese sea el caso, aunque no precisamente tienen que estar
563 mal.

564 E: ¿Qué pasa si no hubiera estas dos fases que usted pone aquí en una misma?
565 Israel: Simplemente creo que la situación quedaría sin una reflexión, sin un análisis, lo veo
566 así porque les decimos contesten esto, no me fijo si estás bien, por ejemplo, tuve una
567 experiencia en lo que fue la telesecundaria, por eso, a mí se me hacen muy importantes
568 estas fases recuerdo en nuestra sesión de matemáticas cuando resolvíamos las actividades,
569 no sabíamos si estábamos bien porque a veces veía yo tenía un resultado y mi compañera
570 tenía otro y decía “¿estoy bien?”, lo comprobaba y todo y, la otra tenía otro resultado o
571 varios no coincidíamos. Entonces el profesor nos revisaba tanto al que lo tenía bien como a
572 quien lo tenía mal revisado y para mí esos dos resultados eran diferentes, tenía dudas si el
573 mío estaba bien o el de mis compañero, pero parecía no tenía mucha importancia porque
574 valía lo mismo. Por eso, la importancia de esta fase es ver que, si en dado caso, hubo una
575 distracción en los niños vuelvan a retomar ese camino, reflexionen sobre, ¿dónde me
576 equivoqué? o ¿si lo hice de esta forma, quizá debí de haber hecho de esta otra forma? Aquí
577 es donde se brinda el espacio para el análisis y la reflexión.

578 E: En este sentido, ¿cuál es el papel del maestro?

579 Israel: El papel del maestro es cuidar los procedimientos porque ha habido casos en donde
580 el niño que sabe más, por ejemplo, les dice a los demás “es que no debes de hacerlo así”,
581 pero nosotros vemos que quizá es otra forma, pero los demás niños lo ven como el que sabe
582 más o lo que dice siempre está bien, aunque sea algo erróneo. Entonces aquí un papel muy
583 importante es hacer uso de devoluciones, hacer estas reflexiones a partir de preguntas: ¿qué
584 hiciste?, ¿por qué obtuviste ese resultado?, ¿de qué otra forma le pudiste hacer o lo pudiste
585 haber hecho? O quizá con un contraejemplo, pero si tienes esto, ¿no sería de otra forma?,
586 también dando ejemplos, aclaraciones. El papel del docente es ir orientando a los alumnos
587 en caso de que se vayan por otro rumbo, igual aquí como se da mucho el debate, es cuidar
588 que no se exalten los niños, que ese debate no se torne un conflicto. Cuidar que los niños
589 pongan atención, que escuchen a sus compañeros, porque en la actualidad es uno de los
590 problemas más difíciles que encontramos en esta fase, que los niños pierden la cualidad por
591 escuchar a sus compañeros, no le dan valor y, ¿por qué es importante está fse? porque es
592 más significativo [...] casi siempre esperamos que el maestro nos revise y nos diga si
593 estamos bien. Aquí significativo porque a los alumnos les da seguridad el decir por qué
594 están bien o no, que no esperen una respuesta del maestro para decir si están bien o no, sino
595 que ellos mismos vean si están bien o si están mal.

596 E: Después de esta fase de la situación didáctica, viene una que se llama fase de
597 institucionalización, nos puede comentar cuál es su propósito.

598 Israel: El propósito de esta fase de institucionalización es dar a conocer a los alumnos los
599 saberes que estuvimos trabajando, darles conceptos, definiciones; contextualizar todo lo
600 que estuvimos viendo de una forma más comprometida y más formal, por ejemplo,
601 estuvimos viendo fracciones, partiendo, comparando, por ejemplo, aquí comparamos
602 globos tronados el números de lanzamientos; es como una síntesis y un resumen de todo lo
603 trabajado, sería por parte del profesor. Esta fase es importante porque quizá los niños
604 siempre esperan que el profesor sea el último que valide, esta institucionalización se me
605 hace como una tipo validación del profesor, como que estuvimos haciendo esto, esto lo
606 hicimos así, utilizamos este procedimiento como una validación más formal porque ahora sí
607 es lo que los alumnos toman más en cuenta.

608 E: Aquí usted dice que va a dar una breve introducción a la razón de manera formal y, para
609 ello, presentará a los alumnos la diapositiva dos. Antes de que veamos la diapositiva dos,
610 ¿por qué una breve introducción? ¿por qué no toda?

611 Israel: Porque todavía faltan la hoja dos y tres, no podemos dar todo el concepto, aún queda
612 un poquito de problematizar a los niños.

613 E: Respecto a la diapositiva dos, nos podría explicar cómo la va a trabajar con los alumnos,
614 qué va a hacer, imaginémonos que está en el grupo, cómo la va a presentar.

615 Israel: Ya tenemos la proyección y para eso mencionamos que la razón como fracción, de
616 lo que estuvimos viendo, puede comparar ciertas cantidades, por ejemplo, qué fue lo que
617 estuvimos comparando o qué fue lo que estuvimos trabajando. En el segundo momento,
618 espero que los niños mencionen lo que es la cantidad de los globos que tronaron y los
619 lanzamientos mediante las actividades que estuvimos realizando. Entonces aquí se le
620 expresa razón [...] en la presentación voy a decir razón entre el número de dardos y globos
621 tronados (lo escribe en el pintarrón). Por ejemplo, la razón entre el número de dardos y los
622 globos tronados es igual al número de globos tronados sobre lo que son el número de
623 dardos (escribe No. Globos tronados/no. De dardos). Aquí, por ejemplo, dice número de
624 dardos, tenemos una cantidad total que dijimos eran ocho y, del otro lado, tenemos los
625 globos tronados, que dijimos que eran seis, aquí se muestra de forma icónica o ilustrativa el
626 número de dardos y los números de globos que se tronaron y aquí se da una razón entre
627 dardos y globos tronados. Mencionamos que la razón es igual al número de globos
628 tronados, cuántos globos son, seis (escribe 6), cuántos dardos son, pues ocho (escribe $6/8$) y
629 si lo trabajamos como cociente la razón es de cero punto setenta y cinco (señala 0.75).

630 E: ¿Qué nos dice el cero punto setenta y cinco?

631 Israel: Ese punto setenta y cinco (señala 0.75) [...] quizá aquí podemos trabajar esto,
632 aunque no me gustaría trabajarlo con los niños porque a lo mejor aquí vamos entrar más en
633 conflicto, porque estaríamos hablando más como del porcentaje. Lo que quiere decir este
634 cero punto setenta y cinco es que de estos ocho lanzamientos tiene que acertar un setenta y
635 cinco por ciento (escribe 75%) o hay un margen de error de un veinticinco por ciento
636 (escribe 25%), que este veinticinco por ciento, serían los dos tiros que pudo haber fallado.

637 E: ¿Usted no va a llegar a eso con los niños? Se va a quedar en [...]

638 Israel: Vamos a expresar así, razón entre el número de dardos y globos tronados es igual al
639 número de globos tronados sobre el número de dardos, vamos a ver qué otros estuvimos
640 revisando, por ejemplo, que de cinco globos tronados con ocho dardos y de cuatro globos
641 tronados de ocho lanzamientos.

642 E: ¿Cómo se lee $4/8$ en razón?

643 Israel: En razón la forma más fácil de leer, más correcta de leer, sería cuatro globos
644 tronados de ocho lanzamientos, por eso está así, cuatro globos tronados del número total
645 dardos que es cuatro sobre ocho (señala $4/8$), no lo estaríamos planteando como cuatro
646 octavos, sólo tronó cuatro de ocho que pudo haber tronado.

647 E: Así utilizaríamos la diapositiva dos y las tres para qué no serviría.

648 Israel: Nos sirve para saber que nos vamos a quedar con el puesto de don Benjamín [...]

649 Una vez que se explique a los alumnos cómo podemos representar esa razón que dijimos
650 será número de globos tronados sobre el número de total de lanzamientos porque a lo mejor
651 puede que existan niños que no captaron la idea central. Entonces se les pone otro pequeño
652 planteamiento, dice “la tabla de abajo muestra el registro de los lanzamientos que realizó el
653 amigo de Carlos ahora en el puesto de don Octavio”. Aquí sería volver a analizar la
654 información, es como una actividad, un problema extra como una forma más de consolidar.

655 Si se les dice la tabla de abajo tiene el registro de los lanzamientos que realizó José, el
656 amigo de Carlos, en el puesto de don Octavio, vemos que en el puesto de don Octavio
657 dijimos que para ganarse un premio tiene que tronar siete globos con diez dardos que le
658 dan. Aquí tendríamos que analizar el puesto de don Octavio donde para ganarse un premio
659 tiene que tronar siete globos de diez lanzamientos que tiene. Enseguida se responde una
660 tablita que son los globos tronados y abajo está el número de lanzamientos (escribe en el
661 pintarrón), si nos fijamos en esta tablita fue lo que los niños estuvieron trabajando
662 anteriormente, que era tratando información. Lo último dice “expresa la relación entre estos
663 dos datos usando un número”, aquí el que espero que me den sería una fracción,
664 mencionamos que la fracción es un número que se expresa en forma a sobre b (escribe a/b);
665 esto se puede entender como número o quizá aquí le podemos poner como una fracción.
666 E: ¿Usted quiere que se lo expresen como una fracción no como una razón?
667 Israel: Sí porque estuvimos viendo que la razón, en este caso, la vamos a trabajar como una
668 fracción, en los otros momentos si estuvimos trabajando un poquito la fracción como
669 cociente, pero aquí si la vamos a trabajar más como una comparación entre dos números
670 que es lo que quiero los niños expresen, por ejemplo, en la diapositiva anterior que
671 estuvimos viendo, era una pequeña institucionalización para expresar esa razón. Teníamos
672 que poner el número de globos tronados y el número de lanzamientos o dardos. Espero aquí
673 a los niños se les haya quedado esto (señala en el pintarrón No. Globos tronados/No.
674 Dardos) que para expresarlo en una fracción o en una razón tienen que hacer en una forma
675 de fracción. Así, espero los niños mencionen, cuántos lanzamientos tuvo, pues diez (escribe
676 10) y cuántos globos son los tronados uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, son seis (escribe 6)
677 globos de diez lanzamientos, espero lo representen (escribe $6/10$) y mencionen qué quiere
678 decir, por ejemplo, de diez lanzamientos falló cuatro, cuántos debería de tronar para
679 ganarse el premio, pues siete; si tronó seis de los diez lanzamientos, ¿creen que haya
680 ganado el premio? Que justifiquen su respuesta; algunos de los cuestionamientos que
681 pueden realizarse en el camino. En fin, mediante este planteamiento espero que los niños
682 hagan esto (señala $6/10$).
683 E: ¿Cree que se les dificulte?
684 Israel: Creo se les va a dificultar un poquito. Aquí es donde me va ayudar la fase de
685 formulación y la fase de validación para que pasen los niños a mencionar cómo lo
686 representaron. Puede ser todos capten la idea de la diapositiva anterior, la idea de cómo
687 expresar el número de globos tronados y el número de dardos.
688 E: Después de esto viene una consigna 2, ¿por qué viene otra consigna?
689 Israel: Los alumnos van a trabajar una actividad, pero en la clase debe existir una pausa
690 para institucionalizar esos saberes, pero después va a ser necesario retomar la actividad. Por
691 eso agregué una consigna dos y, por ejemplo, el maestro Maldonado nos dijo de que la
692 situación didáctica es un formato, son fases pero, también nosotros tenemos la libertad de
693 regresar a esas fases, de volver a poner consignas, que a lo mejor implícitamente lo
694 tenemos en las clases.
695 E: El propósito de esta consigna, según señala es que los niños resuelvan otra hoja de
696 trabajo, es la número dos. En este sentido, la fase de acción vuelve a tener el mismo
697 propósito que la anterior pero, ahora en función de la hoja de trabajo dos. Usted señala que
698 solo la trabajen hasta donde está la línea negra, no más allá. Si gusta comenzamos con la
699 primera parte, en la idea de contextualizar un poquito la situación que usted plantea y luego
700 que nos señale cómo resolverían los niños esta actividad.

701 Israel: En las hojas anteriores me enfoqué más en trabajar la razón como comparación, aquí
702 pretendo que la razón se trabaje en forma de cociente o los resultados de la acción de
703 dividir. Por ejemplo, dice “van a rentar un mobiliario chico o de mesa chica y uno de mesa
704 grande” cada mobiliario tiene [...] como dijimos que en la fiesta iba a asistir mucha gente
705 le tuvieron que rentar de todo tipo de mesas y sillas. Entonces dijimos que en la mesa chica,
706 hay una capacidad de ciento treinta asientos para que se sienten ciento treinta personas
707 (escribe chica 130) y en la mesa grande hay una capacidad hasta para quinientos veinte
708 personas (escribe mesa grande 520). Aquí espero los alumnos analicen un poquito lo que es
709 el número de asientos ocupados y la capacidad total (escribe en el pintarrón no. De asientos
710 ocupados y capacidad total).

711 E: Si el propósito es que los alumnos contesten cuál mesa se encuentra más llena, ¿qué van
712 a decir los niños?

713 Israel: Creo que los niños van a decir que la mesa que se encuentra más llena es la mesa
714 grande, aunque no se les plantea que resuelvan con una operación, división o suma,
715 simplemente de la observación. Creo que los niños van a mencionar “dice qué mesa se
716 encuentra más llena”, van a decir la mesa que tiene cuatrocientos dieciséis [...] dijimos que
717 tienen la capacidad de ciento treinta y quinientos veinte, sin embargo, en esta mesa se
718 sentaron ciento diecisiete personas (escribe abajo del 130 el número 117) y en la otra mesa
719 cuatrocientos diecisiete (escribe abajo del 520 el número 416). Entonces aquí dice, ¿cuál
720 mesa está más llena? Van a decir en esta mesa (señala el número 416) porque son más que
721 en esta (señala 117); puede que exista la posibilidad de que algunos niños tomen en cuenta
722 esta cantidad de referencia (señala 130 y 520) que les estoy dando; pueden decir está más
723 llena la mesa chica (señala el 117) porque quizá sólo faltaron de sentarse lo que son trece
724 personas y puede que los niños van a decir porque aquí faltaron de sentarse ciento cuatro
725 personas (señala el número 520). Entonces en esta mesa faltaron más personas (señala la
726 mesa grande) que en esta (señala la mesa chica), por lo cual, casi está. Pueden existir otros
727 niños que este dato de referencia no lo van a ver, sólo van a identificar y, por eso van a
728 decir, está más llena la mesa donde se sentaron más personas, sin embargo, el propósito es
729 que tomen en consideración estas dos (señala 520 y 416).

730 E: En este caso, tenemos dos procedimientos que van emplear los niños; el primero se va
731 por la cantidad más grande, sin tomar como referencia la capacidad total y, el segundo,
732 puede ser que toman en cuenta los dos elementos y hacen lo que usted señala, sacan que
733 aquí faltan trece y aquí ciento cuatro asientos, así lo deducen.

734 E: ¿Cuál sería la respuesta correcta?

735 Israel: La correcta sería que la mesa chica está más llena que la mesa grande. Aquí quise
736 hacer un poco más conflictivo por la tendencia a irse por cantidades grandes, porque igual
737 pasa lo mismo con la fracción, decimos, por ejemplo, ¿qué vale más un medio o un cuarto?
738 (escribe en el pintarrón $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$). Casi siempre pasa lo mismo, cuando empezamos a trabajar
739 las fracciones dicen un cuarto vale más que un medio porque el cuarto es más grande que
740 un dos.

741 E: ¿Usted cree que esas son algunas de las dificultades que pueden tener los alumnos al
742 resolver ese planteamiento?

743 Israel: Si, existe casi siempre la tendencia de irse [...] cuando decimos que está más lleno,
744 tendemos a irnos por las cantidades más grandes, por eso creo que los niños van a remitirse
745 a eso, casi siempre se fijan en las cantidades cuando no hay un análisis o reflexión de los
746 datos.

747 E: Usted dice que la respuesta correcta es la mesa chica, ¿qué realizó para definirlo?

748 Israel: Muy bien, abajo en la siguiente actividad dice “para saber qué tan llena se encuentra
749 cada mesa, que es el grado de aglomeración, se describe como el número que permite
750 comparar [...] aquí por ejemplo, tenemos lo que es aglomeración dice para saber [...] por
751 ejemplo, los niños saben que es la mesa chica o la mesa grande, pero abajo es una forma de
752 comprobación para saber si ellos estuvieron correctos o si no para ver cómo se le hace.
753 E: ¿Qué es aglomeración?
754 Israel: Aglomeración es como la capacidad que tiene [...] o es que tan lleno se encuentra
755 algo [...] es como como la capacidad que tiene un recipiente para tener almacenado algo o
756 que tan lleno se encuentra. Por eso, encierro ese concepto porque se los voy a decir, sólo
757 que ahorita no lo tengo a la mano, porque se los voy a presentar.
758 E: ¿Cree que los niños manejan este concepto?
759 Israel: No sé si manejen este concepto porque a veces, como usted lo acaba de preguntar,
760 ni yo mismo lo domino. Entonces es cuestión de plantearlo así o plantearse de otro
761 concepto, pero quise plantearlo así porque es importante ir trabajando con los alumnos
762 algunos conceptos.
763 E: ¿Esta actividad la van a resolver al interior de los equipos?
764 Israel: Sí al interior de los equipos.
765 E: Van a leer lo que viene “para saber qué tan lleno está se encuentra [...]” después de que
766 visualicen esta información viene lo de grado de aglomeración, ¿usted se los va explicar
767 hasta la fase de institucionalización o mientras estén resolviendo la actividad en los equipos
768 va a pasar por si surgen inquietudes o qué va a hacer?
769 Israel: En ese sentido, voy a estar monitoreando a los alumnos para identificar cómo lo
770 están trabajando, por ejemplo, aquí mencionábamos que dice “el grado de aglomeración se
771 describe como el número que permite comparar [...]” aquí, por ejemplo, mencionamos uno
772 de los conceptos clave, más bien las palabras claves, que es la razón que es esa
773 comparación y dice “número de personas sentadas respecto al número de asientos”, aquí
774 nos permite tener de una forma más gráfica esa comparación y dice “grado de aglomeración
775 es igual al número de personas [...]” esa es la cantidad que está siendo comparada con un
776 número que damos de referencia, por ejemplo, aquí dice “encuentra que tan cerca están de
777 agotar la capacidad esas mesas [...]” y, por ejemplo, aquí menciona que la mesa chica [...] esta actividad la quise meter porque se presta mucho en números de decimales cerrados,
778 entonces aquí se expresa muy bien lo que es la razón como cociente, esa forma de
779 comparar. Por ejemplo, aquí lo que se pide a los niños está más sencillo son ciento
780 diecisiete sobre ciento treinta (escribe $117/130$) y está un cuadrado en blanco indica que los
781 niños anoten lo que obtuvieron, no creo que exista algún inconveniente porque se les está
782 dando qué deben de utilizar y luego por ejemplo en la mesa grande [...]
783 E: ¿Los alumnos van a colocar los datos?
784 Israel: Sí, es lo interesante, quiero que se fije en lo que tienen de referencia en los cuadrillos
785 que está en negro, por ejemplo, que es el número de personas, tengo que buscar cuál es el
786 número de personas; éste se les da como una pequeña referencia (señala $117 \div 130 = 0.9$),
787 para ver si lo hacen igual (señala las cantidades de la mesa grande). En el primer cuadrado
788 pues es el número de personas que son cuatrocientas, en cuánto lo vamos a dividir, pues en
789 el número de asientos que son quinientos veinte, aquí nos da cero punto ocho (escribe
790 $416 \div 520 = 0.8$) y para más adelante ver qué es lo que quiere decir eso.
791 E: Ahora la fase de formulación y la fase de validación es en función [...]
792 Israel: En función de cómo lo hicieron, cuál mesa está más llena que la otra.

794 E: Y después de esta fase de formulación y validación nuevamente viene otra de
795 institucionalización, aquí usted nos señala que la idea es institucionalizar lo que se vio en la
796 hoja de trabajo dos. Se va a apoyar en la diapositiva cuatro. Dice en este punto, será
797 necesario hacer mención del concepto de razón para retroalimentar lo institucionalizado por
798 las anteriores hojitas, entonces, ¿cómo va a trabajar esta actividad?

799 Israel: Se les va a presentar a los alumnos la siguiente diapositiva y menciona que un
800 número que permite comparar dos magnitudes [...] aquí por ejemplo, para no confundir lo
801 vamos a trabajar en vez de magnitud como una cantidad, porque esto lo saqué de un libro
802 que lo trabaja como magnitud pero, a veces magnitud se puede confundir con una distancia
803 [...] como una medida que nos permite obtener distancia. Aquí vamos a trabajarlo como
804 cantidades, voy a hacer esa corrección. Se les lee eso, dice “un número que permite
805 comparar dos magnitudes mediante un cociente o mediante el resultado como en el registro
806 de los tiros se llama razón”. Aquí, por ejemplo, estamos institucionalizando un poquito lo
807 que es este concepto [...] dijimos que la razón [...] aquí se les está diciendo a los alumnos
808 que la razón [...] para obtenerla la razón es igual a una cantidad que estamos comparando
809 sobre una cantidad de referencia que se da (escribe en el pintarrón), por ejemplo, se puede
810 retomar lo que es el trabajo con los tiros, un poquito de memoria didáctica, por ejemplo,
811 estábamos comparando el número de globos tronados, seis y, cuál es el número de
812 referencia que me da, pues el número de lanzamientos, ocho, quizá aquí es una forma más
813 formal de dar el concepto de razón; lo anterior, lo voy a trabajar en forma grupal.

814 E: Eso es respecto a la diapositiva y, en la última parte de la diapositiva, cómo se los
815 explicaría.

816 Israel: Para trabajar en la última parte es como lo que hicimos en la anterior, sólo que ahora
817 sí se las presento aquí, es como para ver si captan la idea de lo que se les quiere decir.

818 E: Después de la presentación de la diapositiva va a pedir a los alumnos que resuelvan la
819 última parte de la hoja de trabajo dos, ¿cómo espera que lo resuelvan los alumnos, cree que
820 van existir dificultades para resolverlo?

821 Israel: Dificultades [...] lo que me interesa más aquí es cómo ellos interpretan esa
822 información [...] no creo que existan muchas dificultades porque previamente se les va a
823 estar diciendo lo siguiente: “muy bien dice que el grado de aglomeración de la mesa chica
824 dijimos que era $117/130$ y es igual a 0.9 pero, qué significa esto [...]” a lo mejor para que
825 entiendan un poquito esto, va a ser importante como había mencionado, lo que es la
826 fracción por razón, abre paso a trabajar mucho lo que son otros conceptos como las
827 proporciones, los equivalentes, la probabilidad, también trabajamos la escala que es una
828 forma de razón y, en este caso, me va a brindar la posibilidad de trabajar lo que son los
829 porcentajes, por ejemplo, este (señala 0.9) al tratarlo como un porcentaje lo podemos tratar
830 como un 90% . Enseguida dice “el grado de aglomeración de punto nueve, nueve décimos
831 (señala 0.9) significa que el nueve [...]” bueno lo del porcentaje lo vamos a trabajar después
832 (borra el 90%), significa que nueve de cada diez sillas están ocupadas (escribe 9 de cada
833 10), esto es lo que me interesa (encierra el nueve y el diez), por ejemplo, lo que habíamos
834 mencionado del caso de los lápices, que por cada ocho lápices me regalaban dos (escribe
835 $2/8$) y aquí estamos volviendo igual a lo que es el valor unitario, que por cada diez sillas
836 están ocupadas nueve [...]

837 E: ¿En lo que nos explica se encuentra presente la razón?

838 Israel: Sí, porque estamos comparando número de asientos totales con las personas que
839 están sentadas en ellas. Eso también lo voy a trabajar con los alumnos en forma grupal.
840 Aquí dice lo que significa [...] nueve de cada diez asientos están ocupados o que sólo un

décimo del total de asientos no está ocupado y para eso se representa de forma gráfica (realiza una recta numérica en el pintarrón), esta recta está dividida en diez partes y, por ejemplo, viene coloreado nueve partes. Aquí vamos a tratar de comprender un poquito más la información, esta recta nos quiere decir que estos son diez asientos, pero de estos diez asientos solamente nueve están ocupados. Entonces estamos trabajando lo que es la razón y todo esto viene en proporción de 117/130, que corresponde a los lugares de la mesa chica. En términos generales, aquí nos da un número de referencia que se va a tomar en la siguiente hojita (señala el 10 como número de referencia).

Israel: Entonces una vez que los alumnos tiene esa información y se les explicó un poquito esto (señala la información del pintarrón) dice “expresa el grado de aglomeración de la mesa y colorea el siguiente gráfico”. Muy bien, pues si observamos este gráfico es igual a las gráficas que se les expresan (señala la hoja dos). Así que previamente estuvimos revisando lo otro y obtuvimos que 416/520 nos da 0.8, igual va a ser momento de decirles a los alumnos qué significa este número (señala 0.8). Como estaba en la diapositiva anterior, espero que a los alumnos se les quede esa información y que digan “ocho de cada diez asientos están ocupados” y aquí este mismo número de referencia (señala el 10). Entonces, diez es el número de referencia en la mesa chica y también es el número de referencia en la mesa grande; al ser estos dos números de referencia iguales me permiten una comparación entre estas dos cantidades. Aquí se les vuelve a presentar un gráfico (dibuja una recta numérica y la divide en diez partes), se les pide a los niños que nuevamente colorean, en este caso, ocho. Así, lo que quiero es que los niños analicen la anterior con la que estuvieron trabajando y, ahora sí, argumenten cuál mesa está más llena mediante estos dos gráficos (señala las rectas numéricas que están en el pintarrón). Alguien va a decir que la mesa chica está más llena porque es el primer ejemplo que trabajamos y quiero que comenten a qué se debe, espero que digan que por cada diez asientos están ocupados nueve, pero que en la mesa grande, por cada diez asientos ocuparon ocho, entonces sobran más en la mesa grande. También lo podemos trabajar por porcentajes, si esto fuera un cien por ciento (señala la dos rectas y escribe 100% a cada línea recta) podemos decir qué porcentaje está ocupando la mesa grande y sería un 80% de la mesa grande está ocupado, un 20% está libre. En el caso de la mesa chica, quiere decir que un 90% está ocupado y un 10% está libre. Ahora si se vuelve a retomar la pregunta, qué mesa se encuentra más llena, aquí espero que ahora sí se fijen en el porcentaje (encierre el 90% y el 80% en las tablas gráficas del pintarrón) o en la razón (señala 8 de 10) para que digan que la mesa chica. Me gustaría trabajar hasta los porcentajes, pero si no se entiende bien lo de los gráficos [...] porque aquí estamos hablando de 10 asientos, pero que tiene que ver 10 con los 520. Entonces si hay dificultades veré la posibilidad de trabajarlo con el porcentaje. Primero quiero hacerlo en forma individual y después socializar en el grupo; esto puede ser más explicativo por parte de los alumnos, el que hagan esta comparación (señala lo que está en el pintarrón) y pues aquí en la hoja de trabajo sólo tratan de colorear y de que lo resuelvan. Por ejemplo, a mí lo que me interesaría sería ver sobre el porcentaje que, de la mesa chica el 90% está ocupado y de la mesa grande solamente el 80%, así la mesa más llena es la mesa chica; ese es el propósito de esta actividad y la proyección. De esta manera, terminaría con la hoja de trabajo dos.

E: Al ver su situación didáctica nos encontramos con otra consigna número tres, ¿cuál es el propósito de esta consigna tres?

Israel: La consigna tres [...] esta actividad la rescaté de un libro de matemáticas de quinto grado de primaria del ciclo escolar 2012- 2013 porque en las siguientes ediciones

888 desaparece esta actividad, tiene la finalidad de trabajar la razón como proporcionalidad, por
889 ejemplo, si vemos, cada actividad a lo mejor está un poco larga, pero tratamos de trabajar
890 la razón desde diferentes perspectivas como cociente, proporcionalidad como fracción [...]
891 E: ¿Cuál es la tercera consigna que se va a dar a los niños?
892 Israel: Dice “para finalizar se les entregará la hoja de trabajo tres, organizados en los
893 mismos equipos resuelvan los problemas que aparecen en su hoja, recuerden que no se
894 puede estar platicando con otros equipos”. Para esta actividad les voy a dar un tiempo
895 limitado de diez minutos, es como para apresurarlos pero, quizá les puedo dar más tiempo.
896 De igual manera, se podrá hacer uso de calculadora, aquí me imagino voy a quitar eso de
897 hacer uso de calculadora porque son cantidades que quizás se pueden trabajar de manera
898 mental, no tanto de usar calculadora o de hacer procedimientos; esa sería la consigna.
899 E: ¿Cree que los alumnos tengan dificultades para resolver esta actividad?
900 Israel: Creo que no, está un poco sencilla, aunque no descartó la posibilidad de que si
901 existen algunas dificultades.
902 Israel: La hoja de trabajo tres trata de que para la comida el alcalde quiere mandar preparar
903 un rico pozole. Aquí tenemos una tabla que se le da a los alumnos de referencia sobre las
904 cantidades que se requiere de cada ingrediente para cinco personas [...] dice “se presenta la
905 ración que se necesita para cinco personas [...]” vienen los ingredientes y sus respectivas
906 cantidades. En términos generales, aquí menciona los ingredientes y la cantidad, se ve la
907 tablita y se analiza. Entonces para cinco personas, cuánto ocupamos de maíz, pues que un
908 kilo, para cinco personas cuánto ocupamos de carne, 750 gramos, para cinco personas
909 cuánto copamos de chile guajillo [...] así se va a estar un poquito comentando la
910 información que viene en la tabla [...]
911 E: Hasta donde vamos, ¿se hace presente la razón?
912 Israel: La razón se hace presente en qué parte [...] una vez que estuvimos trabajando lo
913 anterior con los niños [...] de que significaba el grado de aglomeración, por ejemplo, de que
914 ocho de cada diez y aquí lo que quiero [...] aquí viene en kilogramos, pero quiero también
915 ver si los niños los convierten en gramos, entonces vamos a trabajar esto [...] muy bien qué
916 significa esto (escribe en el pintarrón 5/1000) ,qué para cinco personas vamos a ocupar mil
917 gramos o un kilogramo de maíz y aquí es donde estamos haciendo esta comparación de
918 estas dos cantidades (señala el 5 y el 1000). Esta tabla me gustaría analizarla entre todos, de
919 forma grupal para que quede bien claro qué es la proporción para cinco personas y, por
920 ejemplo, cuánto se ocupa de agua para cinco personas, pues que 1.5 litros o 1500 mililitros.
921 Abajo viene un planteamiento que quiero lo resuelvan en equipo [...] cuánto de cada
922 ingrediente se necesita si se quiere preparar para ocho personas. Esta actividad, ahora que la
923 estoy analizando me gustaría cambiarla porque, por ejemplo, lo que vamos a tratar de hacer
924 es retomar lo que es el valor unitario [...] por ejemplo, dice “cuánto de cada ingrediente se
925 necesita si se quiere preparar para ocho personas [...]” si lo queremos dejar así vamos a
926 tener que [...] bueno lo voy a dejar mejor así [...] Porque si lo dejo en el valor unitario va a
927 ser más sencillo, pero vamos a tratar de problematizar (escribe en el pintarrón ingredientes
928 y luego cantidad y completa la tabla).
929 E: ¿Cómo espera que los niños resuelvan este planteamiento?
930 Israel: Espero que primero los niños retomen lo que es el valor unitario en esta actividad,
931 por ejemplo, estamos hablando de los ingredientes para una cantidad de ocho personas,
932 tenemos maíz, carne, chile, agua y sal (los escribe en la tabla en la columna de
933 ingredientes). Primero espero que los niños rescaten el valor unitario, por
934 ejemplo, tomando de referencia los datos anteriores de la tabla que se encuentra en la hoja

935 de trabajo, sabemos que de maíz para cinco personas ocupo mil gramos o un kilogramo
936 (escribe en el pintarrón 5 - 1000 gr (1kg.)). En quinto grado empiezan a trabajar lo que es
937 la regla de tres, por ejemplo, aquí quizá lo que espero que hagan los niños pueden ser dos
938 cosas; primero, realicen la regla de tres, que ocho lo multipliquen por 1000 gramos y lo
939 dividan entre cinco (escribe en el pintarrón 8 por 1000 entre 5) para obtener la cantidad de
940 maíz para ocho personas. La segunda forma que espero que hagan los niños puede ser
941 remitiéndonos al valor unitario, por ejemplo, que para cinco personas se ocuparon mil
942 gramos, entonces para una persona cuánto se ocupó, pues 200 gramos (escribe en el
943 pintarrón $1000/5 = 200/1$). Así sería que para una persona se ocuparían 200 gramos,
944 entonces cuánto se ocuparía para ocho personas [...] una vez teniendo el valor unitario sería
945 multiplicar 8×200 gramos, pasaría lo mismo con la carne, con el chile, con el agua y pues,
946 con la sal menciona es al gusto, igual no hay ningún cambio. Aquí lo que estamos
947 trabajando son las proporciones.

948 E: Usted dice que algunos niños van a usar la regla de tres, otros van a sacar el valor
949 unitario para resolver la actividad anterior. ¿Cree que los resultados de los niños coincidan
950 con lo esperado?

951 Israel: Espero que sí, porque a lo largo de los ciclos en la primaria se trabaja mucho este
952 tipo de tablas de proporciones , aunque la razón por la que quería cambiar esta actividad es
953 que siempre tendemos a partir de lo más sencillo, no dándoles el valor de cinco personas,
954 sino dándoles el valor de una persona, de que para una se ocupan 200 gramos de maíz.
955 Entonces creo que no va a haber mucho problema porque los niños trabajan esto muy
956 seguido, es decir, de que a veces les dan un dato y aquí está una incógnita (señala en la
957 segunda columna de la tabla) y luego tienen que buscar los demás datos para completar la
958 información de una tabla, por ejemplo, veo que en los libros de quinto año, porque los
959 estuve revisando, aparecen cantidades de hasta 40,000, cantidades grandes, por lo cual, no
960 creo que exista mucho problema, según lo que estuve viendo en los libros anteriores y que
961 casi siempre se parte del uno, es decir, si uno es a doscientos dos a cuánto es (lo escriben el
962 pintarrón 1 a 200 y 2 a 400) [...] pero siempre tendemos a dar el uno como el valor de
963 referencia inicial, lo que quiero aquí es empezar de más abajo, no regresar tanto el trabajo
964 con el valor unitario, aunque quizás se retome hasta después, porque cuando se les da a los
965 alumnos el valor unitario, se les está proporcionando mucha información.

966 E: ¿Cuál forma considera que es la correcta para que los alumnos resuelvan este
967 planteamiento?

968 Israel: Las dos formas considero que son las correctas, me imagino que ahorita pueden usar
969 la regla de tres porque la están viendo, pero lo ideal y es quizá la forma en lo que estoy
970 acostumbrado, es remitirse al valor unitario, a mí siempre me gustó mucho remitirme al
971 valor unitario porque conociendo el valor unitario puedo no solamente conocer la cantidad
972 para ocho personas, puedo conocer la cantidad de diez, de doce, de quince, en cambio aquí
973 solamente me da el valor de la cantidad que quiero buscar (señala el procedimiento de la
974 regla de tres).

975 E: ¿Cuáles serían las respuestas correctas para este planteamiento?

976 Israel: Sería ocho por doscientos es igual a mil seiscientos gramos de maíz para ocho
977 personas o uno punto seis kilogramos (lo escribe en el pintaron 1600 gr. 1.6 kg.). En la
978 carne se ocupan ciento cincuenta gramos que es el valor unitario porque son 750 gramos
979 para 5 personas [...] en la carne sería de 150 gramos y sería 1200 gramos o 1.2 kilogramos
980 para 8 personas (escribe en el pintaron 1200 gr. O 1.2 kg.), del chile se ocupan solamente
981 50 gramos que es el valor unitario, entonces para ocho personas serían 400 g (lo escribe en

982 el pintarron 50 gr. Y 400 gr.).Para el agua se ocupan 300 ml por persona y para ocho
 983 personas serían dos punto cuatro litros o dos mil cuatrocientos mililitros (escribe 2.4 litros o
 984 2400 ml) y la sal sería el gusto. Si los niños no llegan el valor unitario me gustaría
 985 trabajarlo con ellos [...] “bueno, tenemos para ocho personas, entonces cuánto se ocupará
 986 para una persona”.
 987 E: ¿Eso dónde lo va a trabajar?
 988 Israel: Me gustaría trabajarlo de forma extra, no se les va a proporcionar alguna tabla,
 989 puede que lo resuelvan aquí mismo en la hoja o que hagan una tablita, pero sí me gustaría
 990 los niños llegaran a trabajar el valor unitario, por ejemplo, aquí podríamos agregar más [...] Por
 991 ejemplo, si ahora el rey lo quiere servir para cuarenta invitados, cuánta cantidad de
 992 ingredientes se requiere [...] teniendo el valor unitario puede ayudar y puede ser más
 993 sencillo. Entonces sería trabajar esto (señala el pintarron) y me gustaría remitirme al valor
 994 unitario y después trabajar otras cantidades. Para eso, me gustaría cerrar con la
 995 institucionalización que viene enseguida.
 996 E: En la fase de formulación y validación se va a [...]
 997 Israel: Formular y validar los siguiente (señala lo que está en el pintarron) por qué o cómo
 998 los niños obtuvieron estas cantidades (señala las cantidades de la segunda columna de la
 999 tabla que corresponde a ocho personas).
 1000 E: En el caso de la institucionalización qué se va a realizar [...]
 1001 Israel: Dice que en este último momento se les va a hablar a los alumnos de lo que
 1002 estuvimos realizando, comparar razones, se leerá la siguiente definición más sintética [...] (empieza a borrar el pintarron). Aquí, por ejemplo, nos dice que “una razón es el cociente entre dos cantidades” y, quizás se van a preguntar cómo que el cociente, pues la razón aquí se presta mucho para trabajar el cociente como sigue, por ejemplo, de que la razón de maíz, si dijimos que era un kilogramo o mil gramos para cinco personas, la razón era de doscientos gramos (escribe 200 g), quiere decir que para una persona se le va a preparar con doscientos gramos de maíz, eso es un ejemplo de llegar a la razón como cociente, se pondrá otro ejemplo, en el ejercicio de pozole la razón entre la cantidad de maíz y el número de personas es el siguiente, por ejemplo, trabajando esto, es la cantidad de maíz con el número de personas (lo escriben el pintarron)y me gustaría terminar con alguna utilización que dice “el número obtenido al simplificar la fracción anterior de maíz, añadiendo por cada persona [...], podemos obtener así el resultado o simplificando (señala lo que está en el pintarrón cantidad 1000 gr. / no. Personas $5 = 200 \text{ gramos} / 1$), por ejemplo, mil entre cinco es igual a doscientos y así tenemos lo que es el valor unitario”. Me gustaría terminar con lo último, dice “así es más fácil saber la cantidad de maíz, por ejemplo, para siete personas”. Así, una vez que tengamos el valor unitario me gustaría trabajarlo no para ocho, sino para cuarenta, para siete, para quince personas, para encontrarle una utilidad a esto [...] dice podemos realizar el mismo procedimiento para saber la cantidad unitaria, así es más fácil saber las demás.
 1021 E: Esto que va a trabajar en la institucionalización, ¿cree que resulte fácil o difícil para los
 1022 alumnos?
 1023 Israel: Creo en un primer momento va a ser algo pesado de digerir por los alumnos porque
 1024 como mencionaba, creo que este concepto de razón como fracción tiene que seguirse
 1025 trabajando [...] En una de las investigaciones que revisé, mencionaba que en la teoría de
 1026 Vergnaud sobre los campos conceptuales para que un concepto adquiera un significado
 1027 para los alumnos tiene que irse trabajando gradualmente, pero tiene que seguir siendo
 1028 reforzado y que este concepto adquiere significado en situaciones problemáticas, que son

1029 las situaciones didácticas según el enfoque y que este concepto tiene significado mediante
1030 esas situaciones, no sólo dándoles la definición. Entonces, creo que a veces la definición
1031 pues a los alumnos se les puede olvidar, pero lo que quiero que se quede es las diferentes
1032 estrategias o las formas; quizá en este primer momento, puede que existan muchas
1033 complicaciones, depende como hayan trabajado con los maestros anteriores lo que son las
1034 fracciones, pero sí creo va a ser un poquito difícil por la carga quizá conceptual y de
1035 procedimiento que engloba muchas maneras de resolverlo, muchas estrategias y, por eso,
1036 creo va a estar un poquito complicado, pero igual se va a hacer la lucha de rescatar lo que
1037 se pueda.

1038 E: ¿Existe alguna razón entre la cantidad unitaria que señalaba en el caso anterior y la
1039 razón?

1040 Israel: Sí, por ejemplo el libro de quinto año del alumno expresa la razón como un valor
1041 unitario (escribe en el pintarrón razón 200/1); es por eso que para una persona se ocupa
1042 doscientos, que es lo mismo que mil gramos para cinco personas (escribe en el pintarrón
1043 1000/5), aquí es una comparación entre dos cantidades: mil sobre cinco, el número de
1044 personas en la que se toma de referencia, creo que esto también es una razón (señala la
1045 fracción 1000/5) el número que nos da, pero el valor unitario es una razón también (señala
1046 la fracción 200/1) porque igual, por ejemplo, si nos vamos ahora para ocho personas
1047 dijimos que eran mil seiscientos de todos modos esto (señala las fracciones que están en el
1048 pintarrón 200/1; 1000/5; 1600/8), sigue siendo lo mismo, sólo aumenta la cantidad, pero
1049 igual es una razón, es una comparación entre mil seiscientos con el número de personas o el
1050 número de personas con la cantidad de maíz que se requiere, pero para términos más
1051 sencillos no hay nada como remitirse también al valor unitario.

1052 E: Después de esto dice que va a plantear la resolución de la diapositiva cinco [...]

1053 Israel: La diapositiva es antes de la institucionalización [...] esta tablita (señala la de la hoja
1054 de trabajo) se va a estar trabajando para ocho personas y vamos a sacar el valor para ocho
1055 personas. Después de esto, voy a la institucionalización de que era más fácil conocer el
1056 valor unitario. Enseguida de dar esa pequeña institucionalización se pone esta diapositiva
1057 para conocer el valor unitario de las cantidades del pozole y se termina dando algunos
1058 ejemplos [...] ahora que sabemos cuánto es para una persona, cuánto será para siete, para
1059 diez; en esa parte me había confundido, es primero esta parte para ocho (señala la hoja de
1060 trabajo). Después ésta se revisa, vamos a lo que es la institucionalización y se retoma el
1061 valor unitario.

1062 E: ¿Cree que en esta última actividad los niños tengan dificultades?

1063 Israel: No creo que existan dificultades porque tratamos aquí de dividir para sacar la
1064 cantidad que nos da para cinco, para ocho (señala lo que está en el pizarrón 200/1; 1000/5;
1065 1600/8) sobre el número de personas, igual vamos a ver porque tenemos el valor para cinco
1066 personas, tenemos el número para ocho personas, podemos sacar cuánto será aquí para una
1067 persona (señala 1000/5) y cuánto será acá para una persona (señala 1600/8), sería mil sobre
1068 cinco nos da doscientos y mil seiscientos entre ocho nos da doscientos. Aquí también me
1069 permite tener dos datos como referencia para el valor unitario (señala las cantidades de
1070 200).

1071 E: ¿Cree que los niños contesten la tablita de manera adecuada con los datos correctos?

1072 Israel: Me imagino que sí porque los niños tienen dos cantidades, lo que es para cinco
1073 personas y para ocho personas y si retoman el valor para cinco personas o para ocho
1074 personas, creo que les va a dar el valor de doscientos, es decir, el valor unitario. Quizá
1075 puede que existan problemas de que algún niño quiera dividir cinco entre mil (5/1000) y lo

1076 que resulte diga que para una persona; ante eso, vamos a retomar lo que es la
1077 institucionalización que, para expresar la razón dijimos que era la cantidad sobre el número
1078 de personas (escribe en el pintarrón $\text{razón} = \text{cantidad} / \text{no. Personas}$). Aquí se va a
1079 reflexionar en qué posición está el número de personas, en qué posición está la cantidad
1080 (encierra en el pintarrón $\text{cantidad} / \text{no. Personas y } 5/1000$).

1081 E: Coméntenos cómo quedarían las respuestas para una persona.

1082 Israel: Para una persona de maíz se necesitarían doscientos gramos, de carne ciento
1083 cincuenta gramos, de chile cincuenta gramos y de agua trescientos mililitros y la sal sería al
1084 gusto. A partir de los valores unitarios me permite crear algunos ejemplos verbales con los
1085 alumnos, por ejemplo, cuánto se ocupará de carne para diez personas; aquí espero que
1086 exista una multiplicación, cuanto se necesitará de chile para quince personas y así puedo
1087 poner más ejemplos para aterrizar lo que son los conocimientos que revisamos en la clase.

1088 E: En términos generales, después de esto que acabamos de ver, ¿cuáles cree que son los
1089 momentos que debe de tomar en cuenta un maestro para favorecer la enseñanza de la razón
1090 como fracción?

1091 Israel: Para realizar la enseñanza del concepto de razón, el momento más importante para
1092 mí sería una buena institucionalización, porque aquí es donde se aterrizan esos saberes, que
1093 les da un nombre, una definición; se pueden poner quizá más ejemplos [...] si a los niños les
1094 pongo la actividad sin una institucionalización quizá la resuelven pero puede no se llegue a
1095 la reflexión de que estamos viendo razón.

1096 E: Entonces previo a la institucionalización, ¿qué cree que se debe trabajar?

1097 Israel: Una validación y antes una formulación, mencionaba todos los momentos son
1098 importantes pero, en lo que es la conceptualización, si es muy importante en ese momento
1099 de la institucionalización.

1100 E: Respecto a los niños, ¿cómo pudiera definir ese proceso por el que pasan para aprender,
1101 en este caso, la razón como significado de la fracción?

1102 Israel: Como le mencionaba, la teoría de campos conceptuales señala que los niños van
1103 construyendo sus conceptos o en este caso también su aprendizaje mediante un proceso, el
1104 cual se va construyendo, por ejemplo, para llegar a lo que es la razón (escribe en el
1105 pintarrón razón) hay antecedentes, por ejemplo, primero ven la fracción como una
1106 repartición de pasteles, por ejemplo, se va a repartir un pastel entre cinco personas, de
1107 cuánto les toca, pues de un quinto. Estamos viendo también la fracción como medida, por
1108 ejemplo, medio kilogramo, un cuarto, un octavo [...] entonces todos estos antecedentes: la
1109 fracción como medida, como cociente, como parte todo, permiten llegar a los niños a lo que
1110 es la fracción como razón porque como estuvimos viendo en las clases, la razón se ve como
1111 fracción cuando favorece conceptos como es la probabilidad, la proporción, el porcentaje,
1112 medida, es decir, toma herramientas que los niños debieron de haber adquirido.

1113 E: Por lo que usted señala, ¿se refiere a que el maestro inicia abordando otros significados
1114 de la fracción para llegar a profundizar en este?

1115 Israel: Sí, quizá se hace de forma indirecta o intrínseca, pero sí de forma indirecta se enseña
1116 la fracción [...] quizá los niños captan el significado de parte todo, de medida pero, sí es
1117 importante ir marcando qué tipo de fracciones se está trabajando porque a veces
1118 mencionamos que esto es la fracción (realiza un círculo en el pintarrón) sin embargo, la
1119 fracción también está fraccionada.

1120 E: De todas las actividades que diseñó, ¿cuál cree que es la medular?

1121 Israel: La más fuerte es la primera, porque quizá esa está un poco más abstracta, más
1122 compleja, porque en la primera tratamos de ir creando esas nociones sobre razón, de ir

1123 comparando el número de dardos y el número de tiros y, luego, representarlo en una
1124 fracción, después representarlo en un cociente y, en la segunda, ayuda más la gráfica, el
1125 utilizar la calculadora; aunque en las dos se utilizaba, pero si ayuda más, por ejemplo, como
1126 son datos más cerrados, si creo que esa es más de comparación. En la tercera estamos
1127 hablando de la razón como proporcionalidad, por lo tanto, creo que la primera es la
1128 principal, aunque todas llevan su grado de complejidad.

1129 E: ¿Cree que el estudio de la razón como significado de la fracción es un tema que interesa
1130 a los niños en las escuelas primarias?

1131 Israel: Para los maestros es un tema interesante para analizarlo, pero para los niños, a veces
1132 cuando les hablamos de fracciones son temas quizá aburridos, porque se trabaja mucho
1133 número, por ejemplo, la suma de fracciones (escribe $1/2$), porque los primeros años
1134 empezamos a trabajar con imágenes (realiza el dibujo de un círculo dividido en partes
1135 iguales), a partir de cuadritos, de trabajar unidades y enteros mediante gráficas o imágenes.
1136 Después se ponen simplemente números (escribe en el pintarrón $1/4$ y $1/8$): suma de
1137 fracciones, división de fracciones, resta de fracciones [...] a veces al hablar de la razón
1138 como fracción obviamente estamos hablando de fracciones, a veces para los niños no puede
1139 ser muy significativo porque aunque lo ven en su contexto no lo ubican bien dónde está.

1140 E: En términos generales, ¿cuál cree que es el conocimiento matemático que debe de poseer
1141 un profesor para enseñar, en este caso, la razón como fracción?

1142 Israel: El conocimiento matemático es todo lo relacionado primeramente con lo que es la
1143 fracción, por ejemplo, entender varios significados, tener una idea clara de lo que es una
1144 fracción, en qué situaciones podemos encontrar la fracción, por ejemplo, tener
1145 conocimiento de suma de fracciones, resta de fracciones, igual de los numeradores y
1146 denominadores. Entonces es una serie de conocimientos que debemos de tener todos los
1147 maestros para poder tratar cada parte de la fracción, porque a veces si desconocemos la
1148 fracción como medida, como parte-todo, como cociente, como proporción [...] a veces si se
1149 dificulta tratar estos temas porque queremos tratarlos como un todo, por eso es importante
1150 hacer hincapié en investigar, en documentarse y tener más conocimientos sobre el tema
1151 porque encontramos casos donde quizá una suma de fracciones se nos complica.

1152 E: ¿Cuáles son los conocimientos que cree debe de tener el maestro sobre cómo aprenden
1153 los niños, en este caso, de la razón como significado de la fracción, es decir, que debe de
1154 saber el maestro?

1155 Israel: Lo que debe de saber el maestro es que los alumnos pasan por un proceso, cuáles son
1156 algunos conocimientos, por ejemplo, podemos tener algunas teorías como la sociocultural
1157 que quizá parte del entorno u otras como la de Piaget y Vygotsky que nos hablan sobre la
1158 asimilación que los niños [...] por ejemplo, la valoración de conocimientos previos también
1159 está basada en una teoría y que los niños construyen en función de lo que saben, cada vez
1160 más van construyendo o solidificando o articulando cierta información de lo que saben con
1161 lo nuevo que se enseña. Por eso creo, algunos conocimientos pedagógicos o didácticos que
1162 debe tener el maestro de referente es que los niños van pasando por etapas, cada etapa es
1163 diferente, por ejemplo, para niños de quinto año se encuentran en la etapa de operaciones
1164 concretas, me parece en esta etapa es más favorable tratar con los niños algunos conceptos,
1165 algunas definiciones, algunos ejemplos, porque con los grados inferiores, que están en
1166 algunas etapas iniciales si es menos trabajar conceptos y definiciones. En esta etapa de
1167 operaciones concretas es favorable trabajar algunos conceptos [...] entonces son una serie
1168 de conocimientos que los maestros debemos de tener en cuenta y muchas teorías.

1169 E: ¿Cuáles actividades pudiéramos decir que pueden resultar fáciles para los alumnos?

1170 Israel: Creo que la más fácil es la de la tablita donde viene el número de globos tronados y
 1171 el número de lanzamientos en la hoja de trabajo uno, porque en este ejemplo se ve
 1172 información gráfica y después se traspasa a lo que era la hoja anterior [...]
 1173 E: ¿Cuál cree que es la actividad más difícil para los alumnos?
 1174 Israel: Considero que la actividad donde viene la cantidad de pozole que se necesita para
 1175 diferentes personas porque aquí se les da una referencia de lo que se necesita para cinco
 1176 personas y enseguida tienen que encontrar la cantidad para una persona, por lo cual, puede
 1177 estar un poco difícil y, en la hoja de trabajo número dos, lo que se me hace interesante son
 1178 las conceptualizaciones, por ejemplo, qué significa el punto nueve, es decir, nueve de cada
 1179 diez personas. Entonces aquí va haber quizá más problema de comprensión y en la
 1180 actividad del pozole quizá un problema más de ejecución.
 1181 E: En términos generales, ¿cuál es su opinión de este aprendizaje que va a abordar en esta
 1182 situación didáctica?
 1183 Israel: En términos generales, el aprendizaje es que los niños expresan mediante fracción o
 1184 cociente lo que es la razón entre dos cantidades. Es muy importante que los alumnos sepan
 1185 expresar este tipo [...] de dos cantidades, sepan expresar qué relación tienen, por ejemplo, la
 1186 relación entre el número de globos tronados con el número de lanzamientos, qué relación
 1187 tenía el número de asientos ocupados con el número de asientos total, qué relación tiene la
 1188 cantidad que se hace de pozole para cinco personas. Aquí es muy importante para el
 1189 aprendizaje esperado saber cómo representar esas cantidades que son diferentes. Es
 1190 importante saber cómo poder hacer ese tipo de comparaciones y saber expresarlas.
 1191 E: Para finalizar, ¿cómo se hace presente el enfoque de las matemáticas?
 1192 Israel: El enfoque de las matemáticas, según el programa de estudio de quinto año 2011,
 1193 menciona que es una secuencia de situaciones problemáticas. entonces dice que estas
 1194 situaciones problemáticas deben invitar a los alumnos a un gusto por las matemáticas, que
 1195 sean actividades novedosas, actividades que llamen la atención, que inviten a los alumnos a
 1196 reflexionar sobre sus procesos, que encuentren diferentes caminos para llegar al mismo
 1197 resultado, diferentes procedimientos y también que formulen argumentos que los ayuden a
 1198 validar sus procedimientos, sus resultados [...] entonces creo que el enfoque se hace
 1199 presente porque es una actividad novedosa, creo que les puede llamar la atención, hay
 1200 diferentes formas de llegar a un mismo resultado. también porque invitamos a los alumnos
 1201 a que hagan una reflexión del análisis de esos resultados que como mencionamos, pocas
 1202 veces se ve, muchas veces el profesor solamente revisa para ver si estás bien, aunque cada
 1203 compañero tenga algo diferente vale lo mismo [...] va muy relacionado al enfoque con las
 1204 competencias a desarrollar en los niños porque espero que aprendan a escuchar y ser
 1205 escuchados, que ellos mismos formulen, emitan un mensaje y den argumentos, que ellos
 1206 estén seguros y convencidos de lo que están diciendo y cómo lo hicieron, por lo cual creo,
 1207 que el enfoque se hace presente en las actividades.
 1208 E: ¿Cuáles son sus expectativas al aplicar esta situación didáctica?
 1209 Israel: Mis expectativas son muchas, que quede entendible el tema porque lo traté de hacer
 1210 problematizador y, a la vez, sencillo. Mi expectativa es que los niños realicen las
 1211 actividades sin inconveniente, aunque creo que siempre va a haber dudas. Espero aportar un
 1212 granito a los alumnos sobre este tema de las fracciones, que no vean que es algo aburrido o
 1213 algo tedioso que tiene su grado de complicación, pero que las matemáticas son divertidas y
 1214 las fracciones. En lo actitudinal y lo conductual espero que los niños atienden a las
 1215 situaciones que se plantean y pongan atención.

1216 E: En términos generales, ¿cuál ha sido su experiencia al diseñar esta situación didáctica?
1217 Israel: La experiencia al desarrollar esta situación didáctica fue muy agradable porque me
1218 ha ayudado a conocer más sobre la fracción, creía que la fracción era pues, una fracción un
1219 todo (dibuja un círculo en el pintarrón), sin embargo, el diseño de estas actividades me
1220 ayudó a darme cuenta que existen diferentes conceptualización de la fracción como parte
1221 todo, como medida, como razón [...] me ha aportado un acercamiento más directo a trabajar
1222 este tema con los alumnos porque no había tenido la oportunidad de tratar el tema de
1223 fracciones con niños y, en cuestión de lo didáctico, si va a ser un reto porque es la primera
1224 vez que trato este tema de fracciones con los niños. Por lo tanto, el diseño de esta situación
1225 didáctica me deja una experiencia muy agradable porque me motivó a investigar, leer
1226 libros, leer algunas investigaciones [...]
1227 E: Para cerrar, ¿algún comentario algún comentario que usted quiera externar?
1228 Israel: Se le va a aplicar a un grupo que a veces desconocemos los antecedentes que tienen
1229 con sus maestros en relación al tema, es un desafío, como un reto que nos va a ayudar tanto
1230 a los alumnos como a los docentes, aunque a veces aprendemos más nosotros como
1231 maestros que los niños. Entonces es una experiencia nueva que quiero aprovechar y espero
1232 obtener buenos resultados porque se puede abordar de muchas formas. En términos
1233 generales espero aportar algo a los alumnos y crecer en esta profesión.

ANEXO 5. Videograbación de clase de Daniela

- 1 Daniela: Niños necesito que pongan atención acá al frente. Ahora vamos a trabajar con esta
2 caja.
3 /Daniela toma una caja donde se almacenan huevos y la coloca a un costado del escritorio/
4 Daniela: Si yo quisiera representar mediante una fracción toda la caja, ¿qué fracción
5 tendría?
6 Aos: Un entero.
7 Daniela: Un entero, muy bien.
8 /Daniela toma un marcador/
9 Daniela: ¿Quién pasa a escribirlo?
10 /Los alumnos levantan la mano y la maestra le da el marcador a un alumno/
11 Ao: ¡Yo! ¿Escribirlo o dibujarlo?
12 Daniela: Nada más escribe un entero [...] Bueno dibuja la caja también.
13 /La maestra coloca bien la caja frente a los alumnos, mientras en el pintarrón un alumno
14 escribe el pintarrón “Un entero” y dibuja la caja /
15 Daniela: Si la tenemos así ¿Cuánto quedaría en fracción? /muestra la caja sin ninguna
16 división/
17 Aos: Un entero
18 Daniela: Ok, en su hojita vayan dibujando un entero, bueno, vayan dibujando la caja y
19 poniendo un entero [...] ¿Si?
20 /El alumno que estaba escribiendo en el pintarrón termina y regresa a borrar/
21 Aos: Al revés, al revés.
22 Aa: Al revés. Yo la hago.
23 /Una compañera le ayuda al dibujar la caja y la maestra señala lo que escribió el niño/
24 Daniela: Un entero [...] un entero lo represento con un número, ¿aquí qué le pondríamos?
25 Aos: Uno
26 /La alumna termina de dibujar la caja en el pintarrón, después el alumno la borra y vuelve a
27 dibujar otra/
28 Ao: ¿Así maestra?
29 Daniela: ¿Listo?, Muy bien [...] Entonces, este sería un entero, con un número quedaría un
30 [...]
31 Aos: Uno
32 /La maestra escribe en el pintarrón el número uno (1)/
33 Daniela: Ahora esta caja, yo la parto en dos, por aquí.
34 /Daniela introduce un pedazo de cartón por uno de los orificios que se hicieron en la caja
35 por la mitad/
36 Daniela: ¿En cuánto se divide?
37 Aos: En medios.
38 Daniela: En medios, ¿cuántos medios tengo?
39 Aos: Dos.
40 /Daniela coloca una botella en uno de los espacios que quedan en la caja/
41 Daniela: Ahora yo pongo esta botella aquí, ¿Qué parte de la caja está ocupando el
42 enjuague?
43 Aos: Un medio.
44 Daniela: ¿Por qué un medio?

45 Ao: No sé.

46 Daniela: Ponga atención. Ahora yo coloco dos de estos pedazos de cartones, ¿en qué está

47 dividida la caja?

48 Aos: En tercios.

49 Daniela: Y ahora, ¿cuánto espacio de la caja ocupa este?

50 /Daniela coloca un botella en un espacio de la caja/

51 Ao: Un tercio.

52 Daniela: Y si yo pongo el fabuloso y el agua ¿Cuánto?

53 Ao: Tres tercios.

54 Daniela: Entonces hay que dibujar esto en su hojita, y le ponen lo que representa en

55 fracción.

56 /Mientras los alumnos dibujan las representaciones fraccionarias, la maestra pone en el

57 pintarrón una lámina con algunas representaciones figurales de fracciones/

58 Daniela: ¿Si alcanzan a ver todos?

59 Aos: Sí

60 Daniela: ¿De este lado también?

61 /Los alumnos continúan haciendo lo dibujos de las fracciones que se representaron en la

62 caja y la maestra recorre los lugares para identificar lo que están haciendo los alumnos/

63 Daniela: ¡Listo!

64 /Los alumnos que ya terminaron observan la lámina que se colocó en el pintarrón y

65 comienzan a dar algunas respuestas, sin que la maestra se los haya solicitado/

66 Daniela: Muy bien, mientras terminan sus demás compañeros, ¿quién me ayuda a leer lo

67 que dice aquí?

68 /Los alumnos comienzan a levantar la mano y a leer/

69 Daniela: A ver [...] América me ayudas, por favor.

70 Ao: ¿Mande?

71 Daniela: América me va ayudar a leer, ¿qué dice aquí? /señala el título de la lámina/

72 Aa: ¿Qué representa?

73 Daniela: ¿Qué representa? Muy bien. ¿Qué se imaginan que vamos a hacer?

74 Aos: Fracciones.

75 Ao: Fracción.

76 Daniela: Las fracciones.

77 Ao: Suma de fracciones.

78 Aa: Las fracciones [...]

79 Ao: Que representa el dibujo [...]

80 Daniela: Muy bien, pues de todas las aportaciones que hicieron la de Jesús es la más

81 acertada. /Se refiere al alumno que expresa la última participación/

82 /La maestra señala a un alumno para que pase. Los alumnos se acercan al frente, a cada uno

83 se les entrega un tarjetita donde viene escrita una fracción ($1/6$; $1/2$; $1/10$; $2/4$) y la maestra

84 se las pega en su pecho/

85 Daniela: Fórmense, niños necesito que se pongan hacia el frente, para que se la muestren a

86 sus compañeros [...] Pero necesito que dejen ver los dibujos, así es que háganse un poquito

87 para allá [...] Muy bien.

88 /La maestra pasa más la frente a uno de los alumnos que se encuentran formados/

89 Daniela: A ver niños [...] este niño ¿qué fracción tiene? /señala el alumno que tiene un

90 décimo/

91 Aos: Un décimo

92 Daniela: Un décimo. ¿En qué parte creen que va?
 93 /Daniela señala los dibujos colocados en el pintarrón/
 94 Aos: ¡En los huevos! ¡En los huevos! [...]
 95 Ao: En los huevos.
 96 Daniela: ¿Por qué en los huevos?
 97 Ao: Está representado [...]
 98 Daniela: Está representado [...] ¿Cuántos huevos tenemos en total?
 99 Aos: Trescientos sesenta.
 100 Daniela: Trescientos sesenta y ¿cuántos huevos hay en la bolsa?
 101 Aos: Sesenta.
 102 Daniela: Sesenta, ¿qué parte de fracción es de aquí? /señala la caja que tiene escrito 360
 103 huevos/
 104 Aa: Un sexto porque [...]
 105 Daniela: Un sexto, ¿por qué?
 106 Aa: Porque seis por sesenta nos da trescientos sesenta. Trescientos sesenta lo dividimos
 107 entre sesenta nos da seis.
 108 Daniela: Muy bien [...]
 109 Ao: En el de mil doscientos, es un décimo; ciento veinte por diez son mil doscientos.
 110 Daniela: Entonces, ¿en dónde va?, ¿aquí o aquí? /señala la caja de huevos y la cantidad de
 111 1200/
 112 Aos: ¡Ahí, ahí...!
 113 Daniela: Entonces [...]¿En dónde?
 114 Aos: En el de mil doscientos.
 115 Daniela: ¿Si se entiende porqué en el de mil doscientos?
 116 Ao: Es un una décima parte ciento veinte de mil doscientos.
 117 Daniela: ¿Diana si se entiende aquí, porqué es un décimo?, ¿si Monse?
 118 /Los alumnos hacen un gesto de afirmación. El alumno que tiene la tarjeta con 1/10 lo pega
 119 en 120/
 120 Daniela: Ok, ¿quién sigue?
 121 /Pasa otro de los alumnos que están formados, que trae como valor fraccionario $\frac{1}{2}$ /
 122 Aos: En el círculo.
 123 Aa: Porque es la mitad de un entero.
 124 Daniela: Porque es la mitad de un entero, y ¿qué te hace pensar que esa es la mitad?
 125 Aa: ¿Cómo?
 126 Daniela: ¿Qué te hace pensar que esa es la mitad?
 127 Aa: Porque está coloreada la mitad, está dividido en dos el círculo.
 128 Daniela: Entonces, ¿dónde vamos a poner el medio?
 129 Aos: En el círculo.
 130 Ao: Y también en el de los verdes.
 131 Aos: Pero es más representable en el círculo.
 132 /Pasa otro alumno de los que tienen la tarjetita con el valor fraccionario de $\frac{1}{6}$ /
 133 Ao: Un sexto.
 134 Aos: En los huevos [...]
 135 Aa: En los huevos de gallina.
 136 Daniela: ¿Por qué?
 137 Aa: Porque tienen [...]
 138 Aa: Ya sabemos que sesenta por sesenta da trescientos sesenta, es un sexto.

139 Daniela: ¿Sí? [...] ¿Sí Jesús?
 140 Ao: Entonces también sé otro [...] pero se me olvidó. Es que haga de cuenta que seis por
 141 seis, treinta y seis.
 142 Daniela: Muy bien este es otro procedimiento que podemos hacer. Entonces ¿en dónde
 143 ponemos el sexto?
 144 /El alumno señala el espacio en donde está el dibujo de la caja de huevos/
 145 Daniela: Ahora tenemos dos cuartos [...]
 146 Aa: Es donde están las rayitas [...]
 147 Daniela: A ver América ¿Por qué?
 148 Aa: Porque como están [...] están encerradas, están divididas en octavos y como está son
 149 cuatro /señala el círculo que tiene dos octavos/, entonces son dos octavos, son dos círculos
 150 y los dos tienen dos [...]
 151 Daniela: A ver Chino [...]
 152 Ao: Cuatro octavos es igual a un medio y dos cuartos es igual a un medio, así que es lo
 153 mismo [...] Y así que si le quitamos [...] si le quitamos los cuatro coloreados de los
 154 octavos y nada más guardamos dos octavos, ya quedan cuartos y no más quedan dos
 155 cuartos y es la mitad.
 156 Aa: Juntando dos octavos, serían un cuarto y juntando otros dos octavos forma otro cuarto
 157 y, un cuarto más un cuarto, forman dos cuartos.
 158 Daniela: Muy bien [...]
 159 Aa: Es que los palitos que están encerrados son cuatro y el total de rayitas son ocho,
 160 entonces son cuatro octavos, y cuatro octavos es equivalente a dos cuartos, que es
 161 equivalente a un medio.
 162 Daniela: Muy bien, lo colocamos aquí /señala la figura que representa dos cuartos/
 163 /La maestra ha repartido una hoja de trabajo a los alumnos, se encuentra colocada al frente,
 164 mostrando una de las hojas de trabajo a los alumnos/
 165 Daniela: Todos en la hoja que tiene un cuadrado así, ¿verdad? /señala la hoja de trabajo que
 166 tiene el rectángulo con el borde grueso/
 167 Aos: Sí
 168 Daniela: Ok. Dice: escuela, nombre del alumno, grado y grupo, hay que poner sus datos,
 169 ¿sí? Su nombre, escuela, el grado y grupo.
 170 /Los alumnos se encuentran escribiendo los datos que se solicitan en la hoja de trabajo/
 171 Daniela: ¿Listo?
 172 Aa: Yo no tengo maestra...
 173 Daniela: A ver Joseline. Entonces hay que anotar aquí su nombre. ¿Ya está su nombre
 174 niños?
 175 Aos: Sí [...]
 176 /La maestra pasa por los lugares para identificar que los alumnos terminen de llenar los
 177 datos/
 178 Daniela: ¡Listo!, ¿ya tiene todos su nombre?
 179 Aos: Sí.
 180 Daniela: ¿Quién me quiere ayudar a leer el primer punto?, a ver alguien que lea fuerte y
 181 claro [...] Yose, ¿me ayudas?
 182 Aa: Resuelve el siguiente planteamiento de manera individual, puedes usar calculadora
 183 pero anota tus procedimientos.

184 Daniela: Muy bien niños, como los estuve observando, vamos a quitar algo que dice [...],
 185 para resolver el problema va a ser sin calculadora. Y las operaciones que realicen me las
 186 van a hacer aquí abajito donde dice [...]
 187 Aos: Procedimiento
 188 Daniela: Procedimiento. Si no alcanzan de espacio en la parte de atrás. A ver, ¿si quedó
 189 claro lo que van a hacer?
 190 Aos: ¡Sí!
 191 Daniela: A ver Diana, ¿qué vamos a hacer?
 192 Aa: Vamos a hacer esto /señala la hoja que les entregó la maestra/
 193 Daniela: Vamos a hacer eso, y ¿cómo le vamos a hacer?
 194 Ao: Sin calculadora.
 195 Daniela: Sin calculadora. ¿De manera individual o en equipos?
 196 Aos: ¡En equipos!
 197 Daniela: Es de manera individual [...] ustedes solitos como ustedes puedan. ¿Sí? Como
 198 ustedes puedan.
 199 /Los alumnos comienzan a leer el primer planteamiento y a contestar. Un alumno se acerca
 200 a la maestra para preguntarle acerca del trabajo/
 201 Ao: ¿Aquí no le entiendo?
 202 Daniela: ¿Te acuerdas lo que estuvimos haciendo con la caja?
 203 Ao: Que había espacios [...]
 204 Daniela: Muy bien, es algo parecido [...] como tú puedas.
 205 /Una alumna pregunta a la maestra, esta lee el planteamiento de la hoja de trabajo/
 206 Daniela: Contesta estas preguntas como tú le entiendas [...]
 207 /Los alumnos contestan, mientras la maestra da recorridos por los lugares de los niños/
 208 Ao: Maestra ya acabé.
 209 Daniela: ¿Ya?, espéranos un momentito [...]
 210 /La maestra se sigue acercando a los lugares de los alumnos que tiene alguna duda/
 211 Aos: Maestra [...]
 212 /Algunos alumnos comienza a llamar a la maestra para indicarle que ya han terminado de
 213 resolver el planteamiento/
 214 Ao: Maestra ¿Tenemos que hacer esto todos juntos?
 215 /El alumno le muestra otras de las hojas de trabajo que les mostró la maestra/
 216 Daniela: Esa la vamos a hacer todos juntos. Niños, ¿quién terminó de contestar esa hojita?
 217 Este [...] ¿Hay dudas para contestar la primera pregunta?
 218 Aos: ¡No! /Algunos no contestan/
 219 Daniela: Levanten la mano quién tuvo dudas para contestar la primera.
 220 /Algunos alumnos levantan la mano/
 221 Ao: Yo primero [...] pero ya [...]
 222 Daniela: ¿Para contestar la segunda?
 223 Aos: ¡No!
 224 Ao: No, ni yo.
 225 Daniela: ¿La tercera?
 226 Aos: ¡No!
 227 Daniela: ¿La cuarta?
 228 Aos: ¡Sí!
 229 Ao: Yo sí, mucho.
 230 Ao: Yo tuve poquito [...] pero sí.

231 Daniela: ¿Qué fue lo que no entendieron de la cuarta pregunta?
 232 Aa: ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y lechugas?
 233 Daniela: Entonces [...] ahorita, vamos a ver lo que es la razón. Les voy a pedir de favor que
 234 [...] en la hojita que están trabajando ahí la dejen [...]
 235 /La maestra hace una señal, donde los alumnos entienden que dejen la actividad/
 236 Daniela: Entonces [...]
 237 Ao: ¿Si puedo hacer esto yo?
 238 Daniela: Espéreme [...] entonces, ¿todos ya tienen esta hoja /señala la que dice
 239 planteamiento 1 “pastel partido”/?
 240 Aos: ¡Sí!
 241 Daniela: Vamos a contestarla entre todos [...] ¿Si niños? A ver hasta donde llegaron
 242 /Los alumnos se ubican en la hoja de trabajo que la maestra les indica/
 243 Daniela: A ver, en el planteamiento número 1. ¿Cómo se llama el planteamiento número 1?
 244 Monse [...]
 245 Aa: Pastel partido.
 246 Daniela: Dice planteamiento 1, “Pastel partido”.
 247 /Daniela se acerca a una de las alumnos para indicar que le ayude a leer/
 248 Aa: Un pastel está partido para cuatro niños ¿Cuánto le toca a cada niño?
 249 Aos: Un cuarto.
 250 Daniela: A ver, Monse pásale a anotarlo al pintarrón, dice que un pastel es repartido a
 251 cuatro niños [...] Entonces ¿Cuánto le toca a un niño? /la niña escribe $\frac{1}{4}$ en el pintarrón/
 252 Aos: Un cuarto.
 253 Daniela: Si dos niños juntan su pedazo de pastel ¿cuánto se forma?
 254 Aos: Dos cuartos.
 255 Daniela: ¿Y si tres niños los juntan?
 256 Aa: Tres cuartos.
 257 Daniela: Serán tres cuartos, ok. Entonces, ¿qué respuesta va en la primera pregunta?
 258 Aos: Un cuarto.
 259 Daniela: Yose, ¿si le entendiste? /La niña le hace una señal de que sí le entendió/
 260 Daniela: Sí, ¿por qué Yose?
 261 Aa: Porque tenemos así, una ruedita y esta partida en cuartos, agarramos uno y se forma un
 262 cuarto.
 263 Daniela: Agarramos uno para dárselo a un [...]
 264 Aos: Niño
 265 Daniela: ¿Cuántos niños son?
 266 Aos: Cuatro.
 267 Daniela: Muy bien. En la siguiente pregunta América, ¿me ayudas? Si ahora [...]
 268 Aa: Si ahora son ocho niños y les toca una parte de pastel igual a los niños anteriores,
 269 ¿Cuántos pasteles son repartidos para estos ocho niños?
 270 Aos: Dos.
 271 Daniela: ¿Por qué vamos a ocupar dos pasteles?
 272 Ao: Porque un pastel [...] tiene uno en cuatro, cuatro cuartos [...]
 273 Daniela: Cuatro cuartos.
 274 Ao: Y más otros cuatro cuartos, se forman ocho cuartos.
 275 Daniela: Pero, ¿por qué son otros cuatro cuartos?
 276 Ao: Para repartir a los otros cuatro niños.
 277 Daniela: Entonces, ¿cuál es la respuesta?

278 Aos: Dos.
 279 Daniela: Chino, me ayudas a leer la siguiente indicación.
 280 Ao: Contesta la siguiente tabla, numero de pasteles, número de niños.
 281 Daniela: Número de pasteles ¿Cuántos pasteles tenemos? [...]
 282 Aos: Uno.
 283 Daniela: ¿Para cuántos niños es ese pastel?
 284 Aos: Cuatro.
 285 Daniela: Un pastel es para [...] ¿cuántos niños?
 286 Aos: Cuatro
 287 /Daniela anota las cantidades en el pintarrón “1 para 4”/
 288 Daniela: Uno para cuatro.
 289 Aa: Y dos pasteles son para ocho niños.
 290 Daniela: A ver Diana, si tenemos los ocho niños, ¿cuántos pasteles vamos a ocupar?
 291 Aa: Dos [...]
 292 Daniela: ¿Si estamos de acuerdo con esa respuesta?
 293 Aos: Sí.
 294 /Daniela escribe en el pintarrón “2 para 8”/
 295 Daniela: A ver y si yo tuviera aquí [...] Doce niños, ¿cuántos pasteles necesito?
 296 Aos: Tres
 297 Daniela: Y ¿si tuviera 40 niños?
 298 Aos: Diez /La maestra escribe en el pintarrón “3 para 12” y “10 para 40”/
 299 Daniela: Entonces [...] Uno para [...]
 300 Aos: Cuatro
 301 Daniela: Dos pasteles para [...]
 302 Aos: Ocho
 303 Aos: Tres para doce.
 304 Aos: Y diez para cuarenta.
 305 Daniela: ¡Qué listos! Ahora en el cuadrito que tenemos dice: “Un pastel para cuatro”
 306 Ao: Dos pasteles para ocho niños.
 307 Daniela: Es muy, ¿fácil o difícil?
 308 Aos: Fácil
 309 Daniela: ¿Listo?
 310 Aos: Sí
 311 Daniela: A ver Karina, el siguiente.
 312 Aa: Caritas y corazones ¿Cuántos corazones hay en el rectángulo?
 313 Aos: Cuatro.
 314 Daniela: Muy bien y, ¿cuántas caritas?
 315 Ao: Lo doble, ocho.
 316 Daniela: A ver Erik, ¿qué sigue?
 317 Ao: Si a los corazones se les repartieron el número total de caritas, ¿Cuántas caritas les toca
 318 a cada corazón?
 319 Aos: Dos.
 320 Daniela: Muy bien pero, ¿por qué dos?
 321 Aos: Porque cuatro por dos son ocho.
 322 Ao: Porque un corazón tiene [...] son cuatro corazones y tenemos ocho caritas, les toca de
 323 dos caritas a un corazón.
 324 Ao: Son cuatro por dos ocho.

325 Daniela: Muy bien. Entonces, ¿qué va en esa pregunta?

326 Aos: Dos.

327 Daniela: Si porque si se repartieran las caritas para los corazones [...] Ok dos para cada

328 uno. Ahora dice en el rectángulo [...] Deisy, ¿me ayudas?

329 Aa: En el rectángulo hay [...]

330 Aos: Cuatro corazones [...] para ocho caritas.

331 /Daniela anota estas cantidades en el pintarrón/

332 Ao: Ya le entendí [...] ocho caritas para cuatro corazones.

333 Daniela: Ocho caritas para cuatro corazones.

334 Ao: Así es.

335 Daniela: Aquí tengo cuatro corazones para ocho caritas, ahora ocho caritas para cuatro

336 corazones.

337 Ao: Es al contrario [...]

338 Daniela: ¿Quién me ayuda a leer donde dice “Para saber más”?

339 Ao: Para saber más. Se utiliza el símbolo de los dos puntos para indicar una comparación

340 entre dos cantidades.

341 Daniela: ¿Para qué ocupamos ese símbolo de los dos puntos niños?

342 Aa: Para indicar una comparación entre dos cantidades.

343 Daniela: Una comparación entre dos cantidades. Cuando tenemos aquí cuatro corazones

344 para ocho caritas, ¿estaremos comparando cantidades?

345 Aos: Sí.

346 Daniela: ¿Si estamos comparando cantidades, cuando decimos: Un pastel para cuántos

347 niños?

348 Aos: Cuatro.

349 Daniela: ¿Estaremos comparando las cantidades?

350 Aos: No

351 Daniela: ¿Por qué no? [...] ¿Hay una relación entre este número y este número?

352 /Daniela señala las cantidades de pastel y las cantidades de los niños/

353 Aos: Sí.

354 Daniela: ¿Si hay una relación? [...] ¿Por qué América?

355 Aa: Porque [...]

356 Daniela: A ver acuérdense del problema [...] Éste [...] ¿Qué representa? /señala el uno de la

357 cantidad 1 para 4 que está en el pintarrón/

358 Aos: Un pastel, un entero [...]

359 Daniela: Y, ¿este?

360 Aos: Cuatro niños.

361 Daniela: ¿Estarán relacionadas estas cantidades?

362 Aos: Sí.

363 Daniela: Hay relación [...] cuando hay relación entre las cantidades, también se dice que

364 hay una comparación [...] Entonces, ¿será correcto que yo ponga estos dos puntitos aquí?

365 /Daniela escribe el símbolo “:” en el pintarrón, entre el ocho y el cuatro/

366 Daniela: ¿Qué significan estos puntitos? A ver [...] levanten la mano.

367 Aos: Es una comparación.

368 Daniela: Es una comparación.

369 Aa: Que es igual.

370 Daniela: ¿Qué es igual? ¿Si será igual?

371 Aa: No, que es un sí, que es una comparación.

372 Daniela: Es una comparación.
 373 Ao: Que es lo mismo [...]
 374 Daniela: ¿Será los mismo? ¿El uno es lo mismo que el cuatro?
 375 Aos: No.
 376 Daniela: Porque hay una relación entre estos dos números /señala el 8 y el 4/ Entonces se
 377 llama comparación cuando los números están relacionados. Vuelvo a preguntar, ¿éste y éste
 378 estarán relacionados?
 379 Aos: Sí.
 380 Daniela: Vamos al ejemplo de caritas y corazones, ¿cuántos corazones tenemos?
 381 Aos: Cuatro.
 382 Daniela: Y, ¿cuántas caritas?
 383 Aos: Ocho /Daniela escribe en el pintarrón 4 y 8/.
 384 Daniela: Cuando yo tengo un corazón, ¿cuántas caritas van a ser? /Escribe en el pintarrón el
 385 1/
 386 Ao: Dos.
 387 Daniela: ¿Cuántas Jesús?
 388 Ao: Dos.
 389 Daniela: Dos [...] ¿Por qué dos?
 390 Ao: Porque son ocho caritas y ocho corazones.
 391 Daniela: ¿Si le entendemos a Jesús?
 392 Ao: No. Si multiplicamos cuatro caritas por dos corazones nos da ocho. Son dos caritas
 393 para un corazón /Daniela escribe en el pintarrón 1 y 2/
 394 Daniela: ¿Depende del número de corazones para el número de caritas?
 395 Aos: Sí.
 396 Daniela: ¿Depende del número de un corazón para el numero de las caritas?
 397 Aos: Sí.
 398 Daniela: ¿Hay relación entre los números?
 399 Aos: Sí.
 400 Daniela: ¿Se está haciendo comparación?
 401 Aos: Sí.
 402 Daniela: Entonces, ¿es correcto poner los dos puntitos?
 403 Aos: Sí.
 404 Daniela: Muy bien [...] Ya entendimos por qué son los dos puntitos, ¿verdad? Vamos pues
 405 con el tercer [...] /Daniela agrega dos puntos a las cantidades que están en el pintarrón:
 406 4:8; 1:2/
 407 Ao: Aquí dice que es el significado de los números.
 408 Daniela: Dice el significado [...]
 409 Aa: ¡Yo leo!
 410 Daniela: A ver [...] planteamiento tres, ¿cómo se llama?
 411 Aos: Tiras de papel.
 412 Aa: Observa la siguiente tira de papel, ¿qué fracción de la tira de papel ocupa los cuadritos
 413 coloreados?
 414 Aos: Un tercio.
 415 Aos: Tres novenos; un tercio.
 416 Ao: Porque están tres cuadritos pintados de negro y son nueve cuadritos en total.
 417 Daniela: Muy bien, esos son tres novenos, ¿nada más lo puedo poner como tres novenos?
 418 Aos: No, un tercio /Escribe en el pintarrón 3/9 y 1/3 /

419 Daniela: ¿Es correcto? /Señala $3/9$ y $1/3$ /
 420 Aos: Sí.
 421 Daniela: Dice, ¿cuántas tiras de papel hay?
 422 Aos: Tres.
 423 Daniela: A ver, analicen bien la pregunta.
 424 Aa: Una.
 425 Aos: Hay una tira.
 426 Daniela: ¿Cuántos cuadritos oscuros hay en la tira de papel?
 427 Aos: Tres.
 428 Daniela: Muy bien. En el siguiente enunciado dice [...] está un cuadrito en blanco, ¿cuántas
 429 tiras tenemos?
 430 Aos: Una.
 431 Daniela: En una tira [...]
 432 Aa: Hay tres cuadritos oscuros.
 433 Daniela: Hay tres cuadritos oscuros. ¿Sí? ¿Estamos de acuerdo? En una tira hay tres
 434 cuadritos oscuros. En la parte de abajo [...] A ver estos dos puntitos dijimos que eran para
 435 hacer comparaciones [...] Si en una tira de papel hay tres cuadritos oscuros, ¿Si servirán
 436 estos puntitos? /La maestra escribe en el pintarrón $1:3$ /
 437 Aos: Si [...]
 438 Daniela: Muy bien [...] Entonces es lo que vamos a poner en la parte de abajo.
 439 Daniela: Vamos a leer la siguiente pregunta, Erik ¿Me ayudas? Contesta [...]
 440 Ao: Contesta el siguiente cuestionamiento, es la comparación entre cantidades y también se
 441 puede representar mediante una fracción.
 442 Daniela: ¿Si entienden la pregunta?
 443 Aos: Razón.
 444 Daniela: Es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una
 445 fracción [...] a) Fracción b) Suma o c) Razón
 446 Aos: Razón.
 447 Daniela: Ahorita van a ver por qué la razón. Bien, nos vamos a un ejemplo de los pasteles.
 448 Un pastel es para ¿Cuántos niños?
 449 Aos: Cuatro.
 450 Daniela: Para cuatro niños, dos para [...]
 451 Aos: Para ocho.
 452 /Daniela está escribiendo las cantidades en el pintarrón: $1:4$; $2:8$; $3:12$; $4:16$ /
 453 Daniela: Tres para doce [...]
 454 Aa: Cuatro para dieciséis.
 455 Daniela: A ver, ¿quién me quiere venir a encerrar una razón?
 456 Aa: Yo.
 457 Daniela: La razón [...] ¿Quién dice yo? A ver América
 458 Daniela: De estas tres /señala las cantidades que anteriormente escribió en el pintarrón/
 459 ¿cuál sería la razón?
 460 /América encierra la primera " $1:4$ "/
 461 Daniela: ¿Quién más? A ver pásale [...]
 462 /Pasa otro niño y encierra la tercera " $3:12$ "/
 463 Daniela: ¿Quién más?
 464 Aos: Yo.
 465 /Otro alumno encierra la segunda " $2:8$ " /

466 Aa: Yo maestra.
 467 /La alumna los encierra todos/
 468 Daniela: ¿Listo? A ver, ¿quién cree que está bien?
 469 Ao: Ernesto.
 470 Ao: El de Dianey.
 471 Daniela: ¿Por qué el de Dianey?
 472 Ao: Porque todos están bien.
 473 Ao: Es lo doble [...]
 474 Daniela: Es lo doble.
 475 Ao: En todos hay comparación [...]
 476 Ao: Porque esta es la doble y la triple, pero toda la comparación es esto.
 477 Daniela: Muy bien. ¿Es una qué?
 478 Aos: Es una comparación.
 479 /Daniela señala las cantidades que están anotadas en el pintarrón: 1:4; 2:8; 3:12; 4:16;
 480 mientras pregunta: /
 481 Daniela: ¿Estoy comparando éste con éste? /Señala cantidades en el pintarrón/
 482 Aos: Sí.
 483 Daniela: ¿Tienen relación éste y éste? /Señala las cantidades que están en el pintarrón/
 484 Aos: Sí.
 485 Daniela: ¿Éste y éste? /Señala las cantidades que están en el pintarrón/
 486 Aos: Sí.
 487 Aa: Porque todos son comparaciones, lo mismo que dije hace rato, por eso todos están bien.
 488 Daniela: Ahora, ustedes se van a preguntar y, ¿esto qué tiene de relación con las
 489 fracciones? ¿Verdad? Entonces aquí nos vamos al cuadrito, a la tablita que tienen en su
 490 hoja. Dice planteamientos, aquí dice fracción, ¿aquí qué creen que va? /señala la segunda
 491 columna de la tabla que lleva como título “registremos los resultados”/
 492 Ao: La razón
 493 Daniela: ¿Una qué? /Daniela dibuja en el pintarrón una tabla igual a la que tienen en su
 494 hoja/
 495 Aa: Comparación [...]
 496 Daniela: Razón o comparación [...] /Y lo anota en el pintarrón en la tabla que previamente
 497 elaboró/
 498 Daniela: Fíjense bien cómo se escribe razón [...] ¿Si?
 499 Daniela: En el pastel partido. ¿Cuál sería la razón?
 500 Aa: Uno dos puntos, cuatro y [...] /La maestra escribe en la tabla 1:4/
 501 Daniela: A ver uno, dos puntos y cuatro. Entonces, ¿si entendemos porque los dos puntos?
 502 Es como si dijéramos un pastel para [...]
 503 Aos: Cuatro [...] cuatro niños.
 504 Daniela: En fracción, ¿cómo quedaría?
 505 Aos: Un cuarto.
 506 Daniela: A ver, ¿por qué un cuarto?
 507 Ao: Porque es un pastel para cuatro niños, es la cuarta parte de un entero [...]
 508 Daniela: Muy bien, le toca un cuarto a cada niño. A ver la siguiente razón [...]
 509 /La maestra le entrega el marcador a un alumno indicándole que pasara al pintarrón a
 510 escribir 1/4/
 511 Daniela: Ahora vamos por las caritas. ¿Cuál sería la razón de las caritas y corazones?
 512 /Una alumna escribe en el pintarrón 2: 1/

513 Daniela: ¿Por qué pusiste dos a uno?
 514 Aa: Porque son dos caritas para un corazón.
 515 Daniela: Porque son dos caritas para un corazón. Muy bien y, ¿si lo ponemos al revés?
 516 /La alumna lo borra/
 517 Daniela: Así déjalo, colocas una aquí y otra aquí [...]
 518 /La alumna escribe: 2:1; 1:2/
 519 Daniela: A ver niños, ¿está bien la respuesta?
 520 Aos: Sí.
 521 Daniela: Dos caritas para un corazón, y también podemos decir que un corazón para [...]
 522 ¿Cuántas caritas?
 523 Aos: Para dos.
 524 Daniela: Para dos. Muy bien. La siguiente:
 525 /Pasa una de las alumnas/
 526 Daniela: Una tira de papel para [...] ¿Cuántos cuadritos oscuros?
 527 Aa: Para tres.
 528 /La alumna escribe 1:3/
 529 Daniela: A ver Perla pásale.
 530 /La alumna pasa/
 531 Daniela: ¿Cuánto sería en fracción, en caritas y corazones?
 532 /La alumna escribe $\frac{1}{2}$ /
 533 Daniela: Muy bien [...] Pásale Monse , en tiras de papel, ¿cuánto quedaría en fracción?
 534 /Pasa Monse y escribe $\frac{1}{3}$ /
 535 Daniela: Muy bien.
 536 Ao: Yo tengo otra en tiras de papel.
 537 Daniela: A ver pásale José. ¿Quién más tiene otros resultados para la tablita?
 538 /José pasa al pintarrón y anota 3:9 /
 539 Daniela: Muy bien [...]
 540 Daniela: ¿Aquí qué me está representando un medio Jesús? /señala en caritas y corazones/
 541 Ao: Un entero repartido en dos [...]
 542 Daniela: Un entero repartido en dos, pero ¿por qué aquí en este, en el de caritas y
 543 corazones?
 544 Ao: Porque cada corazón tiene dos caritas.
 545 Daniela: Porque a cada corazón le corresponden dos caritas. A ver a una carita ¿Qué parte
 546 de corazón le toca?
 547 Aos: Un medio [...]
 548 Daniela: Muy bien. ¿Si entendemos aquí por qué es un medio? ¿Si chino, por qué es un
 549 medio aquí?
 550 Aa: Porque a cada corazón le toca dos caritas.
 551 Ao: Porque uno es la mitad de dos y, como es la mitad de dos, es un medio.
 552 Daniela: Estamos diciendo que a la mitad de un corazón le toca una carita [...] Ok. Ahora
 553 para la tira de papel, ¿qué fracción dijimos?
 554 Ao: Un tercio porque es una tira y estamos agarrando tres.
 555 Daniela: En el problema “tiras de papel” ocupamos una tira de papel para tres cuadritos
 556 oscuros, ahora esos cuadritos oscuros están ocupando un tercio en la tira de papel, ¿sí?
 557 Aa: En las tiras de papel como son [...] es una tira y son nueve, lo dividimos en nueve y
 558 agarramos tres, y por eso son tres novenos.
 559 Ao: O un tercio [...]

560 Daniela: Son equivalentes [...] lo mismo pasa en caritas y corazones.
561 Daniela: Ok, ahora ya saben qué es la razón ¿sí?
562 Daniela: Vamos al planteamiento inicial y contestemos la pregunta que se le hizo difícil,
563 ¿sí? A ver cómo quedaría esa pregunta.
564 /Los alumnos se ubican el planteamiento inicial en las hojitas de trabajo que tienen/
565 /Los alumnos se encuentran contestando el primer planteamiento acerca de del problema de
566 las lechugas/
567 Daniela: La última pregunta niños dice [...] ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la
568 de lechugas? Si yo les pregunto, ¿cuál es la razón entre la cantidad de pasteles y de niños?,
569 ustedes ¿Qué me van a responder?
570 A: Uno para cuatro.
571 Daniela: Ahora en ese planteamiento, ¿cómo le vamos a hacer?
572 Aos: Cuatro para seis [...]
573 Daniela: A ver espérense ustedes háganlo [...]
574 Ao: Si cada parte de la caja corresponde a una lechuga [...] cada lechuga ocupa un
575 dieciseisavo en dieciséis en cada caja.
576 Ao: ¡Ya!
577 /Los alumno se encuentran resolviendo el planteamiento que se le hace/
578 Ao: Uno es igual a dieciséis.
579 Aa: Ya le entendí.
580 /Una de las alumnas tiene dificultades y la maestra se acerca para guiarla/
581 Daniela: Ponte lista [...] si yo te pregunto, ¿cuál es la razón entre la cantidad de pasteles y
582 la cantidad de niños?
583 Aa: Uno para cuatro.
584 Daniela: Uno para cuatro, entonces [...] si yo te pregunto, ¿cuál es la razón entre la
585 cantidad de cajas y la cantidad de lechugas?
586 /Los alumnos contestan sus hojitas de trabajo y otros están comentando/
587 Daniela: Vamos a leer la primera pregunta para contestarla, para revisar si estaban bien o si
588 estaban mal. Areli, me ayudas con la primera pregunta del problema.
589 Aa: ¿Cuántas cajas se ocuparon para empacar 112 lechugas?
590 Aos: Siete.
591 Aa: Siete cajas.
592 Daniela: Siete cajas. ¿Cómo le hiciste para saber que son siete cajas?
593 Ao: Dieciséis por siete.
594 Daniela: Dieciséis por siete. Pero, ¿cómo le hiciste para obtener ese dieciséis?
595 Aa: Yo dividí 64 entre 4 y me salieron 16, y luego dividí 112 entre 16 y me salieron 7.
596 Daniela: ¿Quién tiene otro procedimiento diferente?
597 Aa: Dividí 64 entre 4 y me dio 16 y, las 112 lechugas las dividí entre 16 para sacar cuántas
598 cajas se ocupaban.
599 Ao: Yo primero multipliqué 16 por 5, y como vi que no llegó, lo multipliqué por 6 y luego
600 por 7.
601 Ao: Yo dividí 64 entre 4 y me dio 16 y el resultado, lo multipliqué por 8 y no más le bajé
602 16, y estaba seguro y le puse siete [...]
603 Daniela: ¿Te dio los 112?
604 Ao: Sí.
605 Daniela: ¿Si te dio los 112 cuando le restaste los 16?
606 Ao: Sí.

607 Daniela: Entonces, ¿cuántas cajas se necesitan?
 608 Aos: Siete.
 609 Daniela: Para cuatro cajas, ¿cuántas lechugas niños?
 610 Aa: 64.
 611 /Daniela escribe en el pintarrón las cantidades señaladas por los alumnos/
 612 Daniela: Y, ¿para 112 lechugas cuántas cajas?
 613 Aos: Siete.
 614 Daniela: Siete cajas. Muy bien. Siguiente pregunta [...]
 615 Aa: ¿Cuántas cajas se ocupan para 32 lechugas?
 616 Aos: Dos.
 617 Aa: Porque multipliqué 16 por 2 y me dio los 32 exactos.
 618 Daniela: Monse qué resultado te dio, ¿a ti que resultado te dio en esa pregunta?
 619 Ao: Dos.
 620 Daniela: Pasa a escribir 2 cajas para 32 lechugas.
 621 Daniela: Muy bien. La tercera pregunta [...] A ver, me ayudas a leerla. /Indica a uno de los
 622 alumnos/
 623 Ao: ¿Qué parte de la caja corresponde a una lechuga?
 624 Ao: Dieciséis.
 625 Ao: Un dieciseisavo.
 626 Daniela: ¿Por qué es un dieciseisavo? ¿Quién me quiere decir?
 627 Ao: Porque son 16 lechugas [...]
 628 Ao: Y es una caja.
 629 Daniela: ¿Cuánto le toca a cada lechuga?
 630 Aos: Un dieciseisavo.
 631 Daniela: ¿Y si yo tuviera seis lechugas?
 632 Ao: Un sexto.
 633 Daniela: Entonces, ¿qué parte de la caja le corresponde a una lechuga en la hoja de trabajo?
 634 Aos: Un dieciseisavo.
 635 Daniela: Muy bien. Y si le pongo $2/32$, ¿estará bien? /escribe la fracción/
 636 Ao: No, sí [...]
 637 Aa: $4/64$ podemos poner.
 638 Daniela: Muy bien. /Pasa a un alumno al pintarrón y escribe $7/112$ / ¿Estará bien?
 639 Aos: No, sí [...]
 640 Daniela: ¿7 entre 7?
 641 Aos: Uno.
 642 Daniela: ¿112 entre 7?
 643 Aos: 16
 644 /Daniela escribe en el pintarrón $1/16$ /
 645 Daniela: ¿También la podemos representar?
 646 Aos: Sí.
 647 Daniela: Ahora $4/64$ /escribe la fracción/; 4 entre 4 [...]
 648 Aos: Uno.
 649 Daniela: ¿64 entre 4?
 650 Aos: Dieciséis.
 651 /Daniela escribe $1/16$ /
 652 Daniela: ¿Se puede o no se puede?
 653 Aos: ¡Sí!

654 Daniela: Vamos a la última pregunta, ¿cuál es la razón entre la cantidad de cajas y las
 655 lechugas?
 656 Ao: ¡Yo! Una para dieciséis.
 657 /Se escuchan varios alumnos/
 658 Daniela: Pasen a escribirme una razón.
 659 /Daniela le entrega un marcador a un alumno. El alumno que pasa primero escribe 1:16.
 660 Enseguida pasan varios alumnos y escriben en el pintarrón 3:48; 2:32; 4:64; 7:112/
 661 Daniela: ¿Quién quiere pasar a escribir otra razón?
 662 Aa: Yo tengo otra maestra.
 663 /Daniela le entrega el marcador para que pase. La alumna escribe 8:120. Se acercan varios
 664 alumnos y pasan a escribir diferentes cantidades, entre ellas 10:160/
 665 Daniela: Vamos a revisar. Aquí anotan dos a treinta y dos, ¿si será una razón? /Señala la
 666 cantidad en el pintarrón/
 667 Aos: Sí.
 668 Daniela: Palomita. Ahora siete a ciento doce, ¿si es una razón? /Señala la cantidad en el
 669 pintarrón/
 670 Aos: Sí.
 671 Daniela: cuatro a sesenta y cuatro, ¿es una razón? /Señala la cantidad en el pintarrón/
 672 Aos: Sí.
 673 Daniela: ¿Tres a cuarenta y ocho? /Señala la cantidad en el pintarrón/
 674 Aos: Son como las tablas.
 675 Daniela: De ocho a ciento veinte, ¿corresponde?
 676 Aos: No, está mal.
 677 Daniela: ¿Por qué?
 678 Aa: Porque en cuatro son sesenta y cuatro y, multiplicado por dos son ciento veintiocho.
 679 Daniela: Ok. Ésta no sería. /Tacha 8:120/
 680 Daniela: Aquí tenemos diez a ciento sesenta [...]
 681 Aos: Sí, no [...]
 682 Daniela: Sí yo tengo diez cajas, ¿cuántas lechugas puedo empacar en esas cajas?
 683 Aos: Ciento sesenta.
 684 Daniela: ¿Por qué?
 685 Ao: Porque son diez veces dieciséis.
 686 Daniela: Sí.
 687 Aa: Yo tengo otra [...] /La alumna escribe en el pintarrón 5:80/
 688 Daniela: ¿Cinco si corresponde a ochenta?
 689 Aos: Sí.
 690 Daniela: Muy bien.
 691 A. Aos: Yo tengo otra razón [...]
 692 Daniela: A ver niños, ¿este problema se les pareció difícil?
 693 Aos: ¡No!
 694 Daniela: ¿Al principio cómo se les hizo?
 695 Aos: ¡Difícil!
 696 Daniela: ¿Ahora?
 697 Aos: ¡Fácil!
 698 Daniela: ¿Desde un principio sabían cómo poner la razón?
 699 Aos: No, no [...]

700 Daniela: Entonces al final ya no tuvieron dificultades. Por favor a sus hojas le escriben su
701 nombre completo. Me ha gustado trabajar con ustedes.

ANEXO 6. Videograbación de clase de Israel (1)

- 1 Israel: El día de hoy vamos a estar trabajando una clase de matemáticas. Para comenzar la
2 actividad les voy a leer un pequeño cuento, este cuento se llama “La gran fiesta” /Israel lo
3 escribe en el pizarrón/ ¿Cómo se llama?
4 Aos: La gran fiesta
5 Israel: Bien, ¿de qué se imaginan que va a tratar? Levante la mano quien me quiera decir
6 Aa: Pues de una fiesta.
7 /El maestro no escucha su comentario, mientras tanto varios alumnos levantan la mano/
8 Ao: De que [...] van a hacer una fiesta con muchos invitados.
9 Ao: Una fiesta muy grande
10 Israel: ¿Alguien más?
11 Ao: Una fiesta con globos
12 Ao: Una fiesta muy importante
13 Israel: Muy bien, entonces vamos a comenzar y pongan mucha atención, dijimos que el
14 título de este cuento es “la gran fiesta” y dice así [...] “Había una vez en un reino muy muy
15 lejano una ciudad donde reinaba la justicia, no había criminal que se le escapara al gran
16 guardián del planeta [...]” ¿Saben quién es el capitán guardián? Se trata del capitán de las
17 tres “erre”. ¿Si se acuerdan del capitán de las tres “erre”?
18 Aos: No
19 /El Israel escribe en el pintarrón: “3 R”/
20 Israel: En ciencias naturales lo vieron, ¿se acuerdan?
21 A. Aos: No
22 Israel: La primera es reciclar /escribe en el pintarrón reciclar/ Las tres erre son para cuidar
23 las cosas que tenemos; la primera es reciclar, reusar y reducir /Escribe en el pintarrón reusar
24 y reducir. Los alumnos leen lo que Israel escribe en el pintarrón. Israel continúa con la
25 lectura del cuento/ Dice “él junto con su pandilla de guardianes defienden la limpieza del
26 planeta y pelean en contra de la contaminación y de cualquiera que se atreva a tirar basura y
27 a desperdiciar los recursos que la naturaleza nos da. Un día el alcalde de Cuidad “limpieza”
28 organizó una fiesta para el capitán “R” por su gran trabajo y por mantener la ciudad fuera
29 de basura y de los desperdicios”. Entonces, ¿para quién iba a ser la fiesta?
30 Ao: Para el capitán R
31 Israel: ¿Cómo se llama ese capitán?
32 Ao: Capitán tres erre
33 Israel: Enseguida el cuento dice: “Toda la ciudad estaba invitada a este gran evento, en
34 especial los niños ya que querían celebrar juntos con su gran súper héroe, después de la
35 fiesta habría un baile en el que tocarían “Los 5 de Zacatecas””; ¿quieren ir?
36 Aos: Sí
37 Israel: “El alcalde de la ciudad prometió a todos sus invitados un gran festín en donde
38 habría ricos antojitos y de postres habría pasteles de todos los sabores, también prometió
39 traer toda una feria con juegos y puestos para que todos se divirtieran. El Alcalde al
40 quererse lucir para festejar a lo grande al Capitán “R” no se dio cuenta que había gastado
41 mucho dinero en contratar al grupo, en el mobiliario, en la feria y en la comida, así que
42 tendría que economizar en los postres [...]” ¿Qué iba a haber de postres?
43 Aos: Pasteles

44 Israel: Entonces se dio cuenta que había gastado mucho y le quedaba poquito dinero, así
 45 que tuvo que ir a preguntar los precios a las pastelerías del pueblo para ver en donde le
 46 convenía comprarlos, pero, ¿qué creen?
 47 Aa: ¿Qué?
 48 Israel: Que este presidente es un poquito distraído con las cuentas, /mientras Israel habla
 49 toma un papel bond/ entonces no se le dan mucho las matemáticas, pero yo sé que a ustedes
 50 si ¿verdad?
 51 Aos: Sí
 52 Israel: Entonces dijimos que él fue a varias pastelerías para ver dónde le convenía hacer la
 53 compra, miren /Borra el pizarrón/ ahorita les voy a presentar a cuales pastelerías fue y les
 54 voy a entregar esta hojita en blanco /Un ao ayuda a entregar las hojas en blanco/
 55 Israel: ¿Qué vamos a hacer?
 56 /Israel pega el papel bond en el pizarrón mientras el ao reparte las hojas de trabajo/
 57 Israel: Muy bien, entonces dijimos que el alcalde había visitado varias pastelerías. A ver
 58 mijo, ¿me dices el nombre de una pastelería?
 59 Ao: Pastelería Lupita
 60 Israel: A ver aquí están en frente mira /Señala al pizarrón/ una era [...] ¿Cómo se llamaba?
 61 Ao: Pastelería suspiros
 62 Israel: ¿Y cuál otra?
 63 Aos: La casa de los pasteles.
 64 Israel: Muy bien, miren aquí en su hojita me van a poner en cuál pastelería creen que le
 65 conviene más al alcance hacer la compra, por eso dice ¿en dónde los compro? ¿En dónde
 66 va a comprar el alcalde?
 67 Ao: En la casa de los pasteles
 68 Israel: A ver, ustedes aquí en su hojita escriban en cuál pastelería creen que le sale más
 69 barato compara al alcalde. Fíjense lo que dice aquí, ¿cuánto cuesta un pastel en la pastelería
 70 suspiros?
 71 Aos: \$180
 72 Israel: ¿Y en la casa de los pasteles?
 73 Aos: \$150
 74 Israel: Pero aquí ven esto /señala en la lámina del pintarrón/ ¿Qué dice aquí?
 75 Aa: 3x2
 76 Israel: Dice que hay una oferta, ¿qué significa 3x2?
 77 Ao: Que compras dos y que te regalan uno
 78 Israel: Que compra 3 y paga solamente cuántos [...]
 79 Aos: Dos
 80 Israel: Entonces, escriban aquí en su hojita en cuál pastelería creen que le conviene al
 81 alcalde comprar los pasteles.
 82 /Los alumnos contestan el problema, el maestro pasa entre las mesas/
 83 Israel: ¿Tienen alguna duda niños?
 84 Aos: No
 85 Aas: Ya terminamos
 86 Israel: ¿Si pusieron por qué 3x2? /Israel se acerca con algunos alumnos/ ¿Si hicieron las
 87 cuentas y todo? ¿Qué tal si salen más caros? /Algunos alumnos continúan trabajando/
 88 Pero no nada más le pongan el nombre de la pastelería. También póngale el por qué, ¿por
 89 qué le conviene hacer la compra en esa pastelería?

90 Israel: Quien haya terminado levanta la mano /Israel se acerca con una niña/ Pero aquí, ¿por
 91 qué?
 92 Aa: Porque es más barato
 93 Israel: ¿Y estás segura que es más barato?
 94 Aa: Sí
 95 Israel: ¿Sí? Bueno ahorita vamos a revisar.
 96 Ao: Ya acabe
 97 Israel: Ahorita que terminaron todos, levanten su mano quiénes dicen que en la casa de los
 98 pasteles sale más barato hacer la compra /Israel comienza a contar/ Entonces tenemos que
 99 aquí son 10, y de este lado, en la pastelería suspiros quién dice, 1,2, 3, 4,5 [...] 16. Vamos
 100 a ver quién tienen la razón, ¿quién quiere a pasar a explicar por qué?
 101 Ao: Yo /El alumno pasa al frente/
 102 Israel: Dile a tus compañeros en cuál pastelería crees tú que sale más barato hacer la
 103 compra
 104 Ao: Ésta /Señala la pastelería suspiros/
 105 Israel: ¿Por qué?
 106 Ao: Porque da el 3x2 y si le suman los 30 de cada uno se regala en 130
 107 Israel: ¿Cuánto costaría cada pastel?
 108 Ao: En 180
 109 Israel: ¿Y si compra los tres?
 110 Ao: En 180
 111 Israel: ¿En 180?
 112 Ao: Sí
 113 /Se escuchan murmullos diciendo que no/
 114 Israel: Si, a ver vamos a ver, pero él dice que en esta pastelería, pero quién dijo que en la
 115 casa de los pasteles, a ver ven mijo, ¿por qué crees que le sale más barato hacer la compra?
 116 /El alumno pasa al pintarrón/
 117 Israel: Nos va a convencer a los demás, a tus compañeritos. ¿Por qué a la casa de los
 118 pasteles?
 119 Ao: Porque aquí tiene 180 /Señala la pastelería suspiros/ y acá 150 /Señala la casa de los
 120 pasteles/
 121 Israel: ¿Y ahí 150?
 122 Ao: Sí
 123 Israel: Entonces, ¿dónde dices que sale más barato?
 124 Ao: Aquí /señala la casa de los pasteles/
 125 Israel: La casa de los pasteles, bueno él dice que aquí. Ahora pasa /señala una alumna/ /Una
 126 alumna pasa al frente/
 127 Israel: Su compañera les va a decir en cuál pastelería cree que le va a salir más barato.
 128 Aa: En ésta /señala la pastelería suspiros/
 129 Israel: Pero diles a tus compañeros por qué
 130 Aa: Si sumas en la pastelería suspiros los 180 que vas a pagar en dos pasteles son 360
 131 /escribe en el pintarrón $180+180=360$ /
 132 Israel: 360, ¿y en la otra?
 133 Aa: Y acá si compras 2 van a ser 300 /escribe en el pintarrón $150+150=300$ /, pero aquí te
 134 está regalando uno /señala la pastelería suspiros/
 135 Israel: Y aquí /señala pastelería suspiros/, ¿cuántos se llevaría?
 136 Aa: Se llevaría uno de más y pagaría 360

137 Israel: 360, y si comprara la misma cantidad en las dos pastelerías, supongamos que aquí
 138 está comprando tres pasteles ¿y va a pagar?
 139 Aa: 360
 140 Israel: Y si comprara la misma cantidad de tres pasteles en la casa de los pasteles, ¿cuánto
 141 pagaría?
 142 Aos: 450
 143 Israel: 450 ¿seguros?
 144 Aos: Sí /la alumna escribe en el pintarrón $150+150+150=450$ /
 145 Israel: Entonces, ¿en dónde le conviene comprar los pasteles?
 146 Aos: En la pastelería suspiros
 147 Israel: Dicen que en la casa de los pasteles si compro tres, ¿cuánto pagaría?
 148 Aos: 450
 149 Israel: ¿Por cuántos pasteles?
 150 Aos: Por tres
 151 Israel: Y si compro tres en la pastelería suspiros, ¿cuánto pagaría?
 152 Aos: 360
 153 Israel: Entonces si compra la misma cantidad de pasteles en la dos tiendas ¿Cuánto se
 154 estaría ahorrando? ¿A ver quién quiere pasar? A ver pasa /señala una alumna/
 155 Ao: 140
 156 Mo ¿140? Vamos a ver cuánto se ahorraría
 157 /La alumna pasa al pizarrón y realiza una resta de $450-360=90$ /
 158 Israel: ¿Cuándo?
 159 Aa: 90
 160 Israel: Entonces dijimos que se ahorraría ¿Cuánto?
 161 Aos: 90
 162 Israel: Noventa. Entonces, ¿en cuál pastelería le convendría hacer la compra?, porque
 163 dijimos que iba a haber muchos invitados
 164 Aos: En la pastelería suspiros.
 165 Israel: Y si nada más quisiera comprar un pastel, supongamos que nada más quiere uno
 166 para él, ¿en dónde le conviene hacer esa compra?
 167 Aos: En la casa de los pasteles
 168 Israel: y si quiere hacer una compra de más de tres ¿En dónde le convendría?
 169 Aos: En la pastelería suspiros.
 170 Israel: El día de hoy vamos a estar trabajando en equipos [...]
 171 /El Israel entrega papelitos de colores a los alumnos, con base en cada color los alumnos se
 172 organizan en equipos, moviendo el mobiliario/
 173 Israel: Vamos a contestar estas hojitas, todos juntos como equipo, así como están, van a
 174 poder hacer uso de calculadora; si realizan una operación en su calculadora, al reverso de la
 175 hoja anotan si van a multiplicar, a dividir a sumar, quiero que anoten la operación no le
 176 hace que la hagan en calculadora, pero quiero que todos la anoten. ¿Qué no se puede hacer?
 177 Miren, no quiero que se copien entre otros equipos, para eso no tienen que pararse y no
 178 tienen que estar platicando con otros equipos. Tienen veinte minutos para contestar la hoja.
 179 Equipo verde, ¿qué vamos a hacer?
 180 Aa: Vamos a contestar la hoja y luego atrás de la hoja vamos a poner la operación, si
 181 vamos a multiplicar, a dividir [...]
 182 Israel: Así es con la calculadora. A ver, ¿qué no podemos hacer?
 183 Ao: Copiar

184 Israel: ¿Con quién?
 185 Ao: Con los otros equipos
 186 Israel: Con los otros equipos. Equipo naranja, ¿cuánto tienen para contestarlo?
 187 Aos: Veinte minutos
 188 Israel: Veinte minutos. Entonces ya podemos comenzar.
 189 /Israel entrega la hoja de trabajo a los integrantes de los diferentes equipos/
 190 /Los equipos comienzan a leer las interrogantes y a contestarlas, mientras tanto el maestro
 191 entrega una calculadora a cada equipo/
 192 /El Israel monitorea los equipos y se acerca aquellos que levantan la mano y observan
 193 tienen dudas para resolver las actividades/
 194 Israel: Traten de leer bien antes de preguntar. Pueden preguntarse entre los compañeros del
 195 mismo equipo.
 196 Israel: A ver mijo, lee el problema /Israel se acerca a un equipo/
 197 Ao: En la mesa A se reparten un pastel entre 5 invitados y en la mesa B se reparten 2
 198 pasteles entre 7 invitados, ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado?
 199 A. Aos: En la A [...] en la B [...] /Los alumnos están resolviendo las actividades en cada
 200 equipo. A. Aos dibujan ruedas para los pasteles/
 201 Israel: A ver, ¿entonces cuántos pasteles se van a repartir en la mesa A?
 202 Ao: Uno.
 203 Israel: ¿Entre cuántos invitados?
 204 Ao: Entre cinco.
 205 Israel: A ver lee [...]
 206 Ao: En la mesa B se reparten 2 pasteles entre 7 invitados.
 207 Israel: Entonces, ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado?
 208 Ao: En la B [...]
 209 Israel: Dijimos que esta es la mesa A, ¿cuántos pasteles?
 210 Ao: Uno.
 211 Israel: ¿Para cuántas personas?
 212 Ao: Cinco.
 213 Israel: En la mesa B, ¿cuántos pasteles?
 214 Ao: Dos
 215 Israel: ¿Para cuántas personas?
 216 Ao: Siete
 217 Israel: Entonces platiquen entre ustedes, ¿en cuál mesa [...] qué?
 218 Ao: En cual mesa le toca más pastel a cada invitado.
 219 Israel: Ustedes ya leyeron el problema, saben que en la mesa A les toca [...] ¿De cuántos
 220 pasteles?
 221 Ao: Un pastel
 222 Israel: ¿Para cuántos invitados?
 223 Ao: Para cinco
 224 Israel: Entonces comenten aquí entre ustedes, en cuál mesa le toca más pastel a cada
 225 invitado [...] si ustedes fueran los invitados, qué tendrían que hacer para saber a cuál mesa
 226 se van a ir, ¿no quieren más pastel?
 227 Aos: Sí
 228 Israel: Entonces, vamos a ver en cuál mesa le toca más pastel para poder ir a sentarse

229 /Israel se retira del equipo y se acerca a los otros equipos/ En su segunda hojita les aparece
 230 esto: haz un registro del número de tiros que tronó el globo y de lanzamientos. A ver, ¿qué
 231 tienen primero?, ¿qué dice aquí?, ¿globo qué? [...] /Israel señala la información de la hoja/
 232 Aos: Tronados
 233 /Israel escribe en el pintarrón globos tronados/
 234 Israel: ¿Y abajo qué dice?
 235 Aos: Número de lanzamientos.
 236 Israel: El número de lanzamientos.
 237 /Israel escribe en el pintarrón número de lanzamientos/
 238 Israel: Fíjense, esto es una tablita, aquí arriba, ¿qué dice? /señala la hoja 2/
 239 Aos: Juego uno
 240 Israel: ¿Acá dice?
 241 Aos: Juego dos
 242 Israel: ¿Y aquí?
 243 Aos: Juego tres
 244 Israel: Aunque no se vea muy bien aquí es una tablita, no se ven las rayitas, pero ustedes las
 245 pueden dibujar y después realizan lo que se indica. Sólo era esa aclaración, ya pueden
 246 continuar /Israel dibuja la tabla en el pintarrón/. Si tienen alguna duda, levanten la mano
 247 /Los alumnos continúan trabajando en equipo y el Israel monitoreando y orientando a los
 248 equipos/
 249 Israel: /Se acerca a un equipo/ ¿Leyeron la tablita anterior?, ¿qué dice?
 250 Aa: Carlos quiso participar en el puesto de Don Benjamín. La tabla de abajo muestra los
 251 registros de tiros que hizo Carlos en tres rondas [...]
 252 Israel: Aquí se ve lo que lanzó en el juego 1, 2 y 3 /señala la tabla de la hoja 1/ ¿Qué
 253 significa la ruedita?
 254 Aos: Globos tronados
 255 Israel: ¿La tachita?
 256 Aos: Tiros fallidos
 257 Israel: Para ganarse un premio en el puesto de Don Benjamín qué se necesita.
 258 Aa: Tronar seis globos
 259 Israel: ¿Cuántos dardos o lanzamientos le dan?
 260 Aos: Ocho
 261 Israel: Entonces, ¿si son ocho?, ¿si tiró ocho veces? Cuenten /Los aos. Comienzan a contar/
 262 En el juego uno, ¿cuántas veces lanzó?
 263 Aos: Ocho
 264 Israel: Aquí les pide número de lanzamientos y los globos tronados [...]
 265 Aos: Ah [...]
 266 Israel: Vean la tabla para que contesten la otra. Comenten entre ustedes. ¿Ya contestaron la
 267 de abajo? Dice, ¿creen que en algún juego ganó un premio?
 268 Ao: No [...] porque tenía que tirar ocho [...]
 269 Israel: Tenía que tirar ocho, pero cuántos globos tenía que tronar para ganar el premio.
 270 Ao: Seis
 271 Aa: Entonces si ganó /Escribe en la hoja/
 272 Israel: Comenten entre ustedes por qué /Israel sigue pasando por los equipos/
 273 Israel: ¿Qué vamos a hacer?
 274 Ao: A convertir éstas en números decimales /señala algunas fracciones/

275 Israel: ¿Saben cómo? /Los alumnos no contestan/ Por ejemplo, cuando representan ustedes
 276 esta cantidad, por ejemplo la más común /escribe 0.5 en el pintarrón/, ¿qué número es?
 277 Aos: Cero punto cinco.
 278 Israel: ¿Este es un número qué?
 279 Aos: Decimal.
 280 Israel: ¿Ustedes creen que este lo podemos representar como una fracción?
 281 A. Aos: Sí
 282 Israel: ¿Cuál sería?
 283 /Los alumnos no responden/
 284 Israel: Me dicen ustedes que es un número decimal, ¿creen que lo podemos representar
 285 como una fracción?
 286 Ao: Sí
 287 Israel: ¿Cuál sería su fracción?
 288 /Los alumnos no responden/
 289 Israel: A ver, el punto cinco me indica que es [...] ¿qué?
 290 Ao: Decimal
 291 /Israel dibuja una barra y la divide en diez partes iguales/
 292 Israel: Entonces dijimos que esto vale, ¿cuánto?
 293 Ao: Punto cinco [...]
 294 Israel: Un entero sería uno, entonces cada partecita, vamos a suponer que vale, ¿cuánto?,
 295 ¿punto qué? /Lo escribe en la hoja/
 296 Aos: Punto uno.
 297 /Enumeran la barra escribiendo 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0/
 298 Israel: Entonces aquí nos está diciendo que [...] ¿Cuánto dijimos?
 299 Aos: Punto cinco.
 300 Israel: A ver y si lo coloreamos, ¿hasta donde sería el punto cinco? /Una alumna pasa y
 301 colorea/ Y el punto, ¿a qué les suena? Si esto sería un entero, ¿qué sería?
 302 Aa: Cinco décimos.
 303 Israel: Podría ser porque [...] a ver me dijiste que podía ser cinco décimos, a ver
 304 escríbemelo /La alumna escribe la fracción 5/10 en la hoja/
 305 Israel: Entonces dijimos que eran cinco de cuántos.
 306 Aos: De diez
 307 Israel: También que sería [...] ¿cinco qué viene siendo de diez?
 308 Aa: La mitad.
 309 Israel: ¿Y ustedes cómo representan una mitad?
 310 Ao: Como un medio.
 311 Israel: ¿Qué pasa si dividimos el uno entre dos? Tienen la calculadora, ¿cuánto da?
 312 Aos: Cero punto cinco /Un alumno realiza la división en la calculadora/.
 313 Israel: ¿Qué pasa si dividimos el cinco entre diez?
 314 Ao: Un entero
 315 Israel: ¿Un entero? A ver, ¿cuánto da?
 316 Aa: Punto cinco
 317 Israel: Entonces nos da lo [...]
 318 Aos: Mismo.
 319 Israel: ¿Qué dividimos?
 320 Ao: Cinco entre diez.
 321 Israel: Para que nos diera [...]

322 Aos: Números decimales.
 323 Israel: Y en los demás, ¿qué podemos hacer?
 324 Ao: Multiplicar
 325 Israel: ¿Multiplicar?
 326 Aos: Dividir
 327 Israel: Hagan lo que crean.
 328 /se retira del equipo y se va a otro/
 329 Israel: Muy bien, dice [...] ¿Ustedes conocen los números decimales?
 330 Aa: Del cero al nueve.
 331 Israel: ¿Del cero al nueve? Los números decimales son los que están después del [...]
 332 Aos: Después del punto.
 333 Israel: Pero aquí nos dice: convierte las fracciones anteriores en números decimales, por
 334 ejemplo [...]
 335 /Israel utiliza como ejemplo el que aplicó con el primer equipo. Realiza un rectángulo y lo
 336 divide en diez partes con ayuda de los alumnos/
 337 Israel: Supongamos que esta barrita es un entero. Vamos a contar las partes en que está
 338 dividida /Israel y alumnos cuentan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10/ ¿En cuántas partes dividí
 339 este entero?
 340 Aos: En diez partes.
 341 Israel: A cada uno le voy a dar un valor de cero punto uno /escribe 0.1/, el que sigue,
 342 ¿cuánto vale?
 343 Aos: Cero punto dos, cero punto tres, cero punto cuatro [...] /Así completan hasta el 1.0 y
 344 el Israel los escribe/
 345 Israel: ¿Cuánto me está pidiendo?
 346 Aa: Cero punto cinco.
 347 Israel: Entonces si lo coloreamos qué pedazo es [...] Alguien pase a colorearlo /Un alumno
 348 pasa y lo colorea/ Recuerden sólo vamos a tomar [...]
 349 Aos: Punto cinco.
 350 Israel: Entonces lo vamos a colorear. ¿Esto cómo lo podemos representar en una fracción?
 351 /Señala 0.5/
 352 Ao: Un medio.
 353 Israel: Escríbale aquí un medio /La alumna escribe 1/2/ Si aquí dijimos eran [...] ¿cuántos
 354 pedacitos?
 355 Aos: Diez.
 356 Israel: ¿Cuántos tomamos?
 357 Aos: Cinco
 358 Israel: ¿Cómo lo podemos representar?
 359 Ao: Cinco quintos [...] No [...] ¿cómo era?
 360 Aa: Diez quintos.
 361 Aa: No, son cinco décimos.
 362 Israel: ¿Cuántos pedazos eran?
 363 Aos: Diez
 364 Israel: ¿Cuántos tenemos?
 365 Ao: Cinco
 366 Israel: Pongan cinco décimos y pongan diez quintos /Los alumnos escriben en la hoja 5/10
 367 y 10/5/ ¿Cómo le podemos hacer para que nos dé números decimales?, ¿qué pasa si
 368 dividimos unos entre dos?, ¿cuánto nos daría? Usen su calculadora.

369 Aos: Cero punto cinco.
 370 Israel: Entonces dijimos que un medio es qué [...] si tienes esto completo /señala el
 371 rectángulo/ Un medio, ¿qué es?
 372 Aos: La mitad.
 373 Israel: Entonces dice que un medio es también [...]
 374 Aos: Cero punto cinco.
 375 Israel: ¿Qué pasa si le sumamos otro cero punto cinco?
 376 Aa: Nos da un entero.
 377 Israel: ¿Qué pasa si dividimos el cinco entre diez?
 378 Aos: Es cero punto cinco.
 379 Israel: Nos da cero punto cinco, quiere decir que nos va a dar también la mitad [...] Ahora,
 380 ¿qué pasa si dividimos diez entre cinco?
 381 Aos: Dos
 382 Israel: Entonces de estas tres, ¿cuáles sí serían? /Los alumnos señalan 0.5/ Dijeron aquí son
 383 [...] /señala el rectángulo/
 384 Aos: Diez pedacitos.
 385 Israel: Y de esos agarramos [...]
 386 Aos: Cinco
 387 Israel: ¿Qué hicimos para convertir este número en decimal?
 388 Aos: Dividimos.
 389 Israel: ¿Qué?
 390 Ao: Cinco entre diez.
 391 Israel: Para convertir los números de la tabla en números decimales, ¿qué creen que van a
 392 hacer?
 393 Ao: Dividir
 394 Israel: Háganlo ustedes. /Los alumnos continúan trabajando en sus equipos/ A ver, ¿ya
 395 terminaron? /Israel pregunta a los equipos/
 396 Israel: En forma grupal vamos a ver cómo resolvieron las actividades. Equipo verde, ¿qué
 397 dice la primera pregunta?
 398 Aa: En la mesa A se reparte un pastel entre cinco invitados, en la mesa B se reparten dos
 399 pasteles entre siete invitados. ¿En cuál mesa le toco más pastel a cada invitado?
 400 Israel: Ahorita sólo me van a decir, tenemos [...] ¿Cuántas mesas?
 401 Aos: Dos
 402 Israel: La mesa [...]
 403 Aos: A
 404 Israel: Y la mesa [...]
 405 Aos: B
 406 Israel: A ver le voy a preguntar al equipo verde, ¿en cuál mesa creen que les tocó más
 407 pastel?
 408 Aos: En la mesa B.
 409 Israel: Equipo azul, ¿ustedes en cuál mesa creen?
 410 Aos: En la B.
 411 Israel: A ver el quipo Rojo [...]
 412 Aos: En la mesa B.
 413 Israel: ¿Ustedes equipo? /Israel señala a otro equipo/
 414 Aos: En la A [...]
 415 Israel: ¿Y ustedes equipo amarillo?

416 Aós: En la B.
417 Israel: Vamos a ver el equipo naranja, pasen ustedes y digan por qué pusieron que en la
418 mesa A
419 Aa: Es que nosotros lo hicimos porque decía que en la mesa A había nada más 5 y en la
420 mesa B 7, y en la mesa A nada más le dieron un pastel, y en la B dos, entonces nosotros
421 pensamos que en la A les dieron más, porque ahí había menos invitados.
422 Israel: ¿Si le entendieron?
423 Aós: Sí
424 Israel: Entonces, ellos dicen que en la mesa A, ¿por qué?
425 Ala: Porque había menos invitados.
426 Israel: Y en la mesa B, ¿por qué no?
427 Aa: Porque había más invitados.
428 /Algunos alumnos levantan la mano para participar/
429 Israel: Entonces el equipo amarillo, ustedes dijeron que la B, ¿por qué la B?
430 Ao: Yo digo que es en la B, porque en la B aunque son más invitados te dan más pasteles
431 porque son dos, y en la mesa A es sólo uno. Porque si fuera en la mesa A serían cinco
432 rebanadas /Realiza unos esquemas en el pizarrón/, pero si hubieran sido en la B, entonces
433 hubieran sido 3 rebanadas grandes en un pastel /Dibuja dos círculos; uno dividido en cuatro
434 partes iguales y otro en tres partes iguales. Enseguida señala el segundo círculo/
435 Israel: Entonces en uno les tocaría tres y en otro cuatro [...] /señala lo que está en el
436 pintarrón/
437 Aa: Pero yo digo que no sería justo que a unos invitados les tocara más y a otros menos.
438 Israel: Pero estamos viendo que en la mesa B, ¿cuántos pasteles se van a repartir?
439 Aós: Dos.
440 Israel: ¿Para cuántas personas?
441 Aós: Para siete.
442 Israel: ¿Pero les tiene que tocar lo mismo?
443 Aós: Sí
444 Israel: A unas les tocaría [...] ¿cuánto es aquí? /Señala el primer círculo/
445 Aós: Un cuarto.
446 Israel: ¿Y acá? /Señala el segundo círculo/
447 Aós: Un tercio.
448 Israel: Entonces, ¿les toca lo mismo?
449 Ao: No
450 Israel: Pero, ¿por qué dices que en la mesa A no?
451 Ao: Porque en la mesa A, sólo se reparte un pastel.
452 Israel: ¿Entre cuántas?
453 Ao: Entre cinco.
454 Israel: ¿Y les tocaría ahí de menos?
455 Ao: Pero en la mesa B les tocaría más porque son 2 pasteles para 7 invitados.
456 Israel: Muchas gracias. Ahora vamos con el equipo verde.
457 /Pasa una alumna/
458 Israel: Vamos a ver diferentes formas de cómo lo resolvieron.
459 Aa: Yo digo que en la mesa B, porque en la mesa A no es la misma, porque cualquier pastel
460 que está cuadrado, supongamos que el pastel esta si verdad [...] /
461 Dibuja un pastel cuadrado en el pizarrón y lo divide en cinco partes/
462 Aa: Ya son las cinco.

463 Israel: ¿Cuánto le tocaría a cada invitado?
 464 Aa: Un quinto.
 465 Israel: Un quinto.
 466 Aa: Un quinto para cada persona, entonces [...]
 467 Israel: En la mesa B, ¿cuántos se van a repartir?
 468 Aa: Dos.
 469 /Dibuja dos pasteles y los divide en siete partes iguales cada uno de ellos/
 470 Aa: Entonces a cada uno, como son 7 de cada pastel le tocó de a dos séptimos, es un pedazo
 471 de pastel de cada uno, entonces aquí ya alcanzamos a repartir a todos los invitados de un
 472 pastel, entonces sobró un pastel, lo vamos a repartir también, serían dos séptimos por cada
 473 persona, y aquí de un quinto /señala el primer pastel de la mesa A/
 474 Israel: A ver, ¿están todos de acuerdo?
 475 Aos: Sí.
 476 Israel: A ver, pero tú dices que aquí el pastel lo repartieron entre siete personas, pero
 477 entonces aquí ¿el pastel sólo lo van a dividir entre siete personas?
 478 Aa: Sí.
 479 Israel: Pero, ¿sólo van a repartir u pastel?
 480 Aa: Dos.
 481 Israel: Los dos.
 482 Aa: Por eso, entonces sería un séptimo para cada persona de cada pastel que está en la mesa
 483 B y son dos.
 484 Israel: Entonces decimos que a cada persona le tocan dos séptimos. ¿Cómo lo hizo el quipo
 485 rojo?
 486 /Pasa un alumno y comienza a escribir/
 487 Ao: Es que en la mesa uno estábamos multiplicado [...]
 488 Israel: ¿Qué multiplicaron?
 489 Ao: Dividimos.
 490 Ao: Dividimos cinco entre uno.
 491 Israel: ¿Cuánto les dio?
 492 Ao: Noooo
 493 Israel: Si quieres traer tu calculadora.
 494 /El alumno va por ella, pero pasa otro alumno/
 495 Ao: Aquí lo que hicimos fue multiplicar este, por este [...] /Señala en el pintarrón/
 496 Israel: A ver, ¿multiplicaron?
 497 Ao: Sí
 498 Israel: ¿Cuánto multiplicaron?
 499 Ao: Uno por cinco.
 500 Israel: ¿Cuánto es uno por cinco?
 501 Ao: Cinco
 502 Israel: Si multiplicaron.
 503 Ao: Sí, por lo hicimos en la calculadora.
 504 Israel: A ver ahí tienen su calculadora, multipliquen uno por cinco, ¿cuánto les da?
 505 Aos: Cinco.
 506 Israel: ¿Si les dio 5?
 507 Ao: Y multiplicamos también este por este /señala en el pintarrón dos pasteles por siete/, ya
 508 dijimos cuál es donde les dan más pastel, y dijimos que era este /señala mesa B/
 509 Israel: A ver pero, ¿si tenían que hacer aquí una multiplicación?

510 Aa: División.
 511 Israel: A ver, ¿qué hicieron equipo rojo?
 512 Aa: División.
 513 Israel: ¿Y cuánto dividieron?
 514 Ao: Uno entre cinco.
 515 Israel: ¿Y cuánto les dio? Si ocupas tus hojitas, te las puedes traer.
 516 /El alumno va por ellas y escribe $1/5$ $2/7$ /
 517 Ao: Punto dos.
 518 Israel: A ver, ¿ya tienen todas calculadoras? ¿Cuánto les dio $1/5$?
 519 Ao: Punto dos
 520 Israel: Ponle ahí, y aquí serían $2/7$. ¿Cuánto les dio?
 521 Aa: Cero punto veintiocho.
 522 Israel: ¿Cómo los escribirías? ¿Después de que dividieron qué hicieron? ¿Por qué dices que
 523 en la mesa B?
 524 /El alumno escribe en el pintarrón 0.285/
 525 Ao: Empezamos a justificar las respuestas para ver dónde les tocaba más, hicimos este
 526 procedimiento para ver cuál daba más.
 527 Israel: ¿Cuál les daba más?
 528 Ao: En la B
 529 Israel: ¿Por qué? ¿Cuánto les dio?
 530 Ao: 0.285
 531 Israel: ¿Y en el otro cuánto?
 532 Ao: 0.2
 533 Israel: También lo podemos poner como 0.20. Muy bien. Entonces ustedes están diciendo
 534 que 0.20 es menos que 0.28 ¿sí?
 535 Ao: Sí
 536 Israel: Entonces ustedes dicen que en la mesa B. Equipo azul, pásenle, ustedes dieron
 537 también que en la mesa B ¿Por qué? Pásenle.
 538 /Pasa un alumno/
 539 Ao: En la mesa B dijimos porque [...]
 540 Ao: Aunque son más invitados, pero hay dos pasteles para repartirlos y como en la mesa A
 541 nada más hay un pastel les va a tocar de menos pastel y en la mesa 2 como son más
 542 invitados y más pasteles les tocaría de más.
 543 Israel: El equipo naranja dice lo contrario [...]
 544 Aa: Es que nosotros dijimos que porque ahí el pastel lo podemos partir en diez pedazos y
 545 así les tocaría de dos pedazos.
 546 Israel: ¿Pero no sería lo mismo mija? A ver, como aquí, ustedes dicen a lo que yo entendí,
 547 que tenemos un pastel, y ese pastel para 5 personas, entonces aquí lo vamos a dividir en 1,2
 548 ,3 ,4 , pero tú dices que estas cinco, las podemos repartir en 10 pedazos ¿verdad?
 549 /Israel dibuja un pastel rectangular y lo dividí en diez partes/
 550 Israel: Y no sería lo mismo, ¿darles dos pedacitos que darle uno?
 551 Aa: Sería la misma cantidad.
 552 Israel: Sería la misma cantidad. Pero ustedes dicen que en la mesa A les tocaría más pastel
 553 porque es un pastel para cuántas personas [...]
 554 Ao: Cinco
 555 Israel: Y el otro equipo dice que no.
 556 Ao: Aunque le dé dos pasteles es la misma cantidad.

557 Israel: Aquí tenemos, ¿cuántos pasteles? /Señala la mesa B en el pintarrón/
 558 Aos: Dos.
 559 Israel: ¿Para cuántas personas?
 560 Aos: Siete.
 561 Israel: Vamos a igualar la misma cantidad /señala la mesa A y B/. Aquí son dos pasteles y
 562 aquí [...]
 563 Ao: Uno
 564 Israel: Vamos a igualar la cantidad de pasteles, si aquí fueran la misma cantidad de pasteles
 565 /señala mesa A/ ¿para cuántas personas les tocaría? [...] Si decimos que un pastel es para 5
 566 personas ¿dos pasteles en la mesa A, para cuántas personas serían?
 567 Aos: Para diez.
 568 Aos: Para las mismas cinco.
 569 Aa: Es que si tengo 5 invitados y llevo otro pastel, quedarían los mismos invitados
 570 Israel: ¿Y si llevo más invitados?
 571 Aa: ¿Y cómo voy a saber cuántos llevaba?
 572 Israel: A ver dijimos que en la mesa A [...] y, esta es la mesa B /Las dibuja/. Pero en la
 573 fiesta había muchas mesas, puedo tener otra mesa A, y acá otra mesa B /Las dibuja/
 574 Israel: Vamos a igualar la misma cantidad de pasteles, ¿si hubiera dos papeles en la mesa
 575 A, cuántas personas habría?
 576 Aos: Diez.
 577 Israel: Dos pasteles para diez, entonces si juntamos estas mesas /señala las mesas A/
 578 dijimos que tenemos 2 pasteles para [...]
 579 Aos: Diez personas.
 580 Israel: Y en la otra mesa tenemos dos pasteles, ¿para cuántas personas?
 581 Aos: Para siete.
 582 Israel: Entonces ahora sí, ¿en dónde les tocaría más pastel?
 583 Aos: En la B.
 584 Ao: En la A.
 585 Israel: Aquí dijimos que tenemos dos pasteles para cuántas personas [...] /señala la mesa B/
 586 Aos: Para siete.
 587 Ao: En la A.
 588 Israel: A ver en la A, dijimos que si juntamos dos mesas de la A, vamos a tener, ¿cuántos
 589 pasteles?
 590 Aos: Dos.
 591 Ao: Van a ser iguales.
 592 Israel: A ver aquí hay un pastel y aquí hay otro, ¿cuántos pasteles tenemos? /señala
 593 algunos esquemas elaborados en el pizarrón de la mesa A/
 594 Ao: Diez.
 595 Israel: No, pasteles.
 596 Israel: Aquí hay un pastel en la mesa A y aquí hay otro pastel en la mesa A, ¿Cuántos
 597 pasteles tenemos?
 598 Aos: Dos.
 599 Israel: Si aquí hay cinco personas más otras cinco, ¿cuántas personas va a haber?
 600 Aos: Diez.
 601 Israel: Entonces les toca de dos pasteles para diez personas, y en la mesa B tenemos
 602 también dos pasteles, pero, ¿cuántas personas son?
 603 Aos: Siete

604 Israel: Entonces, ¿dónde les va a tocar más pastel?
 605 Aos: En la B.
 606 Aos: En la A.
 607 Israel: A ver, tenemos dos pasteles para [...] ¿Cuántas personas?
 608 Aos: Diez.
 609 Israel: Y aquí tenemos dos pasteles, ¿para cuántas?
 610 Aso: Siete.
 611 Israel: Tenemos la misma cantidad de qué [...]
 612 Aos: De pasteles.
 613 Israel: De pasteles, pero, ¿es la misma cantidad de personas?
 614 Aos: No.
 615 Israel: ¿Cómo podemos saber en cuál les va a tocar más?
 616 Aa: Esta fácil, dos pasteles son para diez personas, entonces les tenemos que dar de un $\frac{1}{5}$
 617 para cada persona, y en la B son dos pasteles para 7 personas, entonces ahí les tocaría de
 618 $\frac{2}{7}$, es más que lo otro.
 619 Israel: Es más que lo otro, a ver equipo naranja, ¿están todavía de acuerdo que es en la A?
 620 Ao: No, en la A
 621 Israel: ¿En la A o en la B?
 622 Ao: En la A
 623 Israel: A ver fíjense, dijimos que aquí tenemos cuántos pasteles [...] /señala la mesa A/
 624 Aos: Dos.
 625 Israel: ¿Para cuántas personas?
 626 Aos: Para diez.
 627 Israel: Y acá tenemos dos papeles, ¿para cuántas personas?
 628 Aos: Para siete.
 629 Israel: Entonces, ¿dónde les tocaría más?
 630 Aa: Entonces le tocaría más a la [...] nosotros quedamos conformes porque sabemos que
 631 les toca más a la B.
 632 Israel: ¿Ahora ya estamos todos de acuerdo?
 633 Aos: Sí
 634 Israel: A ver, vamos a pasar a lo siguiente, a ver equipo naranja lean lo que sigue [...]
 635 Aa: A ve dice: “Carlos y sus amigos fueron a saludar al capitán R y él los invitó a un puesto
 636 en la feria que había contratado el alcalde, encontraron dos puestos de trueno globos con
 637 diferentes promociones, en el puesto de Don Benjamín tienen que tronar 6 globos con ocho
 638 dardos para ganarse un regalo, en el puesto de Don Octavio tienen que tronar 7 globos con
 639 10 dardos para ganarse el regalo, ¿en cuál de los dos puestos le conviene jugar para ganarse
 640 un regalo?”
 641 Israel: A ver dice: ¿en cuál de los dos puestos le conviene jugar para ganarse un premio?
 642 /Algunos alumnos levantan la mano para participar/
 643 Israel: Dijimos que hay dos puestos para tronar globos, uno sería el puesto [...] ¿de quién?
 644 Aos: De Don Benjamín.
 645 Israel: Y el otro puesto es de [...]
 646 Aos: Don Octavio.
 647 Israel: A ver, pero ¿hay una diferencia ahí?
 648 Aos: Sí
 649 Mo. A ver pero, ¿cuál sería la diferencia equipo amarillo?
 650 Ao: Que con Don Octavio dan un dardo más que con Don Benjamín.

651 Ao: ¡A qué no!
 652 Israel: A ver, ¿cuántos dardos dan?
 653 Ao: Con Don Benjamín [...]
 654 Israel: ¿Dan qué?
 655 Israel: A ver equipo rojo [...]
 656 Ao: Dan ocho dardos y, con Don Octavio dan 10 dardos.
 657 Israel: ¿Aquí dan cuántos dardos? /Señala a una lámina pegada en el pizarrón/
 658 Aos: Diez.
 659 Israel: Diez dardos pero, ¿cuántos dardos tiene que tronar?
 660 Aos: Seis, seis.
 661 Aos: Siete, siete.
 662 Israel: Dice la pregunta, ¿en cuál de los dos puestos le convienen jugar para llevarse un
 663 regalo?, ustedes qué pusieron equipo naranja.
 664 Aa: En el de Don Octavio.
 665 Israel: ¿Ustedes qué pusieron? /señala otro equipo/
 666 Aos: En el de Don Octavio.
 667 Israel: ¿Ustedes qué pusieron? /señala otro equipo/
 668 Aa: En el de Don Benjamín.
 669 Israel: Equipo amarillo, ¿ustedes qué pusieron?
 670 Ao: Don Octavio.
 671 Israel: Equipo rojo [...]
 672 Ao: Don Octavio.
 673 Israel: Vamos a ver si es cierto, a ver pase el equipo amarillo [...]
 674 /Pasa un alumno/
 675 Israel: A ver ustedes por qué dicen que hay más posibilidades de [...] Su compañero les va
 676 a decir por qué en el puesto de don Octavio tienen más oportunidad de ganar, ¿por qué?
 677 Ao: Porque aquí hay 8 dardos para tronar 6 globos /anota los números en el pizarrón/ y acá
 678 vamos a tronar 7 globos con 10 dardos /anota los números en forma de fracción/ y si los
 679 contamos acá nos dan un dardo más /señala caso de Don Benjamín/, porque mire, acá
 680 tenemos que tronar 6 globos con 8 dardos y acá 7 globos con 10 dardos y yo los conté
 681 desde el 7 hasta el diez /anota un número 3/
 682 Israel: ¿Este tres qué significa?
 683 Ao: Que puede fallar tres.
 684 Israel: Que puede fallar tres veces para ganarse el premio.
 685 Ao: Y aquí contando del 6 hasta el 8, y aquí sólo nos dan dos, y acá /señala el puesto de
 686 Don Octavio/ es donde conviene jugar para tener más posibilidad de ganar, porque acá nos
 687 dan un dardo más que con don Benjamín.
 688 Israel: Entonces por eso dicen ustedes que con Don Octavio [...] el equipo azul, ¿ustedes
 689 por qué dicen que con Don Octavio?
 690 Aos: Porque [...]
 691 Israel: A ver pásenle.
 692 /Pasa una alumna al frente/
 693 Aa: En este dan más oportunidad para ganar y en este dan menos /Señala a los puestos
 694 dibujados en el pizarrón/
 695 Israel: Pero, por qué dice el equipo azul que con Don Octavio dan más oportunidad.
 696 Aa: Porque en este dan diez dardos y en este dan ocho dardos /señala el de Don Benjamín/
 697 Israel: En este ¿cuántos dardos dan? /señala el puesto de Don Octavio/

698 Aa: Diez.
699 Israel: ¿Y allá? /Señala el puesto de Don Benjamín/
700 Aa: Ocho.
701 Israel: Entonces, ¿tú dices que en cuál?
702 Aa: En ese /señala el puesto de Don Octavio/
703 Israel: Ahí hay más oportunidad de ganar porque dices que les dan más dardos verdad [...]
704 Aa: Aquí son 7 globos para tronar /señala el puesto de Don Octavio/ y acá son 6 /señala el
705 puesto de Don Benjamín/. Entonces aquí nada más te dan un globo más para que truenes,
706 pero también te dan más dardos /señala el puesto de Don Octavio/ y acá no /señala el
707 puesto de Don Benjamín/. Entonces aquí tienen más oportunidades de ganar, porque [...]
708 puedes ganarte el premio /señala el puesto de Don Octavio/
709 Israel: Equipo verde, ustedes por qué dicen [...] es el único equipo que dice lo contrario,
710 ¿por qué?
711 /Pasa una alumna al frente/
712 Aa: Nosotros decimos que aquí nos ahorramos un globo menos de tronar /señala el puesto
713 de Don Benjamín/ y acá tenemos que tronar otro más /señala el puesto de Don Octavio/
714 Israel: Ustedes por qué dicen que se ahorran [...] de dónde sacan ese globo /señala el
715 puesto de Don Benjamín/
716 Aa: Aquí son 6 globos y acá son 7; entonces nosotros decimos para no tronar más mejor
717 tronamos los 6 para no fallar el tiro, entonces aquí si nos dan más dardos /señala puesto de
718 Don Octavio/ y acá nos dan menos /señala puesto de Don Benjamín/, pero de todos modos
719 aquí nos dan uno menos para tronar y allá nos dan uno más para que si tiramos fallar. Aquí
720 está más fácil /señala puesto de Don Benjamín/
721 Israel: Pero no crees que el globo que te ahorras acá /señala puesto de Don Benjamín/ se
722 recupera acá /señala los tiros de más que ofrece el puesto de Don Octavio/ porque puedes
723 fallar, ¿cuántas veces?
724 Aa: Tres.
725 Israel: ¿Y aquí?
726 Aa: Dos.
727 Israel: ¿Entonces no crees que se recupera?
728 Aa: Sí
729 Israel: Entonces, ¿cuál podría ser? ¿Aquí tenemos cuántos dardos? /señala el puesto de Don
730 Benjamín/
731 Aa: Ocho dardos.
732 Israel: ¿Y cuántos globos hay?
733 Aa: Seis.
734 Israel: Entonces, ¿cuántas veces puede fallar?
735 Aa: Dos.
736 Israel: ¿Y aquí? /señala el puesto de Don Octavio/
737 Aa: Tres
738 Israel: ¿Son cuántos globos?
739 Aa: Siete.
740 Israel: ¿Y cuántos dardos?
741 Aa: Diez.
742 Israel: ¿Y puedes fallar ahí cuántas veces?
743 Aa: Tres.
744 Israel: Entonces, ¿dónde tú crees que te dan más oportunidad de que sigas participando?

745 Aa: En el puesto de Don Octavio.
 746 Israel: ¿Entonces si estamos todos de acuerdo?
 747 Aos: Sí
 748 Israel: Ustedes qué dijeron equipo rojo, ¿dónde hay más oportunidad de ganar?
 749 Aa: En el puesto de Don Octavio.
 750 Israel: ¿Por qué?
 751 Aa: Porque hay más globos pero hay más dardos.
 752 Israel: ¿Y crees que por eso hay más oportunidad de ganar?
 753 Aa: Sí
 754 Israel: Entonces, ahora si explícales a ellos por qué cambiaron de parecer.
 755 Aa: Al principio no le entendía muy bien, pero ahora sí.
 756 Israel: Aquí, ¿cuántas veces puedes fallar? /señala el puesto de Don Benjamín/
 757 Aa: Dos.
 758 Israel: Y aquí, ¿cuántas veces puedes fallar? /señala el puesto de Don Octavio/
 759 Aa: Tres.
 760 Israel: Puedes fallar tres. Entonces, equipo rojo donde les dan más oportunidad de ganar es
 761 donde te dan más oportunidad de qué [...]
 762 Aa: Donde te dan más tiros libres para que puedas fallar más veces.
 763 Israel: Entonces ya estamos todos de acuerdo que sería con Don Octavio. Vamos a lo
 764 siguiente, Carlos quiso participar en el puesto de Don Benjamín, la tabla de abajo muestra
 765 los registros que hizo Carlos en tres rondas. Aquí aparece el juego 1, el juego 2 y el juego 3,
 766 donde les aparece la ruedita quiere decir los globos tronados y la tachita, ¿qué quiere decir?
 767 Ao: Tiros fallados.
 768 Israel: La pregunta dice, ¿crees que en algún juego ganó un premio?
 769 Aos: Sí
 770 Israel: Ustedes qué pusieron, ¿que si o que no?
 771 Aos: Que sí.
 772 Israel: A ver, ¿ustedes dicen que si o que no? /señala otros alumnos/
 773 Aos: Que sí.
 774 Israel: ¿En cuál juego?
 775 Aos: En el tres.
 776 Israel: En el tres [...] Equipo amarillo, ¿ustedes creen que en algún juego ganó un premio?
 777 Aos: Si en el tercero.
 778 Israel: Equipo azul, ¿qué opinan?
 779 Aos: En el tres.
 780 Israel: Y el equipo verde, qué dice [...]
 781 Aos: En el tres.
 782 Israel: Pues ahí no creo que exista problema. ¿Por qué en el tres?
 783 Aa: Porque si decidió jugar en el de Don Benjamín y ahí trono seis globos y logró ganar un
 784 premio.
 785 Israel: Para ganarse un premio, ¿cuántos globos debió de haber tonado?
 786 Aos: Seis.
 787 Israel: ¿Y en alguno de los juego sus tronó los seis?
 788 Aos: Sí
 789 Israel: Muy bien, creo que no hay problema. Vamos a pasar a lo siguiente, qué dice la
 790 siguiente, su compañera me va a ayudar a leer /señala una de las alumnas/
 791 Aa: Piensa cómo comparar los resultados y discute tus ideas con otro compañero.

792 Israel: A ver, tú vas a ser el monito que está ahí, ¿qué dice el monito? /señala el contenido
793 de la siguiente parte de la hoja 1/
794 Aa: Puedo comparar el número de tiros en los que tronó un globo en cada juego.
795 Israel: Dice: Puedo comparar el número de tiros en los que tronó un globo en cada juego,
796 ¿si lo pueden comparar ustedes?
797 Aos: Sí
798 Israel: Porque son diferentes verdad [...] y ¿qué dice la otra monita?
799 Aa: ¿Sería suficiente? El número de globos que tronó en cada juego es diferente.
800 Israel: Muy bien, y ahora dice: Realiza un registro del número de tiros en los que tronó un
801 globo y el número de lanzamientos. Muy bien, si dijimos que [...] ¿Cuántas veces jugó?
802 Aos: Tres.
803 Israel: Tres si, aquí tenemos juego qué [...]
804 Aos: Juego 1, juego 2, juego 3.
805 /El Israel los escribe en el pintarrón/
806 Israel: Muy bien, ¿qué nos dice la primera? En este lado, ¿qué tenemos? /El Israel toma
807 como referente la tabla 2 de la hoja de trabajo 1/
808 Aos: Los globos tronados.
809 Israel: Y abajo, ¿qué tenemos?
810 Ao: El número de lanzamientos.
811 Israel: Muy bien, ¿y cuántos globos tronó en el juego 1?, ¿ustedes cuánto pusieron?
812 Aos: Cinco.
813 Israel: Cinco. Equipo amarillo, ¿cuántos globos tronó en el juego 1?
814 Aos: Cinco.
815 Israel: Ustedes equipo rojo [...]
816 Aos: Cinco.
817 Israel: ¿Y ustedes? /señala otro equipo/
818 Aos: Cinco.
819 Israel: ¿Y ustedes? /señala otro equipo/
820 Aos: Cinco.
821 Israel: Cinco verdad, y en el juego 2, ¿cuántos globos tronó?
822 Aos: Cuatro.
823 Israel: ¿Nadie tiene algo diferente?
824 Ao: No
825 Israel: Cuatro verdad, y en el juego 3, ¿cuántos globos tronó?
826 Aos: Seis.
827 Israel: Pero qué tenemos abajo, el número de lanzamientos verdad y, ¿cuántas veces tiró en
828 cada juego?
829 Aos: Ocho.
830 Israel: ¿Tiró ocho veces?
831 Aos: Sí.
832 Israel: Equipo amarillo, ¿si tiró ocho veces o cuántas veces tiró?
833 Aos: Ocho.
834 Israel: Y en el juego 2, ¿cuántas veces?
835 Aos: Ocho.
836 Israel: ¿Y en el juego 3?
837 Aos: Ocho.
838 Israel: Entonces decimos que en todos los juego tiró [...] ¿Cuántos?

839 Ao: Ocho veces.
840 Israel: Pero, ¿tronó los mismos globos?
841 Aos: No.
842 Israel: No verdad, tronó, ¿qué?
843 Aos: Diferente.
844 Israel: Diferente verdad. Muy bien. Abajo dice: Expresa con fracciones los datos de la tabla
845 anterior, dice usa el número de globos tronados como numerador y el número de
846 lanzamientos como denominador, a ver, ¿cómo les quedó el juego 1?
847 Aos: Cinco octavos.
848 Israel: A ver, ¿cómo les quedó? /solicita a una alumna que pase a expresar el resultado, la
849 alumna pasa y escribe en el pintarrón $5/8$ /
850 Israel: Si quieres abajito de donde dice juego 1 /Le da la indicación a la alumna/ ¿Cómo le
851 quedó? A ver pásale.
852 /Otra alumna pasa y escribe $4/8$; de esta forma Emiliano también pasa y escribe $6/8$ /
853 Israel: Entonces, ¿qué querrá decir $5/8$?
854 Aas: Ocho lanzamientos [...]
855 Israel: Podemos decir que aquí, ¿cuántos globos tronó? /señala juego 1 en el pintarrón/
856 Aos: Cinco.
857 Israel: ¿De cuántos lanzamientos?
858 Aos: De ocho.
859 Israel: ¿Aquí cuántos globos tronó? /señala juego 2/
860 Aos: Cuatro de ocho.
861 Israel: Cuatro de ocho lanzamientos, y aquí, ¿cuántos globos tronó? /señala juego 3/
862 Aos: Seis.
863 Israel: Si por ejemplo les pusiera lo siguiente, que en el juego 4 /escribe en el pizarrón $3/8$ /
864 si yo lo expresara así, ¿cuántos globos tronaría?
865 Aa: Tres de ocho.
866 Israel: Quiere decir que tronó, ¿cuántos globos?
867 Aos: Tres de ocho.
868 Israel: Tres de ocho. A ver y si en el juego 5 lo encuentran como por ejemplo /escribe en el
869 pizarrón $2/8$ /, ¿qué aire decir esto?
870 Aos: Dos de ocho.
871 Israel: Equipo amarillo [...]
872 Aos: Dos de ocho.
873 Israel: Que tronó [...]
874 Aos: Dos globos.
875 Israel: ¿De?
876 Aos: Ocho.
877 Israel: Muy bien. Enseguida dice: Ahora convierte las fracciones anteriores en números
878 decimales. En eso observé como que le batallaron un poquito porque todavía no habían
879 visto los números decimales, pero ¿cómo le hicieron?, ¿quién me quiere decir? Vamos con
880 este equipo /señala otro equipos/
881 /Las alumnas escriben en el pintarrón /
882 Israel: Todos los equipos ponemos atención, ¿cómo le hicieron?
883 Aa: Nosotros le hicimos como aquí son $5/8$ [...] entonces como ya están dividimos quedó
884 5.8.
885 Israel: Cinco punto ocho, en el juego 2. ¿Cómo les quedó? /señala otros alumnos/

886 Aa: En el juego 2 dio 4.8
 887 Israel: 4.8. ¿Y en la otra?
 888 Aa: En la otra dio 6.8
 889 Israel: A ver, cómo lo hicieron los demás equipos. Dice el equipo verde que ellos le
 890 hicieron así, en el juego 1 le pusieron 5.8, acuérdense que el puto decimal es este [...] pero,
 891 ¿por qué ellos pusieron 5.8, de dónde sacaron el 5?
 892 Aa: De la fracción /señala $5/8$ /
 893 Israel: De la fracción [...] ellos como quien dice le quitaron la rayita y le pusieron el punto
 894 verdad, ¿alguien tiene otro resultado diferente?
 895 /Algunos alumnos levantan la mano/
 896 Israel: A ver pase el equipo rojo, ahorita los demás vean a ver si es lo mismo, los demás
 897 pongan atención, a ellos si alcancé a explicarles un poquito lo del punto decimal, los demás
 898 para que observen.
 899 Aa: Dividimos $5 \div 8$ /señala el juego 1 en la tabla que está en el pintarrón/
 900 Israel: $5 \div 8$, ¿cuánto les dio? Traes tus hojitas o en la calculadora.
 901 /La alumna va por una calculadora y escribe el resultado en el pizarrón 0.625/
 902 Israel: Equipo amarillo, ¿cuánto les dio a ustedes?
 903 Aos: Igual.
 904 Israel: ¿Y a ustedes?
 905 Aos: Igual.
 906 Israel: En la segunda, ¿qué les dio? /señala juego 2/
 907 Ao: Cero punto cinco.
 908 Israel: ¿A ustedes cuánto les dio? /señala otro equipo/
 909 Aa: Cero punto cinco, nos dio igual.
 910 Israel: Sí. En el tercer juego cuánto les dio.
 911 Aa: 0.75
 912 Israel: Muy bien, pero explícale al equipo verde, ¿qué dividiste? O ¿Cómo les dio esto?
 913 Aa: Yo dividí $5 \div 8$ la fracción, acá $4 \div 8$ en el juego 2 y $6 \div 8$ en el juego 3.
 914 Israel: ¿Si vieron? Sólo que ustedes no dividieron, sólo les pusieron el punto a los números,
 915 les explicaba a los otros equipos 0.5 [...] /el Israel realiza un rectángulo en el pintarrón/
 916 vamos a suponer que este sería un entero /señala el rectángulo/ y lo voy a dividir en 10
 917 pedacitos, 1, 2, 3, 4... 10, cada pedacito voy a poner que vale 0.1, 0.2, 0.3... 1 y hasta aquí
 918 sería un entero, y aquí me dice que el 0.5, ¿hasta dónde va a llegar?
 919 Aos: Hasta el 0.5
 920 Israel: Y esto, ¿Qué vendría siendo? ¿Creen que el 0.5 lo podemos representar en una
 921 fracción?
 922 Aos: Sí.
 923 Israel: ¿Cómo?
 924 Aa: $5/10$
 925 Israel: ¿Cuántos pedacitos tenemos aquí?
 926 Aos: 5 de 10
 927 Israel: ¿Cómo lo puedo poner como una fracción?
 928 Aos: Cinco décimos /el Israel escribe $5/10$ /
 929 Israel: También lo puedo poner como [...]
 930 Aos: Un medio /el Israel escribe $1/2$ /
 931 Israel: ¿Qué más?
 932 Israel: A ver, aquí vi que les salió 0.5

933 Aa: $4/8$
 934 Israel: Entonces, ¿cómo me salió este decimal?, ¿qué hice? Todos en su calculadora, si
 935 dividen $5 \div 10$, ¿cuánto les da?
 936 Aa: 0.5
 937 Israel: Muy bien, si dividen $1 \div 2$, ¿cuánto les da?
 938 Aos: 0.5
 939 Israel: Y si dividen $4 \div 8$, ¿cuánto les da?
 940 Aos: 0.5
 941 Israel: Entonces para obtener un decimal o números decimales o convertir una fracción en
 942 números, ¿qué debemos de hacer?
 943 Ao: Multiplicar.
 944 Israel: ¿Multiplicar?
 945 Aos: Dividir.
 946 Israel: Equipo naranja, si queremos convertir una fracción en número decimales, ¿qué
 947 debemos de hacer?
 948 Aos: Dividir.
 949 Israel: ¿Vamos a dividir lo de arriba o lo de abajo?
 950 Ao: Lo de los dos lados.
 951 Aa: Vamos a dividir $4 \div 8$
 952 Israel: Entonces, ¿si está más o menos clara la idea?
 953 Aos: Sí.
 954 Israel: Muy bien, antes de terminar vamos a ver lo siguiente /pega una lámina en el
 955 pintarrón/
 956 Israel: Entonces vamos a ver qué relación hay entre el número de dardos con el número de
 957 lanzamientos [...] a ver dice: si tomamos el número de dardos como el total, el número de
 958 globos ¿será qué?
 959 Ao: Una parte de [...]
 960 Israel: Serán solamente una parte de ese total, a eso le vamos a llamar una razón, que sería
 961 una comparación entre dos cantidades, aquí yo tengo dos cantidades, por ejemplo con Don
 962 Benjamín tenía, ¿qué? Tenía los dardos y, ¿qué más tenía?
 963 Aos: Los globos.
 964 Israel: Y los globos verdad, dijimos que eran diferentes, había cierta diferencia, vamos a
 965 ver, dice que la razón entre los globos tronados es igual, al número de qué [...]
 966 Aa: Al número de globos tronados.
 967 Israel: Al número de globos tronados entre [...]
 968 Aos: Número de dardos.
 969 Israel: Numero de dardos. Entonces, en el juego 1, equipo amarillo y equipo rojo, dice que
 970 la razón entre dardos y globos tronados es igual a número de qué [...]
 971 Aa: Al número de globos tronados.
 972 Israel: Al número de globos tronados, esta es la parte, ¿qué? /señala en la lámina/
 973 Aos: Total.
 974 Israel: Entre el número de dardos que sería el total. Dijimos que en el puesto de Don
 975 Benjamín, ¿cuál era el número de dardos?, ¿cuántos eran?
 976 Aa: ¿De Don Benjamín?
 977 Aa: Eran ocho dardos.
 978 Israel: Aquí los tienen /señala en la lámina/ eran 1, 2, 3...8, entonces el número de dardos
 979 va a ser mi cantidad qué [...]

980 Aos: Total.
 981 Israel: Total, y el número de globos tronados va a ser [...]
 982 Aos: Parte del total.
 983 Israel: Parte de total, por ejemplo, en el juego 1, ¿cuántos globos tronó? Ahí los tienen.
 984 Aos: Cinco.
 985 Israel: Cinco, estamos diciendo que tronó, ¿cuántos?
 986 Aos: Cinco.
 987 Israel: Cinco de [...]
 988 Aos: Ocho.
 989 Israel: Cinco de ocho, en el juego 2, ¿cuántos tronó?
 990 Aos: Cuatro.
 991 Aos: Cuatro de ocho.
 992 Israel: Entonces esta es la relación que existe entre el número de dardos y el número de
 993 globos, aquí yo estoy diciendo que tronó, ¿cuántos?
 994 Aos: Cuatro.
 995 Israel: Cuatro de [...]
 996 Aos: De ocho.
 997 Israel: Y en el juego 3, ¿cuántos globos tronó?
 998 Aos: Seis.
 999 Israel: Si lo pongo como seis octavo /escribe $\frac{6}{8}$ en el pintarrón/, ¿qué quiere decir?, ¿qué
 1000 tronó qué?
 1001 Aos: Seis de ocho.
 1002 Israel: Que tronó seis globos de ocho. Entonces para finalizar, ¿si quedó claro lo que fue
 1003 esta relación o esta razón? ¿Hasta aquí alguna duda?
 1004 /Los alumnos no contestan/
 1005 Israel: Entonces, por ejemplo, si aquí tengo, si en el juego 4 tronó 3 globos, ¿cómo lo puedo
 1006 expresar con una fracción o con un número?
 1007 Aa: Con una fracción.
 1008 Israel: ¿Cómo sería?
 1009 Israel: A ver si aquí tronó solamente tres globos, si /Los dibuja en la lámina/ parecen
 1010 pececitos pero son globos. A ver, equipo amarillo, si en el juego 4 tronó 3 globos, ¿cómo lo
 1011 puedo expresar con una fracción?
 1012 Aos: Tres octavos.
 1013 Israel: ¿Dijimos que sería así? /escribe en el pintarrón $\frac{3}{8}$ / ¿Qué tronó cuántos?
 1014 Aa: Tres de ocho.
 1015 Israel: Tres de ocho. Vamos a ver si entendieron la idea, todos a tras van a ser lo siguiente,
 1016 a ver me ayudas a [...] /pega en el pintarrón una lámina/, ¿qué dice aquí? [...] Dice, la tabla
 1017 de abajo muestra el registro de los lanzamientos de José el amigo de Carlos, pero ahora, ¿en
 1018 el puesto de quién?
 1019 Aos: De Don Octavio.
 1020 Israel: Dice, expresa la relación que existe entre estos dos datos, usando una fracción o un
 1021 número, a ver háganlo todos en la hojita de atrás, ¿cómo podrían expresar esto en una
 1022 fracción o en un numero?, ¿cómo le podrían hacer?
 1023 Aa: Contando los tiros
 1024 /Los alumnos trabajan, mientras que el Israel repite el planteamiento del problema/
 1025 Israel: A ver, ¿cuánto le salió a ustedes?
 1026 Aos: Cinco cuartos.

1027 Israel: ¿A ustedes?
 1028 Aas: Seis décimos.
 1029 Israel: ¿A ustedes?
 1030 Aos: Cinco cuartos.
 1031 Israel: A ver equipo verde, ¿cuánto les salió?
 1032 Aos: Seis décimos.
 1033 Israel: Va a pasar este equipo a decirles por qué les dio eso [...]
 1034 Aa: Si contamos los globos que tronó son seis, y las veces que tiró son diez.
 1035 Israel: Aquí ya no están jugando con Don Benjamín, ahora están jugando con [...]
 1036 Aos: Don Octavio.
 1037 Israel: Y dijimos que con Don Octavio para ganar un premio tenía que tronar cuántos [...]
 1038 Ao: Siete.
 1039 Israel: ¿Siete de cuántos?
 1040 Aos: Siete de diez.
 1041 Israel: ¿Y cuántos tronó?
 1042 Aos: Seis.
 1043 Israel: ¿Y de cuántos?
 1044 Aos: De diez.
 1045 Israel: Entonces si expresamos esta relación con una fracción, ¿cómo quedaría?
 1046 Aos: Seis décimos.
 1047 Israel: Seis decimos qué quiere decir [...] ¿Cuánto?
 1048 Aos: Seis de ocho.
 1049 Israel: ¿Seis de ocho? [...] seis globos tronados de diez lanzamientos. Entonces me
 1050 entregan su hojita con su nombre y el papelito que les di al principio para salir del salón/

ANEXO 7. Videgrabación de clase de Israel (2)

- 1 Israel: Vamos a realizar un recordatorio de lo que vimos ayer, ¿quién se acuerda de lo que
2 estuvimos viendo?
3 /Algunos alumnos levantan la mano/
4 Ao: De que esos [...] que aquí nos dio una explicación de los globos que tronó, cuántos
5 tronó y cuántos tiró /señala a la lámina/
6 Israel: Y los que falló, ¿qué?
7 Ao: Estos son los que falló /señala a la lámina/
8 Israel: A ver hicimos una comparación entre los globos que [...]
9 Ao: Los que tronó.
10 Israel: Los que tronó verdad o los que falló [...] ¿Con qué los íbamos a comparar?
11 Ao: Con estos /Señalando los lanzamientos/
12 Israel: ¿Y estos qué son?
13 Ao: Número de lanzamientos /Lee la lámina/
14 Israel: Numero de lanzamientos. A ver, ¿qué más estuvimos viendo?
15 /Algunos alumnos levantan la mano/
16 Aa: Que los globos tronados y el número de lanzamientos se puede expresar con una
17 fracción.
18 Israel: ¿Esto lo podemos expresar con una fracción?
19 Aos: Sí
20 Israel: ¿Se acuerdan cómo lo podemos expresar con una fracción? ¿Quién quiere pasar a
21 expresar este? /señala la lámina/
22 /Una alumna escribe en el pintarrón 6/10/
23 Israel: A ver, explícales a tus compañeros por qué pusiste eso, ¿qué quiere decir?
24 Aa: Los tiros que realizó y los globos que tronó.
25 Israel: A ver, vamos a recordar un poquito, me ayudas a leer lo que dice aquí el problema
26 Aa: La tabla de abajo muestra el registro de lanzamientos que realizó José el amigo de
27 Carlos en el puesto de Don Octavio.
28 Israel: ¿Se acuerdan que había dos puestos?, ¿cuál era uno de esos puestos?
29 Aos: Don Octavio.
30 Aos: Don Benjamín.
31 Israel: El de Don Benjamín. Vamos a anotarlo por aquí /lo escribe en el pintarrón/ ¿Se
32 acuerdan? ¿Cuántos globos debía de tronar con Don Benjamín para ganarse un premio?
33 Aa: Seis.
34 Israel: Seis y, ¿cuántos dardos les daban?
35 Aos: Ocho.
36 Israel: Ocho; esto, ¿cómo lo podemos expresar?
37 Aos: Seis octavos.
38 Israel: Seis octavos /Israel escribe en el pintarrón 6/8/. Entonces decimos que debe tronar
39 [...]
40 Aos: Seis globos de [...] ocho.
41 Israel: Seis globos de ocho oportunidades que tiene. Muy bien, había otro puesto, ¿cuál
42 puesto era?
43 Aos: El de Don Octavio.
44 Israel: Don Octavio y, se acuerdan cuántos debería de tronar.
45 Aos: Sí, siete y le daban diez dardos.

46 Israel: Siete, con cuántos dardos [...]
 47 Aos: Diez
 48 Israel: Muy bien. Abajo dice: Expresa la relación entre estos dos datos usando una fracción
 49 o un número. Su compañerita dice lo representó así /señala 6/10 en el pintarrón/ ¿Qué
 50 quería decir esto?
 51 Aa: Una fracción.
 52 Israel: Una fracción y, ¿cómo se leería?
 53 Aos: Seis décimos.
 54 Israel: Seis décimos verdad, o qué más podemos decir, cómo la podemos interpretar o leer
 55 [...] como seis qué [...]
 56 Aos: Globos tornados.
 57 Israel: De [...]
 58 Aos: De diez.
 59 Israel: ¿Diez qué?
 60 Aos: Dardos, lanzamientos.
 61 Israel: De diez lanzamientos o diez dardos. Muy bien. Aquí dice expresa la relación entre
 62 estos dos datos usando una fracción o un número, aquí ya su compañerita realizó algo [...],
 63 esta que viene siendo, ¿una fracción o un número?
 64 Aos: Una fracción
 65 Israel: ¿Y esto? /Señala una cantidad de la fracción/
 66 Aos: Una división, un número, una fracción [...]
 67 Israel: Pero lo de arriba.
 68 Aos: Un número.
 69 Israel: Un número. ¿Si se acuerdan que estuvimos ayer viendo cómo convertir las
 70 fracciones en número qué?
 71 Aos: Decimales.
 72 Israel: Con números decimales verdad. El día de hoy vamos a trabajar otras hojitas que les
 73 traigo preparadas para terminar con este tema, ¿si se acuerdan los equipos en los que
 74 estaban ayer?
 75 Aos: Sí.
 76 Israel: A ver, les voy a pedir que, nos organicemos en esos equipos
 77 /Los alumnos se organizan en equipos/. Vamos a contestar una hojitas que les traigo, quiero
 78 que primero las vean todos para poderles decir lo que vamos a hacer
 79 /Israel reparte el material a trabajar/. Es una para cada uno. Vamos a contestar esta hojita en
 80 quipo, la vamos a contestar hasta la rayita negra, ¿si ven todos la rayita negra?
 81 Aos: Sí.
 82 Israel: Eso que está abajo de la rayita negra no lo vamos a contestar, cuando el equipo
 83 termine de contestar, antes de la rayita negra, hasta ahí le paramos. Tenemos quince
 84 minutos para resolver esa hojita, y no podemos platicar con los demás equipos. El equipo
 85 rojo, ¿qué vamos a hacer? Díganles a sus compañeros.
 86 Aa: Vamos a trabajar hasta la línea negra.
 87 Israel: Hasta la rayita [...] ¿Qué más podemos hacer?
 88 Aa: Contestar eso [...]
 89 Israel: Contestar eso, sí, podemos hacer uso de la calculadora. Entonces comenzamos [...]
 90 /Los alumnos comienzan a leer la hoja mientras que el Israel hace entrega de algunas
 91 calculadoras a los equipos que la requieran. Israel se acerca con algunos equipos para
 92 orientar el trabajo/

93 Israel: Dice el grado de aglomeración, a ver, vamos a entender por aglomeración [...] ¿Qué
94 les está pidiendo? ¿Cuál mesa está más que [...]?

95 Aa: Llena.

96 Israel: ¿Cuál mesa está más llena? Vamos a entender por eso grado de aglomeración, aquí
97 les dice lo que se necesita para saber el grado de aglomeración [...] Dice: Para esto van a
98 hacer estas operaciones como les indica aquí, qué dice para saber el grado de aglomeración,
99 ¿qué se hace?

100 /Pregunta al interior de un equipo/

101 Aa: El número de personas y el número de asientos.

102 Israel: Muy bien y, ¿conocen el número de personas y el número de asientos?

103 Aa: Sí.

104 Israel: Muy bien. También aquí quiero que le pongan por qué piensan ustedes que esa mesa
105 [...] platiquen entre ustedes y escríbanme aquí. ¿Se acuerdan que ayer dijimos que iban a
106 justificar sus respuestas?, ¿que íban a poner por qué? Aquí pongan por qué ustedes creen
107 que es esa mesa, no sólo pongan que en la mesa grande o en la mesa chica, si ponen en la
108 mesa grande luego escriban el por qué, ¿de acuerdo?

109 Aa: Sí.

110 /Se acerca a otro equipo/

111 Israel: ¿Ya leyeron? ¿Qué les dice el enunciado del problema?

112 Aa: ¿Cuántas mesas tiene y para cuántas personas son?

113 Israel: Y para cuántas personas son [...] luego, ¿qué te pregunta?

114 Aa: ¿Qué mesa se encuentra más llena? La grande.

115 Israel: Pero quiero que aquí le pongan el por qué [...] acuérdense que debemos de justificar
116 nuestras respuestas, quiero que le pongan por qué ustedes dicen que en la mesa grande,
117 pero antes de escribir, comentan entre ustedes, qué tal si alguien dice que en la mesa chica.

118 Aa: Yo, yo, en la mesa grande, porque tiene más personas.

119 Israel: Porque tiene más personas [...] Entonces ustedes comenten para que tengan todo
120 igual, comenten que pueden poner, ¿por qué dicen que en la mesa grande?

121 Aa: En la mesa chica son 130 asientos, para 130 personas y en la mesa grande son 520
122 asientos para 520 personas. Pero ninguna de las dos mesas se llenó. En la chica están 117
123 personas y en la grande 416 personas [...] Entonces la cantidad más grande es 400 [...]

124 Israel: Muy bien, pero aquí no está pidiendo cuál es la cantidad más grande, ¿qué les está
125 pidiendo?

126 Aa: ¿Cuál es la mesa que está más llena?

127 Aa: Entonces estamos viendo la cantidad que es más grande para saber cuál mesa está más
128 llena.

129 Israel: Para saber cuál es la mesa que está más llena [...] está bien. También acuérdense
130 que están viendo el número de personas, pero, ¿dónde dejan el número de asientos?

131 Aa: ¿Qué?

132 Israel: Ustedes sólo están viendo el número de personas, ¿y el número de asientos?

133 /El equipo no responde/

134 Israel: También observen cuántos asientos quedaron vacíos en cada mesa para que puedan
135 ver [...]

136 Aa: En la mesa chica quedaron 30 asientos.

137 Aa: No es cierto.

138 Israel: ¿30? ¿Qué podemos hacer en eso?

139 Aa: No, porque si son 30-17, no quedaron 30 [...]

140 Israel: Vean todo eso para que puedan contestar la pregunta.
 141 /Israel se acerca con otro equipo/
 142 Israel: A ver si ustedes dicen que en la mesa grande también quiero que le pongan por qué
 143 [...]

144 /Los equipos continúan trabajando y el Israel continua monitoreando los equipos/
 145 Israel: Esto es lo de aquí abajo /Señala en la hoja de trabajo/. Dice: Para saber que tan llena
 146 está cada mesa, el grado de aglomeración se describe como un número que permite
 147 comparar el número de personas sentadas, ¿con cuál número?
 148 Ao: Mesas [...]

149 Israel: Dice: Nos permite comparar el número de personas sentadas con el número de qué
 150 [...]

151 Ao: Decimal.
 152 Israel: Con el número decimal. Aquí dice /señala a la hoja/ con el número de [...]

153 Aa: De asientos.
 154 Israel: Con el número de asientos, muy bien. Nos dice que para conocer este grado de
 155 aglomeración, ¿qué debemos de hacer?
 156 Israel: ¿Qué debemos de hacer? ¿Qué viene es esto? /Señala la información de la hoja de
 157 trabajo/
 158 Ao: Dividir.
 159 Israel: Una división, pero qué vamos a dividir, el número de [...]

160 Aa: De personas.
 161 Ao: El número de asientos.
 162 Israel: Y ustedes, ¿conocen el número de personas y el número de asientos?
 163 Aa: Sí.
 164 Israel: Entonces es lo que van a hacer aquí /señala la información de la hoja de trabajo/
 165 encuentra que tan cerca están de agotar su capacidad las mesas. Aquí la de la mesa chica y
 166 la de la mesa grande. Entonces ustedes también pusieron que la de la mesa grande, pero
 167 escriban por qué; después de que platicaron entre todos, escriban lo que hicieron para saber
 168 cuál mesa está más llena.
 169 Ao: Ya terminamos.
 170 /Algunos equipos terminan su trabajo/
 171 /Israel se acerca con otro equipo/
 172 /El maestro organiza unas láminas y continúa orientado a algunos equipos/

173 Israel: Ahorita que ya acabaron todos los equipos, quiero que el equipo naranja me ayude a
 174 leer el enunciado.
 175 Ao: Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la
 176 tienda “Fiesta Alegre” le rentaron una mesa “chica” para 130 personas y en la tienda “Todo
 177 para tu fiesta” le rentaron una mesa “grande” para 520 personas. Carlos y sus amigos
 178 registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.
 179 Israel: Muy bien. Equipo amarillo, dice tenemos [...] ¿Cuántas mesas tenemos?
 180 Ao: Dos.
 181 Israel: Dos, tenemos una mesa [...]

182 Aos: Chica.
 183 Israel: Una mesa chica [...]

184 Aos: Y una grande.
 185 Israel: Y una mesa grande /las escribe en el pizarrón/ ¿Qué más nos dice? Dijimos que
 186 tenemos un número de qué [...]

187 Ao: Número de asientos.
188 Israel: Primero tenemos un número de personas que se sentaron en la fiesta. En la mesa
189 chica, ¿cuántas personas se sentaron?
190 Aos: 117
191 Israel: Equipo rojo, en la mesa chica, ¿cuántas personas se sentaron?
192 Ao: 117
193 Israel: Ciento diecisiete, y en la mesa grande, ¿cuántas se sentaron?
194 Aos: Cuatrocientos dieciséis.
195 Israel: Cuatrocientos dieciséis, pero también tenemos un número de [...] /Israel escribe
196 todo en el pintarrón/
197 Aos: Personas, asientos [...]
198 Israel: ¿De qué?
199 Aos: De asientos.
200 /El maestro escribe en el pizarrón/
201 Israel: Número de asientos. Nos dice cuántos asientos tiene la mesa chica, ¿cuántos?
202 Aos: Ciento treinta.
203 Israel: ¿Ciento treinta? /Escribe en el pintarrón/
204 Ao: Quinientos veinte la otra.
205 Israel: ¿En la mesa grande?
206 Aos: Quinientos veinte.
207 Israel: Y luego les aparece una preguntita, ¿qué dice? /Pide a una alumna que lea/
208 Aa: ¿Qué mesa se encuentra más llena?
209 Israel: Dice: ¿Qué mesa se encuentra más llena?
210 Aa: La grande.
211 Israel: Vamos a ver, levanten la mano, cuál equipo dice que la mesa que se encuentra más
212 llena es la mesa chica.
213 /Un equipo levanta la mano/
214 Israel: ¿Sólo el equipo amarillo?
215 Aos: Nosotros también /levantan la mano otros integrantes de diferentes equipos/
216 Israel: Muy bien, dos equipos, ¿quién dice que la mesa grande?
217 /El resto de los equipos levantan la mano/
218 Israel: Los demás, uno, dos, tres [...] Quiero que pase uno o varios de cada equipo para
219 que digan por qué la mesa grande, los demás escuchamos.
220 Ao: Nosotros decimos que la mesa grande está más llena porque en la mesa grande hay 416
221 personas y en la chica sólo 117, y entonces en la mesa grande hay más gente que la chica,
222 por eso decimos que está más llena.
223 Israel: Su compañero dice que porque hay más gente, es porque está más llena. El equipo
224 verde, ¿por qué dicen que la mesa grande?
225 /Israel les entrega un marcador y una alumna pasa al frente/
226 Aa: Nosotros decimos, una posibilidad, porque aquí sólo son 130 mesas.
227 Israel: ¿Mesas?
228 Aa: Digo 130 asientos, entonces 117 personas, entonces no se llena tanto la mesa. En la
229 mesa grande son 520 y 416 personas, entonces la mesa grande es más posible que se llene
230 porque está más grande y esta no /señala la mesa chica/ porque si se llenara toda la mesa
231 grande tendría más personas porque es menos la cantidad de asientos que tiene la mesa
232 chica.

233 Israel: Entonces ustedes concuerdan con el otro equipo, de que la mesa que esta más llena
 234 es la que tiene más personas.
 235 Aas: Sí.
 236 Israel: Este equipo desde su lugar, ¿por qué ustedes dicen que la mesa grande?
 237 Aa: Porque hay más personas.
 238 Israel: Entonces los tres equipos concuerdan de que la mesa que está más llena es donde
 239 hay más [...]
 240 Aos: Personas.
 241 Israel: Ahora vamos a darle oportunidad a los otros equipos que dicen la mesa chica está
 242 más llena. Los pueden corregir o hacer preguntas. Ustedes, ¿por qué dijeron que en la mesa
 243 chica?
 244 Aa: Nosotros pensamos que la chica, porque dividimos $117 \div 130$ y dio 0.8
 245 Israel: ¿Les dio 0.8?
 246 Aa: ¿Si nos dio 0.8? /Pregunta a su equipo y revisa su hoja/
 247 Aa: No, nos dio 0.9
 248 Israel: 0.9, anótalo en el pizarrón
 249 /La alumna lo escribe/
 250 Aa: Y dividimos $416 \div 520$ y nos salió 0.8
 251 Israel: 0.8
 252 Aa: Entonces nosotros pensamos que porque este era más cantidad /señala 0.9/ pensamos
 253 que era la chica, la mesa más llena.
 254 Israel: ¿La chica estaba más qué?
 255 Aa: Tenía más cantidad.
 256 Israel: ¿Tenía más cantidad?
 257 Aa: Que la grande.
 258 Israel: Que la grande, ¿está más qué? [...] casi llena. Bien, ¿si entendieron por qué ellos
 259 dicen que en la mesa chica?
 260 A. Aos: Sí.
 261 Israel: ¿Siguen diciendo que en la mesa grande porque hay más personas? Ustedes, ¿por
 262 qué dijeron que en la mesa chica? /Pregunta al último equipo/
 263 Ao: Nosotros pensamos [...] entendimos cuál estaba más llena y a la otra todavía le faltan
 264 100 y a este nada más le falta [...]
 265 Israel: Pasen a explicarlo al pintarrón.
 266 Ao: Es que nosotros pensamos [...] en el problema dice que cuál está más llena, y a ésta
 267 /señala la mesa grande en el pintarrón/ todavía le faltan como 100.
 268 Israel: ¿Cómo 100?
 269 Ao: Sí
 270 Israel: ¿Cuántos les faltan exactamente?
 271 Ao: Mm [...]
 272 Israel: ¿Qué podemos hacer?
 273 Ao: Una resta.
 274 Israel: ¿Qué vas a restar?
 275 /Su compañero de equipo hace la operación en su calculadora/
 276 Ao: Le faltan 104 a la mesa grande.
 277 Israel: A ésta le faltan cuántos [...]
 278 Ao: 104
 279 Israel: 104 verdad, anótale aquí /El alumno escribe 104 en el pintarrón/ ¿104 para qué?

280 Ao: Para que se llene.
 281 Israel: Para que se llene, de acuerdo, y a la mesa chica, ¿cuánto le falta?
 282 Ao: 13. Nosotros pensamos que como está ya se iba a llenar, pues que era la más llena.
 283 Israel: ¿Si le entendieron? ¿Por qué ellos dicen que en la mesa chica es la que está más
 284 llena?
 285 Aa: Porque hay más personas.
 286 Ao: Porque a la otra le faltan 104 y a esa le faltan 13 /señala la mesa chica/
 287 Israel: Le faltan 13. Entonces, ¿ahora si me pueden decir cuál de estas dos mesas será la
 288 que está más llena?
 289 Aos: La chica, la grande [...]
 290 Israel: A ver, ¿quién sigue que todavía la mesa grande? ¿Hubo algunos que cambiaron de
 291 parecer? Si [...] Vamos a ver lo siguiente [...]
 292 /Israel coloca una lámina en el pintarrón/
 293 Aa: ¿Si estábamos bien maestro?
 294 Israel: Ahorita vamos a ver. Dice la lámina: Un número que me permite comparar
 295 cantidades mediante una fracción, ¿cómo se llama?
 296 /Los alumnos no contestan, el Israel señala la palabra de la lámina y la lee/
 297 Israel: Se llama “razón”. ¿Se acuerdan lo que vimos ayer de los tiros?
 298 Aos: Sí
 299 Israel: ¿Cómo lo expresábamos? ¿Se acuerdan? Por ejemplo, si había tronado cuatro
 300 globos de ocho lanzamientos, ¿cómo lo podíamos poner?
 301 Ao: Ocho [...] ¿ocho globos de cuántos maestro?
 302 Israel: Si tronó cuatro globos de ocho lanzamientos /escribe en el pintarrón/ ¿Cómo
 303 podemos comprar estos dos con una fracción?
 304 Aos: Cuatro octavos.
 305 Israel: Cuatro octavos /escribe $4/8$ /, quiere decir qué [...] ¿cuántos tronó?
 306 Aos: Cuatro de ocho.
 307 Israel: O que por cada dos lanzamientos truena un globo, ¿si será cierto?
 308 Aos: Si, no [...]
 309 Israel: Por ejemplo, ¿cuántos globos tronó?
 310 Ao: Cuatro.
 311 Israel: ¿Y cuántos lanzamientos? Ocho /los dibuja en el pintarrón/. Vamos a ver lo
 312 siguiente, si es lo mismo tronar [...] cuatro globos de [...]
 313 Ao: Ocho
 314 Israel: Que por cada dos lanzamientos truena [...]
 315 Aos: Un globo.
 316 Israel: Tenemos que por cada dos lanzamientos truena [...]
 317 Aos: Uno.
 318 /Israel encierra en pares los lanzamientos dibujados y los relaciona con los globos tronados/
 319 Israel: Entonces, ¿si es lo mismo?
 320 Aos: Sí.
 321 Israel: Dijimos que por cada ocho lanzamientos truena 4 globos, ¿será lo mismo que con
 322 dos lanzamientos truena un globo?
 323 Aos: Sí
 324 Israel: Entonces también lo podemos expresar así [...]habíamos dicho que la razón era una
 325 parte del total entre la cantidad total de lanzamientos de globos, ¿cuál sería la cantidad
 326 total?, ¿los lanzamientos o los globos que tronó?

327 Aos: Lanzamientos [...]

328 Israel: Equipo amarillo, dice que una razón nos permite comparar dos cantidades. Aquí

329 tenemos que la razón es igual la parte del total, entre la cantidad total /señala la información

330 de la lámina/, por ejemplo, ¿que vendría siendo la cantidad total?, ¿los globos o el número

331 de lanzamientos? Uno vendría siendo la cantidad total y el otro sería solamente qué [...]

332 Ao: Parte

333 Israel: Parte del total.

334 Israel: Por ejemplo, este /señala en el pintarrón/ [...] de 4 globos tronados de 8, ¿cuál es la

335 parte del total, un pedacito? ¿Los globos o los lanzamientos?

336 Aos: Los globos tronados.

337 Israel: Los globos y, ¿cuál sería el total?

338 Aos: Los lanzamientos.

339 Israel: Los lanzamientos. Por ejemplo, aquí dijimos que cuántos globos tronó.

340 Aa: Cuatro de ocho.

341 Aos: Cuatro.

342 Israel: ¿Cuántas veces lanzó?

343 Aos: Ocho.

344 Israel: Ahora vamos a ver lo que hicieron en la parte de abajo /refiriéndose a la hoja de

345 trabajo/. Dice: Encuentra qué tan cerca están de agotar la capacidad esas mesas; para eso

346 ustedes hicieron unas divisiones, en la primera, ¿qué tenían que dividir?

347 Ao: $117 \div 130$.

348 Ao: El número de personas entre el número de asientos.

349 Israel: ¿Qué dividieron? El número de qué [...]

350 Aa: Dividimos $117 \div 130$.

351 Israel: Pero los 117 son el número de qué, ¿de asientos o de personas o de globos?

352 Aa: De personas.

353 Israel: De personas. El número de personas lo dividieron entre qué [...]

354 Aa: El número de asientos.

355 Israel: El número de asientos. Entonces, ¿cuánto les dio en la mesa chica?

356 Ao: 0.9

357 Israel: ¿Cuál es el número de personas?

358 Aa: 117

359 Israel: 117; a eso qué le voy a hacer [...] multiplicar, sumar [...]

360 Aos: Dividir.

361 Israel: Dividir, ¿entre cuánto?

362 Aa: 130

363 Mo; ¿Y cuánto le dio?

364 Aos: 0.9

365 Israel: Les dio 0.9. ¿A todos los equipos les dio 0.9?

366 Aos: Sí.

367 Israel: Si lo convirtieran en fracción, ¿cómo quedaría?

368 Aa: Ciento diecisiete entre ciento treinta /el Israel escribe en el pintarrón 117/130/

369 Israel: Si lo quisiera leer, ¿qué quiere decir este? /señala el número 117/

370 Aos: Personas sentadas.

371 Israel: De 130. Dice: El grado de aglomeración de la mesa chica es de 117/130 asientos, eso

372 les dio [...]

373 Ao: 0.9

374 Israel: Dice: El grado de aglomeración 0.9 significa que en la mesa chica 9 de cada 10
 375 personas están [...]
 376 Aos: Sentadas.
 377 Israel: Que 9 de cada 10 asientos están [...]
 378 Aos: Ocupados.
 379 Israel: En la mesa [...]
 380 Aos: Chica.
 381 Israel: Muy bien, si a la mesa chica la dividiera en 10 asientos [...] /Dibuja una mesa
 382 rectangular y la divide en 10 partes iguales/ Dice que 0.9, ¿qué significa?
 383 Aa: Que están ocupados.
 384 Israel: ¿Cuántos?
 385 Aa: 9 de cada 10 asientos.
 386 Israel: Significa que nueve de cada qué [...]
 387 Aos: 10 asientos están ocupados.
 388 Israel: Entonces de aquí /señala dibujo de la mesa/, ¿hasta dónde sería?
 389 Aos: Hasta el nueve /pasa un alumno y rellena las primeras nueve partes/
 390 /Los alumnos cuentan los cuadros que está rellenando/
 391 Israel: Entonces, ¿cuántos asientos en la mesa chica quedaron solos?
 392 Aos: Uno.
 393 Israel: Uno. Muy bien, porque dijimos que 9 de cada 10 asientos están [...]
 394 Aos: Ocupados.
 395 Israel: ¿Y en la mesa grande? A ver, ¿en la mesa grande cuánto les dio?, ¿qué hicieron?
 396 Equipo rojo, ¿qué hicieron?
 397 Aos: Dividimos.
 398 Aos: El número de personas y el número de asientos
 399 Ao: $416 \div 520$
 400 Israel: ¿Cuánto les dio?
 401 Ao: 0.8
 402 Israel: 0.8 /Israel lo escribe/. Entonces qué les dice aquí /señala la hoja de trabajo 2/.
 403 Expresa el grado de aglomeración de la mesa grande coloreándolo en el siguiente gráfico,
 404 ¿qué quiere decir aquí?, si 0.9 en la mesa chica me decía nueve personas estaban sentadas
 405 de diez, ¿qué quiere decir aquí? /señala la mesa grande/
 406 Aa: Ocho de diez.
 407 Israel: Ocho de diez, vamos a colorearlo, vamos a hacer algo de lo que realizó su
 408 compañero aquí.
 409 /Los alumnos se ponen a contestar esta actividad porque anteriormente el Israel les pidió no
 410 la contestaran. Israel se acerca a algunos equipos/
 411 Israel: Si en esta mesa 0.9 significaba que 9 personas de 10 estaban sentadas, esta que
 412 significa /señala el 0.8/
 413 Aa: Ocho personas están sentadas de diez.
 414 Israel: De diez, ¿creen que lo podemos hacer así como lo realizó su compañero en la mesa
 415 chica?
 416 Aos: Sí.
 417 Israel: ¿Cómo quedaría coloreado? ¿Cuántos vamos a colorear?
 418 Aas: 9
 419 Israel: ¿De cuántos?
 420 Aas: De diez.

421 Israel: Estamos hablando de la mesa grande, ¿serían nueve partes?, ¿cuánto les dio en la
422 mesa grande?
423 Aas: Ocho personas.
424 Israel: Ocho personas, ¿de cuántos?
425 Aas: De diez
426 Ao: Vamos a colorear ocho.
427 Israel: Sí.
428 /Continúa con el equipo mientras los otros trabajan. Posteriormente se pasa otro equipo/
429 Israel: ¿Qué significa el 0.8?
430 Ao: Que de diez asientos sólo están ocupados 8.
431 /Continúa con el equipo mientras los otros trabajan. Enseguida se pasa a otro equipo y
432 comenta lo mismo/
433 /Israel dibuja un rectángulo dividido en 10 partes como el de la mesa chica/
434 Israel: Como ya terminamos, equipo amarillo, ¿cuántos cuadritos colorearon?
435 Aos: Ocho.
436 Israel: Equipo rojo [...]
437 Aos: Ocho.
438 Israel: Equipo verde [...]
439 Aos: Ocho.
440 Israel: Dijimos que en la mesa chica de 10 asientos, ¿cuántos estaban ocupados?
441 Aos: Nueve.
442 Israel: De la mesa chica, ustedes /señala un equipo/ [...]
443 Ao. ¿La mesa chica?
444 Israel: Dijimos que en la mesa chica, ¿cuántos asientos están ocupados?
445 Aos: Nueve.
446 Israel: Entonces de la mesa chica, por cada 10 asientos, ¿cuántos asientos estaban vacíos?
447 /Israel colorea nueve partes del rectángulo de la mesa chica que está en el pintarrón/
448 Aos: Uno.
449 Israel: Y en la mesa grande, ¿cuántos asientos estaban ocupados por cada 10?
450 Aos: Ocho.
451 Israel: Ocho /rellena ocho partes del rectángulo que corresponde a la mesa grande/
452 Israel: Bien, por cada 10, ¿cuántos asientos estaban solos?
453 Aos: Dos.
454 Israel: Dijimos que en la mesa chica por cada 10 asientos, ¿cuántos tenía solos?
455 Aos: Uno.
456 Israel: Uno verdad, y en la mesa grande por cada 10 asientos, ¿cuántos tenemos solos?
457 Aos: Dos.
458 Israel: Entonces, si en la mesa chica por cada 10 asientos me sobra uno, y en la mesa
459 grande por cada 10 asientos me sobran dos, ¿cuál es la mesa que estaba más llena? ¿La que
460 tenía 9 y le sobraba uno o la que tenía 8 y le sobraban 2?
461 Aos: La chica
462 Israel: ¿Cuál era?
463 Aos: La chica
464 Israel: La chica verdad.
465 Israel: Entonces, ¿qué pasó aquí?, ¿por qué algunos decían que en la mesa grande?
466 Aa: Porque había más personas.

467 Israel: Porque había más personas, sin embargo, aquí lo pusieron algunos de sus
 468 compañeritos que decían que en la mesa chica, ¿cuántos les faltaban para llenarse?
 469 Aso: 13
 470 Israel: 13 y, en la mesa grande [...]
 471 Aa: 104
 472 Israel: ¿Cuál era la mesa que estaba más llena, la grande o la chica?
 473 Aos: La chica
 474 Israel: Muy bien. Para terminar les voy a entregar otra hijita /Israel reparte el material/
 475 Israel: Vamos a contestar esta hojita y ahorita vamos a ver cómo les queda, tenemos
 476 también 15 minutos.
 477 /Los alumnos continúan trabajando con la hoja 3, mientras tanto se acerca con un equipo y
 478 comienzan a leer el problema/
 479 Aa: Para la comida el Alcalde quiere mandar preparar un rico pozole, para preparar una
 480 ración para 5 personas se necesitan, entre otros, los siguientes ingredientes y sus respectivas
 481 cantidades [...]

482

Ingredientes	Cantidad
Maíz	1 kg
Carne	750 g
Chile guajillo	$\frac{1}{4}$ kg
Agua	1.5 L
Sal	Al gusto

483

492
 493 Israel: Muy bien, me está diciendo que esto se ocupa para cuántas personas [...]
 494 Aa: Para 5.
 495 Israel: Muy bien, para cinco ¿y que dice abajo?
 496 Aa: ¿Cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere preparar para 8 personas?
 497 Israel: ¿Qué tendrían que hacer? A ver platique aquí entre ustedes, aquí les está dando las
 498 porciones o la cantidad para ¿Cuántas personas?
 499 Aa: para 5
 500 Israel: Muy bien, pero ahora queremos saber la cantidad para 8 personas.
 501 Aa: Entonces sería un kilo y medio de maíz.
 502 Israel: ¿Un kilo y medio?
 503 Aa: Sí.
 504 Israel: Platiquen aquí entre ustedes.
 505 Aa: Un kilo un cuarto y de carne un kilo.
 506 Israel: ¿Cuáles operaciones realizaron para saber eso? Anótale o por qué dices tú que un
 507 kilo un cuarto o un kilo y medio. ¿Qué podemos hacer?
 508 /Una alumna comienza a realizar algunas operaciones en la calculadora/
 509 Israel: Dices que un kilo pueden ser diez [...] ¿y podemos transformar eso a gramos?
 510 Aa: Serían 1000 gramos.
 511 Israel: Más bien vamos a trabajarlo como 1000 gramos, ¿para cuántas personas dijimos que
 512 eran?
 513 Aa: Para 5.

514 Israel: Para 5. Entonces tú dices que mil gramos de maíz son para cinco personas, pero me
515 está pidiendo la cantidad para [...]
516 Aa: Ocho.
517 Israel: ¿Qué podemos hacer aquí?
518 Aa: Multiplicar por cinco [...] por los gramos [...] a la mitad.
519 Israel: A la mitad [...] entonces cuánto es la mitad de un kilo, si eran mil gramos [...]
520 Aa: Quinientos gramos.
521 Israel: Entonces si eran para 5 personas ¿500 gramos van a ser para cuántas personas?
522 Aa: Para las otras tres que faltan.
523 Israel: ¿Para las otras tres?
524 Aa: Si, si aquí ya nos dice para cinco y aquí ya le está aumentando otros tres [...]
525 Israel: Ustedes me están diciendo lo siguiente: Mil gramos de maíz son para cuántas
526 personas [...]
527 Aa: Para 5.
528 Israel: Para 5. Entonces les estaba diciendo que si le sacamos la mitad sería [...] ¿cuánto?
529 Aa: 500
530 Israel: Serían 500.
531 Aa: A cada persona le tocarían de 200 gramos, espéreme [...]
532 Israel: ¿Cómo le hiciste?
533 Aa: $1000 \div 5$ es igual a 200 gramos a cada persona.
534 Israel: ¿Nos está pidiendo para una persona?
535 Aa: No, pero es que hay que sacar la cantidad para sumar lo demás y sacar la resta.
536 Israel: Entonces cómo te salió [...]
537 Aa: Mil más doscientos gramos de otra persona /La alumna está realizando la suma en la
538 calculadora/
539 Israel: ¿Eso para cuántas personas sería?
540 Aa: Seis, más 200 gramos de otra persona, serían [...] siete, más 200 gramos de otra
541 persona, serían 1600.
542 Israel: ¿1600 qué?
543 Aa: Gramos.
544 Israel: A ver póngale eso a ver si es cierto, ¿podemos hacer lo mismo para las demás?
545 Aa: Sí.
546 /Israel va con otro equipo/
547 Israel: ¿Ustedes que están haciendo?
548 Aa: Sacando la cantidad que se ocupa para una sola persona para poner, porque dice:
549 Cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere para 8. Entonces aquí ya dice que tantos
550 gramos se necesitan para 5 personas, entonces sacando el resultado de una persona que se
551 come para sumar los tres que se ocupan.
552 Israel: Muy bien. ¿Cuánto se ocupa del maíz?
553 Aa: 0.2 kg para una persona.
554 Israel: ¿0.2 qué es en gramos? Resuélvanlo.
555 Ao: Maestro ya terminamos.
556 Israel: Ahorita voy para allá.
557 /Israel se retira del equipo y va a otro/
558 Israel: Otros equipos ya van a terminar, a ver aquí me están diciendo que para la comida el
559 alcalde quiere mandar preparar pozole [...] /lee el problema/ dice que de maíz cuánto se
560 necesita para cinco personas.

561 Ao: Un kilogramo.
 562 Israel: ¿De carne cuánto se necesita?
 563 Ao: 750 gramos.
 564 Israel: Pero aquí dice, ¿cuánto se necesita de cada ingrediente para 8 personas?, aquí me
 565 está dando la cantidad para cuántas [...]
 566 Aa: 5
 567 Israel: Y aquí son para [...]
 568 Aa: 8
 569 Israel: A ver, ¿qué podemos hacer?
 570 Aa: Vamos multiplicar [...] no vamos a [...]
 571 Israel: Aquí me dice que es la cantidad que se necesita para cuántas personas [...]
 572 Aa: Para ocho.
 573 Israel: ¿Para ocho?
 574 Aa: Para 5.
 575 Israel: A ver léele aquí /señala el problema de la hoja 3/
 576 /La alumna vuelve a leer el problema/
 577 Israel: A ver me está diciendo son para 5 y aquí tiene que anotar para ocho. Si podemos
 578 sacar las cantidades que ocuparán para 8 personas? Dijimos que de maíz se ocupa un
 579 kilogramo para [...]
 580 Aa: 5 personas.
 581 Israel: Entonces para 8 personas que podemos hacer aquí [...]
 582 Aa: Ponerle otro kilogramo.
 583 Israel: A ver [...]
 584 Aa: Un medio.
 585 Aa: Otros tres kilogramos.
 586 Israel: Pero si fuera otro kilogramo para cuántas personas sería [...]
 587 Aa: Para diez.
 588 Israel: ¿Y son para 10?
 589 Aa: No.
 590 Aa: Otro medio kilogramo.
 591 Israel: ¿Y si fuera medio kilogramo para cuántas serían?
 592 Ao: Yo sí sé cuánto, un cuarto.
 593 Israel: ¿Un cuarto?
 594 Aa: Sí, un cuarto sería para dos [...]
 595 /Un alumno llama al Israel y él se dirige con ellos/
 596 Israel: Este entero sería un kilogramo, entonces un medio, ¿cuánto sería?
 597 Aa: La mitad.
 598 Israel: ¿Y cuánto sería la mitad de un kilogramo?
 599 Ao: Un medio.
 600 Israel: Vamos a hacer algo más fácil, un kilogramo, ¿cuántos gramos tiene?
 601 Ao: Mil gramos.
 602 Israel: ¿Cuánto sería la mitad?
 603 Ao: 500 gramos.
 604 Israel: Medio kilo sería [...]
 605 Aa: 500.
 606 Israel: ¿Y con cuarto cuánto sería? A ver este es nuestro medio, ahora vamos a dividirlo
 607 entre dos [...]

608 Aa: 250
609 Israel: ¿Ahora si ya lo pueden hacer?
610 Aos: Sí.
611 /Israel monitorea a los equipos/ Ahorita van a pasar algunos equipos a explicar cómo le
612 hicieron.
613 Israel: ¿Qué nos dice la hojita 3?
614 /Una alumna realiza en el pintarrón la tabla de la hoja 3 en el pizarrón con ayuda de su
615 equipo/
616 Israel: En la tablita que viene en su hojita les deban unas cantidades para preparar un pozole
617 para cuántas personas [...]
618 Aos: Para 5.
619 Israel: Para 5 personas. Dijimos que de maíz, ¿cuánto se ocupa?
620 Aos: Un kilo.
621 Israel: Un kilo verdad; de carne, ¿cuánto se ocupa?
622 /Israel pregunta por la cantidad para el resto de los ingredientes que vienen en la tabla/
623 Israel: Muy bien, pero en la tablita de abajo está pidiendo que con estas cantidades
624 saquemos cuánto se ocupa para cuántas personas [...]
625 Aos: Para ocho.
626 Israel: Para ocho personas. Vamos a ver cómo le hicieron ellas para saber cuánto se ocupa
627 para esas 8 personas, ¿qué hicieron ustedes?
628 Aa: Para el maíz que es un kilo van a ser 1000 gramos.
629 Israel: 1000 gramos.
630 Aa: Son 1000 gramos, pero son para 5 personas
631 Israel: Nos está diciendo que 1000 gramos de maíz o un kilogramo era para cuántas
632 personas [...]
633 Aos: Cinco.
634 Israel: Para 5. Después qué hicieron [...]
635 Aa: Y luego, dividimos $1000 \div 5$, es igual a 200.
636 Israel: Pero, ¿por qué dividieron 1000 entre 5?
637 Aa: Dividimos para saber cuánto le tocaba a cada persona.
638 Israel: ¿Y cuánto le tocaba a cada persona?
639 Aos: 200 gramos.
640 Israel: Doscientos gramos de maíz.
641 Aa: Luego multiplicamos [...]
642 Aa: Entonces como dijimos que les tocaron 200 gramos. Dijimos 200 /escribe 200 en el
643 pintarrón/
644 Israel: Ya tenemos aquí 1000 gramos. Y dijimos que para cuántas personas [...]
645 Aos: Para 5.
646 Israel: Para 5, y ellas qué hicieron para saber cuánto le tocaba a cada personas [...]
647 Aa: Una suma
648 Israel: Una suma [...] ¿para una persona?
649 Aa: Dividimos para saber cuánto para una persona y después sumamos ocho veces
650 doscientos.
651 Israel: Entonces para 8 personas, ¿cuánto es?
652 Aas: 1600
653 Mo: 1600 qué [...]
654 Aas: Gramos.

655 Israel: ¿A ustedes les dio? /Señala otro equipo/
656 Aos: 1.6
657 Israel: 1.6, ¿pero qué vendría siendo?, ¿gramos o qué?
658 Aos: Kilogramos.
659 Israel: Kilogramos. Luego qué hicieron para las demás cantidades [...]
660 Aa: La carne son 750 [...] entonces 750 entre 5 igual a 150 [...] Sumamos ocho veces 150
661 y así lo hicimos con todos los ingredientes /escribe las operaciones en el pintarrón/
662 Aa: También multiplicamos 150 por 3, el resultado lo sumamos con la cantidad que tenía
663 de las 5 personas y sacamos que para las ocho personas necesitamos 1200 gramos.
664 Israel: ¿Para cuántas?
665 Aa: Para 8 personas.
666 Israel: Muy bien. ¿Qué hicieron ellos aquí? /Israel señala todo lo que el equipo anterior
667 escribió en el pintarrón/ Aquí nos estaban diciendo que para 5 personas se ocupan [...]
668 ¿cuánto se ocupa? [...]
669 Aa: Un kilogramo de maíz o mil gramos.
670 Israel: Un kilo o mil gramos, muy bien, pero ellos por qué obtuvieron 1200 gramos [...]
671 ¿De dónde sacaron ellas 200 gramos? Lo que hicieron ellas es [...] dijimos que para 5
672 personas se ocupan 1000 gramos. Vamos a suponer que aquí yo tengo 1000 gramos /realiza
673 un dibujo en el pintarrón/ Entonces, si yo quiero saber cuánto le toca a una persona, ¿qué
674 puedo hacer?
675 Aa: Puede hacer una división.
676 Israel: ¿Qué puedo dividir?
677 Aa: Va a dividir un kilogramo entre 5.
678 Ao: Mil entre cinco.
679 Israel: ¿Cuánto nos da?
680 Aa: 200
681 Israel: Supongamos que aquí yo tengo 1000 gramos y si lo divido entre 5, ¿cuánto me da?
682 /Lo escribe en el pintarrón/
683 Aos: 200 gramos.
684 Israel: Quiere decir que a cada persona le tocan 200 gramos de maíz. Ahora que ya sé
685 cuánto le toca a una persona, ¿puedo saber cuánto le toca a las ocho personas?
686 Ao: Sí.
687 Israel: ¿Cómo le harías tú? /Israel señala a una alumna/ Si para una persona son 200
688 gramos, ¿cuántos serán para ocho?
689 Aa: Doscientos por ocho /escribe en el pintarrón $200 \times 8 = 1600$ /
690 Aos: 1600
691 Israel: ¿1600 qué?
692 Aos: Gramos de maíz.
693 Israel: El otro equipo si recuerdan también sacó que se ocupaban 200 gramos para una
694 persona, pero sumó 8 veces el 200. Vamos a recordar en la primera tabla son 1000 gramos
695 para [...]
696 Aos: Cinco personas.
697 Israel: Y en la de abajo está pidiendo para [...]
698 Aa: Cinco personas.
699 Israel: Ahora ya sabemos cuánto se ocupa de maíz para cinco personas, ¿cuánto? /señala a
700 una alumna/
701 Aa: 200.

702 Israel: El equipo como ya sabía que eran 1000 gramos para 5 personas le sumaron lo de las
703 otras tres personas para que fueran ocho y les salió 1600 gramos.
704 Aos: Sí.
705 Israel: Para la carne qué podemos hacer para saber cuánto es para ocho personas [...]
706 Aos: Se hace lo mismo.
707 Israel: Lo mismo verdad.
708 Aa: Para sacar todos los ingredientes se hace lo mismo, menos en la sal porque es al gusto.
709 Israel: De carne, ¿cuánto se necesita para cinco personas? /Señala a un alumno/
710 Ao: 750 gramos.
711 Israel: Si yo quiero saber cuánto se necesita para una persona, qué debo de hacer.
712 Ao: Una división de 750 entre 5.
713 Israel: ¿Cuánto me da esa división?
714 Ao: 150
715 Israel: Entonces para una persona se necesitan 150 gramos de carne, pero la tabla me está
716 pidiendo para [...]
717 Aos: Ocho personas.
718 Israel: Entonces, ¿qué debo hacer?
719 Aa: Multiplicar 150 por 8.
720 Israel: ¿Cuánto me daría?
721 Aos: 1200
722 Israel: Entonces, ¿para ocho personas cuánto necesito de carne?
723 Aos: 1200 gramos.
724 Israel: Ahora vamos a ver cuánto se ocupa de chile [...] para cinco personas ocupamos [...]
725 Aos: Un cuarto de kilogramo.
726 Israel: Este cuarto de kilogramo, si lo transformamos en gramos, ¿cuánto sería?
727 Ao: Lo mismo en gramos.
728 Israel: ¿Cuánto es lo mismo?
729 Ao: Un cuarto.
730 Israel: Un cuarto [...] Este es mi entero que serían 1000 gramos /señala en el pintarrón/ un
731 medio de kilogramos, ¿cuántos gramos es?
732 Ao: 500 gramos.
733 Aa: Un cuarto serían 250 gramos.
734 Israel: Decimos que de chile se ocupa [...]
735 Ao: 250 gramos para cinco personas.
736 Israel: Para una persona, ¿cuánto se necesita?, ¿qué podemos hacer?
737 Ao: Dividir.
738 Israel: ¿Qué vamos a dividir?
739 Ao: 250 entre 5
740 Aa: 125
741 Ao: No, son 50 gramos para una persona.
742 Israel: La tabla de abajo nos pide para [...]
743 Ao: Ocho personas.
744 Israel: ¿Qué puedo hacer?
745 Aos: 50 por 8
746 A. Aos: 400
747 Israel: Son 400 qué [...]
748 Aos: Gramos.

749 Israel: ¿Cuál ingrediente nos falta para las ocho personas?
750 Aos: El agua.
751 Israel: De agua, ¿cuánto se ocupa para 5 personas?
752 Ao: Un litro y medio.
753 Israel: Si para cinco personas se ocupa un litro y medio para una persona cuánto [...]
754 Ao: Medio litro.
755 Ao: 30 [...]
756 Israel: ¿Cuántos mililitros tiene un litro?
757 Ao: 1000
758 Ao: 300 mililitros le toca a cada una.
759 Israel: Si un litro tiene mil mililitros y si 1.5 litros lo transformo todo a mililitros, ¿cuántos
760 serían?
761 Aos: 1500 mililitros.
762 Israel: Entonces para cinco personas, ¿cuánto ocupamos de agua?
763 Aa: 1500 mililitros.
764 Israel: ¿Para una persona?
765 Aos: 300 mililitros.
766 Israel: Entonces para 8 personas cuánta agua ocupamos, ¿qué podemos hacer para saber?
767 Aa: 300 mililitros por 8.
768 Ao: 2400 mililitros.
769 Israel: Entonces para 8 personas ocupamos 2400 mililitros de agua y de sal [...]
770 Aa: Es al gusto.
771 Israel: Entonces para conocer los ingredientes para 8 personas, ¿cuál es la forma más fácil:
772 conocer primero lo que se ocupa para una y después saber las demás cantidades? Por
773 ejemplo, si ahora yo quiero preparar pozole para diez personas, ¿cuánto voy a ocupar de
774 maíz?
775 Aos: Dos.
776 Israel: Señalan lo doble porque para 5 ocupamos 1 kilogramo y para 10 personas se
777 necesitan 2 kilogramos, que es lo mismo a 1000 gramos y 2000 gramos. De carne, ¿cuánta
778 se ocupa para 10 personas?
779 Aos: 1500 gramos.
780 Israel: Es decir, voy a ocupar lo doble [...] de chile para cinco personas ocupo $\frac{1}{4}$, pero para
781 10 personas cuánto [...]
782 Ao: Dos cuartos.
783 Israel: Dos cuartos o [...] ¿a qué es igual? /Dibuja un rectángulo en el pintarrón, lo dividí
784 en cuatro partes y colorea 2/
785 Ao: Un medio.
786 Israel: De chile y si de agua ocupo 1.5 litros para 5 personas, para 10 personas cuánto
787 ocupo [...]
788 Aos: 3 [...]
789 Israel: Tres litros. Entonces conociendo estos valores /señala la tabla del pintarrón/ para 5
790 personas puedo sacar la cantidad de ingredientes que se necesita para 8 personas, para 10
791 personas o para otras cantidades de personas. Con esto terminamos la clase, ahora paso por
792 las hojas a sus lugares.

ANEXO 8. Entrevista Semiestructurada 2 de Daniela

1 E: Buen día. Vamos a rescatar algunas cuestiones que tienen que ver con la planeación y la
2 entrevista, de donde rescatamos algunos otros indicadores en los que vamos a profundizar y
3 luego ya nos vamos algunas situaciones de la clase. En la planeación surge una inquietud y
4 esto también está en la entrevista, usted habla que esta clase se ubica en el eje sentido
5 numérico y pensamiento algebraico ¿sí?

6 Daniela: Sí

7 E: Puede comentarnos un poquito más por qué en ese eje.

8 Daniela: Pues, porque por ejemplo el tema es de fracciones, entonces entender la fracción
9 como razón y, ese tipo de eje, maneja lo que son los números y la proporcionalidad;
10 entonces la razón si la vemos desde un enfoque de la proporcionalidad, es el valor unitario
11 de cierta proporción, por ejemplo que de uno a dos, entonces si son dos van a ser cuatro. Es
12 el sentido numérico porque se están manejando proporciones y pensamiento algebraico
13 porque al final y al cabo la razón nos lleva a la construcción de la fracción y la fracción yo
14 considero, que es se encuentra dentro de lo que es el álgebra, pensamiento algebraico de
15 predecir entonces, a es este valor cuánto va a ser y, este aquí, cuánto va ser [...] se
16 encuentra dentro de ese eje más que nada, porque si nos vamos a las producciones de los
17 niños tienen un cuadrito donde completan, por ejemplo, en donde dice el número de
18 pasteles, un pastel para cuatro niños, dos pasteles para ocho niños y, así si nos vamos
19 sucesivamente se van completando o se van buscando valores faltantes, entonces por eso
20 cabe dentro de lo que es sentido numérico y pensamiento algebraico.

21 E: Usted señalaba que se rescataban algunas competencias matemáticas, si pudiéramos
22 profundizar un poco más qué nos diría [...]

23 Daniela: Eran comunicar información matemática, manejar técnicas eficientemente y
24 validar procedimientos y resultados. Primero validar procedimientos y resultados, cuando
25 puse a los niños a que resolvieran el problema principal, hicieron sus procedimientos y
26 después estos ejercicios (señala hojas del planteamiento 1, 2 y 3); les dieron las
27 herramientas para que validaran sus propios resultados y los procedimientos que hicieron y,
28 en cierta forma, hicieran una autocorrección o regularan, por ejemplo, que dijeran “ah pues
29 aquí en este procedimiento estuve mal” o desde la forma de comprender el problema o
30 resolverlo. El de comunicar técnicas eficientemente, yo creo que faltó un poquito más que
31 los niños se involucraran y dijeran, por ejemplo, “hice esto por esto, y esto otro, sin
32 necesitar los planteamientos que hicimos. Aquí simplemente los niños dijeron “pues aquí
33 no lo entiendo, no sé cómo, yo pienso que es así”, pero no dieron una argumentación que
34 sustentara su respuesta. Entonces se ve que no manejaron las técnicas eficientemente [...] y
35 el de comunicar información matemática, yo pienso que se estuvo reflejando en todo el
36 desarrollo de la clase, porque los planteamientos que les hacían, lo permitían, por ejemplo,
37 “a ver y si aquí tenemos dos aquí es cuatro”, entonces “si aquí tenemos cuatro cuánto va a
38 ser acá” y los niños argumentaban su respuesta “es que si uno es cuatro [...]” y así se
39 llenaban los cuadros, creo en los cuadros que hicieron al final donde se ponía la fracción y
40 la razón estuvieron diciendo “a pues que uno a cuatro y cuánto es en fracción, un cuarto les
41 toca a cada uno”.

42 E: En términos generales, ¿qué implica comunicar información matemática?

43 Daniela: Implica utilizar términos matemáticos, por ejemplo, aquí el término matemático
44 que se tenía pensado que lograron los niños era la razón, identificar razón y fracción. Aquí
45 los niños leían la razón “uno para cuatro” /señala en una hoja de trabajo 1:4/ y la fracción

“un cuarto” /señala en una hoja de trabajo $\frac{1}{4}$ /, es decir, que sepan los términos; por ejemplo, en un cuarto hay unos niños que dicen “uno rayita cuatro”, esa es información matemática, pero de un nivel más bajo, cuando están empezando a conocer las fracciones. Estos niños con los que trabajé dicen “es un cuarto”, eso se considera ya como un término matemático dentro de su lenguaje, porque en ocasiones si se encuentra con muchos niños que en un cuarto, sólo dicen uno y no saben qué es, si son cuartos, tercios. La terminología de cómo se determinan las expresiones simbólicas, en este caso de fracciones y de razón, que era el propósito de la clase, los niños si llegaron a comprenderlo porque decían “si es cierto, si es uno para cuatro niños y así es una razón”. Además, implica llevar una coherencia, por ejemplo, en el justificar los resultados y cuando comunica la información matemática y también la claridad, es decir, que sean claros, porque a veces dicen “es que yo no le entendí a mi compañero” y, por eso, se pide la participación de varios niños [...]a veces es más conveniente preguntarle a un niño que tiene dudas “¿cómo le hiciste tú?” o “¿qué entendiste de lo que explicó tu compañero?” para ver si el otro compañero adopta las terminologías que utilizó el otro. De esta manera se va dando un aprendizaje entre todos, es decir, se va produciendo el aprendizaje.

E: Entonces, ¿se podría decir que es importante que la comunicación matemática se dé a partir del trabajo colaborativo?

Daniela: Sí, se ve como un aprendizaje que se llama creo entre pares; que aprendan, por ejemplo, “bueno el compañero dijo esto, ah entonces sí es cierto, pero yo también digo esto”. En ocasiones, se encuentran con posturas diferentes y es importante que vean la oportunidad para empezar a debatir y esto genera mayor aprendizaje, por ejemplo, el niño que dice una postura se pone a pensar en lo que dice el otro, entonces están intercambiando ideas respecto al problema y el resto de los niños se empiezan a involucrar y señalan lo que dicen sus compañeros. Entonces, sí es importante que exista esa comunicación y más cuando hay un niño que tiene dudas y dice “no, es que yo pienso que es así”, pero después de escuchar a alguno o algunos de sus compañeros dice “no, es que si es cierto lo que dice mi compañero, me equivoqué” y corrige y no se les olvida.

E: ¿Cree que hay algunas situaciones en su plan de clase que diseñó, que tengan relación con lo que plantea el Plan de estudios 2011?

Daniela: Pues si tiene relación, porque el plan de estudios 2011 plantea que el niño sea autónomo, en cuanto a construir el conocimiento matemático, que ya el maestro no le dé la clase y le diga pues es esto, y esto y esto, y póngase hacer los ejercicios. Quizá se puede tomar que al momento de resolver el planteamiento 1, 2 y 3 están dándole las respuestas, diciendo a los niños cómo resolver el primer problema, el problema central, puede parecer un momento muy guiado pero, por ejemplo, al momento en que los niños dicen en la pregunta tres y cuatro del problema central, “no es que no le entiendo”, entonces ahí ninguno de los niños me puede ayudar a explicarles a sus compañeros o de dónde partir, por lo cual, cada uno de estos planteamientos ayuda, aunque no es la respuesta al problema, pero les permite adentrarse a resolver problemas, donde implica una razón y más porque es un tema complicado. Me parece que si se relaciona con el plan de estudios 2011 porque el maestro funge como una guía para que los niños construyan sus conocimientos.

E: Y en relación a los principios pedagógicos, ¿cree que existen algunos que se relacionen?

Daniela: Se relaciona a la mejor, pero no muy directa, la evaluación, evaluar para aprender, al momento de que los niños resuelven el problema central y no entendieron, no se dice nada y se discute nada y se pasa directamente a resolver los planteamientos 1, 2 y 3. Entonces ya que el niño se va dotando, de que si uno a tres es un tercio, y así ya construyen

el concepto de razón. Entonces en el momento que les pide regresen al problema inicial y ahora si respondan, resuélvanlo con lo que ya saben, los niños están de cierta manera, autoevaluando los procedimientos que hicieron en la parte inicial, están evaluando entonces y corrigen, es decir, se está favoreciendo la autoevaluación, que es un tipo de la evaluación y están aprendiendo y se relacionan con ese principio.

E: ¿La evaluación está como tal en un apartado de su plan de clase?

Daniela: Si en la parte del cierre, se evalúa si el niño aprendió, si se dotó del término de lo que era razón y si lo pudo relacionar, por ejemplo, uno a cuatro, ahí está la evaluación, quizá no con indicadores y ni con ejercicios, con que hayan podido resolver el problema inicial; me sirvió como una herramienta de dos filos, primero como problemática central de la clase y otro, para evaluar si aprendieron, y que mejor que evaluando el problema inicial y no con ejercicios, bueno también se puede, pero yo pienso que así el niño hasta se dio cuenta en qué estuvo mal y en qué estuvo bien.

E: Después de eso, en el plan de clase y también en la entrevista usted hace mucho una diferencia entre lo que es una secuencia didáctica y una situación didáctica, de manera general, si nos pudiera citar desde lo que usted piensa, desde lo que usted conoce, ¿cuáles son algunas semejanzas y diferencias entre las anteriores?

Daniela: La semejanza es que la situación didáctica lleva también una secuencia de actividades, igual que la secuencia didáctica, pero son con un carácter diferente, por ejemplo, en la secuencia didáctica primero se hace la actividad inicial y luego la del desarrollo, para que vayas articulando cada una y, al final, un producto y, en la situación didáctica, partes directamente como de ese producto final de la secuencia didáctica, pero está al principio, partes entonces y ya vas desarrollando también actividades articuladas, pero que no se deslindan mucho del problema inicial, o sea que si se relacionan, por ejemplo en la situación didáctica dices, a ver primero vamos hacer esto, y luego los ejercicios y luego los vamos a resolver y luego vas a hacer más ejercicios, ok ahí está, pero se va relacionando toda la clase [...] en las demás problemáticas ya no hablé del contexto inicial, sino de otros contextos, pero en esencia esos conocimientos si van a servir para poder resolver el problema inicial. En la situación didáctica es eso de resolver el problema inicial, se da la validación, la formulación y en la secuencia didáctica, pues nada más se da como una conclusión, a ver qué es lo que aprendimos y ya y se evalúa, y acá se evalúa pero, que los niños finalmente resuelvan el problema inicial que se les dio; es una diferencia muy marcada en la situación didáctica.

E: Y usted, ¿a qué le apuesta más para enseñar?

Daniela: Me gusta más la situación didáctica porque los niños llegan al aprendizaje por descubrimiento, mientras que en la secuencia didáctica es guiada, pero es más directo y, en la situación didáctica, como que es una parábola donde empieza en un punto, sube y empieza a bajar, y ya vas conociendo otras cosas, pero vuelves a regresar al mismo. Y lo ves con otra visión de los niños [...] decía entonces se va resolver así el problema central y, en la secuencia didáctica, como que empiezas desde lo más simple a lo más complejo, va en una en una, entonces ya no se regresa a lo de antes, así como que ya se hace esto vamos y vamos a hacer esto.

E: Existe otra situación que parece importante rescatar, ¿cree que es importante que el maestro tome en cuenta los conocimientos previos del niño en el desarrollo de la situación didáctica?

Daniela: Pues si es importante, porque por ejemplo, en los conocimientos previos que pongo en la planeación, primero debo asegurarme que el niño conoce cuánto es un medio,

140 un cuarto en varias expresiones, por ejemplo, en cantidades y en representación gráfica, es
 141 decir, que sepan qué son las fracciones, porque si yo no hubiera tomado en cuenta eso de la
 142 representación gráfica, no hubiera podido ponerles este problema inicial (señala la hoja de
 143 trabajo que contiene el problema central). Si en los conocimientos previos yo me hubiera
 144 dado cuenta de que los niños no manejan lo de representación gráfica, les hubiera puesto un
 145 ejercicio de recordatorio porque se supone que ese tema ya lo han visto antes, pero no fue el
 146 caso porque los niños rápido contestaron donde les pongo una lámina. Cuando les dije van
 147 a ubicar la fracción donde corresponde, rápido la ubicaron; si hay algunos casos donde de
 148 repente se confunden pero sus mismos compañeros los corrigen, lo que me quiere decir que
 149 no nada más los niños que pasé saben cómo va, sino que también los demás niños al
 150 validarlo; por lo cual me doy cuenta que la mayoría del grupo si lo manejan.

151 E: Los conocimientos previos, ¿están contemplados en algún espacio de la situación
 152 didáctica?

153 Daniela: Sí, al inicio de la situación didáctica.

154 E: ¿Cómo se llama este apartado de la situación didáctica donde van los conocimientos
 155 previos?

156 Daniela: Pues averiguación de conocimientos previos o también depende de cómo se
 157 caracterice la memoria didáctica y [...]

158 E: ¿Qué es la memoria didáctica?

159 Daniela: Es precisamente eso, lo que me refiero, por ejemplo, si un niño no hubiera sabido
 160 cómo representar un cuarto gráficamente, entonces vámonos rápido, les dibujo un círculo o
 161 un cuadrado y les digo “¿se acuerdan haber visto alguna vez cómo se divide? Entonces,
 162 aunque yo no he trabajado con ese grupo anteriormente, por el grado en que están, y a mí
 163 me hace pensar que ya lo han trabajado con otros maestros, en otros temas, entonces, les
 164 pudiera decir “a ver, ¿alguien recuerda cómo le hacíamos para sacar un cuarto de aquí?”,
 165 aunque no les diga “a ver, ¿se acuerdan cuando lo vimos?” pues no, pero hago referencia
 166 algo que se supone que ya vieron los niños.

167 E: ¿Eso entra en la memoria didáctica?

168 Daniela: Sí, lo que los niños vieron en relación al tema. Los niños necesitan saber esto para
 169 para yo poder abordar el tema y, si no me aseguro de eso, se vienen las dificultades dentro
 170 del desarrollo de la clase, porque por ejemplo, pueden decir “¿qué vamos a hacer aquí?”,
 171 “no sé cómo sacó un cuarto”; tendría que regresarme a lo de averiguación de conocimientos
 172 previos, por lo cual hay que prever esto antes de dar la clase.

173 E: ¿Usted cree es importante que todo maestro, a partir de su experiencia, conozca o tenga
 174 el referente de lo que es una memoria didáctica?

175 Daniela: Pues es importante porque va relacionando lo que es el tema, el campo del saber,
 176 porque por ejemplo, si voy a dar fracciones, tengo que conocer que conlleva el tema de
 177 fracciones, pero también qué temas me ayuda a construir ese tema de fracciones y, a lo
 178 mejor, cuáles son los temas futuros a ese, de un nivel simple a lo complejo, y ya tengo que
 179 ver qué rango de lo simple saben los niños o se supone que deben de saber, para no tener
 180 problemas al momento de abordar el tema de fracciones y, si los maestros no saben de
 181 memoria didáctica, entonces ni siquiera van a tomar en cuenta eso que los niños necesitan
 182 saber para que me puedan resolver esto, o para que puedan ir subiendo el nivel, de lo que
 183 conocen de las fracciones, por lo cual, creo que sí es muy importante.

184 E: Surge una inquietud cuando en el desarrollo de la planificación encuentro entre
 185 paréntesis “construcción del conocimiento” y vienen los tres planteamientos, ¿por qué
 186 ponerle construcción del conocimiento?

187 Daniela: Cuando se da el planteamiento inicial, obviamente los niños necesitan ya un
188 conocimiento determinado para poder resolverlo, entonces tal y como se tenía previsto,
189 iban a tener dificultades, yo pensaba que iban a batallar más en la última pregunta, donde
190 dice cuál es la razón entre la cantidad de cajas y las lechugas, porque qué parte de la caja
191 corresponde a una lechuga, creí ya lo sabían por lo que trabajamos en la averiguación de
192 conocimientos previos, pero sí tuvieron dificultades en esa y la última pregunta. Entonces
193 yo le denomine construcción del conocimiento porque los niños necesitaban saber
194 relacionar y construir si el concepto de fracción, entonces si no hubiera presentado estos
195 planteamientos 1, 2 y 3, aunque hubiéramos desarrollado la clase, así pasaran a explicar sus
196 procedimientos para el problema central, yo hubiera tenido que empezar desde cero para
197 que los niños comprendiera qué es una razón y no aseguraba que fuera fácil para los niños,
198 se iban a confundir, dirían “bueno qué es una razón y qué es una fracción” y ya con estos
199 planteamientos los niños fueron poco a poco siguiendo ese camino.

200 E: ¿Cuál fue el papel del planteamiento 1, 2 y 3?

201 Daniela: El papel del primer planteamiento fue dotarles de conocimientos para leer “un
202 pastel para cuatro niños”, es decir, dotarles de términos matemáticos de que es una razón y
203 establecerlas así “[...] es cierto tenemos tantas caritas tantos corazones”, entonces ya me
204 sirve, por lo cual, si vuelvo a dar esto, pondría estas partes, por ejemplo en el rectángulo
205 hay cuatro corazones para ocho caritas, los niños ya saben leer esto, pero además lo saben
206 representar con símbolos, es decir, ya saben que los dos puntitos es para lo que son las
207 razones.

208 E: Ahora vamos a rescatar algunas cuestiones de la entrevista que están pendientes. Una de
209 las situaciones que usted plantea es que la razón se relaciona con la proporcionalidad y que
210 la razón también se relaciona con la fracción, ¿cuáles son las diferencias que hay entre
211 razón y fracción y razón de proporcionalidad?

212 Daniela: La de razón y fracción, por ejemplo, se lo voy a explicar con el planteamiento del
213 pastel, dice un pastel es repartido a cuatro niños, entonces ¿qué parte del pastel le toca cada
214 niño?, un cuarto es la fracción, que está representando qué cantidad le toca a cada niño y
215 luego dice “si ahora son ocho niños y les toca una parte del pastel igual a los niños
216 anteriores, cuántos pasteles reparte”, se requieren para repartir a estos ocho niños dos
217 pasteles y, la razón nos está diciendo, si ya tengo más niños, cuántos pasteles más voy a
218 ocupar; la fracción nos indica qué cantidad le toca, en este caso un cuarto, aquí está, pero
219 la razón me está diciendo, a ver si ahora tengo más niños, cuántos pasteles más necesito, yo
220 ya sé que les va tocar de un cuarto, pero cuántos pasteles necesito para que les toque de un
221 cuarto, pues para eso me sirve la razón porque ya me dice que de un pastel voy a sacar
222 cuatro partes, un pastel para cuatro niños, entonces dos pasteles para ocho niños y, ya
223 ocupo dos pasteles para ocho niños; y eso no me dice un cuarto, nada más me dice pues la
224 cantidad que le toca a cada uno, pero si se relaciona. La diferencia es esa que las fracciones
225 dicen la cantidad y la razón me lleva a decir cuántos más ocupo.

226 E: ¿Qué pasa con razón y proporcionalidad?

227 Daniela: Razón y proporcionalidad. La razón si se relaciona en ese momento, por ejemplo,
228 un pastel para cuatro niños, ya me está diciendo que por un pastel para cuatro niños, voy a
229 ocupar dos pasteles para ocho niños, para 12 niños tres pasteles [...] La proporcionalidad es
230 que aumenta, tantos niños aumentan los pasteles, porque va en proporciones iguales, pero la
231 razón es, aunque no se dice una diferencia, es el valor unitario de esa proporción; por
232 ejemplo, un cuarto, uno para cuatro, es el valor unitario y el que me va a ayudar a sacar las
233 demás proporciones.

234 E: ¿Cree que cuando los maestros den estos temas puedan surgir algunos conflictos?
 235 Daniela: Pueden surgir algunos conflictos porque, por ejemplo, aunque el tema de razón ya
 236 se ve hasta sexto grado, la proporción se ve en quinto, ya se toma en cuenta y en quinto
 237 dice a ver cuál es el factor constante de proporcionalidad de las siguientes situaciones, y ya
 238 les presentan las tablas y los niños dicen “pero qué es el factor de constante de
 239 proporcionalidad”, pues es que es el valor de uno con uno que es constante, porque
 240 multiplicas un pastel para cuatro niños, entonces ya vas multiplicando por ese valor unitario
 241 para sacar cualquier valor, pero si se puede tener conflicto cuando ya se enfrentan a “[...] y
 242 razón es que la razón te sirve para sacar la proporción”, entonces, “¿qué es el valor
 243 unitario?”, es que el valor unitario es el que te dice de uno para tantos y ya con eso puedes
 244 sacar más, pero entonces se llega al conflicto de “¿razón es igual a valor unitario?” o “¿cuál
 245 es la diferencia?” y “¿qué quiere decir que el valor unitario te sirve para la proporción?”,
 246 pero de ahí ya se conflictúa uno más para sacar lo de la fracción y la razón.

247 E: ¿Cree que en quinto grado si se aborda el concepto de razón como fracción?

248 Daniela: En quinto grado sí, pero sólo en fracción, se le da el concepto hasta sexto. En
 249 quinto grado es un cuarto y si es el doble dos cuartos, sólo hay un acercamiento. Se ven los
 250 conocimientos previos que van a necesitar los niños para abordar la razón, de manera más
 251 formal, en sexto grado; desde quinto se va dando de lo más simple a lo más complejo.

252 En quinto grado se establecen relaciones, pero en sexto grado se trabaja cómo se le llama a
 253 esas relaciones, es decir, se menciona se le llama razón y obviamente son conocimientos
 254 que ocupan en grados superiores, por ejemplo, en la secundaria, donde abordan más los
 255 términos de las razones: “¿cuál es la razón entre esta cantidad y esta cantidad?”; ya no se
 256 trabaja tanto como relación, sino “¿cuál es la razón en función de [...]?”, a partir de
 257 situaciones que manejan proporcionalidad [...]

258 E: En el desarrollo de la clase vamos ir nombrando algunas situaciones que se dieron y
 259 vamos a realizar algunas reflexiones. Usted recuerda comienza con la caja de cartón, les
 260 pregunta qué representa toda la caja y los niños le dicen que un entero, pasa un niño o niña
 261 y escribe un entero, luego otro pasa y realiza el dibujo de la caja, se lo borran y pasa otro y
 262 lo vuelve a realizar y, luego, al final usted vuelve a insistir, “pero pongan un entero”,
 263 porque el niño había escrito un entero con letra, entonces usted agrega el número uno y dice
 264 es un entero, ¿por qué no dejar así un entero con letra? ¿por qué decide escribir el número
 265 uno?

266 Daniela: Decido escribir el número porque después viene representarlo en fracción, por
 267 ejemplo, en un medio. Lo que se quiere es llevar al niño, de manera simple, a representarlo
 268 de manera simbólica-numérica y no escrita, por eso les pongo ahí un entero, aunque si está
 269 bien eso que hizo el niño porque entiende un entero y lo escribe con letra y, eso sirve para
 270 que después lo relacione con el número uno, el número uno es un entero y ya no es un uno
 271 nada más, ya es el entero.

272 E: Después usted les dice a los niños que realicen los dibujos de una botella en la caja y
 273 luego dos. Cuando usted pasó por los lugares de los niños, en las observaciones que realizó,
 274 ¿los niños llegaron a dibujar esto tal y cual usted lo había pensado que se estaba haciendo o
 275 qué pasó?

276 Daniela: Pues si lo hicieron de forma diferente; unos niños dibujaron toda la caja y otros
 277 nada más lo que era la representación el entero, lo dividen en dos, cada botella en su lugar
 278 y, pues yo pienso que no hubo mayor dificultad, aunque si eran diferentes los dibujos, de
 279 todos modos si tenía la noción de que este es un medio, este es un cuarto, y ya cuando eran
 280 tres, pues un tercio.

281 E: ¿Todos llegaron a realizar el dibujo y luego representarlo con una fracción de lo que
 282 recuerda que observó?

283 Daniela: Hubo algunos que nada más se quedaron en el dibujo, no pusieron un medio y
 284 hubo otros niños que si pusieron un medio de manera gráfica y un medio numérico.

285 E: ¿A qué cree se debe que nada más algunos niños si lo hicieron completo?

286 Daniela: Porque algunos niños no tienen esa maduración de manera simbólica, es la mitad
 287 de una cajita y lo dibuja, se queda en la forma concreta y no lo lleva a como se expresa.

288 E: Después usted presenta una lámina y les empieza a preguntar: ¿de qué creen que va a
 289 tratar?, los niños dicen fracciones, suma de fracciones y otro niño dice que represente el
 290 dibujo. ¿Por qué cree que responden eso los niños? ¿A qué se debe?

291 Daniela: Se debe a algo crucial en todo; el primer dibujo que les presento es un círculo y
 292 está dividido, los niños de inmediato lo relacionan, pues desde que empiezan a ver la
 293 fracción se ha manejado “dibuja un círculo, divídelo en dos, ese es un medio, son
 294 fracciones” y, siempre de manera gráfica. Al ver esa representación del círculo, reconocen
 295 que son fracciones y relacionan esa forma gráfica con las fracciones; por ejemplo si nada
 296 más les hubiera puesto la caja de huevos con 360, hubieran pensado que se trataba de un
 297 problema de multiplicación, de sumas, pero al ver las fracciones, decían suma de fracciones
 298 y en todo expresaban fracciones porque veían ese símbolo del círculo al inicio, porque es
 299 algo que se ha universalizado, los niños lo saben aunque no se les diga de que va a tratar el
 300 tema.

301 E: Usted les entregó a algunos niños diferentes tarjetas que tenían fracciones diferentes. En
 302 primer lugar, le pregunta al niño que tiene la tarjeta de $\frac{1}{10}$ con cuál imagen la relacionan y
 303 algunos de los niños del grupo empiezan a decir que con la caja de huevos y están en que
 304 con los huevos, pero ya después de una serie de reflexiones dicen que no y relacionan la
 305 fracción con la cantidad de 1200, ¿a qué cree que se debe este conflicto en los niños?

306 Daniela: La caja tenía 360, yo pienso que al dividir $60/6$ les daba un 10 o porque
 307 terminaban en cero o porque si multiplicaban cierto número por 10, sólo le agregaban un
 308 cero y veían 360 como una cantidad cerrada y no con un cinco u otro número al final; por
 309 eso, de inmediato relacionaban el diez con el décimo.

310 E: ¿Y en este momento usted que pensó?

311 Daniela: Yo había creído que se les iba a facilitar, pues iban a hacer otra fracción. Entonces
 312 si hubieran seguido en esa misma dinámica, yo les hubiera preguntado, pero por qué pero,
 313 se dio que el niño dijo no, no va ahí, va en otro lado y, a mí se me hizo raro, pero yo si creí
 314 que era porque veía en el cero al final del 360, piensan que es el 10.

315 E: Si otro maestro aplicara una situación así, y si usted tuviera la oportunidad de verlo antes
 316 o que el maestro le preguntara, que tuviera dudas, cuáles conocimientos le diría usted que
 317 son necesarios para desarrollar una actividad con esta lámina, qué conocimientos le
 318 demanda al maestro.

319 Daniela: Bueno si uno de los niños me hubiera dicho que ahí no era un $\frac{1}{10}$ el
 320 conocimiento que debe de tener el maestro es de realizarles preguntas a los niños, “¿pero
 321 por qué?” y entre todos sacar el resultado. Quizá lo que faltó fue preguntarle a los niños
 322 pero porque pensaban que en el 360 era un $\frac{1}{10}$, a lo mejor lo que yo le estoy respondiendo
 323 ahorita es porque veían un cero al final del 360, pero el maestro que fuera aplicar esa
 324 actividad es llevarlos a la reflexión de porqué y preguntarles; entonces debe tener cuidado
 325 con eso, aunque también depende del conocimiento de los niños, porque si los niños no
 326 relacionan el número 10 con las cantidades cerradas, entonces a lo mejor darían otra
 327 respuesta o directamente la respuesta correcta.

328 E: Después usted abordó la tarjeta que tenía un medio, ¿cómo le resultó esa actividad?
 329 Daniela: Demasiado fácil para la mayoría de los niños.

330 E: De forma sintética, aunque ya me había dicho algo, ¿a qué cree que se debe que les haya
 331 resultado fácil colocar la tarjeta de un medio?

332 Daniela: Porque son cantidades pequeñas, en cuestión de un medio; pero, entre más chico el
 333 número de la fracción, más grande es la cantidad. Me parece que siempre han manejado un
 334 entero, después se les enseñan un medio, no les enseñan tres quintos o un quinceavo. Con
 335 frecuencia, un medio siempre lo ponen como ejemplo en cada tema de fracciones, por eso
 336 se les va grabando más a los niños y de inmediato reconocen que es un medio. En el caso
 337 de cantidades más elevadas como trescientos sesenta de los huevos empiezan a pensarle
 338 más [...] un medio es como el referente principal para de ahí desplegar el tema de las
 339 fracciones.

340 E: Después un niño dice que va en el de los verdes, en la figura representada por ese color,
 341 ¿a qué cree se debe?

342 Daniela: Yo pienso que el niño, ve que están encerrados algunos rectángulos y en la misma
 343 proporción que estaban afuera, y creo que a eso se debe, a que a simple vista no contó, sólo
 344 así en proporciones de lo que vio de tamaño y creyó que también podía ir ahí, pero ya hasta
 345 que contó cada uno ya se dio cuenta que no.

346 E: Después viene la tarjeta que tiene un sexto y aquí de inmediato los niños se fijan y dicen
 347 que va en la caja de los huevos; participan varios niños señalando porqué va en esa imagen:
 348 “porque sesenta por sesenta son trescientos sesenta”, “porque seis por seis son treinta y
 349 seis”; ¿a qué cree que se debe que los dos niños afirman que va en la caja los huevos, pero
 350 dan una justificación diferente?

351 Daniela: El que dice seis por seis es treinta y seis, quizá está realizando un cálculo mental
 352 más avanzado, dice seis por seis es igual a treinta y seis, igual a trescientos sesenta; algo
 353 similar si quisieran saber tres por ocho veinticuatro, doscientos cuarenta, como si fuera tres
 354 por ochenta.

355 E: ¿Por qué dice que hay un cálculo mental avanzado?

356 Daniela: Porque la multiplicación de tres por ochenta, la realizan tres por ocho igual a
 357 veinticuatro, son doscientos cuarenta, porque el ochenta ya son décimos; digo que hay un
 358 cálculo avanzado porque los niños ya no hacen la multiplicación tal y como es el algoritmo
 359 convencional, sólo multiplican estos dos términos tres por ocho y se le agrega el cero.

360 E: ¿Y el alumno que dice sesenta por sesenta?

361 Daniela: Yo pienso que se confundieron al decir sesenta por sesenta porque debía de haber
 362 dicho seis por sesenta.

363 E: Después retoman la tarjeta que tenía dos cuartos, usted les pregunta dónde va y los niños
 364 contestan que en la última imagen que quedaba [...]

365 Daniela: Esa es la desventaja en la que se encuentra uno en ese tipo de problemas porque
 366 como es el último, ya no se sabe si los niños realmente razonaron si era esa fracción y por
 367 qué.

368 E: En la tarjetita que tenía dos cuartos, un niño dice es que los palitos que están encerrados
 369 son cuatro y el total de rayitas son ocho, entonces son cuatro octavos y cuatro octavos es
 370 equivalente a dos cuartos y, así hace algunos razonamientos, ¿cuándo usted planificó esta
 371 actividad pensó que iban a surgir estos comentarios?

372 Daniela: [...] son fracciones equivalentes. No lo tomé en cuenta, solo lo puse para
 373 averiguar si sabían relacionarlo cierto tipo de representaciones con una fracción [...] cuando
 374 sacaron esa parte, se presenta otro conocimiento previo que se debió de haber

375 tomado en cuenta para saber fracciones como razones, porque las razones también son
 376 fracciones equivalentes, bueno expresadas ya como fracciones equivalentes.

377 E: Desde el inicio de su planificación, ¿usted definió encerrar dos barras de cada extremo
 378 en la figura de la lámina?

379 Daniela: Lo planifiqué pero no pensando eso, sino pensando en que a ver si relacionaban
 380 eso, a ver si los agrupaban en uno o que iban a poner que eran dos fracciones y no, los
 381 niños lo agruparon en uno, porque si vieron la respuesta correcta, pero no pensaba que iban
 382 a sacar las fracciones equivalentes, pero si fue el propósito ponerlas separadas para que las
 383 agruparan e identificarán a los cuartos.

384 E: En la actividad de la lámina, ¿cuáles pudiera decir son algunas de las fortalezas de los
 385 niños?

386 Daniela: Relacionar la imagen gráfica con las fracciones de las tarjetas. También identificar
 387 fracciones cuando se manejan cantidades, por ejemplo trescientos sesenta, que se divide
 388 entre seis y da sesenta, entonces es un sexto y, el de las barras que se dividía en cuartos, son
 389 dos cuartos, con lo que los niños obtuvieron fracciones equivalentes. En términos generales
 390 representaron con fracciones lo que se veía en la lámina, además me ayudó a saber que los
 391 niños manejaban cuartos, sextos, décimos y medios, saber qué se les facilitaba más y qué se
 392 les facilitaba menos; otra fortaleza en los niños fue el cálculo mental, por ejemplo, seis por
 393 seis es igual a treinta y seis, en lo de trescientos sesenta.

394 E: ¿Por qué no representar todas las fracciones de las tarjetas con un círculo? ¿Por qué esa
 395 diversidad?

396 Daniela: Porque el tema de las fracciones se toca en diferentes tipos de temas, no sólo de
 397 manera gráfica, sino también en cantidades.

398 E: ¿Sabe cómo se le llama eso de cantidades?

399 Daniela: Puede ser de manera simbólica porque se puede manejar de 500 representa un
 400 medio; si sólo trabajaba con el círculo no iban a poder resolver situaciones como la que le
 401 comento; pero por ejemplo, un quinto de cierta cantidad. Por eso necesitaba saber si sabían
 402 eso, lo cual es uno de los propósitos de los problema que vienen en los libros: sacar
 403 fracciones de una cantidad.

404 E: Ahora nos vamos a ir a la actividad que tiene que ver con el problema central. En la hoja
 405 que les entregó decía iban a usar su calculadora, pero luego les indica van a realizar la
 406 actividad sin calculadora, ¿por qué toma esa decisión en ese momento de la clase?

407 Daniela: Porque me doy cuenta de la situación en la que están los niños, son capaces de
 408 manejar las operaciones de manera mental, no sé bien si escrita, pero no necesitan usar la
 409 calculadora porque los números que se manejan dentro de la situación problemática son
 410 simples para ellos (de una y dos cifras); por lo cual para hacer ese tipo de cálculos no la
 411 necesitan. Me faltaba ese conocimiento de saber qué tanto los niños manejaban diferentes
 412 cantidades de números, por eso tomé la decisión de decirles sin calculadora, ya que muchos
 413 niños si van a poder resolver la actividad fácilmente.

414 E: Entonces, ¿cree que el conocimiento que el maestro tiene de los niños en el desarrollo de
 415 las clases le permite ir tomando decisiones?

416 Daniela: Sí, permite ir tomando decisiones, por ejemplo, si hubiera una siguiente clase no
 417 les dejaría utilizar calculadora porque les permite crecer dentro de la asignatura, desarrollar
 418 más el potencial que yo descubrí ellos tenían y eso les permite seguirlo trabajando.

419 E: En la hoja que viene el planteamiento central, se encuentra un apartado de
 420 procedimientos, ¿por qué escribir ese apartado de procedimientos?

421 Daniela: Siempre pongo el procedimiento porque los niños cuando lo resuelven, con
 422 frecuencia siempre ponen sólo el resultado y dicen “ya terminé”, cuando les pregunto
 423 “¿cómo le hiciste?, haz el procedimiento”, ellos dicen “conté”, pero no están
 424 acostumbrados a escribir el procedimiento, a decir primero hice esto, luego esto. Por eso,
 425 les puse procedimiento para que lo hicieran, porque de otra manera algunos lo realizarían
 426 pero otros no. El propósito de lo anterior, me ayuda a que el niño realmente escriba el
 427 procedimiento y se dé cuenta de qué se hace, de que se desarrolla por sí mismo una
 428 estrategia para poder sacar los resultados y, a veces, eso se hace de manera inconsciente, los
 429 niños lo hacen, pero no lo plasman tal como es y, en ocasiones no lo entienden ellos y
 430 cuando les preguntas cómo le hiciste, contestan con la mente y no saben explicar.

431 En la clase les preguntaba a algunos niños que hacían para resolver las actividades y
 432 cuando me decían “multiplique”, les señalaba que escribieran lo que me estaban diciendo o
 433 que pusieran las operaciones. Algunos niños se quedaban sorprendidos y ya se les facilitaba
 434 más; creo se debe a que en la mayoría de los casos, en matemáticas, se hacen ejercicios de
 435 que $5 + 2$ y el resultado igual a siete y se deja así; se le ha dado más importancia a los
 436 resultados que a los procedimientos y en este nuevo enfoque, en el de las situaciones
 437 didácticas y en el Plan de estudios 2011 de primaria, es darle más importancia a los
 438 procedimientos para justificar los resultados, porque existen ocasiones en que los
 439 procedimientos están muy bien elaborados y el resultado no puede coincidir, entonces es
 440 importante que los niños escriban ese procedimiento, porque si el resultado estaba mal, se
 441 puede ver en qué parte del procedimiento se equivocó y es más fácil que corrijan, ya que si
 442 se tenía sólo el resultado [...] es un cansancio más mentalmente para los niños pensar en
 443 qué estuvieron mal y, así los procedimientos, hasta permiten confrontar los resultados de un
 444 niño con el otro y argumentar argumentan cuál es el que está bien y así los demás niños
 445 pues los ven, es decir, los procedimientos son como la evidencia del porqué mi resultado.
 446 Por lo anterior, se puso el apartado de procedimientos.

447 E: Cuando usted pasó por los lugares de los alumnos y quizá revisó algunas de las hojas de
 448 trabajo, ¿cuáles son los procedimientos que empieza a ver son frecuentes en los niños?

449 Daniela: Los procedimientos que ellos dicen, hicieron, son las operaciones matemáticas, ya
 450 que no los dejé utilizar calculadora. Algunos niños decían “mi procedimiento es hacer
 451 divisiones y hacer multiplicaciones”, la mayoría hicieron divisiones y multiplicaciones.

452 E: ¿Era lo que usted esperaba antes de aplicar la clase?

453 Daniela: Yo esperaba que hicieran divisiones, aunque también multiplicaciones. Si me
 454 hubiera encontrado a lo mejor suma de $16 + 16$, sí estaría bien, pero lo que estaba
 455 involucrado era la división y la multiplicación porque decía “si en cuatro cajas se empacan
 456 64 lechugas” se tiene que saber en una caja cuántas lechugas y obviamente nos lleva a la
 457 división.

458 E: De acuerdo a lo que menciona, el significado de la razón que estamos abordando, ¿se
 459 relaciona con la multiplicación y la división?

460 Daniela: Si porque para sacar la razón, como la razón se relaciona con la proporcionalidad,
 461 para sacar las proporciones tienes que dividir y multiplicar, porque siempre se involucra
 462 una misma cantidad, en este caso, 16, 16, 16 [...] aquí de hecho está la división: $32/2=16$ en
 463 una evidencia de un niño /señala una hoja de trabajo 1 de un niño/ y, está la multiplicación
 464 $16 \times 7=112$ para poder confirmar su resultado en la primer pregunta.

465 E: Después de que usted da la consigna, le pregunta a Diana, una alumna ¿qué vamos a
 466 hacer? ¿Por qué preguntarle?

467 Daniela: La devolución de la consigna [...]

468 E: Ya había dicho que iban a realizar la actividad sin calculadora, de manera individual y
 469 luego grupal [...] ¿Cómo dice se llama eso que realizó?

470 Daniela: La devolución de la consigna, se hace porque hay veces que muchos niños dicen
 471 “¿qué vamos a hacer?”; por una parte, esto lo hago para que comprendan mejor que van a
 472 realizar y, por otro lado, por aquel distraído que no puso atención, además, aunque yo
 473 expliqué, a lo mejor a mí no me entienden, y cuando lo dice otro de sus compañeros “así
 474 vamos a hacer esto” como que se reafirma lo que había dicho.

475 E: ¿De dónde viene ese concepto de devolución de la consigna?

476 Daniela: También viene de la Teoría de las Situaciones Didácticas, hay que devolver la
 477 consigna que se le da al niño para saber si la comprendió, y también para que sea
 478 consciente de cuál va a ser su papel durante el desarrollo de la clase, qué es lo que va a
 479 tener permitido hacer y qué no va a tener permitido hacer; por eso en la clase estaba
 480 permitido trabajar de manera individual y no se permitía utilizar calculadora.

481 E: Después de esto los niños empiezan a trabajar resolviendo la hojita, de manera
 482 individual, usted empieza pasar por sus lugares y ve algunos procedimientos que están
 483 haciendo los niños. Desde el principio una niña se le acerca, ¿por qué se le empiezan a
 484 acercar algunos niños?

485 Daniela: Porque, por ejemplo, cuando dice qué parte de la caja corresponde a una lechuga
 486 ya está relacionado los conocimientos de las fracciones y lo que empezamos a ver al
 487 principio y entonces puede ser por esto [...] Como maestro hay que tener cuidado en pasar a
 488 ver qué procedimiento están haciendo los niños, para ver qué tanto avanza el niño en cuanto
 489 a la resolución del problema, pero también identificar cuál niño me va ayudar a resolver
 490 después el problema, es decir, cuál niño elegir principalmente, el que más se haya acercado
 491 al problema o que haya resuelto el problema; identificar otro niño que esté como a la mitad,
 492 que lleve cierto procedimiento bien, pero que tenga algunas dificultades y que no lo deje
 493 avanzar y, otro niño, que de plano no pueda avanzar para así poder confrontarlos, entre los
 494 dos, y decir este es un tipo y sacar a los niños que están con el mismo resultado, pero con
 495 diferente procedimiento, para que vean que para obtener un resultado, se pueden seguir
 496 muchos caminos en matemáticas. También se puede hacer para los niños que tienen
 497 diferente resultado, pero mismo procedimiento vean en qué parte del procedimiento fue
 498 donde estuvo el error.

499 E: ¿El pasar por los lugares no es simplemente por guardar la disciplina?

500 Daniela: Es estrategia pedagógica para la construcción del conocimiento y para el
 501 desarrollo de la situación didáctica, para fortalecer más lo que es la situación de
 502 formulación y de validación, porque si no el maestro no va a tener herramientas para poder
 503 llevar a cabo esos dos tipos de situaciones, además que también se toma en cuenta para
 504 institucionalizar, ya que se institucionaliza a partir de las mismas palabras que los niños
 505 utilizaron, por ejemplo, “a ver se acuerdan que su compañero dijo que se hace así [...],
 506 pues esto se ve así”, entonces se toma en cuenta para eso, pero es fundamental para lo
 507 demás.

508 E: Cuando los alumnos terminaron de resolver las interrogantes, usted les pregunta si
 509 tuvieron dudas en la primera pregunta, segunda, tercera, a lo cual, ellos contestan que no,
 510 pero cuando llega a la cuarta empiezan a surgir algunas inquietudes y, usted dice “bueno
 511 pues por el momento lo van a dejar así” [...]

512 Daniela: Sí les mencioné eso. Los niños se sorprendieron que les dijera lo íbamos a dejar
 513 así, no lo íbamos a resolver; yo pienso que los niños esperaban que los resolviéramos juntos
 514 y que yo les diera la respuesta, pero les dije “no, déjela ahorita, ni las tomen en cuenta, no

515 le hagan caso, vámonos a resolver otras hojitas”; pienso que eso es importante, que en
516 matemáticas generamos esa necesidad, de cuál es la respuesta correcta y cómo le vamos a
517 hacer, porque estaban muy interesados en resolverla. Entonces, en ese momento de la clase,
518 se creó cierta necesidad de poder resolver el problema y, esa necesidad, iba a ser como una
519 motivante para poder abordar los demás planteamientos, los cuales les iban a dar los
520 insumos para resolver el planteamiento principal y ya no se quedaban en el fracaso de que
521 no pudieron resolver la actividad. Por lo tanto, se van a dar cuenta que por el momento no
522 pueden resolverla porque falta aprender algo para poder resolverla
523 E: ¿Se cumplió con lo que usted esperaba en el problema principal?
524 Daniela: Si se cumplió; yo esperaba eso, yo decía “como la razón es un tema muy
525 complicado y que va a producir confusiones, el niño tiene que tener ciertos elementos para
526 poder entenderlo”; se puede ver en las evidencias donde ya resolvieron correctamente,
527 aunque no en todas, sí en la mayoría, entonces el propósito principal, que era resolvieran el
528 problema inicial si se logró.
529 E: Ahora vamos a continuar con los tres planteamientos que vienen en el desarrollo. En el
530 primer planteamiento, empiezan a ver situaciones de repartir pasteles, la hoja de trabajo se
531 llama “pastel partido”. Cuando resuelven el final de la hoja, en forma grupal, usted empieza
532 a escribir en el pizarrón: 1: 4, 2:8 y los lee “uno para cuatro; dos para ocho niños”;
533 enseguida cuestiona “si tuviera 40 niños, ¿cuántos pasteles?”, “si tuviera 12” [...] los
534 escribe en el pintarrón y con ayuda de los niños lo completa. La pregunta es ¿por qué
535 escribir en el pizarrón?, ¿por qué plantear otras situaciones que no estaban en una secuencia
536 que aumentara de uno en uno?
537 Daniela: Se plantean para saber si los niños van entendiendo la intención de la clase,
538 aunque no se les diga directamente, yo me doy cuenta si los niños van comprendiendo la
539 intención del planteamiento uno. Entonces me van a poder responder los otros
540 planteamientos que les estoy haciendo en el pizarrón y, si no me responden, es porque algo
541 falta o hay dudas o porque realmente no lo han entendido, por eso siempre hago eso,
542 planteo otras situaciones para saber, si aunque sean en diferente contexto los niños están
543 estableciendo relaciones entre las cantidades que, finalmente, los van a llevar a sacar las
544 razones.
545 E: ¿Por qué escribirlo en el pintarrón?
546 Daniela: Escribir en el pizarrón para que los niños vayan viendo esa relación: uno tantos,
547 dos tantos y, tantos cuántos tendría [...] porque si les pregunto de manera oral, algunos
548 niños me van a contestar y me van entender, pero otros no. Escribo “uno para tantos” y
549 luego “40”. Si le escribo primero uno para tantos y, luego les hago esa pregunta de más
550 cantidades, por ejemplo, 40 para cuántos, es con el propósito de que establezcan que desde
551 el principio está la relación y puedan encontrar la relación entre esos y así puedan sacar las
552 otras.
553 E: ¿A qué se debe dice que algunos niños ya lo hacen de manera verbal, pero hay otros
554 niños que dice que no le van a contestar y por eso lo hace en el pizarrón? ¿A qué se debe
555 que algunos captan y otros no?
556 Daniela: Se debe a los estilos de aprendizaje, que unos son más visuales, otros son más
557 auditivos, y otros aunque sean visuales, el decirlo, les va a ayudar a comprenderlo más y
558 aunque sean auditivos, el verlo les va a ayudar también y lo esquematizan dentro de sus
559 estructuras mentales; por eso, se atiende a los estilos de aprendizaje.
560 E: ¿Cuántos estilos de aprendizaje usted conoce?
561 Daniela: Los visuales, auditivos y kinestésicos.

562 E: ¿Y eso para qué le sirve al maestro?

563 Daniela: Le sirve para saber de cuántas formas posibles va a plantear la situación, por
564 ejemplo, esta actividad yo la planteo con dos situaciones: visual y auditiva, cuando
565 represente la razón escrita en el pintarrón y cuando la leímos. Si se tomara más en cuenta
566 el kinestésico, sería tener material didáctico y trabajarlo en las mesas de los niños, es decir,
567 además de verlos con números y de manera auditiva-verbal, también lo manejarían ellos;
568 eso sería atender a los diferentes estilos. Por eso, agregué al principio las tarjetitas y cada
569 uno de las representaciones que se hacían, tomando en cuenta la diversidad de temas en las
570 que se presenta la fracción, pero también de que los niños entendieran cómo se representa
571 un medio de manera gráfica y numérica.

572 E: ¿Su planeación atiende a los diferentes estilos de aprendizaje?

573 Daniela: Atiende a los visuales y auditivos, porque si fuera los kinestésicos, por ejemplo, en
574 el planteamiento dos, les hubiera llevado las caritas y los corazones para que hicieran las
575 relaciones en su mesa, por ejemplo, “tengo aquí mi corazón con cuántas caritas; aquí un
576 corazón con dos caritas y ya voy contando”.

577 E: En la actividad del “pastel partido”, ¿cree que se logró lo que usted había esperado de los
578 niños en relación a los procedimientos empleados?

579 Daniela: Sí, porque me supieron contestar, supieron hacer los cálculos para saber cuántos se
580 iban a necesitar.

581 E: La mayor parte de las actividades se realizaron de forma grupal, pero ¿si hubo la
582 oportunidad de que trabajaran de forma individual?

583 Daniela: Sí hubo la oportunidad porque ellos contestaron de manera individual y después
584 de manera grupal justificaron [...]

585 E: ¿Usted cree que es importante el trabajo de manera individual y grupal?

586 Daniela: Sí, por ejemplo, en lo individual yo que puedo hacer y aplicar lo que yo conozco
587 y, de manera grupal, lo que han visto, lo que han dicho, lo que dice la maestra y lo que
588 dicen sus compañeros, ayuda para que en lo individual lo pueda hacer y, después de que lo
589 hice, de manera individual, ahora lo puedo llevar de manera grupal, para constatar lo que
590 hice y para ver con quién coincido, con quién no o si está mal lo que hice.

591 E: Entonces, ¿cómo resumiría la función que le da al trabajo individual y al grupal?

592 Daniela: En el trabajo individual, al final y al cabo, el niño va creciendo y se le toma en
593 cuenta solo lo que él hace, de manera individual, pero de forma grupal, le ayuda a la
594 construcción de ese conocimiento en lo individual y, en lo individual, van surgiendo cosas
595 que aportan al conocimiento grupal; los dos conocimientos y trabajos son importantes, sin
596 uno no existe el otro, porque sin lo social no nos conoceríamos, sin lo social el niño no
597 socializarían nada y, si nada más fuera él, pues su conocimiento sería muy limitado, a lo
598 que puede leer, a lo que puede observar, pero no a lo que puede comunicar a los demás, ni
599 lo que los demás le pueden comunicar; sería muy limitado tanto uno como otro, si no
600 hubiera un aprendizaje individual o un avance individual, no tengo nada que aportar a lo
601 grupal y, si en lo grupal no se discute y no se analizará, en lo individual no creciera en
602 cuanto a aprendizaje.

603 E: En el grupo, ¿cuál fue el impacto del planteamiento dos, que tiene que ver con lo de
604 caritas y corazones?, ¿cree que se logró lo esperado o hubo más conflictos para los niños?

605 Daniela: Creo que al principio hubo inquietudes porque no estaban muy contextualizados,
606 pero cuando entendieron de que para cuatro son ocho y lo relacionaban con el pastel,
607 aunque eran en contextos diferentes, los niños ya relacionaban cuatro corazones para ocho
608 caritas, entonces un corazón va tener dos caritas; a lo mejor no es algo muy

609 contextualizado, pero si les ayuda a los niños a establecer relaciones entre cantidades y, por
610 eso aquí se las puse gráficamente, para que contaran cuántos corazones, cuántas caritas y lo
611 representaran con números.

612 E: ¿Desde un principio pensó que iba a resultar esto quizá un poquito más conflictivo?

613 Daniela: Sí, porque no hay muchas experiencias de la vida real, en la que los niños pongan
614 en juego esto, pero si se pueden dar.

615 E: ¿Cuál fue el propósito del planteamiento anterior?

616 Daniela: El propósito era, por ejemplo, no deslindarse tanto de lo gráfico, pero si dar un
617 avance para que lo relacionaran de manera simbólica.

618 E: ¿Qué quería le aportara el contexto de las caritas y los corazones?

619 Daniela: El manejo de cantidades, además de gráficas; serían las cantidades porque los
620 niños ya las podían contar y si no se las hubiera puesto, a lo mejor hubieran tenido más
621 conflicto en lo que es cuatro corazones para ocho caritas; lo cual está relacionado con el
622 siguiente planteamiento.

623 E: Cuando terminan de contestar el planteamiento dos, en forma grupal, comentan cuáles
624 son las respuestas que dieron y usted dice “aquí tengo cuatro corazones para ocho caritas,
625 ahora ocho caritas cuatro corazones”; ¿por qué plantear esas dos formas?

626 Daniela: porque la razón exige que sean de los dos, es decir, que cuatro para ocho, ocho
627 para cuatro, para poder leer lo que es una razón [...] sacar en razón de que [...], en función
628 de que están saliendo las cantidades o cómo se están relacionando las cantidades. Además,
629 se hacía en el pintarrón para acentuar de cuántos y, ahora de esto, para cuánto.

630 E: ¿Cree que eso fue fácil de asimilar para los niños o ya lo habían asimilado?

631 Daniela: Considero que en el primer planteamiento fue fácil para los niños, porque me
632 respondieron rápidamente cuando les dije las siguientes cantidades [...], los llevó a
633 identificar cómo se leían y a establecer cierta relación entre las cantidades, aunque no
634 considero que ya lo hayan asimilado totalmente, porque creo que es el primer acercamiento
635 que los niños tiene a la razón.

636 E: Luego venía lo de los dos puntitos en el apartado “para saber más”, ¿cómo se trabajó
637 esta situación con los niños: fue fácil o difícil?

638 Daniela: A mí se me hizo fácil; cuando revisé cómo se explican las razones, que es una
639 relación entre cantidades dije “¿cómo se los voy a enseñar a los niños?”. Entonces no sabía
640 cómo hacer para planear, cuando dije “si se utilizan los dos puntitos por qué no hacer
641 primero cómo se lee y luego cómo se representa, si la suma siempre se les enseñó como
642 agregar o poner o, si juntas esto con esto; por ejemplo, al niño de primero le dices que si
643 juntas estas piedritas con estas piedritas, cuántas son en total”, después se les dice “mira la
644 crucita dice que se suma, es decir, que se van a juntar esto con esto [...]”; primero se les
645 enseña cómo se lee, como se dice y después se enseña el símbolo que represente esa
646 lectura. Por eso, en el planteamiento uno, les pongo un pastel para cuatro niños, sólo la
647 lectura y en el planteamiento dos agregué la lectura y junto con esto el símbolo de los dos
648 puntos. Obviamente los niños iban a preguntar, “qué significa estos dos puntitos”, por eso
649 hago este agregado de esta nota “para saber más” donde dice “se utiliza el símbolo de los
650 puntos para indicar una comparación entre dos cantidades”. No sé, si en la clase se ve
651 mucho, pero yo siempre les digo “cuatro corazones para ocho caritas”, siempre les acentúo
652 que se están comparando estas dos cantidades, pero aun así no creo que todos lo hayan
653 asimilado bien, sino que necesitaban ejercitar más porque era un conocimiento nuevo para
654 ellos, por eso mi decisión de ponerles esto, para que entendiera esos dos puntos.

655 E: En una parte de caritas y corazones, cuando les pregunta para qué son esos símbolos,
656 algunos niños dicen que es una comparación, pero hay otro niño que dice es igual, es decir,
657 que el símbolo significa que sean igual, ¿a qué cree que se debe esto?

658 Daniela: A la similitud que tiene con el signo igual, solo que aquí estamos hablando de dos
659 puntos y en el signo igual, son dos líneas. Entonces cómo se parece uno arriba y otro abajo,
660 pues piensa que es igual, pero no podemos decir que uno es igual a dos.

661 E: Al ver la clase, volvemos a rescatar, en todos los planteamientos, se identifica que usted
662 va resolviendo los planteamientos con los niños y al final siempre pone otros [...]

663 Daniela: Otros más complejos [...]

664 E: Ya había dado respuesta en otras interrogantes porque planteaba este trabajo. Ahora nos
665 vamos al planteamiento “tiras de papel” y aquí nos pudiera decir ¿cómo vio a los niños
666 empezaron a resolver la actividad?

667 Daniela: Empezaron, ¿cómo le vamos a hacer?, porque esto de las tiras de papel no se
668 relaciona mucho con los corazones y las caritas, ni con el pastel. Entonces los niños
669 empezaron a ver qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros. Aquí muchos
670 niños dejaron de lado lo que estábamos haciendo y se fueron a cómo representar fracciones
671 de manera simbólica cuando ven una imagen. Si fue como un salto a otra cosa, yo sí quería
672 hicieran eso para que después hicieran una relación entre una cosa y la otra, por eso es un
673 tanto diferente y la relación se establece en la parte de abajo, donde dice en una tira hay tres
674 cuadritos oscuros, se establece como una razón para que vieran que aunque acá se manejan
675 cantidades, también podemos hacerlo y ya no nada más con cantidades, sino también se
676 relacionaba con fracciones, para después aterrizar en el cuadro de abajo, relacionar la razón
677 y la fracción.

678 Cada actividad aportaba algo, cada pregunta, para que los niños fueran entendiendo y luego
679 relacionando; y cómo me iba a dar cuenta yo que estaban entendiendo, pues al hacerles esos
680 planteamientos al final de cada uno de las tres actividades, a ver si me van entendiendo aquí
681 y, por eso, les hacía eso más complejo con otros ejemplos.

682 E: El diseñar las actividades de esta manera, ¿qué conocimientos le demandó?

683 Daniela: A mí como docente, saber por ejemplo [...] más que nada investigar cómo es el
684 tema, cuál es el contenido que voy a dar, sus características, investigar qué voy a necesitar
685 para dar ese tema, cuáles son los conocimientos que los niños necesitan para ver ese tema,
686 ahora esos conocimientos que yo ya sé que los alumnos necesitan, que herramienta
687 pedagógica o didáctica me va a permitir plantearlos dentro de la planificación; pues lo de la
688 situación didáctica, que me permite hacer esto muy bien; ahora de qué manera lo voy a
689 plantear. Otro conocimiento que si se me dificultó mucho para el diseño de las actividades,
690 por ejemplo, fue lo que iba a ver en cada planteamiento, si cambié algunas cosas, dije a lo
691 mejor voy a tratar de que sea de lo mínimo a lo más complejo y, que al final, ya
692 relacionarán los dos: la fracción con la razón. Entonces traté de ver cómo lo voy a
693 relacionar, en qué contexto lo puedo ver y, en qué otro contexto lo puedo ver, y que no se
694 les vaya a ser tan difícil a los niños, por eso no les puse cantidades tan grandes, decidí
695 manejar números pequeños para que al final, los niños entendieran, después en cantidades
696 grandes lo de la razón, porque yo pensé si pongo cantidades grandes voy a tener
697 dificultades para que entiendan la razón ya que los niños ven números grandes y se les hace
698 difícil. Entonces con estos números pequeños, sin perder la noción del concepto de razón,
699 los niños lo iban a entender de todas formas. También saber cómo iba aterrizar el
700 significado de los dos puntos y cómo les voy a decir esto es la razón, pongo uno dos puntos

701 y un cuatro [...] bueno y esos dos puntos de dónde surge. Entonces pongo primero cómo se
702 lee y luego cómo se representa.

703 E: En relación a esto, el tema que aquí nos ocupa es abordar la razón como significado de
704 la fracción. Pero, ¿qué es el significado razón?, ¿cuáles son sus características de forma
705 general?, aunque ya se había citado algo en la otra entrevista.

706 Daniela: La razón se define tal como se lee, bueno es una comparación entre dos
707 cantidades, si tengo esta cantidad, por ejemplo, cómo se compara con la otra y, de ahí van
708 surgiendo más en la misma razón, por ejemplo, de dos son tantos, de tres son tantos; se van
709 comparando tantos para estos tantos. Respecto a las características o las propiedades
710 quizás, se puede decir sirve para el desarrollo de otros temas como la proporcionalidad y la
711 fracción, sin la razón no se puede resolver lo que es la proporcionalidad, no se puede sacar
712 el valor unitario y, sin la razón, tampoco podríamos determinar en fracciones qué parte
713 corresponde o qué representa. En el trabajo con los niños se puede ver que son los mismos
714 números, son las mismas cantidades que se involucran, pero tienen cierto cambio, no se
715 deslinda jamás una de la otra, una razón de una fracción.

716 E: En la tabla que van llenando los niños, en el último planteamiento, por qué poner
717 primero la razón y luego la fracción.

718 Daniela: Puse primero la razón porque son las que estuvimos manejando al final de cada
719 planteamiento, por ejemplo, razón uno para cuatro, luego uno para dos y, en fracción, qué
720 parte de pasteles corresponde y, luego en fracción que era un medio, qué parte del corazón
721 corresponde a las dos caritas, pues un medio, porque ahí como que si se tenían que partir
722 los corazones para saber las caritas que le tocaban. En las tiras de papel ya un tercio, muy
723 bien qué parte del papel, pero también si se tuvieran más tiras de papel en qué razón iban a
724 estar proporcionadas cada partecita. Entonces yo les puse primero la razón, por lo que
725 estábamos viendo al final de cada uno de los planteamientos, y luego ya la fracción para
726 que vean que la fracción representaba en sí lo que tocaba en cada uno de los
727 planteamientos.

728 E: Por lo que plantea, ¿qué papel ocupó lo que tiene que ver con la equivalencia de
729 fracciones?, porque vemos que es algo que se muestra y usted también lo retoma.

730 Daniela: Tiene que ver mucho la equivalencia de fracciones, cuando les ponía la primera se
731 ve, por ejemplo, si la primer cantidad la dividimos entre la segunda cantidad te da un
732 resultado y luego en el otro par de la misma fracción, si dividimos el primero entre segundo
733 te da el mismo resultado, entonces cada una de las fracciones aunque fueran aumentando
734 los números, se iba dando el mismo resultado y pues eran fracciones equivalentes.

735 E: En las tiras de papel se presentó de manera más explícita esta situación: $1/3$ y $3/9$, ¿usted
736 había previsto esta situación desde la planificación de la clase?

737 Daniela: Sí, porque como estaba dividido en nueve partes, si creí que los niños me iban a
738 decir que eran $3/9$ y yo le puse en novenos, porque si nada más pintaba los tres cuadros y
739 los demás no los marcaba, me iban a decir que es un cuarto porque no estaban bien
740 divididas las partes. Entonces les puse en novenos y coloree tres para que al final de
741 cuentas cayeran en que era un tercio, porque si nada más ponía esto iban a caer en el error
742 de que parten así y así o a simple vista, si no se ven estas divisiones en la tira de papel, pues
743 es un cuarto. Entonces para que no caigan en ese error les puse son novenos, ahora $3/9$ y les
744 pregunté sobre su representación de forma simplificada, de su expresión más simple para
745 que se viera que era $1/3$.

746 E: Posteriormente pasa a todos los niños a que resuelvan en el pizarrón la tabla que tiene al
747 final del planteamiento tres y después se vuelven a todo el problema central. Si nada más

748 faltaba de responder la última pregunta del problema central, ¿por qué retomar todas las
749 preguntas que venía en este problema?

750 Daniela: Porque al principio los niños tenían dudas y les dije resuelven, pero nunca se
751 revisó nada, ni siquiera la primer pregunta, entonces se iba revisando desde la primera
752 pregunta porque aquí yo les pregunto, cuántas cajas se ocupará para empacar 112 lechugas,
753 no les puse exactamente que una caja tiene 16 lechugas, porque en el nivel en el que están
754 ya es para que esas relaciones las puedan hacer, si son cuatro cajas 64 lechugas ,64 entre 4,
755 eso ya lo deben de saber, pero lo retomo para estar seguros de que cada niño supo que en
756 cada caja había 16 lechugas, porque si me iba directamente a qué parte de la caja
757 corresponde a una lechuga, entonces un dieciseisavo y ¿de dónde saco ese dieciseisavo? Se
758 iban a preguntar [...] una porque no las habíamos resuelto y otra para estar en la misma
759 sintonía y si no me hubiera tenido que regresar a las otras preguntas.

760 E: Si recuerda así al final de la clase todos los niños quieren decir razones y pasan y las
761 escriben y después usted las retoma y van viendo cada una de las razones que han escrito,
762 por qué cree que surgen algunos conflictos en las razones que los niños escriben en el
763 pizarrón cuando ya había estado claro.

764 Daniela: Los niños son muy dados a deslindarse, entonces como del enfoque que estábamos
765 llevando se empiezan a deslindar y le digo no regresen y si estaban viendo algunos
766 planteamientos trato de darle seguimiento porque si no hubiéramos terminado con
767 fracciones equivalentes, pero tratamos de ir las revisando para identificar cuáles estaban
768 bien.

769 E: Al final de la aplicación de este plan de clase, ¿usted cree que se logró el objetivo
770 esperado?

771 Daniela: Sí, que comprendieran lo que es la razón en fracción, empezaron a asimilar el
772 concepto de razón y que resolvieran el problema principal. Yo pienso que sí se logró y fue
773 gracias a las actividades que se hicieron posteriormente al planteamiento inicial y, más
774 porque al final a los niños si se les facilitó resolver el problema principal, a la mayoría,
775 porque al ver las producciones de los niños, hay algunos que no coinciden.

776 E: ¿Cree que se favoreció que los niños adquirieran un aprendizaje significativo?

777 Daniela: Creo que sí, en la mayoría, porque al final la pregunta que se les hizo difícil: ¿cuál
778 es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas?, la contestaron fácilmente, entonces
779 si hubieran tenido conflictos en cómo resolverlo, se hubiera visto que no favoreció la
780 construcción de ese conocimiento para poder resolver la respuesta a la última pregunta.
781 También se favoreció la adquisición de aprendizaje, en cada uno de los planteamientos que
782 les iba poniendo de manera más compleja, al momento que si me respondían los niños.
783 Entonces si se fue adquiriendo, si fueron aprendiendo lo que es la comparación entre las
784 cantidades.

785 E: ¿Por qué emplear tablas en el planteamiento uno y tres?, ¿cuál es su función?

786 Daniela: Es que las tablas son una herramienta gráfica, que nos permite establecer una
787 relación entre el número que está en una columna con el número que está en otra columna,
788 entonces la razón es una relación y, el empleo de tablas, por ejemplo, un pastel para cuantos
789 niños y se está estableciendo una relación. Al final en el planteamiento 3 dice “registremos
790 los resultados”, que vean que la razón y la fracción también establecen una relación que no
791 se deslindan. Entonces si hubiera puesto primero fracciones y luego razones en la tabla,
792 hubiera sido difícil que los niños establecieran que entre uno a cuatro se relacionaban con
793 un cuarto y, también, para que entendieran la diferencia entre el significado de una razón y
794 de una fracción, aunque llevara las mismas cantidades.

795 E: Para finalizar, vamos hacer un último bloque de preguntas y nos gustaría profundizar
796 sobre, ¿cuál fue el tipo de ayudas que les brindó a los alumnos y cómo se hizo presente en
797 los diferentes momentos de la clase?

798 Daniela: El tipo de ayudas fue principalmente estarlos [...] aunque no decirles [...] Ayuda
799 no es precisamente decirles el resultado, sino las preguntas, yo pienso que las preguntas fue
800 una ayuda importante para los niños porque en cuanto me daban alguna respuesta
801 incorrecta, les preguntaba y por qué piensan eso, por qué creen que es así y, también,
802 cuando me daban una respuesta correcta, y luego les preguntaba, por qué es así, para
803 ayudarlos a que fueran coherentes con lo que ellos estaban resolviendo, que identificaran si
804 estaban en lo correcto, si estaban haciendo bien para ponerlos a razonar. Entonces las
805 preguntas permiten que los niños razonen y no dejarlos nada más solos a ver razónenlo
806 ustedes si están bien o si están mal. Por eso las preguntas son una ayuda importante. Luego
807 también la corrección de algunos resultados cuando se ve el error, el maestro de la clase, es
808 decir, yo, le damos más importancia. También hay ayudas que hace el maestro pero no
809 directamente, sino de forma indirecta, por ejemplo, cuando les pregunta a los niños que más
810 o menos piensa que le van a responder correctamente, este niño me va ayudar a resolver si
811 los demás niños tienen las mismas dudas y le pregunto “¿por qué dices esto?” y luego les
812 pregunto a los demás “¿y tú concuerdas con eso?”; con esto estoy ayudando a los otros
813 niños e incluso a los que les estoy preguntando para que comprendan bien lo que vamos
814 viendo.

815 E: ¿Cuáles estrategias tomó en cuenta para que el aprendizaje fuera significativo?

816 Daniela: Lo que se toma en cuenta es que la clase se va a dar dentro de un grupo y que a la
817 mejor hay niños que tengan un nivel de conocimiento más avanzado que otros. Entonces el
818 preguntarles a ciertos tipos de niños me va ayudar a poder hacer que el conocimiento sea
819 también significativo para los demás y también a identificar quién si está comprendiendo el
820 tema y quiénes no.

821 E: En términos generales, ¿cuál ha sido el papel del maestro en la clase que desarrolló y
822 cuál el papel del alumno?

823 Daniela: El papel del maestro es entrelazar, es retomar los conocimientos de los niños y
824 entrelazarlos para que esos conocimientos que se tienen, en forma inicial, vayan creciendo
825 y, ¿cómo se hizo esto, en esta clase?, pues a partir de las ayudas que se hicieron de los
826 niños mediante las preguntas. El papel del alumno es el de estar, es el que va a realizar
827 siempre los procedimientos, las operaciones y el que va a estar fundamentando porqué esa
828 respuesta, va a ser el que va estar dando las respuestas y diciendo porqué. Entonces el
829 maestro nunca va a explicar nada, por ejemplo, decirles “aquí es un medio porque [...]”,
830 ese papel le corresponde al alumno, al maestro no, al maestro sólo le corresponde
831 preguntarle por qué, cómo le hiciste y, tú, cómo le entendiste a tus compañeros; es estar
832 entrelazando esta red de manera estratégica para que todos los alumnos logren ese
833 conocimiento significativo.

834 E: ¿Cuál es el papel del maestro en la institucionalización, es decir, en esta clase cuál fue su
835 papel?

836 Daniela: En la institucionalización fue validar los resultados de los alumnos, ya no me
837 enfoqué tanto en explicarlo desde un principio, porque la institucionalización se dio desde
838 el momento en que los niños estaban comprendiendo el concepto de razón. Entonces, al
839 momento en que se estaba institucionalizando, no se dejaba de cuestionar al alumno, por
840 ejemplo, “a ver aquí qué pusimos”, “por qué”; en la institucionalización no les decía “es
841 esto y esto”, es decir, cómo son las cosas, sino que los mismos alumnos ayudan al maestro

842 a institucionalizar y no tanto que lo ayude, sino que eso le sirve al maestro como estrategia
843 para lo que él había mencionado antes que era la evaluación de la clase.

844 E: Si tuviera la oportunidad de planificar la continuidad de la clase qué agregaría, qué
845 omitiría [...]

846 Daniela: Agregaría un planteamiento con mayor dificultad y que ya se involucraran
847 cantidades más grandes, pero se dejaría el planteamiento uno y dos; estas evidencias yo les
848 diría a los niños que las guarden y en la siguiente clase hacer un recuento rápido de lo que
849 vimos en la otra clase, es decir, hacer referencia a la memoria didáctica, para que al
850 momento de enfrentar el problema inicial, recuerden lo que vimos; ya se implica otro tipo
851 de problemas y qué voy a hacer para poder resolver. En caso de que los niños no hubieran
852 tenido bien asimilado lo que vimos: el concepto de razón, ya nos iríamos directamente y no
853 nada más les preguntaría se acuerdan de lo que vimos, sino que les diría váyanse a las
854 hojitas que hicimos, antes, qué vemos aquí, para que sea más rápido para los niños, es
855 decir, tener estas evidencias como referente para poder abarcar la siguiente clase.

856 E: En la clase que desarrolló, ¿se favoreció el enfoque de las matemáticas?

857 Daniela: Si se favoreció que el niño sea capaz de resolver problemas, porque en la
858 evaluación cuando los niños se enfrentaron al problema principal, lo pudieron resolver y, lo
859 podemos ver con facilidad, no porque el maestro les explicó cómo en la
860 institucionalización o dijo “así es”, se fue justificando porqué ese procedimiento, a partir
861 del trabajo de los niños, desde la misma realización de estos planteamientos de la clase
862 (señala el planteamiento 1, 2 y 3)[...]Entonces el alumno enfrentó primero el problema,
863 obviamente tuvo algunas dificultades porque había ciertos términos que no conocía, por
864 ejemplo, la última pregunta: ¿qué razón hay entre la cantidad de cajas y la cantidad de
865 lechugas? Y, ya después de esto, fue capaz de resolver esos problemas; yo pienso que es lo
866 que finalmente se busca en matemáticas, que los niños reconozcan en una situación
867 problemática qué necesitan saber para poder resolverla, obviamente el niño no va decir de
868 inmediato que son las razones, sino que ahí es donde entra el papel del maestro, el niño
869 necesita descubrir esto: “¿cómo le voy a hacer para que lo haga?”, por eso yo decidí
870 plantear estos planteamientos, a lo mejor en otras estrategias es diferente, porque a partir de
871 lo que los niños conocen y lo que otros puedan decir, de ahí yo les voy a ir diciendo cómo
872 para institucionalizar, a mí me pareció más significativo que los niños vayan viendo en el
873 desarrollo desde donde surgen las razones para que lo puedan entender y así resolver el
874 problema final.

875 E: Para cerrar con esta entrevista, qué pudiera contarnos en relación a su experiencia en la
876 realización de esta planeación, la entrevista, la aplicación y ahora esta entrevista.

877 Daniela: El proceso es importante; debe de estar siempre presente investigación para la
878 planeación y todo, ahora, si nos damos cuenta en la entrevista antes de la aplicación, se está
879 investigando cómo hice mi planeación o por qué la estoy haciendo, al momento en que
880 estoy explicando porque pongo ciertas actividades en la planeación, es porque estoy
881 investigando, estoy viendo cómo la hice, cómo la estructuré y, esta investigación al
882 momento de manejarla y codificarla, se puede hacer una reflexión y se puede llegar con
883 mayor conocimiento de mi planeación, es decir, me ayuda a conocer mi planeación para
884 que al momento de aplicarla identifique lo que voy a aplicar y por qué lo diseñé y, en la
885 clase, uno lo desarrolla con mayor eficiencia y atiende situaciones a lo mejor imprevistas.
886 Durante el desarrollo de la clase, hasta uno se divierte y se hace interesante lo que un niño
887 dice y hace, por ejemplo, de un procedimiento que no había tomado en cuenta en mi
888 planeación y, aun así, lo pone también a reflexionar e incorpora los procedimientos que

889 realizan los niños y quizá no había contemplado, porque me doy cuenta de lo que están
890 haciendo los niños, que quizá a mí se me había escapado. Dentro de mi planeación yo
891 pensaba que a ver si entendía el concepto de razón y uno se da cuenta que así como tenía
892 estructurado los planteamientos se lleva a los niños a que adquieran el concepto de razón,
893 por lo que vi que si me funcionó el proceso. Después de la aplicación, en esta entrevista, ya
894 estoy viendo qué hicieron los niños, si se logró lo que yo quería y también se da cuenta uno
895 que surgen otros temas, por ejemplo, otras dificultades que uno no toma en cuenta durante
896 la planeación, como la actividad de la caja de los huevos que no lo relacionaban los niños
897 con 1/10; si uno lleva registro y nota de eso, en la siguiente planificación ya se puede
898 evaluar este tipo de situaciones, si los niños ya conocían esto por qué tienen dificultades y
899 hasta lo puede uno investigar con los mismos niños y, además, a partir de estas estrategias
900 también puedo diseñar otras que me sirvan, por ejemplo, tomando en cuenta todos los
901 estilos de aprendizaje y, en cierta forma, pues se va mejorando el trabajo que se hizo
902 anteriormente, poco a poco investigando, desde lo que uno no conoce para su planeación,
903 llegando su planeación y luego investigando su práctica y se lleva a la reflexión; estas
904 reflexiones que vemos más adelante, podemos ahora sí, a partir de mi resultados, ahora que
905 puedo volver a formular y así se puede llevar el procedimiento en un espiral reflexiva para
906 poder seguir enriqueciendo la práctica docente y, cada vez sean más complejas las
907 estrategias, con mayor conocimiento de cómo van a funcionar, mayor conocimiento del
908 grupo y de lo que uno como docente domina. Al aplicar las estrategias que poco a poco se
909 vayan generando, los alumnos obtienen un conocimiento más significativo, el maestro se
910 hace más competente en el campo que se está desempeñando y también se puede
911 reflexionar que, a lo mejor, esta estrategia la apliqué con este grupo, pero si la aplico con
912 otro grupo diferente, qué cambios le tengo que hacer, aunque ya tenga otro producto más
913 complejo y más bien elaborado, a lo mejor me puede servir o lo que antes había diseñado, y
914 puede llevar a una serie de diferentes análisis.

ANEXO 9. Entrevista Semiestructurada 2 de Israel

1 E: Buenos días. Vamos a comenzar con la primera parte de esta entrevista que atiende a
2 algunas cuestiones que se revisaron en la primera entrevista, así como a situaciones que se
3 presentaron durante el desarrollo de la clase que usted planificó. En la entrevista pasada
4 iniciamos contextualizando de dónde emerge la planificación y otro tipo de información.
5 Una pregunta que le realizamos corresponde a cuál es el eje de las matemáticas que se hacía
6 presente en su planificación y, usted nos señalaba, era sentido numérico y pensamiento
7 algebraico; ahora nos gustaría que nos justifique por qué cree que se trabaja ese eje en su
8 planificación, donde se aborda la razón como significado de la fracción.

9 Israel: En función de lo que señala quiero complementar esa respuesta porque se abordan
10 dos ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico y, un poco, manejo de la información.
11 En el sentido y pensamiento algebraico considero situaciones o planteamientos con
12 números naturales, reales, racionales [...] se trabaja más ese aspecto. En el uso y manejo de
13 la información, las actividades que se desarrollaron se enfocaron en este campo porque
14 vemos algunas tablas, gráficas y, con base en ello, se responde cierta información. Por lo
15 tanto, revisamos estos dos ejes.

16 E: En el de sentido numérico y pensamiento algebraico por qué dice que se hace uso de los
17 números naturales, reales [...] ¿Cuáles son los números naturales? ¿Qué recuerda? [...]

18 Israel: Eso lo vimos en primer semestre [...] Los números naturales son del uno en
19 adelante, sin ver números negativos [...] los números reales son todos los números que
20 existen. Como estamos hablando de fracciones se ven los números racionales que son
21 algunos que tienen partes fraccionales. Entonces considero que el sentido numérico y
22 pensamiento algebraico trata de revisar estos tipos de números y hace uso de algunas
23 operaciones básicas, en este caso, la división y la multiplicación.

24 E: En la entrevista pasada comentábamos cuáles eran las competencias matemáticas que se
25 favorecían en su planificación y usted nos comentó: resolución de problemas de manera
26 autónoma, validar y argumentar resultados y, comunicar información matemática. En este
27 sentido, nos pudiera ampliar en qué consiste o cómo se favorecían cada una de las
28 competencias citadas.

29 Israel: Resolver problemas de manera autónoma consiste en que los alumnos trabajen [...] en la
30 clase estuvieron organizados en equipos, fue de una forma colaborativa, pero dentro
31 de estos equipos no se debe delegar la responsabilidad en unos cuantos. Por eso, una de las
32 competencias fue el trabajar de manera autónoma para resolver las actividades, que cada
33 niño se haga responsable de su propio trabajo y de su propio proceso de aprendizaje, es
34 decir, ser autónomo, de ser protagonista dentro de ese equipo, de tomar ciertas decisiones,
35 de opinar y entre todos argumentar [...] por ejemplo, el que decide o propone argumentar
36 por qué plantea cierta situación, es como hacerse parte y tomar esa responsabilidad en el
37 equipo.

38 Validar y argumentar resultados es una parte y se complementa con la competencia de
39 comunicar información matemática porque quizá los alumnos cuando validan y argumentan
40 sus resultados o sus procedimientos la favorecen [...] es la forma en que ellos dan cierto
41 sustento porque obtienen cierto resultado, porque emplean determinado procedimiento.
42 Entonces es importante que no sólo ellos se queden con cómo lo hicieron, sino que lo
43 compartan y que argumenten, validen y sea la forma en que se haga el trabajo, quizá para
44 otro alumno puede ser significativo la forma en la que lo resolvió y lo apropie también ese

45 procedimiento o amplíe más sus aprendizajes en la forma en cómo se pueden resolver
 46 ciertos problemas.

47 E: De acuerdo a lo que plantea, ¿en qué consiste la argumentación?

48 Israel: Argumentar consiste en mostrar evidencias, algún hecho, plasmarlo y decir porqué
 49 [...] por ejemplo, porqué me dio cierto resultado y decir lo que hice primero y después; esto
 50 es una forma en la que está argumentando y se hace con la finalidad de convencer, por eso
 51 tiene que dar como explicaciones, la causa que lo llevó a este procedimiento.

52 E: ¿Esto se favoreció en su clase?

53 Israel: Sí se favoreció porque los niños al final de contestar sus hojas de trabajo, pasaban al
 54 pizarrón y argumentaban la forma en que hacían su procedimiento, cómo llegaron a su
 55 resultado y, los demás, validaban [...] validar es como decir si sí o no, como la aprobación.
 56 Por lo tanto, durante las actividades si se favoreció esa competencia. Puede que existan
 57 algunos momentos donde los alumnos se detengan y reflexionen si su procedimiento fue el
 58 adecuado.

59 E: ¿En qué consiste la competencia de comunicar información matemática?

60 Israel: Considero que esa competencia consiste en dar a conocer resultados, planteamientos
 61 y estrategias para resolver ciertos problemas, es decir, dar a conocer información
 62 matemática con la que lo resolvieron. Me parece tiene el propósito de revisar los diferentes
 63 procedimientos con los que puedo resolver un problema.

64 E: Nos puede proporcionar un ejemplo de información matemática a partir de lo que
 65 trabajó.

66 Israel: Un ejemplo puede ser en un problema, la información matemática serían los
 67 conceptos o las ideas que se requieren en el área de las matemáticas como un lenguaje
 68 matemático, por ejemplo, de sustracción, cociente, razón; estamos usando ese lenguaje
 69 matemático. Dar a conocer información matemática es información referente al tema.

70 E: Si recordamos en la primera entrevista usted nos señaló que esta planificación surgía en
 71 el contexto de las fracciones, pero sólo se pretendía abordar la razón. En términos
 72 generales, cómo definiría una fracción y una razón.

73 Israel: Una razón es la relación entre dos números o dos cantidades que dijimos está
 74 representada por el cociente y el cociente es la división. Investigando un poco y
 75 profundizando decía que a veces la razón es como precursora a la fracción y lo veo en el
 76 sentido de que dice “la razón no se expresa siempre como una fracción, sino como [...] en
 77 un medio, puede ser uno de dos o uno a dos”. Por lo tanto, identifico que no se ve la razón
 78 tanto como fracción, pero si es como un antecedente, precursora para llegar a la fracción.
 79 En este sentido, hay diferentes formas de expresar la razón. En la parte final de mi clase,
 80 me adentré más en lo que es la fracción. La fracción la veo como el cociente entre dos
 81 cantidades con sus partes, que es el numerador y el denominador.

82 E: En la entrevista pasada nos hablaba de diferentes conceptos, entre ellos rescatamos el
 83 concepto de valor unitario, que nos pudiera decir sobre qué es el valor unitario y si cree que
 84 tiene relación con la razón.

85 Israel: Tiene relación porque no vemos la razón totalmente como proporcionalidad, al
 86 encontrar ese valor unitario es como de lo que parte la proporción y lo podemos ver en la
 87 actividad final, donde se veía la tabla sobre la cantidad de ingredientes requeridas para
 88 preparar un pozole, y el objetivo era encontrar el valor para una persona y de ahí parte para
 89 saber cuánto le va tocar a cinco personas, a ocho, diez [...] Entonces creo que el valor
 90 unitario es la simplificación de lo que es la fracción al valor más mínimo, por ejemplo,

91 llegar a la cantidad mínima de que por cada uno son dos, por ejemplo, en cuatro octavos la
 92 cantidad mínima es un medio.

93 E: Después de eso, usted habla que hay diferentes significados de la fracción que se
 94 abordan antes de quinto grado y hay otros que se aborda en sexto grado. Ahora vamos a
 95 profundizar en esa parte, usted dice que antes se ve la fracción como cociente, como
 96 medida y como parte-todo, si nos puede describir de manera general, qué implica la
 97 fracción como parte-todo cuando se trabaja en grados anteriores a quinto.

98 Israel: Por ejemplo, ver la fracción como parte-todo, ver ciertas cantidades como parte-
 99 todo, por ejemplo, si tengo ocho sándwich y quiero repartir la mitad sería no ver la fracción
 100 de un medio de un sándwich, sino ver esos ocho como mi entero y esto es difícil de
 101 concebir, por ejemplo, cantidades como 520 eso sería mi todo, es difícil hacer esa reflexión
 102 porque a veces los niños se enfocan a que un entero es un círculo relleno, pero no pueden
 103 ver que otras cantidades pueden ser mi cien por ciento, pueden ser mi entero y, a partir de
 104 esas cantidades, voy a hacer las reparticiones.

105 E: Usted plantea dos situaciones muy importantes: hablar del todo desde un círculo y de
 106 cantidades, por ejemplo, quinientos veinte. Además, señala que los alumnos tienen más
 107 dificultades cuando ven el todo en cantidades, ¿a qué cree se debe?

108 Israel: Me parece se debe a que en ocasiones no alcanzamos a llevar a los niños a la
 109 reflexión de que otras cantidades pueden formar mi entero, porque las fracciones en
 110 círculos si las pueden representar bien, pero cuando les pongo otras cantidades de que
 111 tengo, por ejemplo, una cantidad como treinta y dos y quiero repartir de ahí solamente un
 112 cuarto, entonces para los niños es un poco difícil representar un cuarto de treinta y dos, no
 113 encuentran una relación de ver al treinta y dos como un entero, como un todo.

114 E: ¿Cuándo cree que en la primaria los niños abordan la fracción como medida?

115 Israel: Me parece los niños las pueden ver al manejar algunas longitudes, por ejemplo, en
 116 una recta numérica que tiene diez centímetros representa un cuarto o algunas magnitudes,
 117 por ejemplo de litro, un cuarto de litro, medio litro; aquí se puede ver la fracción como
 118 medida.

119 E: ¿Cuándo se puede ver la fracción como cociente?

120 Israel: La fracción como cociente se entiende como la división, una fracción que implica un
 121 cociente es una división [...]

122 E: Usted señala en sexto grado los niños trabajan la fracción mixta, ¿qué es una fracción
 123 mixta?

124 Israel: Es una fracción donde maneja un entero y lo acompaña una fracción con numerador
 125 y denominador, por ejemplo diez cuartos, es igual a dos enteros dos cuartos; esa sería la
 126 fracción mixta.

127 E: Ahora vamos a continuar con otra parte, usted señaló que utilizó diferentes materiales
 128 como referente de apoyo [...]

129 Israel: Para el diseño de mis actividades tomé como referencia algunas actividades de los
 130 libros de texto de primaria y otras de algunos libros japoneses.

131 E: En términos generales, ¿qué contienen estos libros japoneses y qué tomó?

132 Israel: Estos libros tienen mucho lenguaje visual, es decir, tienen más cosas atractivas,
 133 incluso hay diálogos entre niños donde explican procedimientos. Me parece que la forma en
 134 que vienen organizadas las actividades es una forma un poco más atractiva, parte de un
 135 planteamiento y enseguida permite que tú compruebes si es verdad lo que estás
 136 argumentando en la parte de arriba [...] como una comprobación.

137 E: Recuerda dónde abordó ese material.

138 Israel: Ese material se nos proporcionó en geometría y en apoyos académicos también se
 139 encuentran en físico, en la escuela normal. Pero ahí nos lo dieron para buscar actividades
 140 relacionadas a la geometría y, eso me sirvió para abordar este aprendizaje esperado de la
 141 razón como significado de la fracción.

142 E: ¿Existen actividades de su planificación que retomó de ese material?

143 Israel: Sí, algunas ideas y situaciones en las que me basé fue la actividad de las mesas,
 144 donde se menciona había una mesa chica y una mesa grande, se decía la capacidad de cada
 145 una de ellas y la cantidad de personas sentadas con el propósito de identificar cuál de las
 146 dos mesas está más llena. Al final viene como esa comprobación donde decía que dibujara
 147 o sacaras el resultado de dividir y lo representaras en una gráfica y, se identificara, cuál
 148 mesa estaba menos llena y, se hiciera como una analogía a realizar lo mismo con la otra
 149 mesa y, se hiciera una comparación; eso lo tomé de los libros japoneses, el contexto lo
 150 cambié porque todo giraba en torno a una feria.

151 E: ¿Existen otros materiales en los que se haya apoyado para el diseño de sus actividades?

152 Israel: Los libros de texto de primaria de quinto año, de aquí rescaté la actividad de la hoja
 153 número tres relacionada con los ingredientes que se necesitaban para preparar pozole.

154 E: ¿En qué orden presentó en su planificación las actividades que retomó de los dos
 155 materiales anteriores?

156 Israel: Primero puse lo de los libros japoneses, lo del libro de quinto de primaria lo dejé al
 157 final, porque consideré era un poco más compleja, porque los niños tenían que identificar
 158 lo que mencionábamos del valor unitario, de la fracción como un todo. Por eso quise
 159 revisar algunas cosas previas que les ayudarán a esta parte.

160 E: Las primeras actividades que diseñó en su planificación, ¿si contribuyeron a la
 161 realización de esa última actividad?

162 Israel: Contribuyeron porque se realizaban algunas divisiones donde se veía ese valor de
 163 parte-todo, por ejemplo, en el de la mesa se mencionaba la capacidad de asientos de la mesa
 164 y cuántos están ocupados, se hacía la división y se pone el resultado. Por lo tanto, me
 165 parece las primeras actividades les dieron algunas ideas para resolver la actividad final.

166 E: Usted planteaba en la otra entrevista que diseñó una situación didáctica, ¿qué tomó como
 167 referente para el diseño de su situación didáctica?

168 Israel: Me apoyé en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, ya que mencionaba
 169 que la situación didáctica es esa situación intencionada para que los alumnos adquieran un
 170 conocimiento definido, pues menciona que una situación didáctica es ese escenario de
 171 aprendizaje y que el aprendizaje no se da de forma espontánea, sino a través de
 172 interacciones y de forma colaborativa; es algo que caracteriza la situación didáctica.

173 E: En su situación didáctica viene en un primer apartado “preparación del medio”, el cual
 174 tiene organizado en tres partes. Nos gustaría que nos explique porqué hablar de medio, cuál
 175 es su papel en la situación didáctica [...]

176 Israel: El medio es ese escenario de aprendizaje, es decir, el canal en el que se va a dar. Es
 177 importante esa preparación del medio, aunque otros lo manejan como una
 178 contextualización, que es como adentrar al niño en el conflicto cognitivo que se va a dar.

179 E: En su planificación, usted dice que en la preparación del medio hay tres elementos: el
 180 rescate de conocimientos previos, el material que se necesita y la organización del grupo.
 181 Entonces, ¿en qué consiste el rescate de conocimientos previos?

182 Israel: El rescate de conocimientos previos sirve al maestro para identificar lo que los niños
 183 ya conocen, ver cuáles son esos conocimientos antecesores que serán la pauta hacia los
 184 nuevos aprendizajes, en este caso, la razón como significado de la fracción; son los

185 conocimientos previos y sirve para darse cuenta si, por ejemplo, los niños saben hacer una
186 división [...] Es lo previo, lo que los niños ya conocen o los conocimientos que hasta el
187 momento poseen.

188 E: En la preparación del medio, en el rescate de conocimientos previos, usted plantea un
189 cuento, por qué un cuento [...]

190 Israel: El cuento da la pauta para el desarrollo de las siguientes actividades, es como mi
191 contexto, mi escenario [...] el cuento me ayudó a que al principio las actividades fueran
192 algo tranquilas, algo en lo que los niños pusieran atención, ya que los cuentos le son
193 llamativos, son atractivos, por lo cual, quise empezar con un cuento para el planteamiento
194 de las diferentes situaciones. Además de que se abordan en la escuela primaria. Muchos
195 plantean que una situación didáctica debe ser lo más real posible, quizá en un contexto más
196 real, pero a veces podemos ver algunas circunstancias [...] plantear de esta manera las
197 situaciones a través del cuento, aunque no fue una situación tan real los niños si la podían
198 interpretar.

199 E: Después de eso usted les plantea la historia, dice que va a organizar a los niños en
200 equipo, por qué hacerlo en equipos

201 Israel: Es en equipos porque como decíamos, uno no construye su propio aprendizaje, sino
202 que se da través de las interacciones, entonces al hacerlo en una forma grupal pudiera
203 suceder que fuera una actividad guiada por el profesor y dejábamos en un segundo término
204 a los alumnos. Por eso, al hacerlo en equipo, los alumnos tuvieron la oportunidad de
205 compartir más, al ser un grupo más reducido, se hicieron más responsables porque no
206 siempre el maestro iba a estar, ellos tomaron decisiones, se organizaron, platicaron y se
207 pusieron a trabajar, crearon esa interacción entre los aprendizajes; así estarían haciendo un
208 trabajo colaborativo que da frutos en ese sentido.

209 E: ¿Cree que se logró esto en el desarrollo de la clase?

210 Israel: Por lo que observé sí, al acercarme a algunos de los equipos los veía como
211 comentaban, quizá no al cien por ciento, porque hay muchos niños que por su propia
212 personalidad son temerosos al hablar, a dar su opinión, pero al entrar más en confianza
213 ellos pueden exponer sus ideas, es decir, en un grupo más reducido. Cuando me acercaba a
214 los equipos veía que si comentaban, platicaban y argumentaban por qué hacerlo de cierta
215 forma y antes los demás equipos validaban si hacían cierto procedimiento [...] creo que sí
216 se logró ese trabajo colaborativo.

217 E: Comenta que después del cuento les puso una lámina para las dos pastelerías suspiros y
218 la casa de los pasteles, por qué presentarlo en una lámina, si lo pudo haber hecho de forma
219 oral [...]

220 Israel: Al hacerlo en una lámina [...] ese es un material un poco más visual, donde lo
221 pueden ver representado. En este momento, los niños están en una etapa de operaciones
222 concretas porque ocupan, incluso hasta los 11 años, resolver problemas con
223 representaciones de dibujos. Si se los hubiera puesto oral muchos niños no alcanzaban a
224 hacer esas reflexiones cognitivas. Al hacerlo en forma visual ellos están viendo la oferta,
225 los pasteles, se hace un poco más llamativo [...]

226 E: En diferentes momentos usted se apoya en el empleo de estas láminas, ¿a qué atiende el
227 manejo de estos materiales?

228 Israel: Lo utilizo en diferentes momentos porque las láminas me sirvieron como mi material
229 didáctico y adecuado para trabajar este tipo de situaciones, lo cual, me favoreció que los
230 niños lo pudieran observar de forma general y algunos en sus hojas de trabajo. Por lo tanto,

231 me parece es parte importante este material didáctico para que sea más visual, que lo
 232 puedan ver [...]

233 E: ¿Qué pasa si no hay información visual?

234 Israel: Me parece que quizá los niños no alcanzarían a hacer esa reflexión cognitiva de lo
 235 que les estoy hablando, así al hablar de un pastel ellos están viendo [...] por ejemplo, si es
 236 de dardos ellos los están observando [...]

237 E: En la entrevista pasada usted nos explicó cómo esperaba que los niños resolvieran esta
 238 actividad de rescate de conocimientos previos, pero aquí existe algo muy interesante,
 239 primero les plantea la actividad de manera individual. Pega la lámina en el pintarrón, pero
 240 les entrega a los alumnos unas hojas para que lo resuelvan y posteriormente lo trabajan de
 241 manera grupal, ¿por qué trabajarlo de manera individual?

242 Israel: Aquí me interesaba tener el conocimiento que ellos poseían sobre situaciones de
 243 ofertas, la promoción de tres por dos [...] quería ver la forma en que cada uno asimilaba el
 244 problema. Por lo tanto, considero que el rescate de conocimientos previos debe ser
 245 individual, no tanto en equipo.

246 E: En la planificación y la entrevista pasada usted hace uso de otros conceptos como la
 247 consigna. Señala que en la primera consigna se hacen ciertas restricciones y nos
 248 proporciona algunos ejemplos. En este caso, nos gustaría profundizar en qué es una
 249 restricción.

250 Israel: Una restricción es como un límite, qué es lo que puedo o no puedo hacer. En este
 251 caso, me parece que es importante dejar claras las reglas del juego en cuanto al tiempo, lo
 252 que tienen permitido hacer dentro del equipo y lo que no se puede hacer fuera que, en este
 253 caso, no pararse a platicar con otros equipos para ver el proceso interno del mismo equipo.

254 E: Respecto al uso de la calculadora aquí se especifica [...]

255 Israel: Sí, por ejemplo, qué materiales puedo utilizar y cuáles no; es parte de la restricción.

256 E: ¿Por qué permitirles usar la calculadora?

257 Israel: Me parece importante lo del uso de la calculadora hasta cierto punto, por ejemplo, en
 258 los primeros grados de educación primaria no sería algo adecuado, debido a que se hace sin
 259 calculadora para ver las operaciones que realizan, ver la forma en que resuelven
 260 operaciones. En cambio, en quinto grado, consideré que era adecuado utilizar calculadora
 261 debido a las cantidades que se utilizaban y eso facilitaría hacer el trabajo un poco más ágil
 262 porque eran varias actividades, no lo consideré negativo debido a que los niños ya conocen
 263 la forma en cómo se resuelve una operación [...]

264 E: Después de eso usted habla de una devolución de la consigna, ¿cómo definiría usted la
 265 devolución de la consigna?

266 Israel: La devolución de la consigna consiste en devolver el planteamiento que se hizo. La
 267 consigna es como mi situación, el conflicto, el problema o lo que se va resolver. Entonces
 268 el devolverlo es porque a veces quedan muchas dudas y quizá los niños no están
 269 concentrados en lo que va a decir el profesor o por lo mismo, de que son tímidos y quedó
 270 alguna duda en cuanto al trabajo y no se animan a decir. Por lo tanto, la devolución de la
 271 consigna es como una estrategia para que el maestro se dé cuenta si quedó claro lo que se
 272 va a realizar, la indicación de la actividad que se va realizar y aclarar dudas si hubiera.

273 E: ¿Qué pasa si no se aclara?

274 Israel: Aun así devolviendo la consigna quedan dudas, pero si no se aclara la consigna
 275 quedan más [...]

276 E: Esto de consigna, devolución de la consigna, de dónde viene porque lo plantea en su
 277 planificación.

278 Israel: Lo manejé porque Brousseau maneja la consigna. La devolución de la consigna la
 279 identifiqué a partir del trabajo con mis compañeros del grupo, al ver los elementos que
 280 contemplaban en sus planificaciones y cuando vi que algunos incluyen en una situación
 281 didáctica devolución de la consigna fue un elemento que decidí retomar. Creo que lo
 282 importante de estas situaciones es que no son algo herméticas, sino que da la oportunidad
 283 para que amplíes [...] porque igual maneja fase de acción, formulación, validación e
 284 institucionalización, pero da pauta que dentro de ellas tu pongas un sello, agregando cosas.
 285 E: En la fase de acción usted comenta que es donde les va a decir que contesten la hoja de
 286 trabajo uno, que aquí los niños van a empezar a realizar conjeturas mentales analogías, ¿por
 287 qué decir eso?

288 Israel: Lo pongo porque en la fase de acción es la parte en el trabajo, las comparaciones y
 289 las analogías [...] es lo que me parece los niños hicieron dentro de sus equipos, de
 290 argumentar el procedimiento, hacer analogías, comentarios de comparaciones, validar y
 291 argumentar dentro del mismo. Entonces me parece que como es la fase de acción, es la fase
 292 donde ellos están respondiendo, hacen este tipo de conjeturas mentales y ponen en juego
 293 los saberes que tienen.

294 E: Mencione una analogía que cree pudieron haber hecho en la hoja de trabajo uno en la
 295 fase de acción.

296 Israel: En la actividad de los pasteles pienso que la analogía que pudieron haber realizado
 297 sería también la de las ofertas, algo que ya habían visto o algo relacionado quizás en su vida
 298 cotidiana [...]

299 E: ¿Y en el caso de conjeturas mentales? [...]

300 Israel: Es como ese pensamiento que los niños ya traen [...] ese aprendizaje [...] la conjetura
 301 mental es como la representación que los niños hacen del problema, pero de manera mental,
 302 algo cognitivo [...] es la forma en que ellos abstraen el problema y lo visualizan
 303 internamente.

304 E: Después de esto, en la fase de acción usted señala que el maestro sólo interviene para
 305 solucionar dudas y lo hace a través de devoluciones. Entonces, ¿cómo tendrían que ser esas
 306 devoluciones?

307 Israel: Esas devoluciones tendrían que ser en forma de pregunta, incluso es algo que estaba
 308 leyendo el otro día [...] del uso de la mayéutica, que es como dar nacimiento a la respuesta,
 309 dice que la respuesta está en cada uno de nosotros, que no es simplemente llevarla a flote, a
 310 la luz [...] entonces esa forma de devolución es devolver en forma de pregunta “¿cómo lo
 311 vas hacer?” para que el niño vaya dando esa respuesta o al menos orientar a la respuesta
 312 [...] como una especie de orientación. Por lo tanto, creo que no deben de ser preguntas
 313 cerradas porque al responder es un “sí o no” [...] y, quizá es lo que los niños esperan, saber
 314 si están bien, esa aprobación, por lo cual, creo deben ser preguntas abiertas y, a la vez,
 315 ambiguas y generales, no dar la respuesta.

316 E: Un ejemplo de alguna pregunta ambigua que usted realizó o usó que le ayuden hacer
 317 esas devoluciones. Por ejemplo, cuando un niño le preguntó “¿si estoy bien maestro?” [...]

318 Israel: Si está un poco difícil poner ese ejemplo porque las devoluciones se dan de forma
 319 espontánea, no es algo que quizá tengamos planeado porque pueden haber muchas
 320 preguntas y quizá no vamos a tener la correcta [...] Por ejemplo, si un niño se acerca y me
 321 pregunta si está bien, quizá le voy a preguntar [...] sería solicitarle que revise el
 322 procedimiento que realizó, dónde están sus operaciones [...] quizás se usa mucho eso
 323 cuando dice argumenta tu respuesta, explícame lo que hiciste [...]

324 E: Enseguida usted planteaba que hacer este tipo de devoluciones en la fase de acción,
 325 ayuda para poner a los niños en situación adidáctica. Recuerda qué implica una situación
 326 adidáctica.

327 Israel: Brousseau señala que una situación adidáctica es la situación donde no interviene el
 328 maestro, sino que se delega la responsabilidad al mismo niño, y a la mejor puede que sea
 329 algo erróneo, pero dice del error se aprende.

330 E: Entonces dentro de la situación didáctica usted busca que existan algunos momentos de
 331 situación adidáctica para que el niño sea el protagonista. En términos generales, ¿cuál es el
 332 papel del maestro en la fase de acción?

333 Israel: En la fase de acción el papel del maestro es orientar o al menos ser guía para algunos
 334 niños, porque existen algunos que si se meten en su papel de resolver el conflicto ellos
 335 solos, pero hay otros que ocupan un poco más de orientación. Por lo tanto, pienso que en la
 336 fase de acción el papel del maestro es de orientar.

337 E: Después de esto usted plantea que va a abordar tres hojas de trabajo, ¿cuál es el papel de
 338 las hojas de trabajo?

339 Israel: Es un material impreso, aunque pudimos hacer que escribieran cada uno de los
 340 planteamientos, pero el uso de las hojas de trabajo, además de ahorrar tiempo, contenía
 341 algunos ejemplos donde se relacionaba con lo que decíamos del lenguaje icónico que
 342 ayudaba a hacer esto un poco más visual.

343 E: En las hojas de trabajo vemos tablas, recuadros [...] ¿cuál fue el papel que desempeñaron
 344 esas tablas y esos recuadros?

345 Israel: Estas tablas permitieron que los niños vieran representado el problema y que se
 346 pudieran apoyar para realizar algunos procedimientos o algunas anotaciones. Respecto a los
 347 cuadros me parece que es una forma de organizar la información.

348 E: Al principio de la hoja de trabajo usted les dice a los niños que no realicen operaciones
 349 para resolver la actividad, que sólo vean cuál creen que es el que les conviene más [...] ¿por
 350 qué no quiere que hagan operaciones en este primer momento?

351 Israel: Porque quería ver cómo es la forma en la que ellos lo resolverían, por ejemplo, que
 352 hicieran uso de la estimación [...] como una forma de que ellos estimen, se hace también
 353 porque cuando hablamos de que no realicen operaciones es como un primer intento [...]

354 E: En el caso de las actividades de esta hoja, usted nos explicó en la entrevista pasada
 355 cuáles creía eran los procedimientos que los niños podían usar, así como algunas de sus
 356 fortalezas o dificultades. Después que dio esta clase, ¿cree que hay coincidencias en los
 357 procedimientos que usted esperaba emplearan?

358 Israel: Me parece si hubo algunos, aunque otros me sorprendieron en la forma como lo
 359 resolvieron, las estrategias que emplearon. Para el maestro a veces es muy difícil darse
 360 cuenta cuál es el procedimiento que los niños van a seguir para resolver una actividad,
 361 porque lo pueden hacer desde algo muy sencillo hasta operaciones un poco más complejas
 362 [...]

363 E: ¿Por qué cree para el maestro es difícil identificar todos estos procedimiento y esas
 364 estrategias que pueden emplear los niños para resolver una actividad?

365 Israel: En un momento es difícil porque quizá ya poseemos los conocimientos, a la mejor lo
 366 podemos resolver de una forma que a nosotros se nos hace fácil. En este caso, considero
 367 difícil ponerse en el nivel del niño para identificar cómo pueden resolver estos problemas
 368 [...] a mí me cuesta trabajo ponerme en esa situación, es decir, con los conocimientos que sé
 369 ahorita tienen los niños cómo lo pudieran resolver, es algo que me cuesta trabajo visualizar.

370 Entonces, algunos alumnos me sorprendieron por los procedimientos que emplearon [...]
371 Me parece es lo bonito de las matemáticas el cómo llegar a ese punto por varios caminos.
372 E: Enseguida menciona que puede ser los alumnos vayan construyendo sus aprendizajes de
373 forma distinta [...] hacia una reflexión en la entrevista pasada [...] esto de que los alumnos
374 construyen sus aprendizajes a partir de formas distintas cómo se pudiera entender
375 Israel: Me refería al ritmo de aprendizaje, donde no todos aprenden lo mismo, al mismo
376 tiempo, ni en el mismo momento, igual tienen diferentes conocimientos, por ejemplo, dos
377 compañeros han estado en la misma clase, los mismos años, pero poseen diferentes
378 estrategias y diferentes formas de extraer el problema y lo resuelven de forma distinta; eso
379 de las formas distintas implica que lo apropio, lo interiorizo, pero no de la forma que dice el
380 maestro, sino de la forma mía [...] el conocimiento lo hago mío. Entonces esas son las
381 formas distintas en que cada quien interioriza el aprendizaje. Dependiendo del ritmo quizá
382 van a existir niños más adelantados que interiorizan ese aprendizaje de forma más abstracta
383 o de forma más convencional y, existen otros niños que por su ritmo bajo lo siguen
384 haciendo con dibujos y representaciones gráficas y otros niños que lo realizan con una
385 operación convencional.

386 E: En el segundo planteamiento de la hoja uno, usted aborda el caso de Don Benjamín y
387 Don Octavio. Con Don Benjamín truenan seis globos para llevarse un premio y pueden
388 usar hasta ocho dardos, con Don Octavio deben tronar siete globos y pueden usar hasta
389 diez dardos [...] ¿de dónde sacó esas cantidades o por qué elegir seis y ocho, siete y diez?
390 [...] Si pudo elegir siete y once, tres y cuatro [...]

391 Israel: Elegí esas cantidades porque sentí que ponen al niño un poco más en duda o al
392 menos se daba ese conflicto cognitivo al decir, “bueno en uno debo de tronar seis y en
393 otros siete es uno de diferencia”, pero abajo las cantidades eran diferentes “en uno me dan
394 ocho dardos y en otro diez”; quizá aquí se pueden guiar donde hay más globos y otro donde
395 hay menos. Entonces es como ver ese margen de error, sí se podían hacer comparaciones,
396 pero había algo que no cuadraba, por lo cual esas cantidades fueron intencionadas. No
397 hubiera pasado lo mismo al usar, por ejemplo, en uno debes tronar cinco globos y te dan
398 diez dardos y en otro debes tronar cuatro y te dan ocho dardos [...]

399 E: Durante la clase podemos observar que los alumnos resolvieron estas situaciones
400 empleando algunos procedimientos que quizá usted no esperaba. En este sentido, ¿a usted
401 como maestro qué le demandaron estas situaciones?

402 Israel: Fue más que nada un poquito difícil desde el momento de seleccionarlas porque no
403 teníamos antecedentes de lo que sabían los niños, entonces varias cosas las dábamos por
404 hecho y quizá revisando puede que algunas situaciones si están un poquito elevadas de
405 nivel [...] demandaron de mí [...] hacer esa reflexión de qué es lo que los niños pudieron
406 resolver y qué les representó un poco más de desafío.

407 E: La actividad de truenan globos, dice se puede relacionar con la probabilidad porque
408 pueden tirar ocho dardos y tronar seis globos o lanzar diez dardos y tronar siete globos para
409 obtener un regalo; lo anterior, para el caso de los dos puestos de Don Octavio y Don
410 Benjamín. Usted señala que dos octavos es igual a punto setenta y cinco, que es el setenta y
411 cinco por ciento; siete décimos es igual a punto siete, que es el setenta por ciento. Por lo
412 tanto, señalaba que este tema se puede relacionar con la probabilidad y los porcentajes.
413 Además de esto que nos había comentado, ¿por qué cree la actividad se relaciona con la
414 probabilidad?

415 Israel: Considero que se puede relacionar con la probabilidad debido a que nos maneja estas
416 cantidades: “son ocho dardos y debes de tronar seis globos y en el otro puesto son diez

417 dardos y debes de tronar siete globos para tener un regalo”. Entonces aquí a simple vista se
 418 puede manejar ese concepto de probabilidad, de donde es más probable que la persona que
 419 vaya a jugar en estos puestos obtenga un regalo.

420 E: Respecto a la relación con el porcentaje qué nos puede comentar.

421 Israel: En el porcentaje decimos que vemos en números ese por ciento de dónde es más
 422 probable que gane. En el caso de Don Benjamín el setenta y cinco por ciento representa lo
 423 que puede acertar, en el otro es un setenta por ciento, si nos vamos por los porcentajes, en
 424 el primer puesto es mayor un cinco por ciento, por lo tanto, es más probable que tenga un
 425 premio en el primer puesto.

426 E: Si para esta situación, en la clase, los niños tomaron como referencia el denominador,
 427 algunos decían "conviene más el segundo, el de don Octavio porque le dan oportunidad de
 428 realizar más lanzamientos", cuando usted esperaba tomaran como referencia el numerador,
 429 es decir, la cantidad de globos que debían tronar para ganar un premio en cada opuesto. Al
 430 final, en la clase decidieron que el puesto que convenía más era el del don Benjamín donde
 431 al tronar seis globos les daban un regalo. ¿A qué cree se debe lo anterior?

432 Israel: Considero que los niños se dejaron guiar más por el número de lanzamientos que
 433 podían realizar que por el número de globos que deberían tronar para obtener un premio,
 434 por lo que seleccionaban la opción donde tengo diez dardos para tronar siete globos y
 435 decían “quizá tengo más probabilidad con diez tiros que, en el otro puesto con ocho”, sin
 436 embargo, observamos que el número de globos para obtener un premio es menor y aquí
 437 aunque no sea mucho la diferencia donde pueda ganar un regalo al tronar los globos,
 438 cuando se toma en cuenta el denominador la diferencia es un cinco por ciento, en cambio se
 439 dejaron llevar por el denominador; lo anterior, se puede deber a que aún no queda claro esa
 440 idea [...] a veces cuando les planteamos algunas fracciones de dos cuartos y cuatro octavos,
 441 preguntamos, cuál es mayor o por ejemplo, un medio y un octavo, se dejan guiar por el
 442 número del denominador, creen que como abajo es ocho es una fracción mayor, hasta que
 443 lo vemos representado en una misma fracción o una misma gráfica es cuando podemos
 444 hacer esa comparación. Por lo tanto, creo que nos falta ir más allá de estas fracciones o al
 445 menos de estas razones, hacerlo un poco más gráfico, eso puede ser la clave, representarlo
 446 de alguna forma para que puedan identificar, hacer un contraste, en este caso, cuál puesto
 447 les conviene más. Después de haber analizado esto hubiera sido conveniente plantear este
 448 problema y graficar, el problema es que a veces no vamos más allá de lo que está
 449 planteado.

450 E: En la siguiente actividad de la hoja de trabajo uno, usted retoma el caso de Don
 451 Benjamín donde señala que el total de lanzamientos son ocho, ¿a qué se debe esa decisión?

452 Israel: Tomé el caso de Don Benjamín porque anteriormente iba a hacer el puesto en el que
 453 vamos a tener mayor porcentaje para obtener un premio, es decir, iba a ser el correcto, por
 454 lo cual, lo quise retomar porque quizá en este tenemos más probabilidad.

455 E: En la entrevista pasada, usted señala que los alumnos realizarán la lectura de
 456 información que proporciona la tabla que acompaña esta actividad y agrega que, por lo
 457 tanto, cree esta actividad se relaciona con otro eje que es el tratamiento de la información.
 458 Al inicio de la entrevista nos había explicado algo de esta relación, ahora qué nos pudiera
 459 comentar, cómo se justifica esta relación con el eje de tratamiento de la información.

460 Israel: El eje tratamiento de la información nos habla de lo que son tablas y gráficas, es
 461 quizá a partir de la observación y el análisis de las tablas hacer una serie de
 462 cuestionamientos de información que podamos extraer de esto, es decir, para nosotros dar
 463 respuesta a ciertos planteamientos.

464 E: En la siguiente página de la hoja de trabajo uno viene un diálogo entre dos niños, por
 465 qué plantear esos diálogos, cuál es su función en la realización de esta actividad.

466 Israel: La intención es que los niños observaran y dieran lectura a los procedimientos que
 467 utilizan estos niños para resolver el planteamiento [...] es como el diálogo que permite
 468 orientar cómo le puedo hacer, por lo cual, se me hizo algo interesante, quizás no es algo que
 469 los niños están acostumbrados a ver, aunque lo pueden escuchar, pero que lo vean escrito
 470 no es muy común para ellos. Este diálogo daba una pista de cómo pudieran resolver el
 471 planteamiento.

472 E: Los globos donde están las conversaciones, ¿usted los diseñó o de dónde los retomó?

473 Israel: Tomé como referente el contenido de los libros japoneses que vimos en la normal,
 474 de aquí extraje las figuras, pero sólo cambié algo de los diálogos.

475 E: Enseguida viene una tabla que tiene relación con la tabla que trabaja en la página
 476 anterior, donde viene cada uno de los lanzamientos realizados en el puesto de Don
 477 Benjamín, así como el total de globos tronados. ¿Cuál es la función de esta segunda tabla
 478 que se relaciona con el puesto de Don Benjamín?

479 Israel: En la siguiente tabla lo que queremos es llegar a una forma de representar esta
 480 información, porque viene para cada juego el número de globos tronados y el número de
 481 lanzamientos que se realizaron; esto para llegar a representar una fracción, quizá aquí faltó
 482 un poco analizar lo que es la razón. La razón se vio de forma más verbal, pero igual, por
 483 ejemplo, en la primera que eran cinco de ocho, a partir de ocho lanzamientos tronaron cinco
 484 globos. Por lo tanto, el propósito de esta tabla es que hicieran el conteo de lanzamientos de
 485 dardos y los globos tronados en cada juego.

486 E: Después usted señala que les va a pedir a los niños representen en fracciones el
 487 contenido de la tabla anterior, es decir, que pongan el número de globos tronados como el
 488 numerador y el denominador es el total de lanzamientos, ¿por qué realizar esta aclaración a
 489 los niños si sólo les pudo haber planteado “ubica las cantidades en los siguientes
 490 recuadros”?

491 Israel: Por ejemplo, el número de lanzamientos corresponde al denominador, debido a que
 492 es el total de [...] en este caso, nuestro total de las oportunidades para lanzar que serían
 493 ocho y, los globos tronados el numerador, sería la cantidad de globos que se pudieran
 494 tronar, aunque bien pudieran haber sido ocho, pero en este caso, no fueron; lo anterior lo
 495 hago con la intención de plantearlo en una fracción. Si lo vemos desde una fracción el
 496 denominador corresponde al total de partes en que está dividida esa pieza y el numerador
 497 corresponde a las partes que estoy tomando.

498 E: Enseguida usted plantea que los niños conviertan estas fracciones a decimales, ¿por qué
 499 convertirlas a decimales?

500 Israel: La intención es debido a que en las demás hojitas se pretendía que hicieran algo en
 501 decimal para poder comparar, por ejemplo, hasta qué porcentaje o qué tanto de globos se
 502 tronó. Entonces, por esa la decisión de convertirlos a decimales. También comparar donde
 503 se obtuvo o se llegó a lo que hablábamos del punto setenta y cinco, en este caso, me
 504 imagino debió de haber sido el juego tres donde llegamos a esa cantidad.

505 E: ¿Cómo definiría un número decimal?

506 Israel: Un número decimal es un número que está a la derecha del punto. Por ejemplo, uno
 507 punto uno, cero punto uno, que está a la derecha del punto [...]

508 E: Después de eso, en la planificación, en la fase de formulación-validación usted plantea
 509 que va a pasar a algunos alumnos al pintarrón para [...]

510 Israel: Para validar.

511 E: ¿Por qué pasar a algunos alumnos al pintarrón cuando usted pudiera hacer esto, es decir,
512 escribir los procedimientos, cuál es la función de esto?

513 Israel: La función es [...] bueno se pudo haber hecho que el maestro institucionalizara en
514 ese momento con algún procedimiento, pero aquí es importante ver cuáles son las
515 estrategias que los niños están utilizando para resolver los planteamientos y, quizá,
516 encontrar alguna que para ellos se les pueda facilitar en ese momento; esa fue la intención,
517 ver los procedimientos de algunos alumnos y las reacciones del resto de los niños hacia los
518 procedimientos de sus compañeros. Por ejemplo, cuando ven un procedimiento más
519 complejo ellos señalan que quizá lo resolvieron de una forma más sencilla o que también le
520 llamábamos con el maestro Zúñiga más económica. En esta parte también se trata de
521 argumentar, de convencer sobre los procedimientos que han empleado, el porqué de sus
522 procedimientos y dar evidencia de que obtuve un resultado correcto.

523 E: ¿Cómo cree que es más fácil convencer a los niños de que con un determinado
524 procedimiento se obtiene un resultado correcto?

525 Israel: Me parece que es más de persuadir a los niños y más que nada convencerlos, pero
526 para esto ellos deben de estar convencidos de cuál es el resultado. Me imagino que en el
527 caso anterior de los puestos, si fue difícil convencerlos, aunque se plantea el procedimiento
528 y se dieron pruebas y evidencias, los niños no están convencidos de que ese es el resultado
529 correcto, difícilmente se les puede convencer de que ese es el procedimiento.

530 Israel: En relación al papel que desempeña el alumno y el maestro, ¿en qué medida
531 contribuye el que participen los alumnos y el maestro?

532 E: Me parece es muy importante que los alumnos tomen ciertas responsabilidades en sus
533 propias decisiones porque a veces esperan la aprobación del maestro [...] ven al maestro
534 como el principal agente que va a proporcionar las respuestas y ahí se deslindan de esa
535 responsabilidad que ellos deberían de asumir.

536 E: Para evitar eso usted decide [...]

537 Israel: Que entre ellos mismos se revisen o al menos argumenten y digan sus
538 procedimientos, que no estén a la espera de que el maestro diga si están bien o no están
539 mal.

540 E: Después de esto usted dice que van a dar una breve introducción a lo que es la razón,
541 agrega que para esto va a presentar la lámina dos, ¿por qué señala que sólo es una breve
542 introducción a lo que es la razón?, ¿cuál es la característica de esta lámina?

543 Israel: Me parece que es una breve introducción porque hablar de razón es un tema muy
544 complejo y muy amplio. La intención de esto es, por ejemplo, dice “razón entre los
545 dardos”, aquí los tenemos representados y los globos tronados, que es igual al número de
546 globos tronados entre el número de dardos. Aquí, por ejemplo, número de dardos sería la
547 cantidad total y el número de globos tronados sería parte de ese total [...] creo que aquí debí
548 de haber puesto al revés, acá el número de globos tronados y aquí el número de dardos
549 (señala en la hoja) [...]

550 E: ¿Cuál es la función de lo anterior?

551 Israel: La función de esto es hacer como esa comparación [...] dice que el número de globos
552 tronados son seis y el número de dardos son ocho, que es seis a ocho o seis de ocho, que es
553 la forma en que puedo obtener ese premio y ya estamos hablando de cómo representar una
554 razón.

555 E: En el inciso c de esta hoja de trabajo, en la entrevista pasada usted señalaba que esto va a
556 contribuir a que se muestre de forma icónica e ilustrativa por qué.

557 Israel: Es a lo que llegamos, me parece que hacerlo de una forma más abstracta en el campo
558 más cognitivo es un poco más difícil para los niños, porque nosotros les podemos hablar y
559 nos estamos imaginando una cosa, pero en realidad no sabemos qué es lo que los niños
560 están pensando. Entonces me parece que llevarlo de una forma gráfica, icónica, al menos
561 tenemos un poco más de noción, de crearles a ellos un referente, por ejemplo, "mira
562 estamos hablando de dardos, estos son los dardos, estamos hablando de globos, aquí están
563 los globos tronados", en este caso se trabaja más que nada como referente mental.

564 E: Durante la clase, ¿usted cree la que la lámina anterior logró el impacto esperado?

565 Israel: Creo que sí les llamó la atención en la forma en que se presentó, quizás es algo para
566 mantener más la atención de los niños.

567 E: Enseguida dice que va a usar la lámina tres como retroalimentación, ¿por qué agregar
568 esta lámina?

569 Israel: Es lo que decíamos como que la razón es la precursora de la fracción. Entonces si
570 hablamos que seis a ocho, pues aquí lo vemos seis de ocho y a lo mejor así damos pautas a
571 representarlo con una fracción. Por lo tanto, si fue como retomar eso [...] que la razón nos
572 ayuda o antecede a llegar a lo convencional que sería la fracción.

573 E: Respecto al trabajo con la hoja uno, ¿cree que eso contribuyó al avance en la adquisición
574 del aprendizaje esperado de la clase?

575 Israel: Me parece que si contribuyó, quizá no en su totalidad, siento que la forma en la que
576 pudo haber contribuido fue al haber generado dudas a los alumnos que, a lo mejor ya no me
577 tocó a mí ver o retomar, pero me parece que la mayoría se quedó con la inquietud y un gran
578 porcentaje si tuvo esa noción de la representación de la razón, por lo cual, si considero que
579 la hoja de trabajo uno favoreció el aprendizaje esperado en la parte final.

580 E: Cuando usted terminó con esa hoja dice se va a pasar a la hoja dos y tres. En términos
581 generales, ¿cuál era la función de la hoja dos y tres?, en la hoja uno dio una breve
582 introducción a la razón, ¿para qué servían las otras?

583 Israel: Las otras dos para adentrarnos a lo que ya es la razón como tal [...]

584 E: Si vemos en la hoja de trabajo dos volvemos a plantear otra tablita, pero ahora ¿cuál era
585 el propósito de esta tabla, qué la hacía diferente? [...]

586 Israel: Aquí está retomando, por ejemplo, lo que es algo gráfico, que no lo vimos en la hoja
587 uno, aunque en la hoja de trabajo uno vimos la tabla, no vimos la gráfica que permitía
588 representar la razón, eso es algo diferente.

589 E: Enseguida comenzaremos a comentar las actividades propuestas en la hoja de trabajo
590 dos. En la primera parte plantea la situación de la renta de mobiliario y cuál mesa estaba
591 más llena. En este caso, en la clase surgieron algunas inquietudes en los niños [...]

592 Israel: Decían qué mesa se encontraba más llena. Entonces algunos niños decía "cómo
593 puedo comparar las dos mesas si son diferentes", "en una hay ciento treinta sillas y en otra
594 son quinientas veinte sillas, no se pueden comparar".

595 E: Y los que decían que se podía comparar cuando expresaban "ya tenemos la respuesta",
596 ¿cuál respuesta le daban?

597 Israel: Me daban la mesa grande porque ellos se dejaban ir por cuál tiene mayor número de
598 sillas, pero no cuál estaba más llena.

599 E: En esta hoja de trabajo usted plantea un concepto de grado de aglomeración, ¿de dónde
600 surgió, por qué trabajarlo con los niños y por qué ponerlo aquí, qué relación tiene con la
601 razón?

602 Israel: Aquí nos menciona que grado de aglomeración es el número de personas entre el
603 número de asientos total. Lo rescaté de esta forma porque sería interesante para los niños

604 identificar qué es la aglomeración y aprenderían un concepto nuevo. Tiene relación con la
605 razón porque nos dice que el grado de aglomeración es precisamente que tan lleno está
606 algo, en este caso, nosotros lo vemos como la parte de la cantidad total, es como decir una
607 cantidad entre otra [...] considero que no es lo mismo que la razón porque aquí la razón
608 solamente sería el número de personas que están sentadas y el número de asientos totales, el
609 grado de aglomeración es como el resultado.

610 E: En la entrevista pasada y en la clase usted señala que les va a decir a los niños que no
611 contesten la última parte de la hoja de trabajo dos, la que se encuentra después de la línea
612 negra, ¿por qué no quería que contestaran esa parte?

613 Israel: Porque sería como llegar hasta ese límite y al final hacer esa comprobación, después
614 de que trabajáramos una lámina relacionada con esto.

615 E: ¿Cuál era el propósito de esa lámina?

616 Israel: Aquí el propósito es precisamente, antes de adentrarnos a esta última parte de la hoja
617 de trabajo dos, dar esta explicación que dice "el número que permite comparar dos
618 magnitudes mediante un cociente, como el registro de los tiros se llama razón; aquí nos da
619 que la razón es la cantidad que se compara entre la cantidad de referencia, que lo vemos en
620 este ejemplo, la cantidad de referencia es el total de asientos y la cantidad de asientos
621 ocupados es la cantidad que se está comparando. Entonces dice que el grado de
622 aglomeración en la mesa chica es la división de ciento diecisiete entre ciento treinta que es
623 igual a cero punto nueve. Por lo tanto, dice que el grado de aglomeración es cero punto
624 nueve, que son nueve décimos y significa que de cada diez asientos nueve están ocupados
625 [...]

626 E: ¿Aquí está presente la razón?

627 Israel: Sí donde dice "nueve de cada diez".

628 E: Aquí mismo cuando realizamos la entrevista pasada usted comenta que va a aprovechar
629 esta lámina para recurrir a la memoria didáctica, ¿qué es eso de memoria didáctica?, ¿de
630 dónde viene?

631 Israel: Nosotros veíamos que la memoria didáctica es algo exclusivo del profesor que él
632 puede hacer a sus alumnos y es como recordar cosas que se vieron en otras clases o retomar
633 un aprendizaje que los niños ya adquirieron y ponerlo en práctica en ese momento.

634 E: ¿Por qué retomarlo en ese momento?

635 Israel: En ese momento porque creo es adecuado, pues previamente ya habíamos visto qué
636 es la razón. Entonces, rescatarlo en este momento, sería ese contraste de que recuerden lo
637 que ya vimos y quizá puedan hacer esa analogía o esa comparación de las actividades que
638 se plantea y puedan retomarlo.

639 E: En esta planificación, ¿diseñó una secuencia didáctica o una situación didáctica o
640 ambas?

641 Israel: Una situación didáctica [...]

642 E: ¿Cree que la situación didáctica tenga algo de relación con la secuencia didáctica?

643 Israel: Me parece que si se relacionan, no se encuadra en trabajar matemáticas con sólo con
644 situaciones didácticas porque si se da pauta a trabajar con secuencias didácticas porque
645 ambas van a tener un principio y un fin, que sería un inicio y, al final, un cierre.
646 Entonces aquí se trata de la forma en cómo se plantean las situaciones.

647 E: Después de que en forma grupal trabajó la lámina relacionada con la mesa chica, les pide
648 a los alumnos que ahora sí regresen a la hoja de trabajo dos y contesten la última parte que
649 había quedado pendiente, ¿qué pasa cuando contestan esta actividad?

650 Israel: Dice expresa el grado de aglomeración de la mesa grande coloreando el siguiente
651 gráfico. Aquí llegamos de identificar que ocho de cada diez asientos están ocupados, pero
652 aquí ya nos da como el total. La intención de la lámina era ver, que por ejemplo, el noventa
653 por ciento de la mesa estaba ocupada y ese noventa por ciento representaba los
654 cuatrocientos dieciséis asientos ocupados.

655 E: ¿Cree es importante estar relacionando la razón con los porcentajes?

656 Israel: Creo puede ser algo complejo para los niños, quizá lo digo porque así lo puedo dar a
657 entender. En quinto año si considero que manejan razón, fracciones y porcentajes, aunque
658 si pudiera propiciar un conflicto en los niños porque de por si el tema es algo complicado
659 [...]perdón aquí es ochenta por ciento.

660 E: ¿Cree que el porcentaje se relaciona con la razón?

661 Israel: Sí [...] la razón se relaciona con la fracción y, a la vez, las fracciones se pueden
662 relacionar con porcentaje [...] considero que si se puede.

663 E: Ahora vamos a retomar algunas situaciones relacionadas con la lámina que les puso
664 sobre el grado de aglomeración de la mesa, ¿cuál era la función de ese último ejercicio?

665 Israel: Ver ese grado de aglomeración y verlo de una forma más visual, a través de la
666 gráfica y para retroalimentar, en función de las cantidades de cada mesa.

667 E: En la clase cuando los niños empiezan a trabajar esto, identifico que algunos tienen
668 ciertas dificultades, usted estaba pasando por algunos de los equipos y al notarlo empieza a
669 explicarles, les dice "por ejemplo, si fueran cinco décimos cómo los represento" y les
670 dibuja en una hoja un rectángulo y les dice vamos a dividirlo, los niños lo hacen, dividen
671 ese rectángulo en diez partes y luego usted rellena con el lápiz lo que son cinco décimos y,
672 enseguida, los pone a que obtengan fracciones equivalentes, les pregunta qué representa
673 eso, algunos niños empiezan a decir que un medio [...] ¿por qué cree que los niños tienen
674 algunas dificultades en ese tipo de situaciones?

675 Israel: Iba por los equipos y muchos si decían o hacían esa analogía pues cero punto uno,
676 punto dos, punto tres, punto cuatro [...] veían que por cada punto decimal iban coloreando
677 una parte, pero yo les di como referencia el punto cinco porque lo marcaba nuestra gráfica.
678 Entonces creo a veces se les dificulta a los niños representarlo de esa forma [...] recurrí a
679 esta estrategia porque creí que era algo que podría ayudar a los niños a hacer esa
680 comparación o esa analogía, a ver "si aquí estoy haciendo esto, voy a revisar qué puedo
681 hacer en este problema con base en eso" [...]

682 E: Después usted aborda con ellos la hoja de trabajo tres, pero aquí en la consigna llama la
683 atención les dice no se puede usar calculadora y en las anteriores sí, ¿a qué se debe?

684 Israel: La intención de no utilizar calculadora es que consideré eran cantidades que los
685 niños fácilmente podían trabajar sin usar la calculadora y podía favorecer el desarrollo de
686 habilidades en los niños al resolver problemas. En las otras hojas manejábamos cantidades
687 como cuatrocientos dieciséis entre quinientos veinte, un poco más complejas [...] decimos
688 que en este caso no está peleado el uso de la calculadora, siempre y cuando manejen la
689 forma convencional de resolver las operaciones, quizá aquí sería conveniente subir un poco
690 el nivel de complejidad, es decir, qué representaba hacerlo sin calculadora [...]

691 E: Enseguida, en la clase observamos que los niños se ponen a trabajar en equipos, pero
692 usted comienza a pasar por cada uno de los equipos y observa que tienen algunas
693 dificultades [...]

694 Israel: Sí [...]

695 E: Usted les comienza a decir " a ver un kilo, ¿cuántos gramos tiene?" [...] ¿por qué
696 plantear esas situaciones?

697 Israel: Planteo esta situación porque en esta actividad de la hoja tres, lo vemos en un nivel
698 un poco más elevado, porque los niños tienen que hacer varias cosas, en primer lugar,
699 tienen que hacer conversiones para que se facilite, igual vemos que se maneja el punto
700 decimal que es uno punto cinco, se maneja lo que es fracción, que sería un cuarto y lo que
701 serían números enteros.

702 E: Entonces, ¿era intencionado trabajar con números decimales, números fraccionarios y
703 números enteros?

704 Israel: Sí, era elevar ese nivel y todo se relaciona con las fracciones [...]

705 E: Hablando del contenido de las tablas en la hoja de trabajo tres [...] si se fija primero
706 viene la cantidad de ingredientes que se requiere para cinco personas, luego se pide que
707 saquen para ocho y luego usted les explica que para siete personas, por ejemplo, pueden ser
708 [...] y, al final, quiere que saquen la cantidad que se requiere para una persona, ¿cuál es el
709 propósito de que sea para cinco, ocho, siete y una persona?

710 Israel: Explicar para siete ese no lo dije en la clase [...]

711 E: Pero lo plantea en su planificación, en el apartado donde dice institucionalización.

712 Israel: Explicar para siete, sería como para tomar como referencia otro número de personas,
713 igual hubiera sido otra cantidad, por ejemplo, para diez personas, pero hubiera sido un poco
714 más fácil para los niños hacer esa comparación [...] dicen “pues si para cinco ocupo uno
715 entonces para dos personas voy a ocuparlo el doble”, por eso decidí con otras cantidades
716 que no son tan proporcionales [...] bueno si son, pero no tanto, por ejemplo que decir con
717 diez personas o con quince que es el doble, triple [...] hacerla con ocho creí que iba a
718 representar un conflicto un poquito más elevado [...]

719 E: ¿Por qué al final pedir la cantidad de ingredientes que se requieren para una persona?

720 Israel: Aquí era la pista, encontrar lo que decíamos en la otra entrevista pasada del valor
721 unitario, porque decía son cinco personas pero si tienes un kilogramo, cuánto vas a ocupar
722 para la mitad, pues medio kilo, medio kilo te va a alcanzar para dos punto cinco personas y
723 decimos cómo le vas a dar de comer a dos personas y media. Entonces aquí hablábamos de
724 encontrar ese valor unitario [...] para una persona, cuánto te va a hacer falta, si ocupas mil
725 gramos de maíz para cinco, busca entonces de esos mil gramos cuánto va a comer una
726 persona. Me parece que encontrar ese valor de uno, da la pauta para encontrar las demás
727 cantidades, por eso, lo puse final.

728 E: ¿Cree que fue importante haber planteado convertir el kilogramo a gramos para poder
729 resolver la tabla?

730 Israel: No creo que hubiera sido tan importante, pero mi intención era que todo lo tuvieran
731 en gramos, porque sólo en este ingrediente lo maneja en kilogramos y los otros manejan en
732 gramos [...] igual, por ejemplo, un cuarto de kilogramo aquí lo convirtieron a 250 gramos.
733 Por lo tanto, la intención era ver todo en gramos, quizá eso es propio de mí porque se me
734 hace más fácil dividir una cantidad sin que me salgan decimales, por ejemplo, me va a
735 dar cero punto dos kilogramos, ah pero cuánto es cero punto dos kilogramos, entonces aquí
736 serían doscientos gramos. Me parece es más fácil para los niños entender doscientos
737 gramos que cero punto dos kilogramos.

738 E: ¿Usted cree que la forma como visualiza las matemáticas, la resolución de problemas
739 tiene que ver con su enseñanza?

740 Israel: Me parece que sí, porque quizá por la experiencia adquiere formas más sencillas de
741 resolver problemas y, quizás es lo que uno quiere mostrar a los niños. Observé que algunos
742 niños no lo utilizaron precisamente así, ellos si pusieron uno punto seis kilogramos
743 ocupaba, pero creo que a otros niños les pudiera ayudar.

744 E: A partir de esto, sería interesante plantear, ¿todos los niños resolvieron la hoja de trabajo
745 tres?

746 Israel: Sí.

747 E: ¿Qué pasó con la presentación de la última lámina?

748 Israel: Esa no la presenté, la realicé en el pintarrón para resolverla de forma grupal y
749 validar los procedimientos y resultados que cada uno obtuvo [...] al final recuerdo
750 planteo algunos ejemplos, donde decían algunas cantidades de ingredientes que se requería
751 para cierto número de personas [...] planteo algunas devoluciones, por ejemplo, si fuera x
752 persona cuánto vas ocupar de esto [...]

753 E: En este momento de la clase y en otros usted plantea algunos ejercicios relacionados con
754 lo que han realizado en ciertas actividades de las hojas de trabajo, por ejemplo, aunque
755 gráficamente identifique nueve décimos, ocho décimos, les pone varias fracciones al igual
756 que aquí y les cuestiona, qué representan; las cuales no venían descritas en su plan de clase.
757 ¿Por qué plantear otras situaciones aparte de las que abordada en las hojas?

758 Israel: Esas son algunas variables de las actividades, como poner otro planteamiento [...]
759 me parece sirve para hacer esa comparación de que vean que eso puede servir para
760 diferentes cantidades. Por lo tanto, creo que ejemplifica un poquito más lo que se está
761 tratando de que entiendan a los alumnos.

762 E: ¿Eso cree ayuda a los alumnos?

763 Israel: Sí, porque tienen un panorama más amplio [...]

764 E: ¿Cuál es el propósito del contenido de la lámina cinco que realizó en el pintarrón?

765 Israel: En parte el propósito era esa formulación y validación de los niños. Aquí quería que
766 los niños observaran, compararán y me iba a servir para institucionalizar.

767 E: ¿Cuál papel jugó el trabajo en forma grupal en la realización de estas actividades?

768 Israel: Me parece aquí ya no era necesario trabajar en equipo porque era la
769 institucionalización y quería mantener la atención directa de los alumnos. Me parece que la
770 institucionalización es propia del maestro, es cuando formaliza los conceptos, las ideas, los
771 procedimientos [...] entonces el hacerlo de forma grupal me daba pauta a que los niños
772 estuvieran más concentrados en lo que se decía y, al trabajar en equipos, quizá algunos
773 están dando la espalda por la organización del mismo. En este caso, el trabajo iba a estar al
774 frente, por eso consideré hacerlo de forma grupal.

775 E: Usted señalaba que para esta hoja de trabajo tres, los niños iban a utilizar procedimientos
776 como la regla de tres para sacar el valor unitario, ¿qué observó era lo más recurrente en los
777 niños al resolver la hoja tres y a qué cree se debía?

778 Israel: Yo creía que ya habían visto lo de la regla de tres, pero me parece eso se ve hasta
779 después de enero a junio.

780 E: ¿Qué observó, prevaleció, en la resolución de las actividades de la hoja tres?

781 Israel: Encontrar ese valor unitario de “para cinco ocupo esto, entonces cuánto voy a ocupar
782 para una persona”, incluso les realizaba ciertas devoluciones, por ejemplo, “si ocupas mil
783 gramos para cinco personas, quinientos a cuántas corresponde” y decían “pues a dos
784 personas y media”, les decía “¿pero si les puedes dar a dos personas y media eso?” [...]
785 daba la pauta como para decirles hazlo con una división, tienes que dividir mil [...]

786 E: En la entrevista pasada, cuando hablamos de esa misma actividad, de los procedimientos
787 que creía iban a emplear los niños, usted mencionaba diferentes referentes teóricos que le
788 ayudaban a entender estos procedimientos que podían emplear los alumnos [...]

789 Israel: Ah, por ejemplo, de Vigostky habla del constructivismo social o del socio
790 constructivismo y lo retoma Brousseau [...] dice que nosotros no aprendemos solos,

791 aprendemos a través de interacciones. Por eso es un aprendizaje social. También nos habla
 792 sobre esa zona de desarrollo próximo, de los andamiajes, habla incluso de los aprendizajes
 793 previos, cómo partir de ese aprendizaje que es mi base para ir construyendo otros
 794 aprendizajes [...]

795 E: En su planificación, ¿cree que favoreció algunas de estas cuestiones?

796 Israel: Me parece que sí, sobre todo en lo que es esa interacción social. Por lo mismo, de
 797 que el aprendizaje lo estaban construyendo entre varios, estaban interactuando, discutían
 798 debatían, argumentaban [...] por eso, si se dio esa parte del aprendizaje, aunque siento que
 799 quedaron muchas dudas, pero si se dio parte de esa interacción.

800 E: Para cerrar esta parte, si nos pudiera comentar, ¿cuál fue su función en todo el desarrollo
 801 de la clase y cuál fue el de los alumnos?

802 Israel: Me parece que mi papel fue el de guiar, orientar y el de moderar participaciones [...] se
 803 dio prioridad a dejar que los niños fueran los protagonistas de su propio aprendizaje,
 804 tomando la responsabilidad, es decir, se meten en el papel de resolver ese conflicto o
 805 resolver esa situación que se plantea.

806 E: Durante el desarrollo de la clase, ¿usted cree que brindó algunas ayudas a los alumnos?

807 Israel: Sí.

808 E: ¿En qué se traducen esas ayudas que brindó?, ¿cómo las pudiéramos definir?

809 Israel: A lo mejor algunas ayudas pudieran haber sido las devoluciones, otras quizá
 810 ejemplificaciones del mismo planteamiento, hasta la misma orientación que brinda el
 811 maestro [...]

812 E: ¿Cómo serían esas orientaciones?

813 Israel: Pues a través de preguntas, de orientar a que busquen cuál va a ser el procedimiento,
 814 ese que decíamos "a ver si tienes mil gramos y son cinco personas, quinientos gramos para
 815 cuántas es". Entonces pueden decir quizá para dos punto cinco personas, pero les decía "¿si
 816 le vas a poder dar a dos personas y media de comer?"[...] aquí como que se está orientando,
 817 no se le está dando la respuesta tal y cual, siento que diría "a ver si son mil gramos y les
 818 toca a cinco personas, para que te dé una divide los mil gramos entre cinco"; con eso se le
 819 está dando la clave. Por lo tanto, puedo considerar que si fueron orientaciones, guías,
 820 devoluciones a través de preguntas [...]

821 E: En la resolución de las actividades de la hoja de trabajo uno y dos observamos que los
 822 niños utilizan, en algunos casos la calculadora, usted le señala "pero al reverso me van
 823 escribir que hicieron ", ¿cuál era el propósito de plantear eso?

824 Israel: Quería ver cuál fue el procedimiento que ellos emplearon, qué multiplicaron, qué
 825 dividieron y que me lo escribieran, pero siento que a veces por hacerlo con calculadora se
 826 pasan esas operaciones, no las escriben [...]

827 E: Hay otra situación cuando resuelven esas hojas de trabajo, existen niños que pasan al
 828 frente y explican su procedimiento, pero existen algunos momentos donde usted retoma lo
 829 que ellos dicen para volverla explicar a todo el grupo, ¿cuál era su propósito en ese
 830 momento?

831 Israel: No siempre los alumnos mantienen la atención a otro alumno [...] cuando considero
 832 que es algo importante de rescatar me gusta repetirlo y aclarar con un poco más de seriedad
 833 y, siento la atención de todos se mantiene, retomando lo que se había visto.

834 E: En ese tipo de actividades que se desarrollaron hay algo que llama la atención, estaban
 835 cinco octavos y cuando usted les dice que los conviertan a decimales en la hoja de trabajo
 836 dos, un niño pone cinco punto ocho [...]

837 Israel: Algunos niños tuvieron conflictos [...] no he revisado bien los contenidos de cuándo
838 se ve el punto decimal, pero en otros niños no se presentaba ese conflicto [...] no sé cuántos
839 conocimientos tenían sobre los números decimales, pero igual también es otro tema
840 complejo y, a veces, no encuentran esa relación de qué una fracción se puede representar
841 con decimales, quizá lo ven como algo aislado o no saben cómo tener un número decimal
842 de una fracción, siento que van como encadenadito [...] la razón es precursora de la
843 fracción, al igual que la fracción será precursora de los números decimales.

844 E: Después de desarrollar la clase, ¿cuál fue lo que cree se les dificultó más a los niños?,
845 ¿por qué?, ¿cuál fue lo que cree que se les facilitó?, ¿por qué cree?

846 Israel: Me parece lo que más se les facilitó [...] Hay varias cosas, cada hoja tenía su propio
847 nivel. De la hoja uno lo que se les dificultó fue hacer esa comparación de los dardos y los
848 globos tronados, debido a que se dejaron guiar por el denominador; eso representó un
849 conflicto mayor. En cambio, el primer planteamiento del pastel de la mesa A y B me parece
850 fue algo que los niños pudieron resolver, así como la representación de fracciones con
851 decimales. En la hoja dos el conflicto se generó al trabajar con los números enteros y
852 decimales; lo que creo se les facilitó fue hacer la representación en la recta numérica. De la
853 hoja tres, lo que se les dificultó fue realizar las conversiones de kilogramos a gramos, es
854 decir, identificar la cantidad de gramos para las diferentes cantidades de personas que se
855 manejaba. Cuando encontraron el valor unitario fue más fácil determinar la cantidad de
856 ingredientes para ocho personas.

857 E: ¿Qué nos puede decir respecto al logro del aprendizaje esperado?

858 Israel: El aprendizaje esperado giraba en torno a la razón, sin embargo, abordamos otras
859 actividades, otros temas como los números decimales y fracciones. Me parece dejamos un
860 poco descuidado lo que era la razón, entendiéndola como precursora de la fracción. Por lo
861 tanto, me parece que en la hoja de trabajo uno y dos fue donde se vio un poco más de la
862 razón, una como para introducir y otra para verla.

863 E: En lo que tiene relación con la institucionalización de la hoja de trabajo tres, por lo que
864 plantea que en las primeras hojas de trabajo se abordó más la razón y en la última casi no,
865 ¿usted logró institucionalizar tal como lo tenía planificado el concepto de razón?

866 Israel: Creo que no, porque al final nos enfocamos más en las cantidades, pero el objetivo
867 era identificar "si para una persona necesito tanto, cuánto voy a necesitar para tantas
868 personas", era ver esa razón de uno de tanto [...] creo nos enfocamos más en sacar las
869 cantidades que en ese análisis de razón. En la hoja de tres casi no tomamos la razón, nos
870 fuimos sólo a sacar el resultado, las cantidades, ver si estaban bien o mal y nos desviamos
871 un poco de la reflexión que se tenía planificada sobre la razón.

872 E: Si tuviera la oportunidad de darle seguimiento a esta planificación, cuáles actividades
873 agregaría para una tercera sesión, ya que su planificación la trabajó en dos sesiones.

874 Israel: Al principio trabajaría con números enteros, algo un poco más sencillo para los
875 niños, por ejemplo, tenemos cuatro quintos, cuatro piezas de cinco [...] en lugar de
876 trabajarlo con cantidades más elevadas la otra parte-todo, como mencionábamos en
877 quinientos veinte; eso lo dejaría para después, entendiendo la razón sin llegar tanto a esa
878 fracción.

879 E: ¿Qué agregaría después?

880 Israel: Aquí hubiera aumentado el nivel de complejidad, planteando otra actividad parecida
881 a la de los lanzamientos y los globos tronados, igual sería trabajar las fracciones [...] Primero de parte-todo del entero y luego vamos aumentando el estudio de las fracciones, un
882 ejemplo parecido al de los globos, donde la cantidad total ya no la vean en ese entero, sino

884 que la vean en otra cantidad, ya no la vean representada de manera esquemática, sino que la
885 vean en una situación [...] quizá al final trabajaría con la otra parte-todo, trabajando
886 cantidades no tan elevadas como aquí [...] como el 100, que igual sería un poco fácil de
887 representar gráficamente.

888 E: ¿Cómo cerraría esta sesión?

889 Israel: Con la institucionalización, donde haría hincapié en dar a conocer qué es la razón
890 [...] no sé si sea interesante que los niños sepan que antes de llegar a la fracción existe la
891 razón, es decir, de dónde obtenemos esas cantidades, qué significa cada uno, por ejemplo,
892 en la clase que significó cuatro octavos, "pues cuatro de ocho y cuatro de esto y el ocho de
893 tantos" [...]

894 E: ¿Cuáles conocimientos le demandó el diseñar y aplicar esta planificación?

895 Israel: Estar consciente del dominio de contenido. Me parece es un aprendizaje que el
896 maestro debe tener porque muchas de las veces no tenemos claro o ni siquiera sabemos los
897 diferentes significados de la fracción o lo que es la razón.

898 E: ¿Por qué cree a veces no lo tenemos claro los docentes?

899 Israel: Porque son temas muy diferentes los que se abordan en la primaria, por ejemplo,
900 matemáticas, español, ciencias naturales y otras áreas. Entonces en la parte de nuestra
901 educación primaria y parte en la normal no se alcanza a profundizar en estos temas, por eso
902 creo quedan huecos, vacíos [...]

903 E: Además de conocimientos del contenido que se va enseñar, qué otros conocimientos cree
904 debe tener un maestro para enseñar la razón como significado de la fracción.

905 Israel: Debe tener dominio práctico y teórico en plantear situaciones que se relacionen [...]
906 seleccionar o buscar algunas actividades que pudieran plantearse con base en ese tema [...]
907 cierto tacto en la forma de dirigirse a los niños, en la forma de plantear las devoluciones
908 [...] conocimiento de teorías, de autores, como teorías del aprendizaje general como
909 Vigostky y Piaget [...] teorías de aprendizaje en el área específica, en este caso fue
910 Brousseau y, esto nos da la pauta para hacer nuestra planeación porque es nuestra guía,
911 nuestra orientación.

912 E: Después de realizar todas estas reflexiones, ¿cree qué se favoreció en su clase el enfoque
913 de las matemáticas?

914 Israel: Sí, creo que se favoreció la resolución de situaciones problemáticas porque creo que
915 realmente metimos al niño en ese conflicto cognitivo, porque cuando no hay conflicto, cuál
916 situación problemática. Por lo tanto, creo que al haber conflicto si se genera un problema
917 para los niños, les demanda saber cómo lo van hacer, como lo van a resolver [...]

918 E: ¿En cuáles momentos de la clase cree se favoreció más?

919 Israel: Me parece que fue más en la fase de acción, donde se favorece la resolución de
920 planteamientos, es donde se favorece la movilización de saberes, sin embargo, en la
921 formulación el niño también genera ciertos planteamientos [...] aunque también en la
922 validación, pero es más de aceptar o rechazar.

923 E: Alguna reflexión adicional que quisiera agregar [...]

924 Israel: Parece si demandó también para el maestro ese conflicto, porque no somos expertos
925 en su totalidad [...] nos falta un poco más de experiencia. Además, demandó en mi tener ese
926 dominio del tema que me llevó a investigar, estar informado, siento que favoreció muchos
927 aspectos desde la investigación, desde la planificación, la ejecución.

928 E: Entonces con esto concluimos la entrevista y agradecemos su apoyo.

ANEXO 10. Análisis de la Práctica de Daniela

REFLEXIÓN DE LA PRÁCTICA DOCENTE AL APLICAR ESTRATEGIAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA FRACCIÓN COMO RAZÓN A ALUMNOS DE QUINTO GRADO DE PRIMARIA

INTRODUCCIÓN

El tema que se desarrolla en la planificación de esta clase de matemáticas, tiene lugar dentro del contenido de fracciones, conformando uno de sus subconstructos o interpretaciones que tiene la fracción, como las nombra Llinares & Sánchez (1997). Las fracciones entre sus diferentes interpretaciones, son entendidas como una “razón”.

¿De qué manera la fracción como razón está presente en las concepciones que los alumnos de educación primaria tienen? ó ¿Cómo se estructura su conocimiento? ¿Cómo se estructura este tema en los contenidos de matemáticas? Es así que se identifica dentro de los Programas de Estudio para Educación Primaria, a este tema perteneciente al eje de *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, que en su desarrollo permite favorecer en los alumnos las competencias de: “Comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente” (SEP, 2011, pág.71) debido a que en el proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla, los alumnos resuelven problemas matemáticos utilizando procedimientos en los que necesitan comunicar y validar resultados a través de sus propias estrategia.

¿Qué se consideró para planificar la clase?

La manera en la que un docente describe su práctica profesional es determinada por los conocimientos posee acerca de su campo y las interpretaciones que hace de estos llevándolos de la teoría a la práctica. Y el primer escenario donde se reflejan es en el proceso de planificación de sus clases. Debido a que en el aula antevenen diferentes fenómenos y situaciones, además de consideraciones previas a una clase, como docente se deben de distinguir y tomar en cuenta distintos aspectos que intervienen y que son fundamentales para desarrollar su clase y que por lo tanto las debe considerar dentro de su planificación.

A partir de lo anterior es preciso entonces, puntualizar los aspectos que se consideraron para la planificación de esta clase, y se enuncian a continuación.

-El conocimiento y dominio del contenido que se desarrolló en clase, es decir, conocer qué son las fracciones entendidas como razones, los tipos de problemas matemáticos en los que este concepto interviene. Es el *conocimiento del contenido*, definido por García, Loredó, & Carranza (2008)

-Determinar en qué parte del currículo de educación primaria se localiza dicho contenido, cuál es el eje matemático, y qué competencias favorece.

Los siguientes aspectos conforman *El conocimiento pedagógico general*, García, Loredó, & Carranza (2008), pues son los elementos que el docente como necesarios para la enseñanza de alguna disciplina.

-El enfoque didáctico, con el cual deben ser tratados los contenidos de la Asignatura de matemáticas.

-La metodología o dispositivo, más adecuado para el tratamiento del contenido y desarrollo de la clase.

-Las características de los alumnos, determinadas por su edad y grado.

-Algunas características de su contexto.

-El mecanismo de evaluación.

-Los materiales y recursos que se podrían utilizar.

-Las expectativas que se tienen del desarrollo de la clase.

El maestro retoma estos aspectos encontrando explicación y justificación del por qué los toma en cuenta, reflexionando los conocimientos que tiene, García, Loredó, & Carranza (2008) hablan acerca de los conocimientos que el docente pone en juego desde el diseño de sus clases y posteriormente dentro de su actuación directa en el aula conformando así las teorías implícitas que influyen en dicho proceso. “[...] se refiere al conocimiento y a las creencias que tiene el profesor sobre la enseñanza y aprendizaje [...]” (pág. 6) y también participa “[...] el concomitamiento teórico- práctico que un profesor tiene de una materia o disciplina” (pág. 6).

En congruencia como se han explicado los aspectos considerados para la planificación de la clase se presentan algunos, de manera más detallada, que ayudarán al análisis de la aplicación de la misma en su posterioridad.

¿Qué es una fracción cómo razón?

Retomado lo que se había indicado en los párrafos anteriores, la fracción como razón, es una de las interpretaciones o formas de entender al concepto de fracción como han sido denominadas por algunos autores. Esta interpretación o subconstructo se entiende como la manera de comparar objetos heterogéneos, es decir, de diferente naturaleza, estos es posible entenderlo tras el enunciado: “Tanto por cada tanto”. La razón matemática también puede entenderse como el cociente entre dos medidas de diferentes magnitudes, por lo que se puede expresar también en forma de fracción.

Si se resume lo anterior dicho se puede decir que las razones son una comparación de dos cantidades que establecen una relación. Por ejemplo $6/12$ o $3:6$. Dado que las razones son fracciones se pueden simplificar para obtener fracciones equivalentes.

¿Cómo podemos enseñar y aprender matemáticas?

El desarrollo del aprendizaje matemático ha sido un proceso estudiado por investigadores, a los cuales les ha interesado conocer la forma en la que se construye el concomitamiento matemático, y así realizar algunas propuestas, de tal manera que la metodología mediante el cual se enseñe sea el más adecuado para la generación de un aprendizaje significativo. Las investigaciones realizadas por Guy Brousseau (2007) más que una propuesta para el

aprendizaje, se consolidaron en el despliegue de la “Teoría de las Situaciones Didácticas”. Es esta metodología referente para el diseño de la clase que se presenta.

La Teoría de las Situaciones Didácticas es un dispositivo que permite guiar la actuación docente, que consiste en propiciar determinados procesos en el aula interdependientes que buscan la generación de un aprendizaje significativo a partir de situaciones problemáticas. Guy Brousseau (2007) en su libro “*Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*” explica en qué consiste este concepto de situaciones y la clasificación o tipologías de situaciones que se derivan a su vez de ésta. Las situaciones son consideradas como:

Una “situación” es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar este medio un estado favorable es una gama de decisiones que dependen del uso de un conocimiento preciso. Consideramos el *medio* como un subsistema autónomo, antagonista del sujeto. Al tomar como objeto de estudio las circunstancias que presiden la difusión y adquisición de los conocimientos, nos interesamos, pues, por las situaciones [...] es, entonces, un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente que la considera como una herramienta (pág. 17)

Es un problema que el docente genera en clase, con la firme intención de que los alumnos actúen sobre este movilizándolo los conocimientos que poseen y relacionándolos para estructurar procedimientos propios y buscar solución a dicho problema, lo cual es muy probable que descubran nuevos conocimientos que posteriormente serán institucionalizados por el profesor.

Las situaciones didácticas que se enfrascan dentro de esta teoría, también son denominadas fases, ya que se desarrollan para diferentes momentos de la clase. Como primera fase se tiene la **situación de acción**, dentro de ésta el alumno entra en contacto con el medio, es decir, puede ser una problemática a la cual le debe dar solución, así mismo comienza un proceso de interacción dentro del cual el alumno pone en juego el bagaje de conocimientos que posee y que relaciona para tomar decisiones que le ayuden a estructurar estrategias que le permitan superar al medio determinado.

En seguida está la **situación de formulación**, definida por el momento en el que los alumnos una vez que han desarrollado sus estrategias, las recapitulan pero ahora expresadas en un lenguaje oral, es decir, los procedimientos que los alumnos elaboraron son explicados. Es una información que se da de un alumno que es emisor a otro que funge el papel de receptor.

En consecuencia, viene otra fase denominada como **situación de validación**, parte en la que una vez que ya se dio a conocer los procedimientos a través del mensaje emitido mediante la formulación, el receptor lo analiza y reconoce para aceptarlo o rechazarlo, ofreciendo posibilidades de que se realicen correcciones en los procedimientos o resultados.

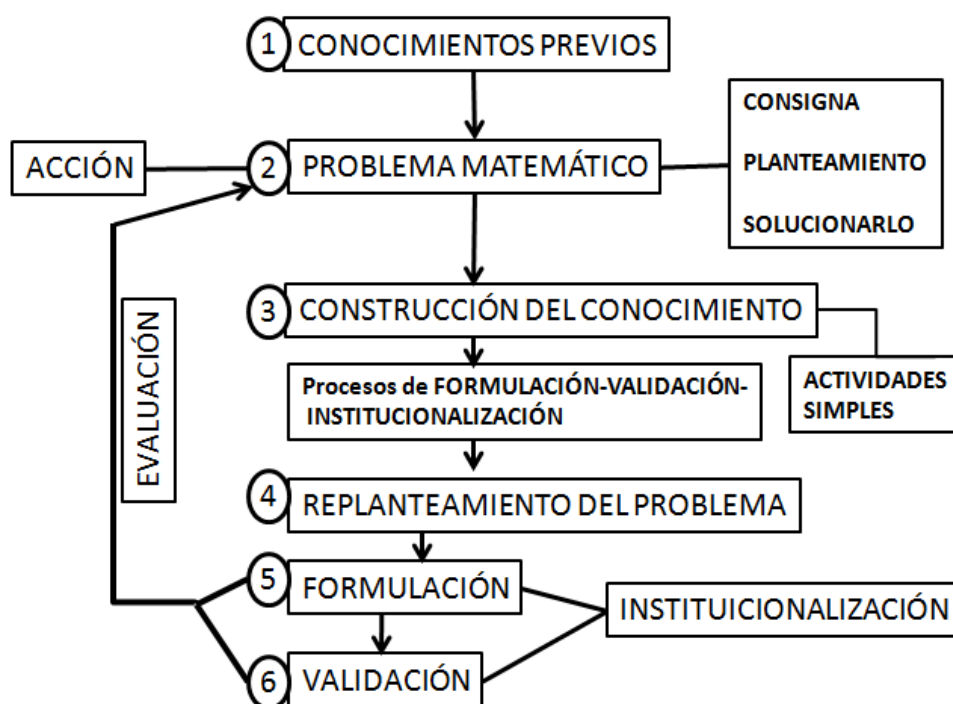
Para consolidar los conocimientos que estuvieron en interacción en estas fases, viene la **situación de institucionalización**, la cual retoma desde el planteamiento del problema, resume la acción que el alumno mantuvo con el medio, se basa en las formulaciones y validaciones de los alumnos para llevarlos hacia la asimilación del conocimiento

convencional o la estructuración de algoritmos. Es expuesto y explicado meramente a cargo del profesor.

Además de tomar en cuenta las fases que se despliegan de las TSD, en la planificación también tiene base teórica en las concepciones que se han dado sobre el conocimiento previo Ilustrada por Ausubel en su Teoría del Aprendizaje Significativo. Dentro de esta describe que la calidad del conocimiento que los alumnos desarrollen dependen de la “estructura cognitiva”, es decir, de los saberes que ya posee y de cómo los relacione para confrontar alguna situación de aprendizaje.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE

Articulando los aspectos considerados para la planificación de la clase, se llega al diseño de una estrategia que permite concebirla como una manera viable de llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido que se está tratando (la razón como significado de la fracción). La estrategia es el referente principal tanto para la planificación de la clase como para desarrollas en análisis y reflexión de la misma después de su aplicación. Dicha estrategia se presenta a través de un esquema:



La estrategia de aprendizaje que se traza en el esquema anterior, se puede sustentar a partir de los referentes teóricos antes mencionados, y describe la manera en la que se desarrolló la clase y es la estructura del análisis de la clase aplicada.

La planificación de la clase indica que se comenzará por averiguar los conocimientos previos, a partir de estos se planteará el problema eje de la situación didáctica, dentro de la cual se dará la consigna. Los alumnos conocerán el problema y lo solucionarán con sus propias herramientas, por lo que se refiere en esta parte a la fase de acción. Posteriormente,

se rompe con el esquema de las situaciones didácticas que plantea Brousseau, para dar paso a una serie de “Actividades”, en las cuales la intención es llevar a cabo la construcción de los conocimientos, es decir, dotar a los alumnos de las herramientas que no tienen para que enseguida sean capaces de solucionar la situación problemática que se le había planteado antes; este proceso se realizará utilizando la formulaciones de los alumnos, sus validaciones y como es en acompañamiento del profesor, también se utilizará la institucionalización. Todos los elementos anteriores están mezclados. Después se realiza el replanteamiento del problema inicial, para que con los conocimientos que ya construyeron los alumnos, formulen sus procedimientos, los presenten y se emitan validaciones, ayudando al mismo tiempo a institucionalización por parte del maestro; actividad misma que permite al docente evaluar el aprendizaje de los alumnos al observar si son capaces de comprender y resolver el problema sin dificultad.

REFLEXIONEMOS LA CLASE APLICADA

Para dar paso a la reflexión y análisis de la clase, es preciso señalar la manera en la que se estructurará el texto. Se comenzará por conocer de qué manera se fueron rescatando los conocimientos previos de los alumnos y cuáles de estos es posible percibir. Se continúa por el desarrollo de la clase, analizando cada uno de las fases que componen a la situación didáctica. Así mismos el cierre de esta y la evaluación que se realiza de forma simultánea a la consolidación de los conocimientos a favorecer en dicha clase.

INICIO DE LA CLASE

En la construcción del aprendizaje se deben de considerar diferentes elementos o factores que intervienen para su mejor alcance. Entre estos se puede destacar la parte en la que se conocen y se activan los conocimientos previos de los alumnos para que a partir de estos se edifiquen los consecuentes que por ende deben ser más complejos o complementarios de los saberes que los alumnos ya poseen. En la clase aplicada se considera al inicio de planificación la averiguación de los conocimientos previos de los alumnos, así como de ir contextualizando el tema que se desarrolla en la clase. Es posible evidenciar esto, citando el fragmento que corresponde al inicio de la clase en la planificación:

Inicio	VERIFICANDO CONOCIMIENTOS PREVIOS <i>(Las representaciones que tiene una fracción en sus diferentes formas, como la Gráfica y la Numérica)</i> -Mostraré una caja con algunas divisiones con cartoncillo. Preguntaré a los alumnos: -¿En cuántas partes está dividida la caja? (Con solo un cartoncillo atravesado a la mitad de la caja). Después pondré una botella de agua en una de las mitades, para cuestionar a los alumnos: -¿Qué parte de la caja está ocupando la botella? Luego colocaré un cartoncillo atravesando a la mitad del cartoncillo anterior y volveré a cuestionar: Y ahora ¿en cuántas partes está dividida la caja? Y volveré a colocar una botella de jugo en una de las partes para finalmente solicitar a los alumnos darle respuesta a esta pregunta: -¿Qué parte de la caja está ocupando la botella? -Pasaré a 5 alumnos. Cada uno tomará una tarjeta donde estará anotada una

Es importante reconocer que a partir considerar los conocimientos previos a un aprendizaje utilizada para esta clase como estrategia para impulsar el desarrollo de aprendizajes en los alumnos, se fundamenta dentro de la Teoría del Aprendizaje Significativo propuesta por el psicólogo y pedagogo David Ausubel; señala que el verdadero conocimiento solo puede ser posible cuando los nuevos contenidos tienen un significado a la luz de los conocimientos

190 que ya tienen, es decir, los nuevos aprendizajes conectan con los anteriores, no
191 precisamente porque sean lo mismo, sino porque de alguna manera se relacionan con estos
192 crenado un nuevo significado más amplio o más diverso de lo que ya conocían.

193 Con lo anterior se puede analizar que como docente se pone en práctica las teorías sobre el
194 cómo enseñar cierto contenido, rescatando como primer elemento para lograrlo, la
195 importancia de realizar pequeñas actividades que nos permita conocer qué es lo que saben
196 los alumnos. Así en esta situación, considerando que el contenido son las fracciones como
197 razón, las actividades que se pueden apreciar en la planeación de la clase, son congruentes
198 con el tema, aun así es importante analizar qué conocimientos previos se averiguarán
199 directamente y/o qué actividades o preguntas realizar para que los alumnos demuestren lo
200 que ya conocen acerca del tema.

201 En las actividades que se presentan planificadas en el inicio de la clase se aprecia que se
202 tiene la intención de saber si los alumnos reconocen las fracciones en sus representaciones
203 gráficas y simbólicas, primeramente realizando una actividad donde implica observar la
204 división del espacio de una caja en diferentes partes para saber si los alumnos ubican un
205 medio, como la mitad, un tercio como la división de un elemento en tres partes y tomando
206 uno de estos. Es adecuado analizar los siguientes fragmentos del registro de clase:

207 Describir y analizar cada uno de los fragmentos del registro permitirá detectar algunos
208 aspectos que dan cuenta si realmente resultó la intencionalidad establecida en la
209 planificación de la clase y además en qué acciones se puedo modificar para mejorara la
210 práctica docente.

211

212 Fragmento 1:

213 //La maestra toma una caja (esta es una caja donde se almacenaban huevos. La caja está dividida en
214 cuatro partes), la toma y la pone sobre el escrito y la coloca de costado//
215 Ma: Si yo quisiera representar mediante una fracción toda la caja, ¿Qué fracción tendría?
216 AOs: Un entero.
217 Ma: Un entero, muy bien. //La maestra toma un marcador//
218 Ma: ¿Quién pasa a escribirlo?
219 //Los alumnos levantan la mano y la maestra le da el mocador a un alumno.
220 Ao: ¡Yo!... ¿Escribirlo o dibujarlo?
221 Ma: Nada más escribe un entero... Bueno dibuja la caja también.
222 //La maestra coloca bien la caja frente a los alumnos, mientras en el pizarrón un alumno
223 escribe el pizarrón “Un entero”, y dibuja la caja //
224 //Una compañera le ayuda al dibujar la caja y la maestra señala lo que escribió el niño//
225 Ma: Un entero... un entero lo represento con un número, ¿aquí que le podríamos?
226 AOs: Uno...
227 //La maestra escribe el pizarrón el número uno//

228 Si nos situamos en el primer fragmento; la se realiza lo que se tenía previsto con la caja
229 mostrarla a los alumnos, y a partir de esto se realiza una pregunta directa sobre la noción de
230 fracción ya que se cuestiona “*Si yo quisiera representar mediante una fracción toda la*
231 *caja, ¿Qué fracción tendría?*”, los alumnos responden fácilmente demostrando que no
232 tienen dificultad para razonar que debido a que no hay ninguna división en la caja lo lógico
233 es responder que es un entero, clave importante como docente porque además de que ya se

adentró al contexto de fracciones, se sabe que los alumnos reconocen que un elemento sin partición es un entero, ahora bien hay que llevar esa respuesta de los alumnos a las representaciones que se pretenden visualizar, que es la gráfica y la simbólica. En relación a esto en la continuidad del registro como docente se hace bien en pedir la participación de uno de los alumnos para que exprese esta aseveración en el pizarrón, la pregunta que surge por parte del alumno “¿Escribirlo o dibujarlo?” , se le pide que realice ambas, de tal manera que lleva al reconocimiento de que tiene una representación gráfica al mencionar la palabra dibujo, donde efectivamente traza la caja sin ninguna división, sin embargo, se presenta algo no esperado, puesto que el escribirlo se asimiló como docente que lo haría con número pero lo que el alumno realiza es escribirlo con letra, es decir, de manera textual “un entero” (como se puede mostrar en la Figura 2), para cumplir con el propósito de la actividad era necesario indicar que lo escrito por el alumno con letra debería de escribirse pero con el uso de números, así que según se aprecia en el registro, como docente se comete un pequeño error si realmente se quiere que los alumnos construyan el conocimiento, no se debió de haber mencionado que: *Ma: Un entero... un entero lo represento con un número, ¿aquí que le podríamos?* la respuesta que emitieron los alumnos ya estaba dada, es en este punto donde se puede hacer una reflexión de lo que se hizo ya que una modificación que se puede hacer en la práctica es permitir que los alumnos reflexionen acerca de la representación de “un entero” en su expresión numérica. Pero aún así es factible reconocer que la idea de fracción es entendida por los alumnos, convirtiendo este en un conocimiento previo que evidentemente tienen los alumnos, y como docente es posible darse cuenta.



Figura 2. Representando un entero

Fragmento 2:

Ma: Ahora esta caja, yo la parto en dos, por aquí.
 //La maestra introduce un pedazo de cartón por uno de los orificios que se hicieron en la caja por la mitad//
 Ma: ¿En cuánto se divide?
 AOs: En medios...
 Ma: En medios, ¿Cuántos medios tengo?
 AOs: Dos
 //La maestra coloca una botella en uno de los espacios que quedan en la caja//
 Ma: Ahora yo pongo esta botella aquí, ¿Qué parte de la caja está ocupando el enjuague?
 AOs: Un medio
 //La maestra se acerca un alumno para llamarle la atención con una pregunta sobre la clase//
 Ma: ¿Por qué un medio?

281

Ao: No sé.

282

A lo que se refiere el fragmento dos, trata sobre la continuidad que se realiza llevado a los alumnos que demuestren sus conocimientos básicos, ya que se sabe que reconocen lo que es un entero, ahora es necesario saber si identifican fracciones como el medio, realizando divisiones a la caja y preguntando la parte que ocupa una botella en cada espacio resultante. Hecho de esta manera, nuevamente es posible percatarse que los alumnos lo realizan sin dificultad alguna. Aunado a esta parte de la clase, un alumno no presta atención así que como estrategia para revertir esta conducta no favorable para el aprendizaje, se le pregunta “¿Por qué un medio?”, la respuesta por parte del alumno es un “No sé”, y sin más intervención se da paso a lo siguiente. Con lo descrito anteriormente es factible reflexionar que para mejorar la práctica docente cuando se presente este tipo de momentos en la clase, pedir a alguno de los alumnos que se explique de manera breve la respuesta al compañero, para que no sólo sea una llamada de intención por conducta sino que entienda lo que se está realizando en clase y cambiar su actitud.

285

Fragmento 3:

296

Ma: Ponga atención sí. Ahora yo coloco dos de estos pedazos de cartones.

297

Aos: en Tercios.

298

Ma: Y ahora ¿Cuánto espacio de la caja ocupa este?

299

//La maestra coloca un botella en un espacio de la caja//

300

Ao: Un tercio.

301

Ma: Entonces hay que dibujar esto hay en su hojita, y le ponen lo que representa en fracción.

302

En cuanto a este fragmento de clase, es útil para indicar que como docente se logra conocer que los alumnos saben lo que es un tercio, además de un entero, y un medio, así como su continuidad. Así también es conveniente señalar que para tener mejor evidencia de estos conocimientos por parte de los alumnos, se pide que vayan realizando dibujo y la descripción de manera simbólica, es decir, expresarlo con números.

306

307

Una vez averiguado si los alumnos tenían un conocimiento sobre la representación de las fracción a partir de dibujos y números, ahora se hace pertinente saber los contextos con los que los alumnos han trabajado en relación con las fracciones, por lo que en la siguiente actividad implementada en la fase de inicio como se puede apreciar en la figura 3, se pide a los alumnos que relacionen la fracción simbólica a cada una de las situaciones que se presentan en la lámina. Primeramente está en un círculo dividido en dos partes e iluminada una, además de un conjunto de barras encerradas algunas, posteriormente se muestran dos cantidades de las cuales se extrae otra cantidad, las fracciones a colocar eran: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{4}$. Lo importante no consistía en que los alumnos sólo ubicaran las fracciones donde correspondía de forma correcta, sino que justificaran su respuesta y fuera validada o rechazada por los compañeros del resto de grupo, dando también sus argumentos. Por lo que se obtienen las siguientes explicaciones:

308

309

310

311

312

313

314

315

316

317

318

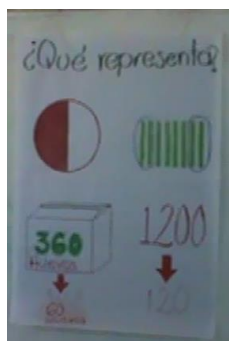


Figura 3. ¿Qué representa?

Fragmento 4:

Ma: América me va ayudar a leer, ¿Qué dice aquí?

Aa: ¿Qué representa?

Ma: ¿Qué representa?, Muy bien... ¿Qué se imaginan que vamos a hacer?

Aos: Fracciones.

Se pide a una alumna que lea el título de la lámina, y después se pregunta a los alumnos ¿Qué representa?, con la idea de que los alumnos intuyan una relación con el uso de fracciones, a lo cual los alumnos responden la manera prevista. Es importante ir contextualizando el tema que se va a desarrollar en la clase.

Fragmento 5:

Ma: A ver niños... este niño ¿qué fracción tiene?

Aos: Un décimo

Ma: Un décimo ¿En qué parte creen que va?

//La maestra señala los dibujos colocado en el pizarrón//

Aos: ¡En los huevos! ¡En los huevos!...

Ma: Levanten la mano... y sentaditos. A ver José:

Ao: En los huevos.

Ma: ¿Por qué en los huevos?

Ao: Está representado

Ma: Esta representado... ¿Cuántos huevos tenemos en total?

Aos: Trescientos sesenta.

Ma: Trescientos sesenta y ¿Cuántos huevos hay en la bolsa?

Aos: sesenta.

Ma: sesenta, ¿Qué parte de fracción es de aquí?

Aa: Un sexto Porque...

Ma: Un sexto, ¿Por por qué?

Aa: Porque seis por sesenta nos da trescientos sesenta. Trescientos sesenta lo dividimos entre sesenta nos da seis.

Ma: Muy bien...

El fragmento cinco expresa la parte principal de la actividad, ya que con esta se abre terreno para realizar preguntas para que los alumnos brinden sus justificaciones a cada una de las respuestas. De dicha forma se averigua como los alumnos conciben a las fracciones desde uno de sus subconstructos definidas como parte- todo y como operan con ellas, puntualizando que son conocimientos básicos para dar paso al tema a desarrollar en la clase. La fracción que se va a ubicar es la de $\frac{1}{10}$ y se realiza la pregunta a todo el

367 grupo, los cuales rápidamente lo relacionan con la caja de huevos que se encuentra en la
368 lámina (Figura 3), así que como estrategia para que los alumnos reflexionen y justifiquen,
369 se emplea como herramienta didáctica la pregunta. Se pregunta a uno de los alumnos que
370 ofrece dicha respuesta el porqué, si la respuesta no es muy contundente o detallada, se
371 procede a realizar preguntas más concretas y con cierta intencionalidad, donde se realiza
372 una especie de acompañamiento a los alumnos para reconocer cada una de las partes que
373 componen la situación y el tipo de relación de cada una a partir de su posición para llegar
374 a una aseveración, producto o resultado lógico, porqué es acertada la manera en la que se
375 le puntualiza la cantidad total de los huevos y la cantidad que se extrae. Y se califica
376 como acertada, ya que finalmente una de las alumnas logra dar una respuesta y justifica
377 que es otra fracción la que en ello corresponde.

378 Una vez terminadas las actividades de la parte inicial de la clase donde se averiguan los
379 conocimientos previos, como docente se sabe ahora que los alumnos conocen las
380 fracciones en su representación simbólica y gráfica, y realizan justificaciones que
381 permiten identificar que si han trabajado con problemas de fracciones en diferentes
382 contextos, es decir, con dibujos, con cantidades y agrupaciones.

383 LA CONSIGNA: “Abordemos el Problema Principal”

384 En esta parte se presenta a los alumnos el problema a resolver con lo que se aprenda en la
385 situación didáctica. Para tal efecto se dan a conocer las reglas del juego, es decir, lo que se
386 tiene permitido hacer o utilizar para resolver el problema, la modalidad de trabajo, el
387 tiempo del que se dispone, así se advierte en el fragmento seis de clase:

388 Ma ¿Quién me quiere ayudar a leer el primer punto?, a ver alguien que lea fuerte y claro... a ver
389 Yose, ¿Me ayudas?
390 //Algunos alumnos levantan la mano//
391 Aa: Resuelve el siguiente planteamiento de manera individual, puedes usar calculadora pero anota
392 tus procedimientos.
393 Ma: Muy bien niños, como yo ya los estuve observando, vamos a quitar algo que dice allí, eh, para
394 resolver el problema va a ser sin calculadora.
395 Aos: ha, ha...
396 Ma: Y las operaciones que resuelvan me las van a hacer aquí abajito donde dice...
397 Aos: Procedimiento

398 Del mismo se puede señalar que debido a que en la fase de inicio se identificó que los
399 alumnos tienen la facilidad de realizar operaciones, se realiza una adecuación a la consigna,
400 mencionando que no se podrá utilizar calculadora, por lo que es correcto se haya realizado
401 dicha indicación.

402 Fragmento 7:

403 Ma: Procedimiento, y si no alcanzan de espacio en la parte de atrás, ¿Qué les parece? ¿Sí?, A ver ¿si
404 quedó claro lo que va a hacer?
405 Aos: sí...
406 Ma: A ver Diana ¿qué vamos a hacer?
407 Aa: Vamos a hacer esto.
408 Ma: Vamos a hacer eso, y ¿Cómo le vamos a hacer?
409 Ao: sin calculadora.
410 Ma: Sin calculadora, ¿De manera individual o en equipos?

411 Aos: ¡En equipos!
 412 Ma: es de manera individual... ustedes solitos como ustedes puedan. ¿Sí? Como ustedes puedan.

413 El fragmento siete, demuestra que se realiza una devolución de la consigna para rescatar
 414 si los alumnos entendieron lo que se va a realizar dentro de la siguiente actividad, para
 415 ello se le cuestiona a uno de los alumnos, si la respuesta no es muy completa se puede
 416 ayudar a través de la realización de preguntas que conduzcan a los alumnos a decir las
 417 condiciones que faltaron mencionar por parte del alumno que participó.

418 FASE DE ACCIÓN:

419 En el fragmento siete también es importante reflexionar que una acción muy adecuada
 420 que se realiza en este momento es clave y determinante para dar paso con una de las
 421 partes de la situación didáctica que es la fase de acción, puesto que al mencionar: *“ustedes*
 422 *solitos como ustedes puedan. ¿Sí? Como ustedes puedan”*; el “como ustedes puedan” da
 423 pauta a los alumnos para no pregunta a sus compañeros ya que es de manera individual,
 424 pero sobre todo que se entre de que el maestro no realizará una explicación previa a
 425 resolver este, solo cuenta con los conocimientos que ya tiene para poder encontrar
 426 respuesta a los planteamientos del problema.

427 Fragmento 8:
 428 //Los alumnos comienzan a leer el primer planteamiento y a contestar. Un alumno se acerca a la
 429 maestra para preguntarle acerca del trabajo//
 430 Ao: ¿Aquí no le entiendo?
 431 Ma: ¿Te acuerdas lo estuvimos haciendo con la caja?
 432 Ao: que había espacios.
 433 Ma: muy bien como tú puedas.
 434 //Una alumna pregunta a la maestra, esta lee el planteamiento de la hoja de trabajo//
 435 Ma: Contesta estas preguntas como tú le entiendas...
 436 //Los alumnos contestan, mientras la maestra da recorridos por los lugares de los niños que parecen
 437 tener dificultades//

438 En éste se visualiza parte del desarrollo de la fase de acción de la situación didáctica que
 439 se desarrolló. Se describe así que surgen dudas por parte de los alumnos, por ello llaman o
 440 se acercan para preguntar o mencionar que no le entienden, como característica principal
 441 de esta fase, la responsabilidad está depositada absolutamente para el alumno por lo que la
 442 intervención como docente solo se remite a ayudar al alumno a entender los
 443 planteamientos volviendo a leer, dando la pista de que lo realizado en las actividades
 444 anteriores le pueden ser de utilidad, también establecer las partes y sus relaciones a partir
 445 de preguntas, pero en el momento que se tiene que hacer un razonamiento o determinar un
 446 producto de dicha relación, se le indica al alumno que lo realice cómo él pueda.

447 Con esto queda por sentado lo que Brousseau (2007) describe como fase de acción: *“Para*
 448 *un sujeto “actuar” consiste en elegir directamente los estados del medio antagonista en*
 449 *función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad el*
 450 *sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones [...] Los*
 451 *conocimientos permiten producir y cambiar estas anticipaciones”* (Brousseau, 2007, pág.
 452 24) Los alumnos ya cuentan con el medio y comienzan a interactuar con éste, de manera
 453 que demuestren la habilidad para resolver problemas poniendo en práctica los

conocimientos o saberes que ya tienen, para tomar decisiones bajo el esquema de solución que el mismo alumno diseñe. Los alumnos realizan conjeturas que dependen de la articulación de conocimientos que reflejan en la toma de decisiones para proceder y en los procedimientos que describan. Son las acciones y decisiones. En resumen, el sujeto interactúa con el medio, y en esa interacción se produce información que en un primer momento es informal.

En la empacadora de lechugas de Loreto, trabajan Manuel y Sofía, ellos son los encargados de hacer los pedidos de las cajas que se ocuparán para empacar las lechugas que se cosechan. Ayúdales a encontrar lo siguiente:

Si en 4 cajas se empacan 64 lechugas...

¿Cuántas cajas se ocuparán para empacar 112 lechugas? _____

¿Cuántas cajas se ocuparán para 32 lechugas? _____

¿Qué parte de la caja corresponde a una lechuga? _____

¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas? _____

Figura 6. Problema

Fragmento de clase 9:

Ma: Esa la vamos a hacer todos juntos. Niños, ¿Quién ya haya terminado de contestar esa hojita? Este... ¿Hay dudas para contestar la primera pregunta?

Aos: No... //Algunos no contestan//

Ma: Levanten la mano quién tuvo dudas para contestar la primera.

//Algunos alumnos levantan la mano//

Ao: Yo primero... pero ya así bien...

Ma: ¿Para contestar la segunda?

Aos: No...

Ao: No ni yo...

Ma: ¿La tercera?

Aos: No...

Ma: ¿La cuarta?

Aos: Si...

Ao: Yo sí, mucho.

Ao: Yo tuve poquito... pero sí.

Ma: ¿Qué fue lo que no entendieron de la cuarta pregunta?

Aa: ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y lechugas?

A partir del monitoreo que se realiza por los lugares de los alumnos se puede percibir que los alumnos demuestran mayor dificultad en el último planteamiento del problema (Figura 6), comunicando que ya terminaron pero que, la pregunta final no la respondieron ya que no le entienden. Se realizan una serie de preguntas a los alumnos para detectar cuántos tuvieron dificultades para resolver cada uno de los planteamientos (Figura 6) si se cuestiona uno por uno, al confirmar que tal y como se había previsto desde la planificación, los alumnos no entendieron a lo que se pedía en la última pregunta, acerca de indicar cuál era la razón. Lo anterior se puede observar en el fragmento nueve.

498 CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMINETO

499 Esto conduce a la implementación de las actividades que dentro de la planificación se
500 denominaron como “LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO”. Es imprescindible
501 señalar que estas actividades se realizaron en continuidad de la fase de acción y que no se
502 realizó una formulación, validación e institucionalización del problema que los alumnos
503 resolvieron en su fase de acción (problema central); señaladas estas fases dentro de la
504 situación didáctica, que si bien es el dispositivo con el que se trabajó la clase. Las
505 actividades que se realizan es una adaptación o adecuación al seguimiento de las etapas que
506 intervienen en la situación didáctica, utilizadas como estrategia para favorecer la
507 construcción de los conocimientos y posteriormente su aplicación en problemas más
508 concretos. Se decide hacer dicha modificación ante la dificultad que representa el contenido
509 de la fracción expresada en una razón.

510 Las actividades implementadas fueron tres y cada una se caracteriza por aportar una parte a
511 la noción y significado de lo que son las razones así como su interpretación, lectura y
512 escritura, de manera concreta. Se realizan las actividades de manera grupal, de una manera
513 guiada para que los alumnos pudieran responder y comprender fácilmente. Analicemos
514 aspectos que se presentaron en clase de cada una de estas actividades y la aportación en
515 especial que hacen al concepto de razón.

516 PLANTEAMIENTO 1: “Pastel partido”

517 El planteamiento se lee y contesta de manera grupal, una vez que ya se haya contestado de
518 manera individual. Como es posible leer en el fragmento de clase 10, para contestarlo se
519 realiza una serie de preguntas para que los alumnos reflexionen y las respuestas que emitan
520 los lleve grupalmente a la respuesta que finalmente está pidiendo el planteamiento (figura
521 7). Se cuestiona sobre si se juntan las partes del pastel que tienen entre dos y tres niños, con
522 la intención de que los alumnos razonen que la cantidad de pastel no cambia siempre será
523 de un cuarto, para que posteriormente cuando se mencione que son 8 niños, los alumnos
524 conformen dos pasteles con los ocho cuartos, o bien, razonen que en otros cuatro niños son
525 otros cuatro pedazos de $\frac{1}{4}$ que conforman otro entero. Esto lleva a reflexionar que es
526 imprescindible prever los posibles razonamientos que los alumnos pueden tener según se
527 presente las situaciones.

528 Fragmento de clase 10:

529 Ma: Léalo fuerte para sus compañeros

530 Aa: Un pastel está partido para cuatro niños ¿Cuánto le toca a cada niño?

531 Aos: Un cuarto.

532 Ma: A ver, Monce pásale a anotarlo al pizarrón, dice que un pastel es repartido cuatro niños...
533 entonces ¿Cuánto le toca a un niño?

534 Aos: Un cuarto...

535 Ma: Oigan, y si dos niños juntan su pedazo de pastel ¿cuánto se forma?

536 Aos: Dos cuartos

537 Ma: ¿Y si tres niños lo juntan?

538 Aa: Tres cuartos...

539 Ma: Serán tres cuartos, ok. Entonces ¿qué respuesta va en la primer pregunta?

540 Aos: Un cuarto...

Planteamiento 1 "Pastel partido"

Un pastel es repartido a 4 niños ¿Qué parte de pastel le toca a cada uno?

Si ahora son 8 niños y les toca una parte de pastel igual a los niños anteriores ¿Cuántos pasteles son repartidos para estos 8 niños?

Contesta la siguiente tabla:

No. de Pasteles	No. de Niños
1	
	8

Completa las frases:

1 pastel para _____

_____ para 8 niños:

Figura 7. Pastel partido.

Los alumnos realizan trazos al dibujo que se les proporciona, (**evidencia 1**) facilitando la comprensión de la parte de pastel que le corresponde a cada niño. Además se toma como elemento importante el uso de la tabla, en la que los alumnos visualizarán de manera concreta la relación entre las cantidades. La característica que los alumnos comienza a conocer acerca de la razón es la manera en la que ésta se puede expresar, es decir, como se puede leer la comparación entre cantidades que la razón permite hacer, al leer las frases: “1 pastel para 4 niños... 2 pasteles para 8 niños”; además de ser razonadas por los alumnos al momento de complementarlas en el último recuadro.

Fragmento de clase 11:

Ma: A ver y si yo tuviera aquí... Doce niños, ¿Cuántos pasteles?

Aos: tres

Ma: y ¿si tuviera 40 niños?

Aos: diez

En este fragmento breve de la clase, no le resta importancia a recatar un aspecto que es fundamental tener en cuenta como docente, ya que aunque en las hojas de trabajo no se pide directamente y en la planificación no se describen, se realizan planteamientos acorde a los razonamientos contruidos durante la actividad, los cuales se tratan de complejizar, con la firme intencionalidad didáctica de confirmar que los alumnos están entendiendo lo que se está abordando.

PLANTEAMIENTO 2: “Caritas y Corazones”

La dinámica en la que se trabaja el siguiente planteamiento es el mismo que el anterior, los alumnos leen y contestan, y posteriormente se trabaja de forma grupal. Las preguntas se planearon que fueran sencillas para los alumnos y en el desarrollo de estas resultan serlo. Ya que cuando se contesta en lo grupal la mayoría de los alumnos confirman sus respuestas como correctas.

Planteamiento 2 "Caritas y corazones"

¿Cuántos corazones hay en el rectángulo? _____ y ¿Cuántas caritas? _____

Si a los corazones se les repartiera el número total de caritas ¿Cuántas caritas le tocan a cada corazón?

En el rectángulo hay:

_____ corazones para _____ caritas

↓

_____ : _____

PARA SABER MÁS

Se utiliza el símbolo de los dos puntos (:) para indicar una comparación entre dos cantidades.

Figura 8. Caritas y corazones

583 Fragmento de clase 12:

584 Ma: A ver Karina, el siguiente.

585 Aa: Caritas y corazones ¿Cuántos corazones hay en el rectángulo?

586 Aos: cuatro

587 Ma: Muy bien, y ¿Cuántas caritas?

588 Ao: lo doble

589 Ma: A ver Erik, ¿Me ayudas? ¿Qué sigue?

590 Ao: si a los corazones se les repartieron el número total de caritas, ¿Cuántas caritas les toca a cada corazón?

592 Ma: Muy bien, pero ¿por qué dos?

593 Aos: porque cuatro por dos son ocho.

594 Ma: levanten la mano...

595 Ao: porque un corazón tiene, o sea son ocho corazones... son cuatro corazones y tenemos ocho si les toca de dos caritas y un corazón, son la misma cantidad.

597 Ao: son cuatro por dos ocho.

598 Tanto en la actividad primera como en la tercera siempre se tienen en cuenta algo que es
599 determinante para la construcción de los conocimientos de los alumnos, pero es en esta segunda
600 actividad en la que se ejemplifica mejor. Remitiendo al fragmento de clase 12, es evidente que el en
601 cada uno de los cuestionamientos de esta actividad, aunque se realizan con la conducción docente,
602 no se dictan las respuestas a los alumnos, sino que son a partir de sus aportaciones justificaciones
603 como se va contestando el planteamiento.

604 Recordemos que en la actividad primera la aportación al concepto de razón fue que los alumnos
605 reconocieran la amera en la que se expresa una razón, “tanto para tanto”, ahora bien con la
606 realización del segundo planteamiento los alumnos ya no solo lo expresan oralmente sino que
607 pueden reconocer el uno de los dos puntos (:) para indicar que se trata de una comparación. Por tal
608 motivo está pregunta frecuente que realiza como docente: “*Ma: una comparación entre dos cantidades.*
609 *Cuando tenemos aquí cuatro corazones para ocho caritas, ¿Estandremos comparando cantidades?*
610 *Aos: Si*”, para que los alumnos lo conocieran se incluye un cuadro de información y después lo
611 llevan a la práctica con la indicación que realizan las flechas en el esquema que aparece en la hoja
612 de trabajo.

613 PLANTEAMIENTO 3: “Tiras de papel”

614 Se aborda el planteamiento tres bajo la misma dinámica que los anteriores. Los alumnos contestan
615 fácilmente las preguntas que se realizan. Así mismo la guía que como docente se realiza permite
616 que se analicen todas las opciones, como comprender la presencia de fracciones que son
617 equivalentes, que funcionan para representar lo mismo. Los alumnos expresan sus justificaciones,
618 valoradas por los demás compañeros.

619 Fragmento de clase 13:

620 Ma: A ver... planteamiento tres, ¿Cómo se llama?

621 Aos: tira de papel

622 Aa: Observa la siguiente tira de papel, ¿Qué fracción de la tira de papel ocupa los cuadritos
623 coloreados?

624 Aos: Un tercio

625 Aos: tres novenos un tercio.

626 //La maestra indica a un alumno que conteste//

627 Ao: Porque está tres cuadritos pintados de negro, y son nueve cuadritos en total.

628 Ma: Muy bien, esos tres novenos, ¿nada más lo puedo poner como tres novenos?

629 Aos: No, un tercio.

Planteamiento 3 "Tiras de papel"

Observa la siguiente tira de papel:



¿Qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros? _____

¿Cuántas tiras de papel hay? _____

¿Cuántos cuadritos oscuros hay en las tira de papel? _____

En tira hay cuadritos oscuros.

↓ ↓

:

Figura 9. Tiras de papel

La aportación que se realiza en este planteamiento para la consolidación de una razón es importante, a causa de que ya no solo se va a leer una razón o representar mediante el símbolo de los dos puntos, sino que se realiza su interpretación hacia su expresión en forma de fracción y se razona la relación que tiene una con la otra, al contestar en su continuidad una tabla, donde se establecen las relaciones analizadas en cada una de las actividades realizadas. Antes los alumnos responden el cuestionamiento donde se les pregunta, cómo se le llama a la comparación que se hace entre dos cantidades, consolidado el aprendizaje de su concepto.

Contesta el siguiente cuestionamiento:

Es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción.

A) FRACCIÓN B) SUMA C) RAZÓN

Registremos los resultados		
Planteamientos		FRACCIÓN
Pastel partido		
Caritas y corazones		
Tiras de papel		

Figura 10. Registro de resultados

Es imprescindible reconocer que en cada una de los planteamientos que se resolvieron, aunque muy sencillos y breves, se utilizaron las fases que componen la situación didáctica, debido a que en la parte en la que los alumnos resolvían los problemas primeramente de manera individual, se daba una fase de acción, después una formulación, consecuentemente una validación y con las mismas aportaciones de los alumnos se realizó la institucionalización. Aunque no se puede señalar puntalmente que se trató de una situación didáctica en todo su esplendor ya que no representaron mucha dificultad para los alumnos. Sin embargo, se logró el objetivo que se tenía para abordar cada una de estas actividades, y es que los alumnos comprendieron lo que es una razón.

FASE DE FORMULACIÓN, VALIDACIÓN E INSTITUCIONALIZACIÓN:

El concepto de razón ya no era más un término desconocido por los alumnos, y tampoco la comprensión de la relación que en el problema principal de señalaba. Para dar argumento a lo que se afirma, es necesario analizar lo siguiente.

671 Como parte de la estrategia planificada, después de que los alumnos ya hayan contestado
672 las actividades planteada en el apartado anterior, se daría paso a volver a abordar el
673 problema, es decir, a realizar un replanteamiento de este, pero ahora contando con que los
674 alumnos ya comprendería en concepto de razón y ya no presentaría dificultad para ellos dar
675 respuesta al último planteamiento del problema presentado en la consigna. Para ello se
676 retoman las fases de la situación didáctica que consiste en la FORMULACIÓN y así
677 mismo en la VALIDACIÓN, que los alumnos conformen con respecto al problema.

678 Es indispensable señalar que ambos tipos de situaciones, tanto la formulación como la de
679 validación son procesos que se articulan para que los alumnos compartan y comprendan los
680 procedimientos que realizaron y el porqué de sus respuestas, pero a la vez es fundamental
681 su desarrollo para que como docente se reconozca de qué manera los alumnos están
682 construyendo el conocimiento y la forma en la que interpretan el problema y le dan
683 solución, para guiarlos a la respuesta correcta, y procedimientos adecuados.

684 En el fragmento de clase 14 que se presenta a continuación es el mejor ejemplo de estas
685 fases de la clase en la que se puede observar cómo a partir de realizar preguntas a los
686 alumnos se está generando la situación de formulación, la cual consiste, según Brousseau
687 (2007) en la información que se generó con las interacciones de los alumnos con el medio,
688 representa un conocimiento que se pretende en esta fase poner en juego, la “[...] *capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y*
689 *reconstruirlo en un sistema lingüístico)*” (Brousseau, 2007, pág. 25). En la formulación de
690 esta información traducida en los procedimientos empleados para resolver los problemas,
691 debe intervenir otro sujeto para que le sean comunicados los mensajes que intercambian los
692 estudiantes, donde discuten y reestructuran las tácticas empleadas.

694 Fragmento de clase 14:

695 Aa: ¿Cuántas cajas se ocuparon para empacar 112 lechugas?
696 Aa: siete
697 //Los alumnos levantan la mano//
698 Aa: siete cajas
699 Ma: siete cajas ¿Cómo le hiciste para saber que son siete cajas? A ver quiero escuchar a su compañera...
700 Aa: dividí 64 entre cuatro para sumar el...
701 Ma: ¿Y cuánto te resultó?
702 Aa: siete
703 Ma: A ver los demás que más hicieron...
704 Ao: yo le digo
705 Ao: dieciséis por siete
706 Ma: dieciséis por siete Pero ¿cómo le hiciste para obtener ese dieciséis?
707 Ao: yo dividí 64 entre 4...
708 Ma: espérenme...
709 Ao: yo primero lo dividí y luego, como aquí dice que treinta idos, y le resté treinta idos y 64 me dieron
710 treinta idos... //El alumno sigue comentando su procedimiento, la maestra indica la participación a una de
711 sus alumnas//
712 Aa: Yo dividí sesentaicuatro entre cuatro y me salieron 16, y luego dividí 112 entre 16 y me salieron siete.
713 Ma: ¿Quién tiene otro procedimiento diferente?

714 Los alumnos demuestran una diversidad de procedimientos, los cuales conducen a la misma
715 respuesta que para el planteamiento es correcta, factor determinante para que el grupo le
716 otorgue validez, entonces es la parte donde entra en juego la situación de validación. En
717 esta situación según su autor *“Los esquemas de la acción y de la formulación conllevan*
718 *procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales, para asegurar*
719 *la pertinencia, adecuación, adaptación o conveniencia de los conocimientos movilizados”*
720 (Brousseau, 2007, pág. 26). El alumno que participaba como informante de los
721 procedimientos, en esta fase se convierte en un *proponente* que expone la forma de su
722 proceder y, por otra lado, el que antes era receptor de dicha información ahora es un
723 oponente; ambos *“Cooperan en la búsqueda de la verdad, es decir, en vincular de forma*
724 *segura un conocimiento a un campo de saberes ya establecidos, pero se enfrentan cuando*
725 *hay dudas. Se ocupan juntos de las relaciones formuladas entre un medio y un*
726 *conocimiento relativo a ese medio”* (Brousseau, 2007, pág. 27).

727 EL PLANTEAMIENTO FINAL Y LA EVALUACIÓN

728 Fragmento de clase 15:

729 Ma: Ahora ya saben qué es la razón... ¿Si? Volvamos al planteamiento inicial y contestemos la pregunta que
730 se les hizo difícil. A ve ¿Cómo quedaría es pregunta?
731 //Los alumnos revisan sus hojas de trabajo y repasan el planteamiento que la maestra les indica//
732 Ma: Dice la última pregunta niños... dice ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas?... Si
733 yo le pregunto ¿Cuál es la razón entre la cantidad de pasteles y de niños? Ustedes ¿Qué me va a responder?
734 Aa: uno para cuatro
735 Ma: ahora en ese planteamiento ¿cómo le vamos a hacer?
736 Ao: si cada parte de la caja corresponde a una lechuga, y cada lechuga ocupa 1/16... ha ¡ya!
737 Aa: ya le entendí....
738 //algunos alumnos reciben ayuda por parte de la maestra para comprender el problema

739 A partir de este fragmento de clase 15, se puede analizar la manera en la que se consolida la
740 estrategia de aprendizaje que se utilizó para llevar a cabo la clase. Se replantea la pregunta
741 del problema que en la fase de acción los alumnos no entendieron como resolver. Se da por
742 sentado según las actividades realizadas en las actividades anteriores, que los alumnos ya
743 comprendan o al menos están algo familiarizados con la noción de razón, y es en este
744 momento en donde los alumnos están a prueba, primero para que ellos resuelvan el
745 problema con ayuda de los que comprendieron en cada una de las actividades del apartado
746 “construyendo el conocimiento”, es decir, evaluar el aprendizaje de esta clase y a su vez
747 consolidar el concepto de razón en los alumnos.

748 La maestra lee la pregunta, pero antes de que pida a los alumnos que la resuelvan o
749 expliquen, realiza una acción que funciona como pista para que los alumnos comprendan
750 mejor lo que pide la pregunta y se den cuenta que es solo poner en práctica los
751 conocimientos abordados en las actividades anteriores. Esta acción tiene el nombre de
752 analogía, puesto que repasa la noción de razón con uno de los planteamientos que se
753 revisaron. Las expresiones de los alumnos que se comienza a escuchar, dan alarma o aviso
754 de que le han entendido y están dispuestos a emitir una respuesta y procedimiento.

755 La maestra anota las cantidades en el pizarrón con la finalidad de que los alumnos
756 visualicen las relaciones que se establecen en el problema. La respuesta correcta para el
757 planteamiento es que para 1 caja corresponden 16 lechugas, de tal manera que cada lechuga
758 ocupa $\frac{1}{16}$ de la caja.

759 CONCLUSIONES:

760 -El propósito principal era que los alumnos resolvieran la situación problemática al
761 contestar la tercera y cuarta pregunta del planteamiento, y considero que a través del
762 desarrollo de la clase, los alumnos se adoptaron de los elementos necesarios en materia de
763 conocimiento, para responder finalmente estas preguntas.

764 -Después de haber aplicado la clase, creo que fue buena decisión el desarrollo de los tres
765 planteamientos, ya que como se puede confrontar con los productos, la mayoría del grupo
766 comprendió el cómo resolver el problema central, en un tema que puede ser confuso para
767 los alumnos de primaria como lo son las fracciones y aún más si se expresan como razón.

768 Como resultado del análisis de la estrategia aplicada para impulsar el proceso de enseñanza
769 y aprendizaje, reflexiono que fue importante que al finalizar la fase de acción, se abordara
770 consecuentemente la fase de formulación y validación para conocer a fondo las
771 procedimientos implementados por los alumnos en su primer intento por resolver el
772 problema y conocer más a fondo las dudas y dificultades que presentaron especialmente al
773 contestar el último planteamiento del problema. Y una vez realizado esto, ahora si abordar
774 las actividades que se propusieron, con la finalidad de que los alumnos reflexionaran mejor
775 sobre sus dificultades y como los nuevos conocimientos se articularon para superar estas al
776 momento del replanteamiento.

777 -En caso de las fracciones y por qué no, también en algún otro contenido, es importante
778 crear la necesidad de aprendizaje en el alumno, es decir, que dese responder a algún
779 problema, y después brindar los elementos para que construya los conocimientos que
780 necesita para poder resolver esa situación y enfrentarlo con otra visión; esto lo lleva a
781 confirmar si resolvió de manera correcta o incorrecta, generándose una autorregulación de
782 su propio proceso de aprendizaje.

783 -Considero que en cierto punto fue fácil, el desarrollo de los planteamientos, ya que se
784 presentó de una forma simple los cuestionamientos que llevaron de las fracciones a la
785 comprensión de las fracciones, puesto que se realizó con simplicidad y de forma concreta.

ANEXO 11. Análisis de la Práctica de Israel

ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA: UN DESFÍO DESDE SU PLANEACIÓN HASTA SU EJECUCIÓN

INTRODUCCIÓN

La situación didáctica que se presenta en este escrito es la segunda actividad de tres planificadas para el tema denominado “La razón como fracción”; el saber en juego en torno a esta segunda sesión es tener un mayor acercamiento a estos conceptos a través de diferentes actividades que permitan diferenciarlos.

El propósito implícito en las tres sesiones es enriquecer la comprensión de la realidad, facilitando la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes, para ello las actividades se contextualizaron en una feria y aplicadas a un grupo de 5°.

Este documento contempla dos partes importantes; en la primera se realiza un análisis del plan de clases en el cual se describe la postura del docente al momento de diseñar la planeación, del mismo modo se señalan algunos de los desafíos que esto implica y, concluye con la descripción del plan de clases a desarrollar.

En la segunda parte se analiza algunos momentos significativos durante la segunda actividad, se añaden registros y algunas evidencias que dan fe de lo realizado.

1 ANÁLISIS DEL PLAN DE CLASE

2 Cuando hablamos de la formación que deben tener los docentes en cuanto a sus
3 conocimientos didácticos y disciplinares pensamos comúnmente en el conocimiento y
4 dominio de los contenidos de cierta asignatura y aspectos básicos de disciplina y, se cree,
5 que eso es más que suficiente, sin embargo, se deja de lado los conocimientos que éste debe
6 poseer sobre la planeación, evaluación y demás aspectos que se encuentran implícitos en su
7 labor.

8 Los saberes son los conocimientos que poseen los sujetos y son utilizados para
9 resolver las situaciones o problemas a los que se enfrentan. Los saberes docentes se
10 adquieren durante su formación teórica, en su trayecto formativo de su escolaridad, en la
11 práctica misma y en la interacción con otros maestros y alumnos. El docente durante su
12 intervención didáctica pone en juego sus conocimientos, habilidades, valores y
13 competencias para desarrollar lo mejor posible su práctica, ya que el maestro enfrenta el
14 desafío al promover el aprendizaje en sus alumnos, debido a que cada uno de ellos adquiere
15 el conocimiento mediante estilos de enseñanza-aprendizaje diferentes.

16 Para comenzar a describir el plan de clase que se desarrolló con base en ***“La razón***
17 ***como fracción***”, fue necesario el estudio de algunos elementos y materiales que ayudaron a
18 comprender de mejor manera el tema, tales como la revisión teórica de la planeación
19 basada en situaciones didácticas y algunos artículos de investigación científica respecto a la
20 razón como significado de la fracción.

21 **Consideraciones previas para la realización de una planeación basada en una**
22 **situación didáctica**

Para iniciar se comenzará definiendo lo que es planeación de manera general, “el planear es un proceso en el que el sujeto debe considerar factores, elementos, recursos, riesgos, en fin, una serie de variedades para tratar de controlarlas, y llegar a una situación deseada” (Frola & Velásquez, 2011, pág. 11). Aunque esta definición es global, a grandes rasgos nos habla del trabajo del docente, el cual tiene que arriesgarse, tomar decisiones y llegar a una situación deseada que él mismo plasma en su planeación. Desde el ámbito educativo, Frola y Velásquez (2011) menciona que la planeación es:

Un proceso sistemático, cuyo campo de ejercicio está delimitado y es muy específico, suele ser la interacción entre planes de estudio, perfiles docentes, proyecto escolar, infraestructura tecnológica de un plantel educativo, recueros documentales, bibliográficos y fuentes de información entre otros; siempre con la mirada en un perfil de egreso establecido (pág. 11).

Bajo esta modalidad de planeación es muy importante resaltar que debe cumplir varias funciones, entre las más importantes de prever los recursos materiales y de apoyo que el docente requiera para cumplir con lo propone en su planeación. Desde este punto de vista, no debe ser tan detallada ni extenuante, sino que basta con tener un panorama de lo que se va a realizar para que se tomen las mejores decisiones orientadas al apoyo de lo que se pueda cumplir y descartar la improvisación dentro de su práctica.

En cuanto al plan de clase que se desarrolló estuvo basado en la Teoría de situaciones didácticas propuesta por Guy Brousseau, en la cual se menciona que una situación didáctica es una situación o problema elegido por el docente, la cual lo involucra a él mismo en un juego con el sistema de interacciones del alumno y con su medio, es decir, una situación construida con la finalidad de hacer adquirir a los alumnos un saber ya determinado. Brousseau la definía de esta manera:

47 Es un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un
48 alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente
49 instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la
50 finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías
51 de constitución. (Citado en Gálvez, 1994)

52 Una situación didáctica, por lo regular, comienza con la preparación del medio, ya
53 que éste me permite preparar la actividad a realizar, se pueden hacer cuestionamientos para
54 conocer los conocimientos previos de los alumnos. Posteriormente, se declara la consigna,
55 mediante la cual se dan algunas indicaciones para que resuelvan la actividad, también
56 pueden indicarse ciertas restricciones, las cuales se dan a conocer para indicar lo que puede
57 o no hacer durante la resolución del problema.

58 Al terminar de dar las indicaciones y explicar a los alumnos en qué consiste la
59 actividad, se van presentando varios momentos o fases de la siguiente manera, comenzando
60 por:

61 **Fase de acción:** Constituye el proceso por el cual el alumno va a aprender por el
62 método de resolución de problema. El alumno debe actuar sobre un medio (material o
63 simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícito,
64 donde los alumnos comienzan a realizar la actividad.

65 **Fase de formulación:** La formulación de un conocimiento correspondería a la
66 capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y
67 reconstruirlo en un sistema lingüístico). Es donde un alumno (o grupo de alumnos) emisor
68 debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos)
69 receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico)
70 con base en el conocimiento contenido en el mensaje.

Fase de validación: En este nuevo tipo de situación, los alumnos organizan enunciados en demostraciones, construyen teorías - enunciados de referencia y aprenden a cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer sin ceder a argumentos retóricos, ni de autoridad. En ésta dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir, ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, o poner otras aserciones.

Fase de institucionalización: Es un asunto de orden metadidáctico, se configura a partir de procesos de reflexión que el docente hace sobre procesos generados por los estudiantes en torno a una búsqueda de conocimiento específico. La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización, y es única y exclusivamente por parte del profesor.

Una situación didáctica se desarrolla a partir de una situación problemática donde se presenta un saber en juego que le permite al alumno enfrentarse a un reto, y a partir de sus estructuras cognitivas, formas de aprendizajes, resuelve el problema aplicando diversos procedimientos. Otro aspecto fundamental de las situaciones didácticas son las situaciones a didácticas, las cuales son situaciones donde el alumno acepta el problema como suyo y produce su respuesta, sin intervención docente. El principal objetivo durante la situación que se plantea es que los alumnos construyan su propio aprendizaje a partir de lo que ya conocen, para ello tratarán de resolver el problema que se les plantee aplicando diversos

procedimientos que los lleve a encontrar una solución, para esto es importante que el maestro diseñe actividades acordes a las características de sus alumnos, para que el problema les presente obstáculos que puedan ser resueltos de acuerdo al grado de dificultad basado en sus conocimientos previos.

Consideraciones previas respecto al tema “Razón como fracción”

El docente dentro de su práctica desempeña un papel de investigador, pues constantemente está en busca de información para poder desarrollar y llevar a cabo lo mejor posible su labor dentro del aula y, eventualmente mejorarla y transformarla. Con base en lo anterior, para la planificación de las actividades fue menester investigar en diferentes fuentes de consulta, documentos, artículos y actividades; todas referentes al tema de “La razón como significado de la fracción” que, en primera instancia, ayudaran a comprender el tema y posteriormente a desarrollar un plan de clase con actividades específicas que atendieran a un aprendizaje esperado.

En relación con lo anterior Ramírez y Block (2008), en su artículo La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares plantean una serie de ideas, las cuales se tomaron como base para la planeación y desarrollo de las actividades, entre ellas se rescatan que:

La relación entre las nociones de razón y fracción en las matemáticas escolares es sutil, versátil y también confusa: las razones se suelen definir como fracciones, lo que lleva a preguntar, por ejemplo, ¿para qué queremos las razones si ya tenemos las fracciones?, ¿qué se gana con decir m es a n en lugar de m/n ? o, recíprocamente, ¿qué aporta saber que a la razón “ m es a n ” corresponde el número m/n ? (Ramírez y Block, 2008)

La opinión anterior conlleva a reflexionar el uso y la función de la razón si ya se tiene la fracción, para ello, argumentan que en el campo de la investigación, “la noción de

razón ha sido objeto de estudio independientemente de su vinculación con la fracción: en el contexto de la proporcionalidad, como relación que se expresa mediante dos cantidades (n a m ; n de m , n por cada m , etc.)” (Ramírez y Block, 2008). Un punto importante de su investigación es que menciona que las razones desempeñan un papel implícito como *precursoras* de las fracciones. En todos los casos, el interés de la noción de razón para el aprendizaje de las matemáticas parece ocurrir, sobre todo, antes de que ésta se exprese con una fracción o bien independientemente de la fracción. Considerando lo anterior, se planteó una serie de actividades que en primera instancia ayudarán a identificar la diferencia de razón y fracción y a la vez su vinculación.

Planificación de las actividades y otros elementos a considerar

Como ya se mencionó anteriormente, una situación didáctica debe de cumplir con una serie de momentos y elementos para poder llevarse a cabo, entre ellos se rescatan la creación de un escenario de aprendizaje, en el cual el estudiante deberá analizar y pensar qué debe hacer para resolver la situación presentada; construir y adquirir el conocimiento necesario para hacerlo; usarlo para resolver lo que se enfrenta; emitir una serie de argumentos o productos que comprueben el proceso de aprendizaje, etc.

Aparte de llevar los momentos ya establecidos (acción, formulación, validación, institucionalización), también debe tener implícitos algunos otros elementos, los cuales dan sustento y validez a la planeación, tales como:

- Tema integrador
- Propósito del contenido temático
- Contenido conceptual
- Contenido procedimental

142 • Contenido actitudinal y valoral

143 • Entre otros elementos que tendrán que ir implícitos dentro de cada momento.

144 Comenzaré primeramente por el tema integrador, el cual se define como el pretexto
145 metodológico para abordar una situación didáctica; además de permitir a través de
146 aproximaciones sucesivas la construcción y reconstrucción del conocimiento disciplinar e
147 interdisciplinar, en este caso, es la vinculación de la razón con la fracción. Se dice también
148 que el tema integrador es situacional y temporal, por lo cual su duración está sujeta a la
149 vigencia de los intereses de los estudiantes y, a su disposición por el aprendizaje. Esto
150 quiere decir, que si en algún momento ya no les es significativa alguna de las actividades el
151 tema deja de ser integrador.

152 Otro elemento a considerar es el propósito del contenido temático, el cual guarda una
153 estrecha relación con el aprendizaje esperado, ya que según la definición del primero es que
154 tiene como intención orientar los aprendizajes a partir de la especificación de las metas que
155 se quiere llegar con las actividades encaminadas a lograr éstos. La única diferencia es que
156 los aprendizajes esperados son a corto plazo (hablando de tiempo) y los propósitos se
157 logran a largo plazo.

158 El siguiente elemento que se consideró para el diseño de la situación didáctica es el
159 contenido conceptual relacionado con el “saber qué”. Éste se construye a partir del
160 aprendizaje de conceptos, principios y explicaciones, los cuales no tiene que ser aprendidos
161 de forma literal, sino abstrayendo su significado esencial o identificando las características
162 definitorias y las reglas que lo componen.

163 Continuando con los elementos, el contenido procedimental tiene que ver con el “saber
164 hacer”, el cual indica aquel conocimiento que se refiere a la ejecución de los
165 conocimientos, estrategias, técnicas, habilidades, destrezas y métodos entre otros.

166 El último elemento a considerar es el contenido actitudinal o valoral, es aquel que está
167 presente de manera implícita u oculta, ya que permite que los alumnos hagan uso de la
168 toma de decisiones, poner en marcha algunos valores como el respeto y la responsabilidad
169 al trabajar en pequeños equipos o de forma grupal.

170 Una vez analizado y encontrado dentro de la planeación los conceptos anteriores, se
171 prosigue a analizar cada uno de los momentos de la situación, comenzando por las
172 actividades de apertura.

173 La fase inicial marca el comienzo del proceso formativo que se estará desarrollando. En
174 esta fase se debe de dar tiempo suficiente, ya que sustenta el punto de partida para los
175 siguientes momentos. Las actividades de apertura son aquellas en las que es posible
176 identificar y recuperar las experiencias, los saberes, las preconcepciones y los
177 conocimientos previos de los alumnos, mismas que se establecieron de la siguiente forma:

178 SITUACIÓN DIDÁCTICA

179 *Preparación del medio*

180 Valoración de conocimientos previos:

181 -Leer un cuento a los alumnos titulado “La gran fiesta”

182 Había una vez en un lugar muy muy lejano una ciudad donde reinaba la justicia, no había
183 criminal que se le escapara al gran guardián del planeta.... ¿Sabes quién es?... así es, se
184 trata del Capitán de las tres “R” (Recicla, Reúsa y Reduce), él junto con su pandilla de
185 guardianes defienden la limpieza del planeta y pelean en contra de la contaminación y de
186 cualquiera que se atreva a tirar basura y a desperdiciar los recursos que la naturaleza nos da.
187 Un día el alcalde de Ciudad “limpieza” organizó una fiesta para el capitán “R” por su gran
188 trabajo y por mantener la ciudad fuera de basura y de los desperdicios. Toda la ciudad
189 estaba invitada a este gran evento, en especial los niños, ya que querían celebrar juntos con
190 su gran súper héroe. Después de la fiesta habría un baile en el que tocarían “Los 5 de
191 Zacatecas”; el alcalde de la ciudad prometió a todos sus invitados un gran festín en donde
192 habría ricos antojitos y de postres pasteles de todos los sabores. También prometió traer
193 toda una feria con juegos y puestos para que todos se divirtieran.

194 El Alcalde al querer lucir para festejar a lo grande al Capitán “R”, no se dio cuenta que
195 había gastado mucho dinero en contratar al grupo, en el mobiliario, en la feria y en la
196 comida, así que tendría que economizar en los postres, ya que no los había comprado
197 todavía y no le podía quedar mal al pueblo porque se los había prometido, así que tuvo que

198 ir a preguntar los precios a las pastelerías del pueblo para ver en donde le convenía
 199 comprarlos.

200 El Alcalde es algo distraído con las cuentas y no se le dan mucho las matemáticas, así que
 201 ahora te toca a ti ayudarlo a decidir en dónde le conviene hacer la compra de los pasteles.

202 Se les presentará a los alumnos a través de una proyección las dos ofertas de las dos
 203 pastelerías, se aclarará que el pastel es del mismo tamaño en los dos establecimientos. La
 204 pregunta central será, ¿en cuál de las dos pastelerías le conviene hacer la compra?
 205 Se abrirá un espacio para la argumentación de la pregunta.
 206 En este primer momento se trabajará de forma individual, utilizando solamente lápiz y
 207 papel.

208 Organización del grupo:
 209 Enseguida se saldrá un momento a fuera del salón para realizar una dinámica titulada “El
 210 trenecito”, ésta permitirá formar 5 equipos (el número de equipos puede variar según el
 211 número de los estudiantes).

212 Materiales:
 213 Hoja de trabajo.

214 *Consigna:*
 215 Organizados en equipos, resuelvan los problemas que parecen en la hoja de trabajo 1.
 216 Tienen 20 minutos para realizar la actividad y se podrá hacer uso de la calculadora.
 217 *Devolución de la consigna:*
 218 Preguntar a un alumno sobre qué es lo que van a realizar, de esta manera no existan dudas
 219 con base en la consigna.

220 La fase de apertura o preparación del medio debe tener de forma implícita algunos
 221 elementos como la contextualización, la recuperación de conocimientos previos y el
 222 planteamiento de problemas. La contextualización la encontramos en la presentación del
 223 cuento, generando las condiciones para que se dé el tema integrador. Se seleccionó el
 224 cuento como un recurso para contextualizar y presentar a los alumnos la situación que
 225 posteriormente estarán resolviendo, ya que éste apoya a la enseñanza favoreciendo y
 226 estimulando el aprendizaje. Se consideró conveniente iniciar la actividad comenzando con
 227 el relato, ya que el cuento puede desempeñar un papel formativo del cual se pueden realizar
 228 una serie de actividades después de haberlo leído, tales como:

- 229 • **Preguntar:** La reflexión acerca de la narración permite que los niños aprendan a
230 preguntar.
- 231 • **Escuchar:** Es necesario que los niños, mientras están escuchando un cuento, les
232 enseñemos a moderar sus impulsos por hacer otra cosa y también aprendan a
233 escuchar.
- 234 • **Comentar:** Al momento de escuchar el cuento aprendan a hablar y respetar la
235 palabras de otros cuando hablan.
- 236 • **Inventar:** Se puede permitir que los niños den rienda suelta a su imaginación e
237 inventar su propio cuento o bien decidir diferentes finales para uno mismo o bien
238 para contar la historia con diversas variantes. (Ortiz, 2002, pp. 105-107).

239 Utilizar el cuento como punto de partida de la actividad permitirá posteriormente crear
240 diferentes suposiciones de situaciones problemáticas que los alumnos tendrán que resolver,
241 de igual forma se podrán replantear estas situaciones; algo fundamental es que el trabajo
242 girará en torno a un mismo tema o cometido integrador.

243 Como segundo punto dentro de la fase de apertura es la recuperación de
244 conocimientos previos y se ve presente dentro de la planeación en forma de una situación
245 de ofertas, en donde los alumnos tendrán que observar en cuál es la que mejor conviene
246 hacer la compra; es pertinente tomar en cuenta los conocimientos previos, ya que no es
247 posible asimilar toda la información que nos rodea, sino sólo aquella que es significativa a
248 la estructura cognitiva que poseen.

249 Otro punto importante a considerar dentro de la fase de preparación del medio es la
250 forma en la que se estará organizando al grupo y los materiales a trabajar, que en este caso
251 se estará desarrollando una dinámica y se trabajará con equipos de 5 integrantes,

252 dependiendo el tamaño del grupo, para la actividad a desarrollar solamente se necesitarán
253 hojas de trabajo proporcionadas por el maestro.

254 Como último punto tenemos el planteamiento del problema, el cual aparece de
255 forma implícita en la consigna. Es importante considerar que las situaciones planeadas
256 deben exponer situaciones de la vida cotidiana que permiten a los estudiantes, identificar
257 aquellos elementos que conocen, estableciendo relaciones entre éstos y otras áreas del
258 conocimiento a fin de modificar, reestructurar o resignificar aquellos conceptos o ideas que
259 forman parte de su bagaje cultural, en este caso, aunque las actividades no se realizaron de
260 situaciones reales concretas si se presentan situaciones que los niños han vivido o que al
261 menos tienen noción de ellas, como lo es el caso de la feria, la cual se plantea en un inicio
262 en el cuento.

263 En un segundo momento de la situación didáctica encontramos tres actividades, las
264 cuales introducen nuevos conocimientos científico-técnicos para relacionarlos con los
265 identificados y recuperados en las actividades de apertura.

266 *DESARROLLO*

267 *Fase de acción:*

- 268 - Una vez que se entregó la hoja de trabajo 1, los alumnos comienzan a realizar conjeturas
- 269 mentales, pensando en cuáles promociones serán las idóneas según la pregunta planteada.
- 270 Cada equipo debe hacerse cargo del problema planteado haciendo sus propias analogías y
- 271 asimilando la actividad de acuerdo a lo que ya conoce y a lo que se realizó en la valoración
- 272 de conocimientos previos.
- 273 - El maestro sólo interviene para solucionar dudas en algún aspecto, pero lo hace mediante
- 274 devoluciones para poner al alumno en situación a-didáctica.
- 275 -En esta misma fase se contestarán las preguntas que se incluyeron en la hoja de trabajo 1.

276 *Fase de formulación-validación:*

- 277 - Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las
- 278 preguntas planteadas y qué les permitió llegar a esos resultados. Los alumnos pueden
- 279 pasar al frente para representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos
- 280 en la participación de sus compañeros, para que afirmen si es correcto el mensaje que se
- 281 emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de
- 282 casos que permitieron llegar a lo deseado.

283 *Fase de institucionalización:*

284 Se dará una breve introducción a la razón de manera formal. Para ello, se les presentará a
285 los alumnos la diapositiva 2, que muestra la relación que guarda el número de globos
286 tronados con el número de dardos. Para una mejor comprensión en este primer momento, se
287 presentará la diapositiva 3 como ejercicio de retroalimentación.

288 *Consigna 2*

289 Una vez analizado lo anterior se les entregará una hoja de trabajo 2. Organizados en los
290 mismos equipos resuelven los problemas que aparecen en sus hojas, menos la última
291 actividad, ésta se separa del resto con una línea negra, no la contesten todavía, recuerden
292 que no se puede estar platicando con otros equipos. Tienen 20 minutos para terminar, de
293 igual manera, se podrá hacer uso de la calculadora.

294 *Fase de acción:*

295 - Una vez que se entregó la hoja de trabajo 2, los alumnos comienzan a realizar conjeturas
296 mentales y se espera que el trabajo en equipo trate de brindar más ideas para resolver los
297 problemas.

298 *Fase de formulación-validación:*

299 - Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las
300 preguntas y qué les permitió llegar a esos resultados. Pueden pasar al frente para
301 representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación
302 de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es.
303 También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que
304 permitieron llegar a lo deseado.

305 *Fase de institucionalización:*

306 A manera de conclusión de la hoja de trabajo 2 se les presentará a los alumnos la
307 diapositiva 4, en donde a grandes rasgos se clarifica lo que estuvieron realizando al
308 comparar la razón de dos cantidades. En este punto será necesario hacer mención del
309 concepto de Razón. Para retroalimentar lo institucionalizado se contestará el último
310 ejercicio que quedó pendiente en la segunda hoja.

311 *Consigna 3*

312 Para finalizar se les entregará una hoja de trabajo 3, organizados en los mismos equipos
313 resuelvan los problemas que aparecen en su hoja, recuerden que no se puede estar
314 platicando con otros equipos. Tienen 10 minutos para terminar, de igual manera se podrá
315 hacer uso de la calculadora.

316 *Fase de acción:*

317 - Una vez que se entregó la hoja de trabajo 3 a los alumnos comienzan a realizar
318 conjeturas mentales.

319 *Fase de formulación-validación:*

320 - Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las
321 preguntas planteadas y qué les permitió llegar a esos los resultados. Pueden pasar al frente

322 para representarlas al pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la
323 participación de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o
324 si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos
325 que permitieron llegar a lo deseado.

326 *Fase de institucionalización:*

327 En este último momento se les hablará a los alumnos que lo que estuvimos realizando fue
328 comparar razones y se dará la siguiente definición más sintética:

329 *Una razón es el cociente entre dos cantidades.*

330 Se pondrá un ejemplo:

331 En el ejercicio del pozole la razón entre la cantidad de maíz y el número de personas es:

$$\begin{array}{rcl} \text{Cantidad de maíz} & & 1000 \text{ gramos} \\ \hline & = & \hline \text{Número de personas} & & 5 \end{array}$$

332 El número obtenido al simplificar la fracción anterior es el maíz añadido para cada persona.

333 Así es más fácil saber la cantidad de maíz, por ejemplo para 7 personas.

334 Simplemente se calcula:

335 $7 \times 1000/5 = 1.4 \text{ kg.}$ o $7 \times 200\text{gr.} = 1400 \text{ gr.}$ O 1.4 Kg.

336 Podemos realizar el mismo procedimiento para saber la cantidad unitaria, ya teniendo esta
337 cantidad es más fácil saber las demás.

338 Para comprobar lo anterior y como última actividad se les presentará la diapositiva 5 en
339 donde los alumnos tratarán de encontrar la cantidad de ingredientes del pozole para una
340 persona.

341 La fase de desarrollo es la más larga de la situación, en ella se desarrollan actividades
342 para el aprendizaje y para la evaluación que van ayudando a la construcción del
343 aprendizaje. En esta momento de la situación didáctica, hay que prever estrategias que
344 faciliten un aprendizaje con sentido (actividad de interrogación y aplicación, etc.), que
345 fomenten el desarrollo de la capacidad de autonomía (actividades de decisión y auto
346 regularización), la interrelación social (grupos cooperativos de trabajo y contratos
347 colectivos entre otros) y la inserción social crítica como: actividades de análisis y juicio
348 crítico.

349 Como último elemento dentro del desarrollo es la retroalimentación e integración de
350 conceptos, en éste se deben planear actividades de cuestionamientos y/o estrategias que
351 permitan a los estudiantes, el desarrollo de habilidades mentales para la reafirmación
352 disciplinar de los conceptos adquiridos, mediante la exposición de experiencias y vivencias
353 grupales relacionadas con los contenidos tratados, la cual se puede ver reflejada en la
354 última actividad, misma que tiene el propósito de que los alumnos recuperen los
355 conocimientos de las actividades anteriores.

356 No basta con un buen inicio y una buena fase de desarrollo en la cual se han ido
357 trabajando distintos contenidos. Para cerrar el proceso se requiere realizar una síntesis,
358 recapitulando e interrelacionado contenidos que se han ido trabajando a lo largo de las
359 actividades, es por ello que dentro de cada actividad se encuentra inmersa la fase de
360 institucionalización, la cual, como ya se mencionó, se configura a partir de procesos de
361 reflexión que el docente hace sobre procesos generados por los estudiantes en torno a una
362 búsqueda de conocimiento específico.

363 Algunas reflexiones respecto al análisis del plan de clase es que se encuentran algunos
364 elementos que deben ir implícitos, el primer elemento es el siguiente: Actividades de
365 relación de los aprendizajes adquiridos con otras áreas y, con la vida cotidiana. Se refiera a
366 actividades globalizadoras, donde se integren las actividades de apertura y de desarrollo.

367 Como segundo elemento dentro de este bloque son las actividades de aplicación de
368 conocimientos, habilidades y destrezas adquiridas, hace mención a acciones donde los
369 alumnos, transfieren los conocimientos adquiridos en situaciones concretas siendo capaces
370 de aplicar los aprendizajes.

371 El siguiente elemento son las actividades de retroalimentación y de integración de
372 conceptos, éstas deben permitir verificar la capacidad de construcción, análisis y de síntesis

del aprendizaje adquirido por los estudiantes. Como último punto encontramos las conclusiones y comentarios, al final de la clase se debió de haber incluido una socialización referente a todo lo visto y realizado en las sesiones.

ANÁLISIS DE LA CLASE

La asignatura a la que corresponde esta situación didáctica es de Matemáticas, llevando el tema “La fracción como razón” que corresponden a uno de los contenidos de esta asignatura.

Las competencias que se favorecen son las siguientes:

- Resolución de problemas de forma autónoma.
- Validación y argumentación de sus procedimientos.
- Comunicar información matemática.

El aprendizaje esperado giraba en torno a que el niño identifique y exprese por medio de la razón o cociente una comparación entre dos cantidades. Al respecto, el Plan de Estudios 2011 (2011) menciona que “los aprendizajes esperados son indicadores de logro, que en términos de la temporalidad establecida en los programas de estudio, definen lo que se espera de cada alumno en términos de saber, saber hacer y saber ser” (pág. 33). Dicho lo anterior, se puede referir que al término de las actividades el aprendizaje esperado señalado anteriormente debió de haberse cumplido.

Mi situación didáctica

El propósito implícito en las tres actividades es enriquecer la comprensión de la realidad, facilitando la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes, para ello las actividades se contextualizaron en una historia llamativa para los alumnos. Así, la ejecución de la

planificación comenzó con la preparación del medio que es “el modo o la forma en la que
estará organizado el grupo, para un mejor aprendizaje o para obtener mejores resultados”
(Centeno, 1997). También es el espacio idóneo para valorar conocimientos previos de los
alumnos y entregar el material. En la primera actividad se comenzó con la lectura de un
cuento, la cual sería el parteaguas de una situación en donde los alumnos valoraron la oferta
de dos pastelerías, guiándose la mayoría por la oferta más lógica y sin realizar operación
alguna. Posterior a esta actividad de reflexión le siguió la hoja de trabajo número 1, la
intención de la actividad fue guiar a los alumnos hacia el concepto de razón a través de
diversos problemas, entre los cuales se destacan actividades de representación y manejo de
la información, concluyendo con la representación escrita de fracciones y en números
decimales.

La situación didáctica que se presentará en este escrito es la segunda actividad de
tres planificadas para el tema “La fracción como razón”, en la cual se presenta a los
alumnos una situación problemática en la que tendrán que comparar y discutir sobre cuál
mesa se encuentra más llena. Para ello, se les presentan dos mesas, una grande y una chica,
ambas con diferente número de personas sentadas, y diferente número de asientos
disponibles, con base en los datos proporcionados los alumnos tendrán que comparar el
grado de aglomeración. Brousseau (1986) define una situación didáctica con sus propias
palabras como:

[...] el conjunto de relaciones establecidas explícitamente e/o implícitamente
entre el alumno o grupos de alumnos, en un cierto medio –que corresponde
instrumentos y objetos- y el profesor con el fin de hacer que los alumnos se
apropien de un saber constituido o en vías de constitución (citado en
Centeno, 1997, p. 115).

420 En cuanto a las dificultades que los niños pudieran tener consideré diversas de ellas, en
421 esta segunda clase se tocan aunque sea de manera muy superficial los conceptos fracción,
422 razón, grado de aglomeración, de los cuales algunos de ellos previamente fueron revisados
423 pero no a profundidad.

424 Podemos rescatar que la actividad que aquí se presentará está contemplada para iniciar
425 la segunda sesión de estas series de actividades. Lo planificado, en resumen, para la
426 primera sesión, es que los alumnos reflexionen sobre el concepto de razón, por ello, en la
427 fase de institucionalización se da una breve introducción al concepto a través de una
428 lámina, esto es fundamental ya que se recupera al inicio de la segunda actividad.
429 Abordar estos conceptos (razón, fracción y grado de aglomeración), posiblemente no muy
430 comunes para los niños, debe hacerse con cautela, en el sentido de no confundirlos y crear
431 posibles obstáculos epistemológicos. Al respecto, Centeno (1997) dice que:

432 Se llaman obstáculos epistemológicos a estas concepciones que son
433 constitutivas del conocimiento. Como tales dependen únicamente del
434 concepto mismo, son inherentes a la noción a que se refieren y, por
435 consiguiente, cualquiera que desee adquirir esa noción deberá superar esos
436 obstáculos. No es posible prescindir de los obstáculos epistemológicos,
437 puesto que superarlos forma parte del conocimiento (p. 145).

438 Claramente no se pretende que el niño memorice estos conceptos en la actividad, pero si
439 se considera importante que al menos los conozcan y tengan por más mínimo que sea
440 dominio de ellos. En esta actividad al tocar estos conceptos, los niños sí mostraron cierto
441 grado de confusión respecto a qué hacen alusión exactamente, mi desafío fue encaminar
442 hacia el entendimiento; se debe reconocer que hubo momentos en la clase en donde se
443 comenten mucho errores, considerando que los más comunes fueron el dar algunas
444 respuestas a los niños, o si no al menos que parezcan muy obvias de responder, otros

445 errores como “el pensar que ellos piensan lo que yo pienso”, ese sin duda fue uno de mis
446 desafíos, señalando y diciendo cosas que ellos no veían y/o no sabían.

447 Para iniciar la clase se comenzó a rescatar lo que los niños recuerdan de la primera
448 actividad. Considero que es importante rescatar estos elementos para ver qué fue lo que de
449 cierta manera les llamó más la atención y, partir de ahí, introducirlos en las nuevas
450 actividades.

451 Israel: Vamos a realizar un recordatorio de lo que vimos ayer, ¿quién se acuerda de lo que
452 estuvimos viendo?

453 /Algunos alumnos levantan la mano/

454 Ao: De que esos [...] que aquí nos dio una explicación de los globos que tronó, cuántos
455 tronó y cuántos tiró /señala a la lámina/

456 Israel: Y los que falló, ¿qué?

457 Ao: Estos son los que falló /señala a la lámina/

458 Israel: A ver hicimos una comparación entre los globos que [...]

459 Ao: Los que tronó.

460 Israel: Los que tronó verdad o los que falló [...] ¿Con qué los íbamos a comparar?

461 Ao: Con estos /Señalando los lanzamientos/

462 Israel: ¿Y estos qué son?

463 Ao: Número de lanzamientos /Lee la lámina/

464 Israel: Numero de lanzamientos. A ver, ¿qué más estuvimos viendo?

465 /Algunos alumnos levantan la mano/

466 Aa: Que los globos tronados y el número de lanzamientos se puede expresar con una
467 fracción.

468 Israel: ¿Esto lo podemos expresar con una fracción?

469 Aos: Sí

470 Israel: ¿Se acuerdan cómo lo podemos expresar con una fracción? ¿Quién quiere pasar a
471 expresar este? /señala la lámina/

472 /Una alumna escribe en el pintarrón 6/10/

473 Israel: A ver, explícales a tus compañeros por qué pusiste eso, ¿qué quiere decir?

474 Aa: Los tiros que realizó y los globos que tronó.

475 Israel: A ver, vamos a recordar un poquito, me ayudas a leer lo que dice aquí el problema

476 Aa: La tabla de abajo muestra el registro de lanzamientos que realizó José el amigo de
477 Carlos en el puesto de Don Octavio.

478 Israel: ¿Se acuerdan que había dos puestos?, ¿cuál era uno de esos puestos?

479 Aos: Don Octavio.

480 Aos: Don Benjamín.

481 Israel: El de Don Benjamín. Vamos a anotarlo por aquí /lo escribe en el pintarrón/

482 La interrogación es un elemento importante en la clase, cuestionar al alumno o al grupo
483 es someterlos a un análisis y a una reflexión al estimular el pensamiento, considero que se
484 debe tener mucho cuidado al momento de plantear preguntas y no dar claves o pistas que
485 interrumpen este proceso de estimulación del pensamiento. En diferentes momentos de la
486 clase se realizó una pregunta sobre las acciones que habíamos realizado tratando de utilizar
487 la memoria didáctica en cuanto a las fracciones y al concepto de razón, esto con la
488 intención de comprobar qué fue lo más significativo para los alumnos.

489 Israel: El de Don Benjamín. Vamos a anotarlo por aquí /lo escribe en el pintarrón/ ¿Se
490 acuerdan? ¿Cuántos globos debía de tronar con Don Benjamín para ganarse un premio?
491 Aa: Seis.
492 Israel: Seis y, ¿cuántos dardos les daban?
493 Aos: Ocho.
494 Israel: Ocho; esto, ¿cómo lo podemos expresar?
495 Aos: Seis octavos.
496 Israel: Seis octavos /El Israel escribe en el pintarrón 6/8/. Entonces decimos que debe tronar
497 [...]
498 Aos: Seis globos de [...] ocho.
499 Israel: Seis globos de ocho oportunidades que tiene. Muy bien, había otro puesto, ¿cuál
500 puesto era?
501 Aos: El de Don Octavio.
502 Israel: Don Octavio y, se acuerdan cuántos debería de tronar.
503 Aos: Sí, siete y le daban diez dardos.
504 Israel: Siete, con cuántos dardos [...]
505 Aos: Diez
506 Israel: Muy bien. Abajo dice: Expresa la relación entre estos dos datos usando una fracción
507 o un número. Su compañerita dice lo representó así /señala 6/10 en el pintarrón/ ¿Qué
508 quería decir esto?
509 Aa: Una fracción.
510 Israel: Una fracción y, ¿cómo se leería?
511 Aos: Seis décimos.
512 Israel: Seis décimos verdad, o qué más podemos decir, cómo la podemos interpretar o leer
513 [...] como seis qué [...]
514 Aos: Globos tornados.
515 Israel: De [...]
516 Aos: De diez.
517 Israel: ¿Diez qué?
518 Aos: Dardos, lanzamientos.

519 Israel: De diez lanzamientos o diez dardos. Muy bien. Aquí dice expresa la relación entre
 520 estos dos datos usando una fracción o un número, aquí ya su compañerita realizó algo [...],
 521 esta que viene siendo, ¿una fracción o un número?
 522 Aa: Una fracción
 523 Israel: ¿Y esto? /Señala una cantidad de la fracción/
 524 Aa: Una división, un número, una fracción [...]
 525 En estos momentos trato de recordar parte de la institucionalización de la primera
 526 actividad haciendo referencia a varios conceptos, tales como razón y fracción. Al respecto,
 527 Centeno (1997) menciona que “en el acto de institucionalizar los conceptos adquiridos el
 528 maestro identifica lo que los alumnos deben retener” (p. 116). Para dar a conocer este
 529 nuevo concepto y percatar su comprensión fue necesario intervenir con algunos ejemplos y
 530 de esta forma los alumnos tuvieran un referente, es decir, asocien el concepto con un objeto
 531 (significado-significante), en este caso se asocia el número de globos tronados con el
 532 número total de lanzamientos.

533 Israel: ¿Ya leyeron? ¿Qué les dice el enunciado del problema?
 534 Aa: ¿Cuántas mesas tiene y para cuántas personas son?
 535 Israel: Y para cuántas personas son [...] luego, ¿qué te pregunta?
 536 Aa: ¿Qué mesa se encuentra más llena? La grande.
 537 Israel: Pero quiero que aquí le pongan el por qué [...] acuérdense que debemos de justificar
 538 nuestras respuestas, quiero que le pongan por qué ustedes dicen que en la mesa grande,
 539 pero antes de escribir, comentan entre ustedes, qué tal si alguien dice que en la mesa chica.
 540 Aa: Yo, yo, en la mesa grande, porque tiene más personas.
 541 Israel: Porque tiene más personas [...] Entonces ustedes comenten para que tengan todo
 542 igual, comenten que pueden poner, ¿por qué dicen que en la mesa grande?
 543 Aa: En la mesa chica son 130 asientos, para 130 personas y en la mesa grande son 520
 544 asientos para 520 personas. Pero ninguna de las dos mesas se llenó. En la chica están 117
 545 personas y en la grande 416 personas [...] Entonces la cantidad más grande es 400 [...]
 546 Israel: Muy bien, pero aquí no está pidiendo cuál es la cantidad más grande, ¿qué les está
 547 pidiendo?
 548 Aa: ¿Cuál es la mesa que está más llena?
 549 Aa: Entonces estamos viendo la cantidad que es más grande para saber cuál mesa está más
 550 llena.
 551 Israel: Para saber cuál es la mesa que está más llena [...] está bien. También acuérdense
 552 que están viendo el número de personas, pero, ¿dónde dejan el número de asientos?
 553 Aa: ¿Qué?
 554 Israel: Ustedes sólo están viendo el número de personas, ¿y el número de asientos?
 555 /El equipo no responde/

556 Israel: También observen cuántos asientos quedaron vacíos en cada mesa para que puedan
 557 ver [...]
 558 Aa: En la mesa chica quedaron 30 asientos.
 559 Aa: No es cierto.
 560 Israel: ¿30? ¿Qué podemos hacer en eso?
 561 Aa: No, porque si son 30-17, no quedaron 30 [...]
 562 Israel: Vean todo eso para que puedan contestar la pregunta.
 563 /Israel se acerca con otro equipo/

564 El docente dentro de sus intervenciones debe tomar un papel de mediador dentro los
 565 procesos de aprendizaje y de esta forma llevar a cabo el conflicto cognitivo que se ha
 566 planteado desde el inicio. En el fragmento anterior se muestra parte del registro en donde el
 567 docente se acerca a una de las mesas de trabajo y dialoga con los integrantes haciendo
 568 hincapié en la justificación que se le debe dar al primer planteamiento, en esta intervención
 569 se realizan una serie de planteamientos del profesor hacia los alumnos, planteamientos que
 570 de una u otra forma reorientan la labor de sus educandos; por una parte se pudiera pensar
 571 que se les da la respuesta, por lo tanto, la situación carecería de un problema y de un
 572 desafío para los alumnos, entra en esta parte lo que Centeno (1997) menciona como la
 573 devolución del problema:

574 La situación debe plantear un problema que el alumno no sabe resolver con
 575 los conocimientos que posee. Si el alumno supiera responder a la situación
 576 resolviendo el problema que se plantea, ésta no sería un problema y la
 577 situación tendría la condición de un ejercicio de aplicación, de refuerzo de
 578 consolidación, etc. (p. 116).

579 Israel: Muy bien. Equipo amarillo, dice tenemos [...] ¿Cuántas mesas tenemos?
 580 Ao: Dos.
 581 Israel: Dos, tenemos una mesa [...]
 582 Aos: Chica.
 583 Israel: Una mesa chica [...]
 584 Aos: Y una grande.
 585 Israel: Y una mesa grande /las escribe en el pizarrón/ ¿Qué más nos dice? Dijimos que
 586 tenemos un número de qué [...]

587 Ao: Número de asientos.
 588 Israel: Primero tenemos un número de personas que se sentaron en la fiesta. En la mesa
 589 chica, ¿cuántas personas se sentaron?
 590 Aos: 117
 591 Israel: Equipo rojo, en la mesa chica, ¿cuántas personas se sentaron?
 592 Ao: 117
 593 Israel: Ciento diecisiete, y en la mesa grande, ¿cuántas se sentaron?
 594 Aos: Cuatrocientos dieciséis.
 595 Israel: Cuatrocientos dieciséis, pero también tenemos un número de [...] /Israel escribe
 596 todo en el pintarrón/
 597 Aos: Personas, asientos [...]
 598 Israel: ¿De qué?
 599 Aos: De asientos.
 600 /El maestro escribe en el pizarrón/
 601 Israel: Número de asientos. Nos dice cuántos asientos tiene la mesa chica, ¿cuántos?
 602 Aos: Ciento treinta.
 603 Israel: ¿Ciento treinta? /Escribe en el pintarrón/
 604 Ao: Quinientos veinte la otra.
 605 Israel: ¿En la mesa grande?
 606 Aos: Quinientos veinte.
 607 Israel: Y luego les aparece una preguntita, ¿qué dice? /Pide a una alumna que lea/
 608 Aa: ¿Qué mesa se encuentra más llena?

609 Para que un problema matemático sea considerado realmente como “problema”, es
 610 necesario que cumpla con una serie de criterios que lo diferencien de un ejercicio, por
 611 ejemplo, para entenderlos y resolverlos correctamente es necesario leerlos con atención, así
 612 como saber, más o menos, a dónde se quiere llegar; el objetivo es que organicen y
 613 relacionen sus conocimientos.

614 Es común que los alumnos mientras resuelven diversos problemas sientan alguna
 615 presión por resolverlos o no entrelacen la información que se les brinda, creando así
 616 algunas dificultades para su resolución, es por ello que en el fragmento anterior el maestro
 617 después de que los alumnos resolvieron el primer planteamiento retoma el problema y hace
 618 énfasis en cada una de la información que se proporciona, facilitando de esta forma una
 619 mejor comprensión del mismo. Al respecto, Centeno (1997) señala que “una dificultad es
 620 algo que impide ejecutar bien o entender pronto una cosa. Las dificultades pueden proceder

621 de diversas causas, relacionadas con el concepto que se aprende, con el método que utiliza
622 el maestro [...]” (p. 144). Es por ello que se hace hincapié de lo antes mencionado.

623 Israel: Dice: ¿Qué mesa se encuentra más llena?
624 Aa: La grande.
625 Israel: Vamos a ver, levanten la mano, cuál equipo dice que la mesa que se encuentra más
626 llena es la mesa chica.
627 /Un equipo levanta la mano/
628 Israel: ¿Sólo el equipo amarillo?
629 Aos: Nosotros también /levantan la mano otros integrantes de diferentes equipos/
630 Israel: Muy bien, dos equipos, ¿quién dice que la mesa grande?
631 /El resto de los equipos levantan la mano/
632 Israel: Los demás, uno, dos, tres [...] Quiero que pase uno o varios de cada equipo para
633 que digan por qué la mesa grande, los demás escuchamos.
634 Ao: Nosotros decimos que la mesa grande está más llena porque en la mesa grande hay 416
635 personas y en la chica sólo 117, y entonces en la mesa grande hay más gente que la chica,
636 por eso decimos que está más llena.
637 Israel: Su compañero dice que porque hay más gente, es porque está más llena. El equipo
638 verde, ¿por qué dicen que la mesa grande?
639 /Israel les entrega un marcador y una alumna pasa al frente/
640 Aa: Nosotros decimos, una posibilidad, porque aquí sólo son 130 mesas.
641 Israel: ¿Mesas?
642 Aa: Digo 130 asientos, entonces 117 personas, entonces no se llena tanto la mesa. En la
643 mesa grande son 520 y 416 personas, entonces la mesa grande es más posible que se llene
644 porque está más grande y esta no /señala la mesa chica/ porque si se llenara toda la mesa
645 grande tendría más personas porque es menos la cantidad de asientos que tiene la mesa
646 chica.
647 Israel: Entonces ustedes concuerdan con el otro equipo, de que la mesa que esta más llena
648 es la que tiene más personas.
649 Aas: Sí.
650 Israel: Este equipo desde su lugar, ¿por qué ustedes dicen que la mesa grande?
651 Aa: Porque hay más personas.
652 Israel: Entonces los tres equipos concuerdan de que la mesa que está más llena es donde
653 hay más [...]
654 Aos: Personas.
655 Israel: Ahora vamos a darle oportunidad a los otros equipos que dicen la mesa chica está
656 más llena. Los pueden corregir o hacer preguntas. Ustedes, ¿por qué dijeron que en la mesa
657 chica?
658 Aa: Nosotros pensamos que la chica, porque dividimos $117 \div 130$ y dio 0.8
659 Israel: ¿Les dio 0.8?
660 Aa: ¿Si nos dio 0.8? /Pregunta a su equipo y revisa su hoja/
661 Aa: No, nos dio 0.9
662 Israel: 0.9, anótalo en el pizarrón
663 /La alumna lo escribe/
664 Aa: Y dividimos $416 \div 520$ y nos salió 0.8
665 Israel: 0.8

666 Aa: Entonces nosotros pensamos que porque este era más cantidad /señala 0.9/ pensamos
667 que era la chica, la mesa más llena.
668 Israel: ¿La chica estaba más qué?
669 Aa: Tenía más cantidad.
670 Israel: ¿Tenía más cantidad?
671 Aa: Que la grande.
672 Israel: Que la grande, ¿está más qué? [...] casi llena. Bien, ¿si entendieron por qué ellos
673 dicen que en la mesa chica?
674 A. Aos: Sí.
675 Israel: ¿Siguen diciendo que en la mesa grande porque hay más personas? Ustedes, ¿por
676 qué dijeron que en la mesa chica? /Pregunta al último equipo/
677 Ao: Nosotros pensamos [...] entendimos cuál estaba más llena y a la otra todavía le faltan
678 100 y a este nada más le falta [...]
679 Israel: Pasen a explicarlo al pintarrón.
680 Ao: Es que nosotros pensamos [...] en el problema dice que cuál está más llena, y a ésta
681 /señala la mesa grande en el pintarrón/ todavía le faltan como 100.
682 El fragmento anterior es de vital importancia, ya que es cuando los alumnos tratan de
683 formular y validar sus procedimientos y resultados, la mayoría de sus respuestas se inclinan
684 hacia la mesa grande, mientras que una minoría opina que la mesa chica, algunos de ellos
685 dan argumentos sólidos de sus resultados, mientras que otros ignoran por completo lo que
686 hicieron, respecto a aquellos niños que dan respuesta muy diferentes se genera un conflicto
687 en el grupo, Centeno (1997) define conflicto como un “choque u posición entre formas
688 contradictorias de interpretar una misma situación. Se habla de conflicto cognoscitivo
689 cuando dos ideas son contradictorias y chocan y producen un desequilibrio que puede
690 provocar duda y producir errores” (p. 144). En este choque de ideas algunos alumnos
691 concuerdan con otros, mientras que el resto los rechaza, para salvar la situación tuve que
692 ser más específico y remitirme a señalar la información que encaminara al resultado. A
693 continuación se presentan algunas de las respuestas que los niños respondieron:

Imagen 1.

Número de personas y asientos

	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?

la mesa chica Porque dividimos
 $117 \div 130$ y nos salió 0.9 y en la
 Grande 0.8

Imagen 2.

Número de personas y asientos

~~tema de mesas~~	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?

La mesa "chica" está llena por que le falta
 13 para llenar

Israel: Ahora vamos a darle oportunidad a los otros equipos que dicen la mesa chica está más llena. Los pueden corregir o hacer preguntas. Ustedes, ¿por qué dijeron que en la mesa chica?

Aa: Nosotros pensamos que la chica, porque dividimos $117 \div 130$ y dios 0.8

Israel: ¿Les dio 0.8?

Aa: ¿Si nos dio 0.8? /Pregunta a su equipo y revisa su hoja/

Aa: No, nos dio 0.9

Israel: 0.9, anótalo en el pizarrón

/La alumna lo escribe/

Aa: Y dividimos $416 \div 520$ y nos salió 0.8

Israel: 0.8

Aa: Entonces nosotros pensamos que porque este era más cantidad /señala 0.9/ pensamos que era la chica, la mesa más llena.

Israel: ¿La chica estaba más qué?

Aa: Tenía más cantidad.

Israel: ¿Tenía más cantidad?

Aa: Que la grande.

Israel: Que la grande, ¿está más qué? [...] casi llena. Bien, ¿si entendieron por qué ellos dicen que en la mesa chica?

Como se puede apreciar, en la imagen 1 y en la parte del registro anterior, se representa el resultado de un equipo que realizó como procedimiento una operación que consistió en realizar una división con los datos que se proporcionaban, es decir, dividir el número de personas que estaban sentadas entre el número de asientos y, de esta forma, obtener el grado de aglomeración de cada una de las mesas, así obtuvieron que la mesa chica tenía un grado de aglomeración mayor que la mesa grande, lo cual indica que es la que está más llena.

En la imagen 2 se aprecia una respuesta coherente, en la cual se argumenta que la mesa chica está más llena por que le faltan menos asientos para llenarse, llegando a tal conclusión. Por otro lado, se encontró que algunos alumnos no encontraron la relación entre las mesas, imaginando que no se podían comparar debido a que ambas tienen diferentes asientos, y se dejaron llevar por las cantidades que se les presentaban (total de asientos o número de personas).

Imagen 3.

Número de personas y asientos		
	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?

la mesa grande por que la chica tiene menos personas porque la mesa chica tiene 117 personas 130 de asientos por que la mas grande tiene 416 personas y de asientos 520

Imagen 4.

Número de personas y asientos

	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?

Mesa grande. Porque en la mesa chica hay 117 y en la mesa grande hay 416 entonces hay mas en la mesa grande

En las imágenes anteriores se muestran algunos de los resultados que ilustran las respuestas de algunos equipos en donde respondieron que la mesa que se encontraba más llena era la grande, ambos argumentan que es debido a que la mesa chica tienen menos personas, por lo tanto, no puede estar más llena que la mesa grande.

Israel: Ahora vamos a ver lo que hicieron en la parte de abajo /refiriéndose a la hoja de trabajo/. Dice: Encuentra qué tan cerca están de agotar la capacidad esas mesas; para eso ustedes hicieron unas divisiones, en la primera, ¿qué tenían que dividir?

Ao: $117 \div 130$.

Ao: El número de personas entre el número de asientos.

Israel: ¿Qué dividieron? El número de qué [...]

Aa: Dividimos $117 \div 130$.

Israel: Pero los 117 son el número de qué, ¿de asientos o de personas o de globos?

Aa: De personas.

Israel: De personas. El número de personas lo dividieron entre qué [...]

Aa: El número de asientos.

Israel: El número de asientos. Entonces, ¿cuánto les dio en la mesa chica?

Ao: 0.9

Israel: ¿Cuál es el número de personas?

Aa: 117

Israel: 117; a eso qué le voy a hacer [...] multiplicar, sumar [...]

Aos: Dividir.

Israel: Dividir, ¿entre cuánto?

Ado: 130

Mo; ¿Y cuánto le dio?

Aos: 0.9

Israel: Les dio 0.9. ¿A todos los equipos les dio 0.9?

Aos: Sí.

790 Israel: Si lo convirtieran en fracción, ¿cómo quedaría?
 791 Aa: Ciento diecisiete entre ciento treinta /el Israel escribe en el pintarrón 117/130/
 792 Israel: Si lo quisiera leer, ¿qué quiere decir este? /señala el número 117/
 793 Aos: Personas sentadas.
 794 Israel: De 130. Dice: El grado de aglomeración de la mesa chica es de 117/130 asientos, eso
 795 les dio [...]
 796 Ao: 0.9
 797 Israel: Dice: El grado de aglomeración 0.9 significa que en la mesa chica 9 de cada 10
 798 personas están [...]
 799 Aos: Sentadas.
 800 Israel: Que 9 de cada 10 asientos están [...]
 801 Aos: Ocupados.
 802 Israel: En la mesa [...]
 803 Aos: Chica.
 804 Israel: Muy bien, si a la mesa chica la dividiera en 10 asientos [...] /Dibuja una mesa
 805 rectangular y la divide en 10 partes iguales/ Dice que 0.9, ¿qué significa?
 806 Aa: Que están ocupados.
 807 Israel: ¿Cuántos?
 808 Aa: 9 de cada 10 asientos.
 809 Israel: Significa que nueve de cada qué [...]
 810 Aos: 10 asientos están ocupados.
 811 Israel: Entonces de aquí /señala dibujo de la mesa/, ¿hasta dónde sería?
 812 Aos: Hasta el nueve /pasa un alumno y rellena las primeras nueve partes/
 813 /Los alumnos cuentan los cuadros que está rellenando/
 814 Israel: Entonces, ¿cuántos asientos en la mesa chica quedaron solos?
 815 Aos: Uno.
 816 Israel: Uno. Muy bien, porque dijimos que 9 de cada 10 asientos están [...]
 817 Aos: Ocupados.
 818 Es importante que el alumno se convenza tanto de sus aciertos como de sus errores,
 819 señalo lo anterior debido a que la mayoría de los alumnos se negaban a creer que la mesa
 820 chica era la que estaba más llena, para resolver sus dudas se continuo con la hoja de trabajo
 821 y se realizó una actividad que consistió en obtener el grado de aglomeración de cada una de
 822 las mesas, la forma de obtenerlo se señala en la misma hoja; a través de este procedimiento
 823 se obtuvieron dos números decimales.
 824 Para realizar una mejor comparación se les presentó el ejemplo de que “por cada 10
 825 sillas de X mesa”, a través de este ejemplo, se les pudo decir a los alumnos que de cada 10
 826 sillas de la mesa chica 9 estaban ocupadas, y en la mesa grande por cada 10 sillas solamente

827 8 están ocupadas, de esta forma se recobró valor y significado de lo que los alumnos
828 estuvieron resolviendo y pudieron comprender mejor la situación.

829 Israel: Entonces, si en la mesa chica por cada 10 asientos me sobra uno, y en la mesa
830 grande por cada 10 asientos me sobran dos, ¿cuál es la mesa que estaba más llena? ¿La que
831 tenía 9 y le sobraba uno o la que tenía 8 y le sobraban 2?

832 Aos: La chica

833 Israel: ¿Cuál era?

834 Aos: La chica

835 Israel: La chica verdad.

836 Israel: Entonces, ¿qué pasó aquí?, ¿por qué algunos decían que en la mesa grande?

837 Aa: Porque había más personas.

838 Israel: Porque había más personas, sin embargo, aquí lo pusieron algunos de sus
839 compañeritos que decían que en la mesa chica, ¿cuántos les faltaban para llenarse?

840 Aso: 13

841 Israel: 13 y, en la mesa grande [...]

842 Aa: 104

843 Israel: ¿Cuál era la mesa que estaba más llena, la grande o la chica?

844 Aos: La chica

845 Para concluir con la actividad el maestro señala las conclusiones a las cuales se
846 llegaron, resolviendo dudas que pudieran detener el trabajo para las siguientes actividades.

847 Aunque con sus bajas y altas considero que la clase cumplió su objetivo en torno al saber
848 en juego, pues los niños resolvieron el problema por medio de sus propios recursos, si bien
849 la mayoría no llegó al resultado correcto, es de destacar que durante el desarrollo de las
850 actividades posteriores se fueron dispersando algunas dudas y se llegó a una conclusión
851 final.

852 **CONCLUSIONES**

853 Como punto final tengo algunas reflexiones acerca de la elaboración y aplicación de la
854 situación didáctica. Para comenzar, el docente debe tener un conocimiento teórico acerca de
855 la planeación y todo lo que esto conlleva, no es solo planear porque si, es decir, porque es

856 solo un requisito con el cual el docente deba cumplir, no se trata de ello. Planear es romper
857 aquellos viejos esquemas, es observar todo lo que no se ve.

858 A lo que me refiero con el párrafo anterior es que dentro de la planeación del maestro
859 debe tomar en cuenta la diversidad de alumnos que tiene y, es tarea del maestro,
860 arreglárselas para cumplir y llevarla a cabo, si el maestro carece de conocimientos teóricos,
861 todo lo que los planes y programas de estudio señalan, muy difícilmente podrá construir
862 conocimientos significativos en sus alumnos.

863 La elaboración de una situación didáctica como la anterior, tuvo que ser analizada desde
864 varias perspectivas, siempre buscando la mejor manera de trabajar con el grupo. Cabe decir
865 que desde un punto de vista muy personal y profesional no es nada sencilla su elaboración,
866 puesto que conlleva muchos conocimientos y muchas estrategias, pero ya una vez que se
867 analiza parte por parte y se van encontrando todos sus elementos implícitos, lo imposible se
868 vuelve posible.

869 La aplicación de la situación es otro tema a tratar, igual de complejo que el anterior, pues
870 en la teoría se trata de ir más allá de donde los niños pueden llegar, contemplando todo,
871 desde el tiempo, los recursos y materiales, la infraestructura, todo. Pero, puede darse el caso
872 que no es posible esto, es ahí la diferencia entre la elaboración y la aplicación, que no se
873 sabe si en verdad se cumpla todo lo escrito al pie de la letra, ya que entran otros factores
874 externos que no se contemplaron en la elaboración. Es por ello que el docente debe de estar
875 preparado para lo que venga y no dejarse llevar por el simple sentido común o una
876 improvisación.

877 Puedo rescatar que dentro de la situación no se contemplan momentos de indisciplina
878 que sí se vivieron, al igual los diferentes ritmos de trabajo, ya que no todos los niños

879 aprenden lo mismo, ni de la misma manera, ni al mismo tiempo, para estas situaciones el
880 docente tiene que estar preparado y siempre tener un As bajo la manga.

881 **REFERENCIAS**

882 C. Parra, I. Saiz (comp.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires,
883 Paidós Educador

884 Centeno Pérez, J. (1997). *Números decimales ¿por qué? ¿para qué?* España: Síntesis.

885 Frola, P., & Velásquez, J. (2011). *Manual operativo para el diseño de situaciones*
886 *didácticas por competencias*. México: CIECI.

887 Gálvez, G. (1994): “La didáctica de las matemáticas”

888 Ortiz, E. (2002). *Contar con los cuentos*. Ciudad Real, España: Ñaqu

889 SEP. (2011). *Programas de estudio 2011, guía para el maestro. Educación básica,*
890 *primaria. Primer año*. México: SEP.

Secretaría de Educación del Gobierno del Estado
Universidad Pedagógica Nacional
Unidad 241

**“CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE PROFESORES EN
FORMACIÓN DE PRIMARIA. ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE
RAZÓN”**

TESIS:

**Que para obtener el grado de Doctor en Desarrollo Educativo con
Énfasis en Formación de Profesores.**

PRESENTA:

Ana María Reyes Camacho

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Leticia Sosa Guerrero

San Luis Potosí, S.L.P.

Junio 2018

Doctorado Regional en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores

Estados que integran la Región:

Coahuila

Nuevo León

Tamaulipas

San Luis Potosí

Zacatecas

DICTAMEN DE TRABAJO DE TESIS

San Luis Potosí, S.L.P., 18 de mayo de 2018.

**C. MTRA.
ANA MARÍA REYES CAMACHO
P R E S E N T E. –**

En mi calidad de Coordinador Regional del programa de Doctorado Capítulo Noreste, de la Universidad Pedagógica Nacional, y después de haber sido analizado el **TRABAJO DE TESIS** titulado: *"Conocimiento especializado de profesores en formación de primaria. Enseñanza de la noción de razón"* encuentro que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos en vigor para ser presentado ante el H. Jurado del examen para la obtención de Grado, por lo que deberá entregar los 12 ejemplares requeridos como parte de su expediente institucional.

ATENTAMENTE



LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN
Coordinador Regional del Doctorado



Vo. Bo.



JOSÉ JAVIER MARTÍNEZ RAMOS
Director de la Unidad

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a Dios, por ser mi guía, mi luz y mi fuerza en cada momento de mi vida, sobre todo en esta maravillosa etapa de mi formación profesional. ¡Gracias!

A la Dra. Leticia Sosa, a quien conocí cuando decidí emprender esta aventura académica y quien pocos días después se convirtió en mi Directora de tesis. Agradezco infinitamente sus asesorías y sus consejos. Su ejemplo es motivo de impulso para muchas personas.

Al Dr. Eugenio Lizarde Flores, a quien conocí en mi formación inicial y se ha convertido en mi asesor, compañero y amigo en el ejercicio de la docencia. Gracias por esas palabras que inquietan para seguir avanzando.

Al Dr. José Carrillo Yáñez, a quien tuve el placer de conocer a través de la Dra. Leticia y el Dr. Eugenio. Gracias por aceptar ser mi asesor, por compartir conmigo su tiempo, familia y espacio en México y en Huelva, España. Gracias por su paciencia y asesorías, su huella está presente en las páginas de este documento. ¡Es un placer coincidir con personas como usted!

Al Dr. Luis Manuel Aguayo y al Dr. Jaime Calderón, por la coordinación de este programa de doctorado en U.P.N. Gracias por las gestiones que realizan en beneficio de los estudiantes. Gracias por permitirnos soñar, pero sobre todo, hacer realidad esos sueños.

A la Dra. Nielka Rojas, al Dr. Daniel Eudave, al Dr. Javier Lezama, al Dr. Aguayo y a mis asesores por las observaciones realizadas a esta investigación. Gracias por dedicar tiempo a la lectura de este trabajo.

A mis compañeros y compañeras del doctorado de U.P.N. Claudia y Mary gracias por su amistad y apoyo incondicional en lo profesional y en lo personal.

A los integrantes del Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva, España, por sus aportaciones en beneficio de esta investigación.

A mis estudiantes de la Escuela Normal de San Marcos, en particular a quienes colaboraron en este trabajo, gracias por el tiempo y el esfuerzo dedicado.

Al Mtro. José Luis Zúñiga Zumarán, al Dr. Selso Loera Serrano y al Mtro. Gerardo Herrera Báez, quienes como directivos de la Escuela Normal me han apoyado durante su gestión para que pueda avanzar en el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a la Dra. Gema Mercado Sánchez, Secretaria de Educación en el Estado de Zacatecas, al Mtro. José Honorio Jiménez, en su momento director de Formación Docente y Desarrollo Educativo y al Mtro. Guillermo Guerra Mireles, Jefe del Departamento de Normales, por sus gestiones para que pudiera realizar una estancia académica en la Universidad de Huelva, España durante el semestre par del ciclo escolar 2016-2017.

A Emy por recibirme en su casa y convertirse en mi familia durante mi estancia en Huelva.

A María Antonia y el resto de amistades que hice en Huelva, por su hospitalidad y lograr que me enamore de este maravilloso lugar y quiera regresar.

A mis compañeros y amigos del aula de doctorado de la Universidad de Huelva, por su apoyo incondicional durante mi estancia y que perdura hasta hoy día.

DEDICATORIAS

A mis papás

Ana Luisa y Jesús

Por su amor, por su apoyo incondicional, por sus palabras de aliento para que día a día me supere en el ámbito profesional y personal. ¡Los amo!

A mis abuelitos

Nicolás y María del Rosario

Por apoyarme en todo lo que emprendo, por estar siempre para mí. Abuelito, esperamos con ansias el momento de tener este documento en nuestras manos, pero desafortunadamente días antes me abandonas físicamente... Sé estás a mi lado disfrutando de esto que construimos juntos. ¡Te amo!

A mis hermanos

Israel, Daniela, Abel y Uriel

Por su comprensión y apoyo en cada momento de mi vida y, más aún, en esta etapa de elaboración de mi tesis. Israel, gracias por ser el ángel que me cuida y mi fuente de inspiración.

A Juan Carlos

Por estar conmigo, por apoyarme en mis proyectos, sin importar lo que implique. Gracias por acompañarme en esta aventura académica.

ÍNDICE

RESUMEN	16
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN	17
I.1. Motivación y objeto de estudio	17
I.2. Problema de investigación, preguntas y objetivos	19
I.3. Contexto de la investigación.....	22
I.4. Estructura del trabajo	23
CAPÍTULO II. ANTECEDENTES	26
II.1. Introducción.....	26
II.2. Investigaciones del conocimiento matemático de fracciones de profesores de primaria.....	28
II.3. Investigaciones del conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria.....	37
CAPÍTULO III. PERSPECTIVA TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN	53
III.1. Introducción	53
III.2. El desarrollo profesional y la formación de profesores.....	53
III.2.1. Saberes, conocimientos y competencias. Aspectos dominantes en la formación de profesores.....	55
III.2.2. Los conocimientos del profesor	56
III.2.3. El conocimiento profesional del profesor	57
III.2.4. El conocimiento para la enseñanza	58
III.2.5. Otras perspectivas sobre el conocimiento del profesor	61
III.2.6. El conocimiento matemático para la enseñanza. Una visión del conocimiento del profesor desde su práctica	63
III.2.7. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas	66
III.3. Las fracciones a través de la historia	80
III.3.1. Las fracciones como objeto de estudio. Su papel en el campo de los números racionales.....	84
III.3.1.1. Fundamentos teóricos y propiedades de las fracciones.....	85
III.3.1.2. Las fracciones y sus diferentes significados como objeto de estudio	93
III.3.1.3. Propuestas para la enseñanza de las fracciones y sus significados. El papel del significado razón.....	104

CAPÍTULO IV. PERSPECTIVA METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN	114
IV.1. Introducción	114
IV.2. Paradigma de investigación.....	115
IV.3. Diseño de la investigación.....	118
IV.3.1. Estudio de casos.....	119
<i>IV.3.1.1. Selección y caracterización del caso</i>	121
<i>IV.3.1.2. Caso Daniela e Israel</i>	121
IV.3.2. Escenarios de la investigación	123
IV.4. Proceso e instrumentos de recuperación de datos.....	125
IV.4.1. Revisión de documentos.....	127
IV.4.2. Videograbación de clases	128
IV.4.3. Entrevistas semiestructuradas	131
<i>IV.4.3.1. Entrevista Semiestructurada 1</i>	132
<i>IV.4.3.2. Entrevista Semiestructurada 2</i>	135
IV.5. Proceso e instrumentación de análisis de datos.....	139
IV.5.1. Análisis de contenido	139
<i>IV.5.1.1. Unidades de análisis</i>	139
<i>IV.5.1.2. Categorías y codificación</i>	165
<i>IV.5.1.3. Identificación de evidencia, indicio y oportunidad de investigación.....</i>	169
IV.6. Triangulación de las fuentes de datos	173
IV.7. Rigor de la investigación.....	174
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LOS DATOS	177
V.1. Introducción	177
V.2. Análisis de conocimiento especializado de Daniela.....	180
V.2.1. Conocimiento especializado de Daniela en función de los elementos que contextualizan el diseño de tareas [Planificación_Daniela_1. 1-5].....	181
<i>V.2.1.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Elementos que contextualizan el diseño de tareas.</i>	190
<i>V.2.1.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Elementos que contextualizan el diseño de tareas.....</i>	191
V.2.2. Tareas de apertura [Planificación_Daniela_2. 26-47]. Conocimiento especializado de Daniela.....	193

V.2.2.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Tareas de apertura.</i>	209
V.2.2.2. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Tareas de apertura.</i>	210
V.2.3. Tarea principal (Primera parte) [Planificación_Daniela_3. 48-78]. Conocimiento especializado de Daniela.	213
V.2.3.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores de conocimiento del MTSK. Tarea principal (primera parte).</i>	226
V.2.3.2. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Tarea principal (primera parte).</i>	227
V.2.4. Subtareas para resolver la tarea principal [Planificación_Daniela_3.1. 79-111; 3.2. 112-136; 3.3. 137-171]. Conocimiento especializado de Daniela.	229
V.2.5. Subtarea 1 [Planificación_Daniela_3.1. 79-111]. Conocimiento especializado de Daniela.	238
V.2.6. Subtarea 2 [Planificación_Daniela_3.2. 112-136]. Conocimiento especializado de Daniela.	246
V.2.7. Subtarea 3 [Planificación_Daniela_3.3. 137-171]. Conocimiento especializado de Daniela.	254
V.2.7.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas para resolver la tarea principal. Subtarea 3.1.</i>	270
V.2.7.2. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas para resolver la tarea principal. Subtarea 3.2.</i>	271
V.2.7.3. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas para resolver la tarea principal. Subtarea 3.3.</i>	272
V.2.7.4. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Subtareas para resolver la tarea principal.</i>	273
V.2.8. Tarea principal (Segunda parte) [Planificación_Daniela_3.4. 172-176]. Conocimiento especializado de Daniela.	278
V.2.8.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Tarea principal (segunda parte).</i>	290
V.2.8.2. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Tarea principal (segunda parte).</i>	291
V.3. Análisis de conocimiento especializado de Israel	294
V.3.1. Conocimiento especializado de Israel en función de los elementos que contextualizan el diseño de tareas [Planificación_Israel_1. 1-11]	295

V.3.1.1. <i>Figura de relaciones de conocimiento entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Elementos que contextualizan el diseño de tareas.</i>	311
V.3.1.2. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Elementos que contextualizan el diseño de tareas.</i>	312
V.3.2. Tareas de apertura [Planificación_Israel_2. 13-66]. Conocimiento especializado de Israel.	315
V.3.2.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Tareas de apertura.</i>	331
V.3.2.2. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Tareas de apertura.</i>	332
V.3.3. Tareas del desarrollo de la Planificación	334
V.3.4. Subtareas 3.1. Conocimiento especializado de Israel.	334
V.3.4.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Tareas del desarrollo 3. Subtareas 3.1.</i>	391
V.3.4.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.1.1.</i>	392
V.3.4.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.1.2.</i>	393
V.3.4.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.1.3.</i>	394
V.3.4.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.1.3.</i>	395
V.3.4.2. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Subtareas 3.1.</i>	396
V.3.5. Subtareas 3.2. Conocimiento especializado de Israel.	403
V.3.5.1. <i>Figura de relaciones de conocimiento entre dominios y subdominios del MTSK. Subtareas 3.2.</i>	442
V.3.5.2. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Subtareas 3.2.</i>	444
V.3.6. Subtareas 3.3. Conocimiento especializado de Israel.	447
V.3.6.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.3.</i>	469
V.3.6.1. <i>Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.3.</i>	470
V.3.6.2. <i>Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Subtareas 3.3.</i>	471

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES.....	475
VI.1. Introducción	475
VI.2. En relación con los indicadores de conocimiento de los dominios y subdominios del MTSK	475
VI.2.1. Dominio de conocimiento matemático	475
<i>VI.2.1.1. Sobre el conocimiento de los temas (KoT).....</i>	476
<i>VI.2.1.2. Sobre el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)</i>	477
<i>VI.2.1.3. Sobre el conocimiento de la práctica matemática (KPM).....</i>	477
VI.2.2. Dominio del conocimiento didáctico del contenido	477
<i>VI.2.2.1. Sobre el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)</i>	477
<i>VI.2.2.2. Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT).....</i>	480
<i>VI.2.2.3. Sobre el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).....</i>	484
VI.3. En relación con la formación de profesores.....	486
VI.4. Aportaciones de la investigación en el contexto de la perspectiva teórica del MTSK	487
VI.5. Limitaciones del estudio y futuras investigaciones	492
REFERENCIAS	496
ANEXOS (se incluyen en un CD)	

LISTA DE SIGLAS

MTSK - Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge)

MK - Conocimiento matemático

KoT - Conocimiento de los temas

KoT_D – Definiciones

KoT_R - Registros de representación

KoT_P – Procedimientos

KoT_F - Fenomenología y aplicaciones

KSM - Conocimiento de la estructura matemática

KSM_C - Conexiones de complejización

KSM_S - Conexiones de simplificación

KSM_T - Conexiones transversales

KSM_A - Conexiones auxiliares

KPM - Conocimiento de la práctica matemática

KPM_PR - Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos

KPM_VD - Formas de validación y demostración

KPM_SL - Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal

KPM_RP - Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas

KPM_P - Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)

KPM_CD - Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones

PCK – Conocimiento didáctico del contenido

KFLM - Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas

KFLM_T - Teorías de aprendizaje

KFLM_FD - Fortalezas y dificultades

KFLM_IC - Formas de interacción con un contenido matemático

KFLM_IE - Intereses y expectativas

KMT - Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

KMT_T - Teorías de enseñanza

KMT_R - Recursos materiales y virtuales

KMT_ES_T_TA_E - Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

KMLS - Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

KMLS_EA - Expectativas de aprendizaje

KMLS_NCP - Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado

KMLS_TAP - Secuenciación con temas anteriores y posteriores

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Investigaciones relacionadas con el conocimiento matemático de fracciones de profesores de primaria	36
Tabla 2. Investigaciones relacionadas con el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria	49
Tabla 3. Los conocimientos del profesor (tomada de Marcelo, 1992, s.p.)	62
Tabla 4. Origen de las fracciones a través de la historia	80
Tabla 5. Inverso aditivo en números enteros y números racionales	88
Tabla 6. Modelos de relaciones entre fracciones y razones (Clark et al., 2003, pp. 299-301)	102
Tabla 7. Preguntas de Entrevista Semiestructurada 1.....	133
Tabla 8. Preguntas de la Entrevista Semiestructurada 2.....	135
Tabla 9. Ejemplo de números insertados en las líneas del texto de la Planificación de Daniela	140
Tabla 10. Ejemplo de números insertados en las líneas de la transcripción de la Entrevista Semiestructurada 2 de Daniela	140
Tabla 11. Ejemplo de números insertados en las líneas de la transcripción de la Videograbación de Daniela	141
Tabla 12. Ejemplo de números insertados en las líneas del texto del Análisis de la Práctica de Daniela.....	142
Tabla 13. Elementos que contextualizan el diseño de tareas.....	143
Tabla 14. Tareas de apertura de la Planificación de Daniela.....	144
Tabla 15. Tarea principal de Daniela.....	146
Tabla 16. Subtareas de Daniela. Subtarea 3.1.	148
Tabla 17. Subtareas de Daniela. Subtarea 3.2.	150
Tabla 18. Subtareas de Daniela. Subtarea 3.3.	151
Tabla 19. Subtareas de Daniela. Subtarea 3.4.	152
Tabla 20. Elementos que contextualizan el diseño de tareas de Israel	153
Tabla 21. Tareas de apertura de la Planificación de Israel	153
Tabla 22. Tareas de desarrollo de la Planificación de Israel. Subtareas 3.1.....	156
Tabla 23. Tareas de desarrollo de la Planificación de Israel. Subtareas 3.2.....	160
Tabla 24. Tareas de desarrollo de la Planificación de Israel. Subtareas 3.3.....	163
Tabla 25. Categorías MTSK (18-11-2016).....	166

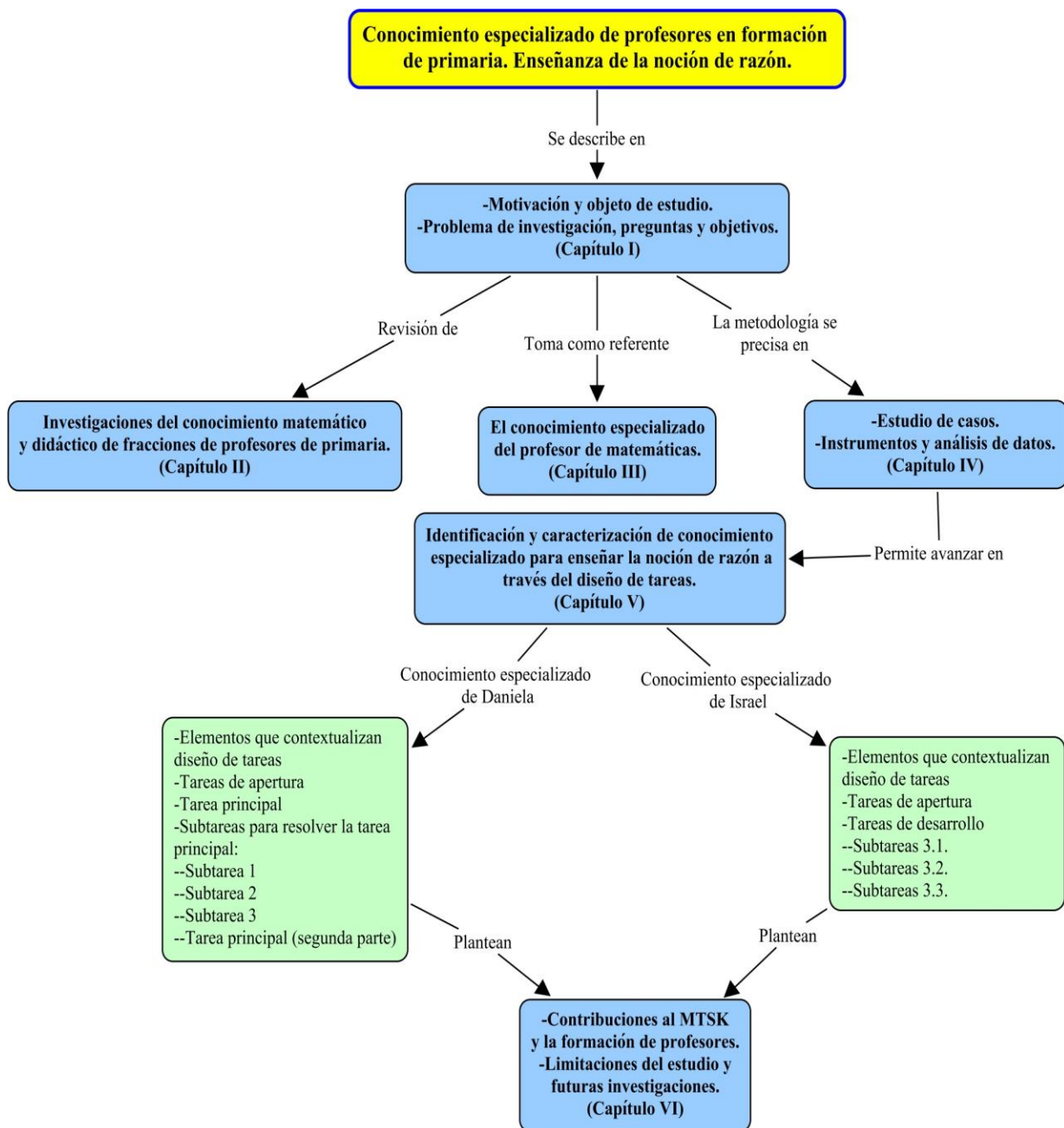
ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Estructura general del contenido de la tesis	17
Figura 2. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de Ball et al. (2008, citado en Sosa, 2011, p. 30)	64
Figura 3. Diagrama del <i>Mathematics Teacher's Specialized Knowledge-MTSK</i> (Carrillo et. al, 2013).....	69
Figura 4. Modelo 4) de relaciones entre fracciones y razones (Clark et al., 2003, p. 307)....	103
Figura 5. Articulación de los diferentes significados de la fracción (Mochón, 1990, citado en Lizarde, 2013, p. 60).....	105
Figura 6. Niveles del conocimiento sobre los números racionales de Kieren (1988, en Mancera, 1992, p. 48).....	106
Figura 7. Esquema conceptual para la instrucción de los números racionales (Behr et al., 1983, s.p.)	107
Figura 8. Modelo que vincula los cinco subestructos de las fracciones a las operaciones de fracciones y la resolución de problemas (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005, p. 237)	108
Figura 9. Comprensión del número racional (Llinares y Sánchez, 1997, p. 76).....	109
Figura 10. Propuesta de enseñanza para la interpretación parte-todo y las operaciones (Llinares y Sánchez, 1997, p. 76)	110
Figura 11. Siete puntos considerados para el desarrollo del pensamiento multiplicativo (Lamon, 2007, p. 652)	112
Figura 12. Sistematización y sentido formativo de la práctica (tomada de SEP, 2012c, p. 17)	125
Figura 13. Proceso de recuperación de datos de la investigación	126
Figura 14. Videograbaciones de clases recuperadas	129
Figura 15. Fragmento de Planificación de Daniela	170
Figura 16. Instrumentos de recuperación de la información de Daniela	179
Figura 17. Instrumentos de recuperación de la información de Israel	293
Figura 18. Subtareas 3.1. (Primera parte).....	342
Figura 19. Subtareas 3.1. (Segunda parte).....	343
Figura 20. Subtareas 3.2.	404
Figura 21. Subtareas 3.3.	448

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Fracciones históricas (León, 2010, p.6)	82
Ilustración 2. Representación figural de un medio	171
Ilustración 3. Representación numérica y figural de fracciones	172
Ilustración 4. Representación figural de fracciones en contextos continuos o discretos	198
Ilustración 5. Representación numérica y figural de fracciones	199

Figura 1. Estructura general del contenido de la tesis



RESUMEN

En esta investigación identificamos y caracterizamos el conocimiento de dos profesores en formación inicial de primaria (Daniela e Israel) para enseñar la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad a través de un estudio casos instrumental. En este trabajo tomamos como referente el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés – Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) para obtener información sobre el Conocimiento Matemático (MK, por sus siglas en inglés – Mathematical Knowledge) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK, por sus siglas en inglés –Pedagogical Content Knowledge).

El diseño de planificaciones, entrevistas semiestructuradas antes y después de su aplicación, videgrabaciones de clases y documentos de análisis de la práctica se constituyen como fuentes de recuperación de información que organizamos en función de tareas (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Entre los principales resultados de esta investigación encontramos la identificación y caracterización de conocimiento especializado para enseñar la noción de razón en dos grupos de quinto grado de educación primaria, a partir de elementos que contextualizan el diseño de tareas, tareas de apertura, tareas principales, subtareas para resolver una tarea principal y tareas del desarrollo.

En los elementos que contextualizan el diseño de tareas prevalecen evidencias e indicios de conocimientos de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, por sus siglas en inglés– *Knowledge of Mathematics Learning Standards*). En el caso de las tareas de apertura, destacan conocimientos de los temas matemáticos (KoT, por sus siglas en inglés– *Knowledge of Topics*), en particular de la definición de razón como un significado de la fracción (comparación entre dos cantidades de igual o diferente magnitud) y como parte de la proporcionalidad (cociente). En las tareas principales, subtareas para resolver una tarea principal y tareas del desarrollo identificamos evidencias e indicios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, por sus siglas en inglés– *Knowledge of Mathematics Teaching*), a la par del empleo de los libros de matemáticas del alumno de educación primaria (2013-2014) y la Serie Matemáticas para Educación Normal (2012), así como el conocimiento de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986). Una de las principales aportaciones de este trabajo se centra en la identificación de relaciones entre conocimientos matemáticos y didácticos en las tareas descritas para enseñar la noción de razón. Por ejemplo, entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento de los temas matemáticos, entre otras relaciones que describimos de manera amplia en el desarrollo de esta investigación.

Palabras clave: Formación Inicial de Profesores, Primaria, MTSK, noción de razón, fracciones, proporcionalidad.

CAPÍTULO I.

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

I.1. Motivación y objeto de estudio

La formación de profesores ocupa un lugar prioritario en el ámbito educativo. En este contexto emerge el estudio del conocimiento profesional idóneo que un docente debe poseer para contribuir a su desempeño eficiente en el trabajo cotidiano, dentro y fuera de las aulas. En educación matemática existen diferentes investigadores que se han preocupado por esta situación (e.g. Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013), lo cual ha permitido el desarrollo de diferentes estudios en esta línea de investigación.

La motivación inicial que da origen a esta investigación la sustentamos en la inquietud por identificar el conocimiento matemático y didáctico que los profesores en formación inicial ponen en juego cuando enseñan las fracciones en la escuela primaria, ya que éstas poseen diferentes significados (Llinares y Sánchez, 1997), situación que hace sean vistas como un tema complejo por los docentes y los alumnos. Al respecto, Figueras (1988) señala se convierten en un tema que presenta dificultades, tanto en su enseñanza y aprendizaje en los niveles básico y medio básico. Además, Ávila (2001) precisa las fracciones como “uno de los objetos de enseñanza reconocidos tradicionalmente como más difíciles en la educación primaria” (p.198).

De acuerdo con Aguayo (2005), los diferentes significados de las fracciones generaron determinaciones didácticas que han influido en los currículos de las escuelas elementales y, por consecuente, “[...] los programas de estudio para las escuelas normales también han incluido los significados de la fracción como un saber a enseñar” (p.113). De ahí que, en el inicio de esta investigación nuestra preocupación estaba en el estudio de las fracciones y sus significados pero conforme avanzamos en la revisión de algunas investigaciones y aplicación de algunos instrumentos (Reyes y Sosa, 2014), identificamos el estudio de la noción de razón como uno de los significados de las fracciones menos explorados. A esto le agregamos algunas reflexiones que emite Block (2001) en torno a la ubicación de la noción de razón en la intersección de dos temas: las fracciones y la proporcionalidad; lo anterior y otras series de situaciones que describimos en el siguiente apartado, nos

llevaron a interesarnos en el conocimiento especializado (Carrillo et al., 2013)¹ de profesores en formación inicial de primaria para enseñar la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

I.2. Problema de investigación, preguntas y objetivos

Un elemento fundamental en el diseño de una investigación es el planteamiento del problema de la misma, definido por Strauss y Corbin (2002) como un “área general o sustantiva en que se centra la investigación” (p. 39). Seleccionar esa “área general o sustantiva”, requiere de un trabajo sistemático por parte del investigador. Más adelante, estos autores mencionan que un problema investigable puede emerger de diferentes fuentes como:

1. Problemas de investigación sugeridos o asignados
2. La literatura técnica y no técnica
3. La experiencia personal y profesional
4. La investigación misma

En coincidencia, Merriam & Tisdell (2016) destacan tres fuentes de las que puede surgir un problema de investigación:

1. Interés personal en el campo y desde el propio lugar de trabajo
2. Los problemas sociales y políticos actuales
3. La literatura, especialmente de la investigación o teoría previa en un área

En este trabajo, las fuentes que nos orientaron en la definición del problema de investigación fueron la literatura técnica y no técnica y la experiencia personal y profesional (Strauss y Corbin, 2002), las cuales se relacionan con las fuentes: interés personal en el campo y desde el propio lugar de trabajo y la literatura; ambas desde la perspectiva de Merriam & Tisdell (2016). Estos últimos autores señalan que las fuentes se pueden cruzar al elegir un tema de investigación. En los siguientes párrafos justificamos porque nos situaciones en la literatura técnica y no técnica y, la experiencia personal y profesional.

Respecto a la literatura técnica y no técnica como fuente de un problema, Strauss y Corbin (2002) retoman aportaciones de Silverman (1993) y señalan que puede estimular la investigación hacia áreas poco exploradas o sugerir un tema que se pueda desarrollar. Además, cuando un investigador lee sobre

¹ En esta investigación adoptamos como perspectiva teórica el *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge-MTSK)*, el cual describimos en el Capítulo III.

un tema, éste le puede sugerir reconstruir la comprensión del mismo o estimular su curiosidad. En este sentido, la revisión de algunas investigaciones sobre el conocimiento matemático y didáctico que profesores en formación inicial y continua ponen en juego cuando enseñan la razón vista desde el estudio de los números racionales (Aguayo, 2005; Block, 2001; González, 2005; Lizarde, 2013) y la proporcionalidad (Ramírez y Block, 2009), nos orienta a indagar en esta línea de investigación. De ahí que destacamos, la noción de razón se encuentra en la intersección de las fracciones y la proporcionalidad (Block, 2001), motivo por el cual se convierte en objeto de estudio en esta investigación desde el contexto de las fracciones, sin embargo, por las conexiones que tiene con la proporcionalidad, podemos identificar conocimientos matemáticos y didácticos cuando se establecen algunas relaciones de proporcionalidad.

En relación con la experiencia profesional, Strauss y Corbin (2002) señalan “suele llevar a juicios que declaren que alguna característica de la profesión o de su práctica es menos efectiva, eficiente, humana o equitativa de lo que debería ser” (p. 42), lo cual puede motivar el desarrollo de una investigación. Así, debido a que uno de los investigadores (autora) labora en la formación inicial de profesores de primaria, identificamos que el estudio de las fracciones y sus significados (Llinares y Sánchez, 1997) es un tema de interés para los formadores y los estudiantes, debido a las dificultades que se presentan en su enseñanza, cuyo origen puede atender a los obstáculos epistemológicos que las caracterizan (Lizarde, 2013), por citar un ejemplo. Además, el significado razón es uno de los menos explorados en la institución, debido a que su estudio formal se ubica en las últimas unidades del programa de aritmética: su aprendizaje y enseñanza (primer semestre).

Con base en las fuentes de la literatura técnica y no técnica anteriores, así como la experiencia personal y profesional decidimos realizar esta investigación en la formación inicial de profesores de primaria cuando enseñan el significado razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, bajo la perspectiva teórica del MTSK.

Conceptuar un problema y expresarlo de manera clara requiere, además de su planteamiento, de objetivos o preguntas de investigación que definan la dirección del estudio (Albert-Gómez, 2007). De acuerdo con Strauss y Corbin (2002) “la pregunta de investigación en un estudio cualitativo es una declaración que identifica los fenómenos que se van a estudiar y les dice a los lectores qué quiere saber específicamente el investigador sobre su tema” (p. 46). De ahí que en esta investigación atenderemos a las siguientes preguntas:

Pregunta central:

- ¿Cuál es el conocimiento especializado que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?

La pregunta central nos permite señalar que nos vamos a enfocar en la formación inicial de profesores de primaria, en el área de las matemáticas; de manera específica en el conocimiento especializado que evidencian dos futuros profesores cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad (tema). Esta pregunta central está acompañada por tres preguntas complementarias.

Preguntas complementarias:

- ¿Cuáles son los elementos de conocimiento matemático que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?
- ¿Cuáles son los elementos de conocimiento didáctico del contenido que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?
- ¿Cuáles son las posibles relaciones entre dominios de conocimiento que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?

Las preguntas de investigación que describimos nos permitieron determinar qué observar en el trabajo de campo y los temas sobre los que podíamos preguntar en el caso de la realización de una entrevista, por citar un ejemplo (Merriam & Tisdell, 2016).

Una vez que mencionamos las preguntas de investigación que delimitan este estudio, pasamos a exponer los objetivos que precisan el desarrollo de esta investigación:

Objetivo general:

- Identificar y caracterizar el conocimiento especializado que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

Objetivos particulares:

- Identificar y caracterizar los elementos de conocimiento matemático que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.
- Identificar y caracterizar los elementos de conocimiento didáctico del contenido que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.
- Identificar y caracterizar las posibles relaciones entre dominios de conocimiento que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

I.3. Contexto de la investigación

La investigación se desarrolla con dos profesores mexicanos, específicamente del estado de Zacatecas, en formación inicial de primaria que cursan el quinto semestre de la licenciatura en educación primaria, bajo el Plan de Estudios 2012, los cuales llevaron los cursos de matemáticas que se ubican en el trayecto formativo *preparación para la enseñanza y el aprendizaje*: aritmética: su aprendizaje y enseñanza (primer semestre), álgebra: su aprendizaje y enseñanza (segundo semestre), geometría: su aprendizaje y enseñanza (tercer semestre) y procesamiento de la información estadística (cuarto semestre).

Los profesores en formación inicial, que para fines de esta investigación hemos identificado como Daniela e Israel, destacan por sus conocimientos en el contexto de las fracciones. Así, diseñan una serie de actividades para enseñar la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en dos grupos de quinto grado de educación primaria. En esta investigación, las actividades anteriores van acompañadas de entrevistas semiestructuradas, videograbaciones de clases y documentos de análisis de la práctica, los cuales permiten identificar y caracterizar el conocimiento especializado de la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación, a partir de la información que nos brinda Daniela e Israel.

I.4. Estructura del trabajo

El presente trabajo está estructurado en 6 capítulos y un apartado más que corresponde a las referencias. Este capítulo se constituye como el primero, mismo que hemos denominado *Introducción*, donde agregamos la problemática, motivación y contexto. Enseguida presentamos el problema, preguntas y objetivos de la investigación, así como la estructura del trabajo.

En el segundo capítulo, *Antecedentes*, incluimos la revisión de algunas investigaciones que se han realizado con el propósito de identificar el conocimiento matemático y didáctico de fracciones de profesores de primaria (formación inicial y continua). En este espacio destacamos las investigaciones que con respecto al significado razón se han difundido. Así, de manera general, planteamos el alcance de este trabajo.

El tercer capítulo, *La perspectiva teórica de la investigación*, lo organizamos en dos apartados principales; en el primero destacamos el Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) como la teoría de referencia en la realización de esta investigación, así como la revisión de algunas investigaciones en el campo del conocimiento del profesor (Shulman, 1986; Ball et., 2008). En el segundo apartado, presentamos el papel de las fracciones a través de la historia, donde las identificamos como objeto de estudio y definimos cada uno de los significado que posee (Llinares y Sánchez, 1997).

En el cuarto capítulo, *Perspectiva metodológica de la investigación*, damos a conocer el paradigma que guía esta investigación (perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica) y el diseño de la misma, donde destacamos el estudio de casos instrumental (Stake, 1999). Más adelante, describimos el proceso e instrumentos de recuperación de datos y el proceso e instrumentación de análisis de los mismos.

El quinto capítulo, *Análisis y resultados de los datos de Daniela e Israel*, mostramos el conocimiento especializado para enseñar la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, en función de diferentes tipos de tareas, a partir de los datos que nos arrojan nuestros informantes, dos profesores en formación inicial de primaria; cada uno de los anteriores lo presentamos en apartados diferentes. En este capítulo damos respuesta a las preguntas y objetivos de la investigación.

El sexto capítulo, *Conclusiones*, está organizado en cuatro apartados. En el primer apartado presentamos conclusiones de la investigación en relación con los indicadores de conocimiento definidos en los dominios y subdominios del conocimiento especializado para enseñar la noción de razón en su doble manifestación. Luego, incluimos conclusiones en términos de la formación de profesores. Enseguida, describimos algunas aportaciones de este trabajo en el contexto del MTSK y, al final, damos a conocer algunas limitaciones y futuras líneas de investigación en función de este estudio.

El último apartado que hemos denominado *Referencias*, muestra los referentes teóricos que sustentan los diferentes capítulos y apartados de esta investigación.

CAPÍTULO II.

ANTECEDENTES

CAPÍTULO II. ANTECEDENTES

II.1. Introducción

Desde hace años, el conocimiento matemático y didáctico de los profesores se ha convertido en objeto de investigación en numerosos estudios, en diferentes ámbitos (local, nacional e internacional) y niveles de educación (preescolar, primaria, secundaria, bachillerato e instituciones de educación superior). En la revisión que realizamos en este apartado seleccionamos aquellas investigaciones centradas en el conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones de Profesores de Primaria en Formación Inicial² y Formación Continua³.

Las fracciones son un tema complejo debido a la diversidad de significados que posee: parte-todo, medida, cociente, razón y operador (Ávila, 2001; Fandiño-Pinilla, 2009; Lizarde, 2013; Llinares y Sánchez, 1997). En este sentido, aunque nuestro interés está centrado en el significado razón, revisamos todas aquellas investigaciones relacionadas con conocimientos matemáticos y didácticos de fracciones de profesores de primaria, con el propósito de identificar los significados que aparecen en las investigaciones y si en algunas de ellas se establece alguna relación directa e indirecta con la noción de razón.

Los insumos para la elaboración del presente apartado, los obtuvimos a partir de la revisión bibliográfica que realizamos en diferentes revistas de educación matemática nacionales e internacionales: Educación Matemática, Journal for Research in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics, ZDM-The International Journal on Mathematics Education, PNA revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Además, revisamos las revistas Perfiles Educativos y Enseñanza de las Ciencias. También realizamos una búsqueda amplia de 2010 a 2016 en las actas de congresos internacionales como la del Grupo Psychology of Mathematics Education (PME), Congress of European Research in Mathematics Education (CERME), la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y las actas del Comité Interamericano de Educación Matemática.

² En México, la formación inicial de profesores se define como el periodo en el que inician sus estudios como docente en una escuela normal o en una universidad, cuya temporalidad comprende aproximadamente 4 años.

³ La formación continua de los profesores inicia con su inmersión en la docencia, a partir de su egreso de una escuela formadora de profesores.

Otra fuente importante fue el estado del conocimiento del Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE) 2002-2011, además de las memorias electrónicas del Congreso Nacional de Investigación Educativa en su edición XI (2011), XII (2013) y XIII (2015). La base de datos ERIC, así como algunas tesis de doctorado y maestría en el ámbito nacional e internacional se convirtieron en apoyo para la redacción de este apartado (e.g. Castro-Rodríguez, 2015).

Finalmente, es conveniente mencionar que existen algunas investigaciones que no se encontraron en las fuentes citadas, y se agregan en este trabajo, debido a la importancia de la información presentada en relación con el estudio del conocimiento profesional de las fracciones en la educación.

Las investigaciones recopiladas nos permitieron identificar las temáticas que con respecto al conocimiento matemático y didáctico de las fracciones de los profesores de primaria en formación inicial y continua se han realizado en los últimos años, lo cual contribuye a delimitar el lugar que ha ocupado el estudio del significado razón. De ahí que, el presente apartado, lo estructuramos en dos secciones:

1. Investigaciones del conocimiento matemático de fracciones de profesores de primaria (formación inicial y continua)

La información que contiene esta sección la organizamos en función de las investigaciones que se han realizado sobre el conocimiento matemático de la noción de fracción, seguida del estudio de los diferentes significados de la fracción (parte-todo, medida, cociente, razón y operador) que aparecen en las investigaciones. Al final, agregamos una síntesis de la revisión con el apoyo de una tabla que muestra, las investigaciones revisadas en función del año, autor, tema y nivel en que se desarrolla (formación inicial y continua).

2. Investigaciones del conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria (formación inicial y continua)

En esta sección, destacamos las aportaciones principales de algunas investigaciones en relación con el conocimiento didáctico de las fracciones de los profesores de primaria. Al igual que la sección anterior, la acompañamos de una síntesis de las investigaciones consultadas.

II.2. Investigaciones del conocimiento matemático de fracciones de profesores de primaria

En la investigación matemática, existe una amplia preocupación por que los profesores en formación inicial y continua posean el conocimiento matemático que, en este caso, con respecto a fracciones se trabaja en las instituciones de educación, dentro de ellas el nivel de primaria (Lee, Son & Arabeyyat, 2015; Lo & Grant, 2012; Lo & Luo, 2012; Montes et al., 2015; Reyes y Sosa, 2015; Ribeiro, 2012; Tichá & Hošpesová, 2013;). Así, en diferentes investigaciones se han dedicado a identificar el conocimiento matemático que los futuros profesores tienen a partir de la aplicación de diferentes instrumentos (cuestionarios, entrevistas, entre otros).

Entre las investigaciones que indagaron sobre los conocimientos matemáticos de los futuros profesores en relación con la noción de fracción, encontramos el trabajo de Castro (2010), quien describió las ideas, imágenes y conceptos sobre fraccionar y repartir que los maestros en formación inicial de Educación Infantil y de Educación Primaria tenían cuando iniciaban sus estudios; lo anterior, a través de la aplicación de un cuestionario de respuesta abierta. Los resultados arrojaron que la mayoría asociaba fraccionar con dividir, mientras que partir y repartir estaban poco presentes en las respuestas que dieron. Los dibujos que asociaban a la idea de fraccionar se relacionaban con el contexto continuo (área). Cuando se les pidió que explicaran verbalmente qué entendían por repartir se dieron respuestas que asumían como sinónimo de repartir: dar (equitativamente o no), asignar (equitativamente o no) y distribuir (equitativamente o no). Por otra parte, en los dibujos que realizaron se encontró prevaleció el contexto discreto.

Más tarde, Fernández-Plaza et al. (2016) realizan un estudio donde ejemplifican un análisis de contenido, según varios componentes de significado de un concepto matemático, desarrollado por tres temas diferentes del currículo escolar de matemáticas, entre los que se encuentra la fracción como relación parte-todo. En esta investigación participan 358 maestros estudiantes de primer curso del grado de Educación Primaria, quienes responden de forma individual a la Tarea 1: ¿Qué es fraccionar? Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar (Castro-Rodríguez, 2010). Las respuestas de los participantes se organizan en función de la presencia o ausencia de los hechos y relaciones fundamentales de la relación parte-todo, a partir de 7 niveles que muestran la progresión de niveles de precisión en las respuestas: 1) Uno o varios verbos de acción, 2) Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a un todo, 3) Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a las partes, 4) Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a un todo y a las partes, 5) Uno o varios verbos de acción; hacen

referencia a las partes iguales, 6) Uno o varios verbos de acción; hacen referencia al todo y las partes iguales y 7) Otros. Los resultados muestran el dominio de esta noción de fracción, sus diferentes interpretaciones, cómo ha sido expresada y los modos en que ha sido usada.

En la investigación anterior, se comenzó a dibujar el interés por estudiar los conocimientos matemáticos de los futuros profesores de primaria a partir del significado parte-todo en función de la aplicación de algunas interrogantes. Sin embargo, existen otras investigaciones que intentaron caracterizar el conocimiento matemático de fracciones de profesores en formación inicial en contextos de formación que pretendían contribuir a su adquisición, tal es el caso del trabajo realizado por Tobías (2013), quien realizó una investigación con treinta y tres futuros profesores de primaria con el propósito de identificar cómo desarrollaban la comprensión del uso del lenguaje para definir el todo (fracciones), a lo largo del trabajo con una unidad de números racionales que se abordó en nueve días. Durante la unidad se plantearon problemas que se centraron en la comprensión parcial de las fracciones a través de contextos de participación para proporcionar una base para desarrollar las habilidades lingüísticas (Kieren, 1980). Los resultados de esta investigación arrojaron que tres ideas matemáticas se tomaron como compartidas a medida que la clase desarrolló una comprensión del uso del lenguaje para definir el todo. La primera fue que la solución de fracciones depende de un grupo o de un todo. La segunda incluyó la definición de una de qué. La tercera consistió en desarrollar el lenguaje en términos de lo que el denominador representa. Por otra parte, algunas de las dificultades que manifestaban los futuros profesores atendían a conceptualizar el lenguaje que incluía distinguir entre las frases “de a, de uno, de y de cada uno”.

Por otra parte, Ribeiro (2012) identificó el conocimiento matemático de 60 futuros profesores sobre fracciones y el papel de la unidad, las relaciones entre las partes y el todo y los posibles “tipos de todo”, a partir de una tarea que había sido preparada para estudiantes del quinto año (repartir cinco barras de chocolate entre seis personas-hijos), etapa en la cual probablemente los futuros profesores deberán enseñar; lo anterior, con el propósito de especificar los aspectos críticos que deben abordarse en la formación para mejorarla. Los resultados arrojaron que sólo uno de los grupos que se conformaron de cuatro o cinco estudiantes, dieron una respuesta correcta, mientras que las resoluciones incorrectas involucraban principalmente una representación pictórica o numérica tratando de hacer conexiones entre éstas. Además, estos futuros maestros tendían a basarse principalmente en el uso de cantidades enteras, mientras que otro grupo había combinado la representación pictórica con un enfoque algebraico, pero girando el objetivo central de la tarea, quitando sentido a lo que hacían y por qué lo hacían; otros daban importancia a la cantidad total de chocolate “de cada barra cada niño

recibirá”. Al final de este reporte de investigación, el autor señala que el conocimiento de los futuros profesores se revela limitado, por lo que es importante promover una formación que permita el desarrollo de estos conocimientos sobre fracciones.

El estudio del conocimiento matemático sobre el significado parte-todo de los futuros profesores de primaria es un objeto de investigación en numerosos trabajos (Castro-Rodríguez, 2015). Debido a que existen otros significados de la fracción como medida, cociente, razón y operador, existen quienes se han dedicado a su estudio (parte-todo), a la par de otro significado de la fracción. En este sentido, Lee, Son & Arabeyyat (2015) investigaron cómo los conocimientos fraccionarios de 96 futuros profesores estaban relacionados con la solución de problemas que involucraban el conocimiento fraccional avanzado, por lo cual, pidieron a los futuros profesores contestaran una prueba escrita que incluía tres preguntas sobre el concepto de fracción, comparación de fracciones y relación multiplicativa que involucraba cantidades de fracciones y unidades compuestas donde se utilizó el constructo parte-todo y operador. Los hallazgos sugirieron que muchos de los futuros profesores desarrollaron una comprensión limitada de los subconstructos de fracciones y, por lo tanto, no fueron capaces de resolver los tres problemas. Además, cuando los futuros profesores se basaron en un solo subconstructo como parte-todo, tendían a proporcionar respuestas incorrectas. De ahí que señalaron, la comprensión de los futuros profesores de las fracciones como medida y operador puede ser un fundamento de la solución de problemas que implica el conocimiento fraccional avanzado.

Las investigaciones que intentan caracterizar el conocimiento matemático de los profesores en formación inicial en relación con el significado operador se convierten en referente en diferentes estudios, ya que al igual que el significado parte-todo, es uno los significados que más encontramos en las revisiones que realizamos en diferentes revistas. Lo & Grant (2012) identificaron las estructuras conceptuales de 16 futuros profesores para dar sentido a la unidad y a las fracciones, a partir de la resolución de cuatro tareas (cada una con 4 a 6 subtarefas de nivel fácil a difícil) donde los números se conceptualizaban como cantidades (medida) u operadores. Los resultados arrojaron que 9 de los 16 futuros profesores proporcionaron respuestas correctas y razonamiento para más del 80% de las tareas propuestas. En términos descriptivos, las respuestas se agruparon en tres niveles de desempeño: bajo, medio y alto. Las concepciones de fracciones poseídas por los futuros profesores que se ubicaron en un nivel bajo eran limitadas, ya que consideraban a/b como “a partes de b partes”, por lo cual, fueron capaces de iterar fracciones de unidad, pero no las que requerían particiones de la unidad. Los futuros profesores de desempeño medio conceptualizaron a/b como “a partes de $1/b$, donde $1/b$ se obtuvo al dividir el todo en b partes iguales” y utilizaron el proceso de partición para crear una nueva unidad e

iterar fracciones unitarias y no unitarias en escenarios numéricos y geométricos. Por otra parte, detectaron que no todo el grupo de mayor rendimiento poseía una sólida comprensión de las concepciones de fracciones; algunos de ellos se basaron en el ensayo y error para obtener respuestas correctas.

Tichá & Hošpesová (2013), solicitaron a 56 profesores en formación inicial que participaban en un seminario de Didáctica de las Matemáticas, plantearan de tres a cinco problemas que incluyeran fracciones con la intención de saber si los encuestados eran conscientes de las diversas interpretaciones de las fracciones-diagnóstico y si tomaban conciencia de la necesidad de tener en cuenta las diversas interpretaciones de las fracciones. El análisis de los problemas arrojó que las fallas conceptuales en los problemas planteados prevalecían, con mayor frecuencia, en la naturaleza monotemática de los problemas en función del contexto situacional (pasteles, etc.), propiedades del ambiente (discreto o continuo, raramente ambos) y la interpretación de la fracción (operador, cantidad-medida, etc.). Además, la mayoría de los futuros profesores no interpretó las fracciones de diferentes maneras y no usaron diferentes representaciones, a pesar de que la tarea asignada implicaba plantear problemas diferentes. Por otra parte, algunos problemas ilustraron que tenían dificultades para dividir el todo en partes iguales. En este sentido, el análisis de los problemas planteados por los futuros profesores reveló deficiencias en su comprensión conceptual de las fracciones. Sin embargo, la reflexión conjunta les permitió desarrollar su conciencia sobre la necesidad de cambio en sus propias concepciones.

El planteamiento y resolución de problemas se ha convertido en una práctica frecuente por diferentes investigadores para caracterizar el conocimiento matemático de los futuros profesores sobre la división de fracciones, los cuales se incorporan a los cuestionarios o entrevistas que diseñan, por citar un ejemplo. Al respecto, Lo & Luo (2012) exploraron el conocimiento sobre la división de fracciones (particiones) de 45 futuros profesores de primaria de Taiwán al comienzo de un curso de matemáticas, a través de tres problemas: un problema pictórico basado en la recta numérica, un problema verbal y la construcción de un problema verbal con representaciones y diagramas pictóricos.

Los hallazgos del estudio anterior, proporcionaron evidencias preliminares de que muchos de los futuros profesores habían desarrollado el paquete de conocimientos de división de fracciones (Ma, 2010), ya que eran competentes en la resolución de problemas de división de fracciones (problema 1), a excepción de uno que no contestó correctamente el problema 1. Las tres estrategias principales que usaron para resolver el problema 1 fueron: identificar primero la cantidad asociada con la unidad de fracción, conceptualizar la relación entre parte-todo y las relaciones entre la cantidad dada y la

desconocida y establecer una razón entre las relaciones de la cantidad dada y la desconocida. Todos los futuros profesores de primaria contestaron correctamente el problema 2, para su resolución emplearon las tres estrategias del problema 1 y el enfoque de la división de partición, es decir, conceptualizaron la división para encontrar una cantidad. En relación con el problema 3, sólo 26 de los 40 futuros profesores fueron capaces de plantear un problema verbal que fuera significativo y correcto para el problema simbólico dado; éstos incluían varias estructuras de multiplicación y división, más de la mitad construyó un problema de medida (57.5%) para representar simbólicamente la cantidad dada, mientras que sólo el 15% construyó un problema de partición. En este sentido, el 84.6% (22 de 26) de los futuros profesores que plantearon con éxito un problema verbal dibujó adecuadamente un diagrama pictórico que contribuyó al proceso de resolución de problemas en diversos grados. En términos generales, los investigadores citaron que la naturaleza de las diversas estrategias que usaron los futuros profesores proporcionó una ilustración adicional de un conocimiento seguro de contenido común que puede servir como punto de referencia para el desarrollo de cursos de matemáticas de futuros profesores. Sin embargo, mencionaron que los resultados muestran que las tareas de representar la división de fracciones, ya sea a través de problemas verbales o diagramas pictóricos, son un desafío incluso para aquellos altamente competentes en las matemáticas de primaria y secundaria.

Jansen & Hohensee (2016) realizaron un estudio con el propósito de examinar y elaborar información sobre las concepciones de división partitiva con fracciones de diecisiete futuros profesores de primaria. En esta investigación realizaron algunas entrevistas semiestructuradas a los participantes, las cuales estaban compuestas de tres tareas que variaban con respecto a sus divisores (fracción no unitaria apropiada, número entero y fracción unitaria apropiada); en la primera tarea se planteó a los futuros profesores un problema parcialmente completado por un alumno de sexto grado, situación que les solicitaba completarlo, mientras que la segunda y tercer tarea les pedía escribir una historia en función de unas cantidades propuestas, además de utilizar un modelo discreto, de área o lineal para mostrar cómo resolvieron el problema; lo anterior, con el propósito de ofrecer oportunidades para que los participantes demostraran tanto la conexión (capaz de traducir correctamente entre representaciones, consciente de que la división partitiva genera una tasa unitaria para su cociente) como la flexibilidad (capaz de diferencias entre oportunidades de partición o iteración) en sus concepciones de división partitiva.

Al final de la investigación, los futuros profesores demostraron conceptos desconectados de división partitiva con fracciones cuando se tradujeron incorrectamente entre las representaciones y de manera inconsciente o no expresaron conciencia de que el propósito de la tarea era generar una tasa unitaria.

Además, los futuros profesores demostraron concepciones rígidas de división partitiva con fracciones, tal es que no expresaron conciencia de que el proceso de iteración podría estar asociado con la operación de la división, incluso cuando obtuvieron una respuesta correcta por iteración.

A la par de la resolución de problemas que involucraban la división de fracciones, los futuros profesores fueron partícipes del planteamiento de problemas de división y multiplicación de fracciones en función de algunas operaciones que se les asignaban; dicha situación la constata, el trabajo realizado por Aydogdu-Iskenderoglu (2016), quien desarrolló un estudio con 213 futuros profesores de primaria que se ubicaban en varios años de formación (primero, segundo, tercero y cuarto) con el propósito de realizar un análisis conceptual de problemas de multiplicación y división de fracciones planteados por los anteriores, a partir de dos operaciones que se les proporcionaron ($1/2 \times 1/8$; $1/2 : 1/10$). Los resultados del trabajo arrojaron que, independientemente del año en que se ubicaran, los futuros maestros tenían más éxito en plantear problemas de multiplicación, en comparación con los de división. La omisión de preguntas pertinentes, al no plantear problemas, es mucho mayor con las cuestiones relacionadas con la división, en comparación con las que implican la multiplicación. Además, los futuros profesores de primer año tuvieron más omisiones de preguntas, mientras que los de cuarto año tenían confusiones con las multiplicaciones o planteaban problemas en forma de ejercicios simples. De acuerdo con este autor, el hallazgo sugiere que los futuros profesores tienen dificultades para plantear problemas de multiplicación y división, lo cual indica que todavía no se ha logrado un entendimiento conceptual.

Mejorar el conocimiento matemático de fracciones de los profesores en formación inicial a través de intervenciones es un tema en algunos trabajos de investigación (e.g. Newton, 2008). Al respecto, Whitacre & Nickerson (2016), realizaron una intervención en relación con los números racionales, de manera específica para mejorar el conocimiento de futuros profesores de primaria sobre la magnitud de fracciones (comparación de fracciones); situación que evidenciaron con la aplicación de entrevistas a siete participantes antes y después de la instrucción donde concluyeron: 6 de los 7 participantes adoptaron al menos dos nuevas estrategias válidas para comparar fracciones, uno de ellos utilizó cinco nuevas estrategias válidas y el caso de otro participante ilustró como el razonamiento de un futuro profesor sobre la magnitud de la fracción puede cambiar conforme coordina las comparaciones de los numeradores y los denominadores de las fracciones.

Como se puede apreciar en la investigación anterior, la mejora del conocimiento matemático de fracciones es un tema emergente en los profesores de primaria en formación inicial. Thanheiser et al.

(2016), dieron cuenta del trabajo de seis educadores de universitarios, cuyo objetivo era explorar aspectos claves del diseño de tareas (planificación, implementación, reflexión y modificación) en el contexto de comparación de fracciones usando el razonamiento y la toma de sentido. En su estudio se presentaron los resultados de la implementación de dos tareas con 63 futuros profesores de primaria y el análisis reflexivo de la implementación. La tarea 1 fue una actividad que se planteó en clases a los futuros profesores con un conjunto de diez problemas de comparación de fracciones con el fin de obtener cuatro estrategias de toma de sentido (mismo tamaño de piezas –SSP-; mismo número de piezas –SNP-; en comparación con un valor de referencia –BV- y, un mayor número de piezas grandes –GLP-). En la tarea 2 se pidió a los futuros profesores crear tres problemas de comparación de fracciones.

Respecto a los resultados del análisis de la primera tarea (diez problemas de comparación de fracciones), al menos el 75% de los futuros profesores proporcionó una respuesta correcta y emplearon de manera variable algunas de las estrategias pretendidas. En el análisis de la implementación de la tarea 2 tuvieron 156 problemas planteados por los futuros profesores, el 95% de los problemas se centraron en tres de las estrategias sugeridas en la tarea 1: SSP, SNP y BV. Sólo 8 futuros profesores crearon un problema GLP y un 49% fueron problemas BV.

El análisis reflexivo de las tareas 1 y 2 llevó al rediseño de la instrucción de ambas tareas, de los problemas de la tarea 1, de las oportunidades para considerar algunas de las estrategias, fomentar el uso de estrategias de referencia y ampliar la elección del valor de referencia, así como las explicaciones de las estrategias de referencia. Respecto a la literatura en el campo de las fracciones, los autores destacan su contribución al agregar un marco que distingue tres tipos de estrategias de referencia de problemas BV. Finalmente, reportan que se ha puesto en marcha el rediseño de las tareas 1 y 2, por lo que se continúa en el análisis reflexivo de las mismas.

Finalmente, como parte de esta primera sección en la que presentamos investigaciones centradas en el conocimiento matemático de fracciones de los profesores en formación inicial de primaria, damos a conocer los resultados de un estudio que a través de un cuestionario identificó conocimientos aritméticos, entre los que se encuentran diferentes significados de las fracciones. Montes et al. (2015) identifican el conocimiento aritmético de 737 futuros profesores que no habían llevado formación previa en didáctica de la matemática. Los autores emplearon el marco del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). El instrumento que aplicaron para la recogida de información fue un cuestionario de respuesta cerrada que contenía reactivos de fracciones, decimales y porcentajes.

En este caso, nos limitamos a presentar las fortalezas y debilidades que encontraron en relación con las fracciones.

Las cuestiones dedicadas a explorar el significado y representación de fracciones, fracciones impropias y aspectos procedimentales relativos a las fracciones son las que presentaron menor porcentaje de respuestas correctas. En lo que respecta, a la representación y operaciones con fracciones, el porcentaje de respuesta correcta es significativamente elevado, mientras que en las cuestiones que se les pedía encontrar un racional entre dos dados, en este caso, en sus expresiones fraccionarias, aunque el índice de respuestas correctas supera el total de errores, los valores se muestran muy cercanos. De manera particular, identificaron que el tratamiento de las fracciones impropias es menos frecuente que el de las fracciones propias; puesto que la interpretación de la fracción como partes de un todo es la más fácilmente comprensible (Castro y Torralbo, 2001); situación contraria de la fracción impropia al ser representada mediante subáreas de unidades de superficie (Dickson et al., 1991).

Entre los significados de la fracción que se asocian a diferentes contextos: parte-todo (continuo o discreto), operador, razón o cociente (de dos enteros); los autores señalan que el cuarto contexto, proporciona de manera natural la idea de fracción que los futuros profesores han trabajado previamente (división partitiva) y no suele relacionarse con el de partes de un todo. Por lo cual, es el que más cercano a la definición formal de fracción. En este sentido, consideraron que obviar dicha definición conducía a algunos futuros profesores a identificar en la cuestión 10 (identificación de si existen o no fracciones entre $3/7$ y $4/7$), $3,5/5$ como la respuesta. Además, identificaron tienen dificultades en la conjunción de operar con fracciones, establecer la jerarquía y el uso de fracciones o una utilización del algoritmo y el consiguiente dominio del cálculo del mínimo común múltiplo, al solicitarles seleccionar el resultado de una operación $(2/10-[1/4+3/2+(-8-1/5)])=$.

Montes et al. (2015) concluyen que los futuros profesores tienen debilidades en la definición de las fracciones, en los significados que les otorgan, fracciones impropias y propias, así como su conocimiento acerca de las representaciones y los procedimientos que se pueden desarrollar usando fracciones. Sin embargo, la obtención de fracciones equivalentes y la jerarquía de operaciones son debilidades destacables. Además, muestran debilidades en el conocimiento de propiedades y fundamentos de los números racionales en cuanto a su densidad. Por otra parte, entre las fortalezas que encontraron en los futuros maestros se ubicó el uso de los algoritmos como el producto y la suma (entendida en el sentido amplio) de fracciones, lo que incluye la estimación y operación con dos expresiones fraccionarias y/o decimales.

Como podemos observar, las 13 investigaciones que rescatamos, donde se identifica el conocimiento matemático de las fracciones y sus significados, son con profesores de primaria en formación inicial, están ausentes investigaciones en la formación continua. Por otra parte, los significados de las fracciones que se hacen presentes en los estudios son parte-todo, medida, cociente y operador, mientras que no encontramos una investigación que se centre en la caracterización del conocimiento matemático de la razón (significado de la fracción) de profesores de primaria en formación inicial. Entre los instrumentos empleados para recoger la información se encuentran los cuestionarios (respuesta cerrada) y las entrevistas, que en algunos casos incluyen la resolución de diferentes tareas para poder identificar el conocimiento que poseen los futuros profesores. Hemos encontrado que una constante en las investigaciones revisadas, sobre todo en el apartado de conclusiones, es la intención de aportar a la literatura el conocimiento matemático de fracciones que han identificado en los futuros profesores (fortalezas y debilidades), con el propósito de orientar en el diseño de propuestas de intervención y la mejora de los programas de estudio que enmarcan la formación inicial de profesores de primaria. A continuación presentamos una síntesis de las investigaciones revisadas en función del año de publicación, autores, tema y nivel.

Tabla 1. Investigaciones relacionadas con el conocimiento matemático de fracciones de profesores de primaria

Año	Autores	Tema	Nivel
2010	Castro-Rodríguez	Cuestionario sobre la noción de fraccionar y repartir	PFI
2012	Lo & Luo	División de fracciones	PFI
2012	Lo & Grant	Resolución de tareas de fracciones (operador y medida)	PFI
2012	Ribeiro	Resolución de tareas (parte-todo)	PFI
2013	Tobias	Lenguaje de fracciones	PFI
2013	Tichá & Hošpesová	Comprensión conceptual de las fracciones y las diferentes interpretaciones	PFI
2015	Lee, Son & Arabeyyat	Concepto de fracción, comparación de fracciones y relación multiplicativa que involucra cantidades de fracciones y unidades compuestas (parte-todo y	PFI

		operador)	
2015	Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent & Carrillo	Cuestionario de definición de fracción (y el papel de la unidad), significados de fracciones (parte-todo), fracción impropia, ordenación de fracciones y operaciones con fracciones	PFI
2016	Aydogdu Iskenderoglu	Multiplicación y división de fracciones	PFI
2016	Whitacre & Nickerson	Magnitud de la fracciones (comparaciones)	PFI
2016	Jansen & Hohensee	División partitiva con fracciones	PFI
2016	Fernández-Plaza, Castro-Rodríguez, Estrella, Martín-Fernández, Rico, Ruíz-Delgado & Vélchez-Marín	Noción de fraccionar	PFI
2016	Thanheiser, Olanof, Hillen, Feldman, Tobias & Welder	Comparación de fracciones	PFI

II.3. Investigaciones del conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria

En esta sección agregamos algunas investigaciones donde identificamos el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación inicial y continua. Algunas de ellas también se centran en el conocimiento matemático de fracciones de profesores, sin embargo, debido a que contemplan estos dos tipos de conocimiento, decidimos situarlas en esta segunda sección.

En relación con las investigaciones en el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación inicial, las ubicamos en tres categorías en función de las variables bajo las cuales se desarrollan los estudios: contexto natural de formación (Aguayo, 2005; Lizarde, 2013), aplicación de cuestionarios o tareas (Castro-Rodríguez, 2015; Fernández, Callejo & Márquez, 2012; Isiksal & Cakiroglu, 2011) e intervención para identificar y mejorar conocimientos (Ferreira & da Ponte, 2015; Valdemoros, Ramírez & Lamadrid, 2015; Whitehead & Walkowiak, 2015).

Las investigaciones que encontramos sobre el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación continua, las hemos ubicado en dos categorías: aquellas que se localizan en un contexto natural de trabajo (Allard, 2015; Ramírez & Block, 2009; Rojas, 2014; Salazar, Martinic & Maz, 2011) y las que toman como referente un contexto de desarrollo profesional (Hansen, Mavrikis & Geraniou, 2016; Valdemoros, 2010).

Enseguida presentamos las principales aportaciones de investigaciones centradas en el conocimiento didáctico de fracciones de profesores en formación inicial y continua, aunque en algunos casos hacemos énfasis en el conocimiento matemático que poseen de fracciones.

La caracterización del conocimiento didáctico de fracciones de los profesores de primaria en formación inicial es un tema que ha emergido en algunas investigaciones a través de su estudio en contextos naturales de su formación, es decir, durante el desarrollo de cursos enfocados en el área de las matemáticas que involucran el tema de fracciones. De ahí que identifican el conocimiento didáctico del formador y/o el conocimiento didáctico de los futuros profesores (Aguayo, 2005; Lizarde, 2013).

En la revisión del estado del conocimiento emitido por el COMIE (2013): “Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México”, correspondiente al periodo 2002-2011, en la Parte I “La investigación en educación matemática en México”, encontramos el trabajo que realizó Aguayo (2005), como la única investigación que abordó las formación inicial de profesores de primaria en función de un trabajo centrado en fracciones. De manera concreta, estudió las representaciones que tres formadores de futuros profesores de primaria tenían sobre la estructura y secuencia de los contenidos de didáctica de las matemáticas, propuestos en los programas de la Licenciatura en Educación Primaria (Plan de estudios 1997) en un curso donde se abordaron los números racionales, entre ellos las fracciones y sus diferentes significados. En este sentido, realizó un análisis del trayecto que seguía el saber didáctico de los números racionales de los programas de estudio a las conceptualizaciones de los estudiantes. Los resultados de la investigación arrojaron que existía, quien como formador recurría a un modelo clásico para su enseñanza, quien avanzaba bajo la lógica del constructivismo e implicaba la resolución de problemas y favorecía el dominio de la homología, pero el saber didáctico aparecía como un saber objetivo y explícito, aunque existían ausencias para el trabajo con la técnica didáctica, efecto de las restricciones legales del tiempo. También destacó, que los significados de la fracción y las técnicas para operar con fracciones eran las cuestiones que ocupaban mayor parte de los procesos de estudio. Sin embargo, algunas tareas resueltas

por los estudiantes después de llevar el curso anterior, señalaban existían carencias de conocimientos al tener dificultades para resolverlas.

Por su parte, Lizarde (2013) investigó los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico en una escuela formadora de futuros profesores de primaria y en la recuperación de datos de la escuela primaria, por parte de los estudiantes. Así, estudió la secuencia de clases (nueve sesiones) de un formador en un contexto natural de trabajo donde abordó los números racionales, al igual que la investigación anterior (Aguayo, 2005), bajo el Plan de estudios 1997. Además, revisó el análisis de la práctica docente de 7 estudiantes, tomando como referente el diseño de la situación didáctica, su puesta en práctica y análisis.

Durante el desarrollo de este dispositivo didáctico, el investigador identificó que el formador favoreció el desarrollo de estrategias para que los profesores en formación inicial avanzaran en la construcción de los significados de las fracciones (parte-todo, medida, cociente, razón y operador). De manera especial, el autor caracterizó el conocimiento matemático y didáctico de fracciones puesto en juego por el formador y estableció algunas relaciones con los materiales que se proporcionaron en los cursos de matemáticas del Plan de estudios 1997, en concreto, en Matemáticas y su enseñanza II.

En el contexto internacional, se encuentran algunas investigaciones centradas en el conocimiento didáctico de fracciones de los profesores de primaria en formación inicial, que a través de la aplicación de algún instrumento (cuestionario, entrevista, entre otros.) o el planteamiento de algunas tareas han buscado identificar el conocimiento didáctico y el conocimiento matemático de fracciones. Castro-Rodríguez (2015) realizó una investigación sobre el conocimiento matemático y didáctico que un grupo de futuros profesores de primaria manifestaron sobre la noción de la fracción basada en la relación parte-todo. En la primera fase de la investigación diseñó un cuestionario para establecer el conocimiento del contenido de los futuros maestros sobre la estructura conceptual, los sistemas de representación y los contextos y modos de uso de la relación parte-todo como interpretación de las fracciones. Los resultados arrojaron que los futuros profesores estaban familiarizados con la interpretación parte-todo, pero gran parte de ellos dieron explicaciones que contenían sólo algunos de los elementos que componen la estructura conceptual (el todo, las partes, la igualdad de las partes y la relación de una de las partes con el todo). Sólo algunos participantes tuvieron en cuenta todos los anteriores en una descripción textual sobre la relación.

Respecto a los sistemas de representación de parte-todo, los participantes usaron círculos o cuadriláteros divididos en partes iguales para representar el concepto, pero no consideraron representaciones como las discretas o lineales. Por otra parte, las situaciones o problemas inventados por los participantes hicieron emerger una pluralidad de contextos asociados a la relación parte-todo; entre los más comunes se encuentran: (a) hallar la parte, (b) reparto, y (c) hallar la parte complementaria.

La caracterización del conocimiento didáctico del contenido, se dio a partir del análisis de la instrucción que los futuros profesores manifestaron cuando se les propuso elaborar una explicación con la cual introducir el concepto de fracción en una escuela primaria. La información recogida da cuenta que los participantes no tuvieron dificultades y expresaron su conocimiento didáctico a través de sus respuestas. Dicho conocimiento didáctico del contenido era coherente con sus explicaciones, en las que destacó la diversidad de modos en que los participantes reconstruyeron, adecuaron o reestructuraron el contenido para hacerlo comprensible a los escolares, aunque la investigadora destacó carencias en la planificación de la secuencia de los contenidos atendiendo a un orden lógico. En relación con los modos de introducir los contenidos y el uso de representaciones, este estudio aportó diferentes categorías; en el caso del primero se destacó un modo instrumental, funcional y descriptivo, mientras que en las representaciones se observó un uso ilustrativo, explicativo y aclarativo.

En la caracterización del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de la relación parte-todo se dio en función de un estudio de caso, por lo cual se focalizó en los contextos o modos de uso escogidos por los participantes para iniciar la enseñanza del concepto fracción y, en el diseño de tareas, el enunciado de expectativas de aprendizaje y la identificación de las limitaciones sobre el concepto de fracción. Los resultados sobre las valoraciones de los contextos de la relación parte-todo, constataron que el contexto mejor valorado fue hallar la parte complementaria, seguido por hallar la parte usando una unidad de medida, el peor valorado fue reconstruir la unidad, mientras que los contextos de hallar la parte y repartir fueron valorados de modo dispar según la magnitud que se considerase.

Respecto a los resultados obtenidos sobre el diseño de tareas, la investigadora destaca que los participantes pusieron en todos los casos enunciados de problemas cuando se les pidió plantear de manera espontánea una tarea sobre fracciones; los contextos presentes en los anteriores fueron variados, aunque los contextos no coincidieron con los valorados previamente como más adecuados para la enseñanza de las fracciones. La información recogida arrojó que el diseño de una tarea escolar no es fácil para los futuros profesores de primaria, por lo que emplean sus recursos en redactar la tarea,

descuidando si el contexto es o no el más adecuado, por lo cual, se consideró que estas condiciones mostraron una falta de conexión entre el conocimiento sobre la enseñanza, el aprendizaje y su puesta en práctica.

El enunciado de las expectativas sobre el aprendizaje escolar, por lo general, fue acertado; la mayoría de los sujetos fueron capaces de enunciar objetivos específicos del tema en relación con contenidos procedimentales y conceptuales, aspectos como dividir diferentes tipos de objetos y la utilidad de las fracciones. Por otra parte, mostraron escasa o nula capacidad para identificar posibles errores en los que pudieran incurrir los escolares con las tareas propuestas y en vincular justificadamente los errores con dificultades que pudieran originarlos.

El conocimiento de las características del aprendizaje de las fracciones en los alumnos de primaria, que los futuros profesores de primaria posean, se puede ubicar dentro del conocimiento didáctico del contenido (Carrillo et., 2013). En este sentido, existen investigaciones que intentan explorar esta línea; Isiksal & Cakiroglu (2011) investigaron el conocimiento didáctico de 17 futuros profesores turcos acerca de las concepciones e ideas erróneas que los estudiantes de sexto y séptimo grado tenían sobre la multiplicación de fracciones. Además, examinaron el conocimiento de los futuros profesores acerca de las fuentes de estos conceptos erróneos y estrategias que sabían para superar estas ideas falsas. Los resultados de este estudio manifestaron que los participantes mencionaron muchas dificultades que los estudiantes de primaria pueden tener y declararon que éstas provienen de la falta de conocimiento formal de los estudiantes y de la memorización de algoritmos. Entre las estrategias que enunciaron, podrían utilizarse para superar los conceptos erróneos o dificultades, se agruparon en tres categorías: estrategias basadas en métodos de enseñanza, estrategias basadas en el conocimiento formal de las fracciones y estrategias basadas en construcciones psicológicas.

Fernández, Callejo & Márquez (2012) realizaron una investigación con 79 estudiantes para maestros de primaria con el objetivo de identificar cómo valoraban las respuestas dadas por alumnos de 6º curso de primaria (11-12 años) a problemas de división-medida con fracciones, que ellos habían resuelto previamente. Los resultados mostraron que hubo estudiantes para maestros que aunque no resolvieron el problema correctamente sí valoraron adecuadamente la resolución de los alumnos de primaria, y se identificó la tendencia de algunos estudiantes para maestro a valorar mejor una respuesta con resultado correcto y procedimiento con errores que una respuesta con un procedimiento correcto pero con un error en la interpretación del resultado. Por otra parte, los resultados obtenidos constataron la

potencialidad de las tareas propuestas para el desarrollo del conocimiento profesional de los futuros profesores.

Durante la búsqueda de investigaciones relacionadas con la identificación del conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación inicial, encontramos algunos trabajos que se apoyan en el desarrollo de proyectos de intervención en las escuelas formadoras de docentes (Ferreira & da Ponte, 2015; Valdemoros, Ramírez & Lamadrid, 2015; Whitehead & Walkowiak, 2015).

Ferreira & da Ponte (2015) realizaron un estudio con el propósito de identificar los conocimientos que una futura profesora de primaria utilizaba en la práctica para enseñar la multiplicación de fracciones, así como el aprendizaje que le dejó su experiencia. Las conclusiones de este trabajo señalaron que la futura profesora, en cuanto al conocimiento matemático se volvió más consciente de los conceptos relacionados con la multiplicación de fracciones, pues al final de su experiencia, aprendió cómo representar fracciones impropias, la complejidad de usar cantidades discretas y continuas, conectar representaciones pictóricas y simbólicas y los significados de las diferentes experiencias.

En relación con el conocimiento didáctico, la futura profesora pudo secuenciar las tareas utilizando ideas de varios artículos y reconoció el valor del uso de representaciones pictóricas como herramienta para desarrollar ideas matemáticas. Los autores rescatan que mencionó se había vuelto más consciente de anticipar las preguntas de los estudiantes, los errores comunes y las soluciones (Bartell, Webel, Bowen & Dyson, 2013). También se dio cuenta de cuándo tenía que explicar. Durante su práctica planteó preguntas y exploró las estrategias de los estudiantes, tratando de llevarlas a conectar representaciones pictóricas y simbólicas. Sin embargo, destacan que al igual que en otros estudios, se observaron problemas relacionados con la comprensión conceptual, el uso de múltiples representaciones y materiales curriculares y libros de texto, la planificación, la evaluación de los estudiantes y el análisis de la enseñanza de las matemáticas (Ponte & Chapman, 2015).

Otro trabajo de investigación que aporta identificación de conocimientos didácticos de fracciones de profesores de primaria en formación inicial y, que para el momento en que se publica sigue en curso, es el estudio de Valdemoros, Ramírez & Lamadrid (2015), quienes presentaron el estudio de un caso, con la finalidad de identificar los núcleos de significación y pensamiento en la enseñanza de las fracciones en el terreno de la resolución de problemas, que emerge en un contexto de formación de futuros profesores de primaria, durante el tercero y cuarto semestre de la licenciatura. Este estudio es de naturaleza participante, debido a que privilegiaban las tareas estructuradas para el aula por el equipo de

investigación como las que resultaran configuradas por los propios normalistas. Los instrumentos metodológicos aplicados en la investigación fueron un cuestionario exploratorio sobre fracciones, dos entrevistas iniciales de corte didáctico para propiciar la retroalimentación del entrevistado y un seminario dedicado al análisis de lecturas especializadas en fracciones con el propósito de enriquecer los núcleos de significación y pensamiento de los futuros profesores. Hacen mención que las tareas experimentales presentadas a los normalistas en todos los instrumentos metodológicos consistieron en problemas aritméticos dedicados al uso de fracciones, que pudieran llevar al aula.

En el estudio de caso que presentaron las autoras (Tania): dieron cuenta de la resolución y planteamiento de problemas con fracciones, así como del producto de las fracciones asociadas a un problema, orden en las fracciones y la relación parte-todo. Como importantes núcleos de pensamiento y significación, que emergieron en el transcurso de las dos entrevistas iniciales, destacaron los diversos modos con los que ella reconoció a la unidad: “unidades de referencia”, “totalidad”, “todo”, “entero”, “colección”. Respecto de establecer relaciones de orden, identificaron que presentaba una inestabilidad cognitiva que le impedía otorgarle niveles de generalización a los aludidos núcleos de significación. En sus propuestas didácticas y en su discurso, Tania involucraba imágenes visuales (figuras geométricas) y la realización de determinadas acciones (plegado de papel o medición), a las que considera Tania como importantes herramientas de enseñanza, las cuales asociaba con la partición, la identificación de la fracción o de sus correspondientes procesos de composición y de relación. Sin embargo, las investigadoras señalaron, no quedaba claro cómo a partir de ello la joven llegaría a construir representaciones más abstractas en vinculación con las diversas ideas atribuibles a las fracciones.

Por su parte, Whitehead & Walkowiak (2015) examinaron el cambio en la comprensión de las operaciones de fracciones (multiplicación y división) de 48 futuros profesores de primaria cuando tomaban un curso de métodos de matemáticas donde resolvían tareas relacionadas con la multiplicación y división de fracciones y tenían la oportunidad de examinar el trabajo de los estudiantes. Las respuestas a cuatro tareas (dos de división y dos de multiplicación) se codificaron de acuerdo con los niveles de la taxonomía SOLO (Biggs, 1999): preoperacional (0), unistruktural (1), multistruktural (2), relacional (3) y resumen extendido (4). Los resultados señalan que antes de la instrucción se ubicaban entre preoperacional y unistruktural, es decir, no sabían cómo explicar el problema al estudiante o simplemente recitaban el algoritmo. Después de la instrucción, la mayoría estaba entre unistruktural y multistruktural. De que ahí muchos futuros profesores todavía estaban recitando un algoritmo, pero otros estaban dando sentido al concepto de algoritmo. También algunos se ubicaron en el nivel relacional, donde proporcionaron una explicación en la cual la idea se explicó

conceptualmente en términos del ejemplo específico. Sin embargo, ningún profesor se ubicó en el nivel resumen ampliado, es decir, ninguno dio una prueba generalizada en términos de variables y explicó el método del estudiante en términos de un enfoque generalizado, lo cual, mencionan se puede deber a que el curso no se centró en la prueba formal, además las preguntas fueron formuladas de tal manera que no sugirieron dar una prueba formal.

Con el párrafo anterior, concluimos la presentación de investigaciones que encontramos en relación con el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación inicial. Enseguida indicamos aquellos estudios que indagaron sobre este conocimiento, pero en profesores en formación continua, que van desde su estudio en un contexto natural de trabajo (Allard, 2015; Ramírez & Block, 2009; Rojas, 2014; Salazar, Martinic & Maz, 2011) hasta los que se abordan en un contexto de formación (Hansen, Mavrikis & Geraniou, 2016; Valdemoros, 2010). Comenzaremos por describir las investigaciones que identificaron el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en un contexto natural.

Rojas (2014) caracterizó el conocimiento especializado de dos profesores expertos de matemáticas: uno de primaria y otro de secundaria, cuando enseñaban los números racionales. En este caso, nos interesó identificar el conocimiento manifestado por el profesor de primaria. Los resultados arrojaron que mostraba un fuerte componente de conocimiento didáctico del contenido, centrado en el conocimiento de la enseñanza [diversidad de tareas de enseñanza (fraccionamiento) que iban de lo particular a lo general para relacionar diferentes tipos de representación-figural para ejemplificar acciones-empleo de papel cuadriculado, entre otras] y en las características del aprendizaje de las matemáticas (conocía dificultades de aprendizaje de los estudiantes e indicadores de la presencia de errores conceptuales, entre otros), sin embargo, también destacaba en su conocimiento matemático, de manera especial, sobre el conocimiento de los temas matemáticos (fraccionamiento equitativo y exhaustivo, significados de la fracción como parte-todo y operador, clases de fracciones, equivalencias, orden y operaciones con fracciones y diferentes procedimientos para establecer fracciones equivalentes, comparar y ordenar fracciones). En términos generales, su conocimiento sobre fracciones se ubicó preferentemente en relación con la unidad (relación parte-todo, operador y medida).

Salazar, Martinic & Maz (2011), se dedicaron a identificar los modelos, representaciones y recursos utilizados por profesores de educación primaria para las fracciones, así como los significados de las fracciones evidenciados durante su enseñanza. Finalmente este estudio expresó que los docentes recurrían a la enseñanza de las fracciones bajo el significado parte-todo, en contextos continuos con

modelos de áreas, donde predominan las representaciones a través de figuras geométricas como el rectángulo y el cuadrado.

Por otra parte, encontramos una investigación donde se priorizó la identificación del conocimiento didáctico de una profesora en función del significado parte-todo. Allard (2015) analizó las prácticas de una profesora experta de primaria al enseñar fracciones bajo el constructo parte-todo, con el objetivo de identificar cómo se ocupaba de la exposición del conocimiento durante la institucionalización, momento de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). En este sentido, en 2011 y 2013 se observaron clases en las que la profesora introdujo fracciones utilizando tiras de papel, a partir de las cuales los alumnos dibujaban y median segmentos cuyas longitudes se expresaban bajo la forma de fracciones menores que una unidad o como la suma de una fracción entera y una unidad. En ambas clases se identifica que la exposición del conocimiento, está previsto, pero el contenido no. La exposición del conocimiento se produce en acción después de una discusión de la clase, donde se reutilizan los términos de algunos alumnos, excluyendo otros. Por lo tanto, en la institucionalización la profesora utiliza el vocabulario de los alumnos y no propone otro vocabulario más matemático para definir las fracciones “estas son fracciones; aprendimos a doblar las tiras para conseguir cuartos, tres cuartos en una tira más varias fracciones permiten reconstruir una tira entera”. De ahí que se concluye en el estudio, esto puede no ayudar a los alumnos a aprender y comprender los términos matemáticos; situación que guía a la investigadora a preguntarse ¿qué conocimientos matemáticos y didácticos debe adquirir un maestro para lograr la transición de la institucionalización contextualizada a la institucionalización descontextualizada?

En el estado del conocimiento de 2002-2011 del COMIE (2013), destaca el trabajo de Ramírez & Block (2009) como una investigación acerca de las prácticas de enseñanza en relación con tema de los números racionales, donde a lo largo de 12 clases impartidas por un maestro de sexto grado de primaria, reportaron las dificultades que se suscitaban en torno al vínculo razón-fracción.

Las investigaciones de Allard (2015), Rojas (2014), Salazar, Martinic & Maz (2011) y Ramírez & Block (2009) coincidieron en la indagación sobre el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria a partir de la observación de una serie de clases. Por su parte, Krause, Empson, Pynes & Jacobs (2016), realizaron un estudio con profesores de primaria bajo la línea de investigación señalada, sin embargo, se enfocaron en caracterizar el conocimiento de 18 maestros de primaria sobre el pensamiento matemático de los niños al comprometerse en la tarea de anticipar las estrategias de los niños para un problema de fracción de partición igual, en términos de su flexibilidad, respecto al

número de estrategias válidas y distintas que un profesor anticipó y la medida en que las estrategias anticipadas del maestro se organizan en torno a categorías de estrategias que los niños suelen utilizar. Las estrategias previstas por los maestros se clasificaron en estrategias típicas de los niños y en procedimientos y convenciones. Entre las estrategias típicas de los niños documentaron la modelización directa no anticipatoria, modelización directa anticipatoria emergente y anticipatoria. Los resultados de esta investigación agruparon el conocimiento de los maestros en tres grupos: evidencia robusta del conocimiento del pensamiento matemático de los niños (anticipación de tres o más estrategias y coherencia con las estrategias típicas de los niños), evidencia limitada del conocimiento del pensamiento matemático de los niños (anticipación de una o dos estrategias e inconsistencias con la forma en que los niños podrían razonar) y falta de evidencia del conocimiento del pensamiento matemático de los niños (las estrategias anticipadas no incluían ninguna aquellas que representaran el razonamiento típico de los niños). La mayoría de los maestros anticiparon por lo menos una estrategia que era consistente con las estrategias típicas de los niños. Entre las estrategias anticipadas, la estrategia de modelado directo fue la más común. Finalmente, concluyen que en cuanto mayor sea la flexibilidad (número de estrategias válidas y distintas), mayor puede ser la capacidad de los maestros para responder al pensamiento matemático de los niños.

Entre las investigaciones que abordaron el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación continua, en un contexto de desarrollo profesional, encontramos tres trabajos. Uno de ellos corresponde a Valdemoros (2010), quien planteó el caso de Delia, una profesora de quinto grado de educación primaria que se encontraba en un contexto de formación (maestría) con el propósito de mejorar su práctica, misma que llevó a cabo un proyecto de desarrollo dedicado a la enseñanza de la fracción como medida. Los instrumentos metodológicos fundamentales fueron la entrevista y la observación.

En los resultados de la primera fase de la investigación, la autora inició reconociendo cómo Delia, antes de cursar el posgrado realiza la enseñanza de fracciones a partir del uso del libro de texto del alumno, fichero y libro para el maestro. De ahí que sólo proponía los problemas que se abordaban en esos materiales. En relación con los obstáculos que Delia reconoció en el tratamiento didáctico previo de las fracciones, identificó el tratamiento mecánico de la equivalencia de fracciones (empleo de algoritmos), pues desconocía qué tratamientos precedentes podía desarrollar para dar sentido a los procedimientos anteriores, además, otra dificultad en la enseñanza la atribuía a las numerosas situaciones de medición inmersas en el libro del niño de quinto grado, en cuyas lecciones se usaba reiteradamente la recta numérica para representar medidas fraccionarias de longitud, peso y capacidad.

A partir de la participación de Delia en el seminario de la maestría, manifestó algunos cambios en su práctica docente sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, en particular, llegar a atribuir distintos significados a la fracción (cociente, medida, operador multiplicativo y razón) le había brindado nuevos puntos de partida para poder seleccionar por sí misma situaciones reales desde donde pudieran aplicarse las fracciones, diseñando a partir de ello, pequeñas secuencias de enseñanza. Sin embargo, posteriormente le surgieron algunas dificultades sobre la enseñanza de contenidos semánticos relativos al reparto, sin tener claridad cómo continuar con los restantes significados de la fracción. Las sesiones del seminario de la maestría le ayudaron a prestar mayor atención al análisis previo del plan de clase para cada sesión, así como a las soluciones e ideas expresadas por los estudiantes.

En los resultados de la segunda fase de la investigación, la información reunida a través de la observación, le permitió a la autora identificar que la planificación didáctica de Delia, en su proyecto de desarrollo, abordó el tratamiento de la fracción como medida, en quinto grado de primaria, apoyada en el diseño de cuestionarios de diagnóstico, planteamiento de problemas de inspiración propia y otros tomados de referentes revisados en la maestría o de los materiales para los docentes de educación primaria. Algunas de las dificultades experimentadas en el diseño didáctico se enfocaron al planteamiento de objetivos en relación con las nociones que debía construir el estudiante con respecto a la noción medida, establecer cuándo y cómo podía cuestionar a los niños y, lograr la originalidad de la planificación.

Un segundo trabajo, que se ubica en la identificación del conocimiento didáctico de profesores de primaria en formación continua, pertenece a Bednarz & Proulx (2013), quienes trabajaron con un grupo de 10 maestros de primaria (4 a 6 grados) que participaron en un proyecto de investigación de desarrollo profesional. En su trabajo documentaron las conceptualizaciones de los profesores sobre el subconstructo parte-todo de las fracciones a través de contextos de partición, para lo cual les propusieron dos tareas (relacionadas con su práctica) donde la relatividad del todo ocupó un espacio significativo de aprendizaje, mismo que pasó a llamarse el “referente” durante las sesiones con los docentes. En términos generales, entre los significados que adquirió el todo se encontraron: referente ausente del proceso de resolución, referente contextual, referente fijo, referente relativo, referente como representación pictórica, referente como denominador común y referente como un número vinculado a un operador de fracción. La investigación reportó que el subconstructo parte-todo es una tarea compleja que implica la comprensión de diferentes esquemas (como partición) con sus diferentes componentes y una rica conceptualización del todo.

Por último, ubicamos un trabajo que relaciona el conocimiento didáctico y tecnológico sobre fracciones equivalentes, sumas y restas de profesores en formación continua que fue explorado por Hansen, Mavrikis & Geraniou (2016) a través del co-diseño de un manipulador virtual (Laboratorio de fracciones) en un contexto de desarrollo profesional, bajo el modelo TPACK. En este estudio participaron 23 maestros, de los cuales 20 mencionaron en una encuesta que diseñar y usar el laboratorio de fracciones desafió su pensamiento y enseñanza de fracciones en cierta medida, ya que los llevó a pensar en las representaciones de las fracciones con más detalle: empleo de medidas líquidas y su representación numérica ($1/3$; $1/4$; $7/12$). Por otra parte, se identificó que a partir del trabajo realizado con el laboratorio de fracciones uno de los profesores diseñó tres tareas para llevarlas a cabo con un grupo de niños donde estaba presente la suma de fracciones con igual y diferente denominador (cuando son múltiplos y viceversa).

En la segunda sección del apartado de antecedentes, presentamos diez investigaciones centradas en el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación inicial; Aguayo (2005) y Lizarde (2013) estudiaron una serie de clases de formadores de docentes o clases de futuros profesores en las escuelas primarias donde se abordaron los diferentes significados de las fracciones (parte-todo, medida, cociente, razón y operador).

De las tres investigaciones de conocimiento didáctico de profesores en formación inicial a través de la aplicación de algún instrumento, resaltó el trabajo de Castro-Rodríguez (2015) sobre el significado parte-todo; por su parte, Isiksal & Cakiroglu (2011) y Fernández, Callejo & Márquez (2012) les aplicaron algunas tareas con el propósito de identificar su conocimiento didáctico, desde la identificación del conocimiento que tenían sobre el aprendizaje de los alumnos al resolver tareas asociadas a la multiplicación y división de fracciones, que los guiaban a identificar los procedimientos que podrían emplear, así como los errores más comunes y, en algunos casos, hasta la manera de atenderlos.

Entre los trabajos de investigación que se desarrollaron en un contexto de intervención para favorecer el conocimiento didáctico de fracciones de los profesores de primaria en formación inicial, el significado parte-todo volvió a aparecer (Valdemoros, Ramírez & Lamadrid, 2015), al igual que la multiplicación y división de fracciones (Ferreira & da Ponte, 2015; Whitehead & Walkowiak, 2015).

Como se puede observar, en las investigaciones centradas en el conocimiento didáctico de fracciones de los profesores de primaria en formación inicial, el significado parte-todo es el más frecuente, así como las operaciones con fracciones (multiplicación y división). El significado razón apareció en trabajos que abordaban diferentes significados de las fracciones, más nunca como el eje central de los anteriores.

De las ocho investigaciones que revisamos centradas en el conocimiento didáctico de fracciones de los profesores de primaria en formación continua, cinco de ellas se realizaron en un contexto natural de trabajo, en donde prevalece el estudio del significado parte-todo, seguido por la exploración de los diferentes significados de las fracciones y la identificación del conocimiento de maestros sobre el pensamiento matemático de los niños al anticipar sus estrategias para un problema de partición. Además, en este bloque de trabajos citamos una investigación sobre el vínculo entre la razón y la fracción, a través de la observación de una serie de clases de un maestro de sexto año de educación primaria en México; dicho estudio se referenció en el estado del conocimiento del COMIE (2013) como parte de las investigaciones acerca de las prácticas de enseñanza. El conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación continua también se exploró en contextos de desarrollo profesional, prueba de ello son tres investigaciones que mencionamos en los párrafos anteriores, donde prevaleció el estudio de los diferentes significados de las fracciones y sumas y restas de fracciones que implicaban el uso de la tecnología.

En la siguiente tabla damos a conocer las investigaciones que encontramos en relación con el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria en formación inicial y continua en el contexto nacional e internacional.

Tabla 2. Investigaciones relacionadas con el conocimiento didáctico de fracciones de profesores de primaria

Año	Autores	Tema	Nivel
2005	Aguayo	Estudio de formadores y futuros profesores al abordar los números racionales	PFI
2009	Ramírez & Block	Enseñanza de las matemáticas (vínculo razón y fracción)	PFC
2010	Valdemoros	Dificultades en la enseñanza de fracciones	PFC

2011	Isiksal&Cakiroglu	Multiplicación de fracciones	PFI
2011	Salazar, Martinic & Maz	Enseñanza de fracciones	PFC
2012	Fernández, Callejo & Márquez	Problemas de división-medida con fracciones	PFI
2013	Bednarz&Proulx	Resolución de tareas que involucran el subconstructo parte-todo	PFC
2013	Lizarde	Representaciones de conocimientos matemáticos y didácticos de los significados de las fracciones (parte-todo, medida, cociente, razón y operador) de un formador y estudiantes	PFI
2014	Rojas	Enseñanza de fracciones	PFC
2015	Reyes y Sosa	Significados de la fracción que se asocian a la enseñanza del subconstructo de la razón	PFI
2015	Allard	Enseñanza de fracciones bajo el subconstructo parte-todo	PFC
2015	Ferreira & da Ponte	Multiplicación de fracciones	PFI
2015	Whitehead & Walkowiak	Multiplicación y división de fracciones	PFI
2015	Valdemoros, Ramírez & Lamadrid	Resolución y planteamiento de tareas con fracciones (unidad, orden de fracciones y relación parte-todo)	PFI
2015	Castro-Rodríguez	Cuestionario de fracciones y diseño de tareas (parte-todo)	PFI
2016	Hansen, Mavrikis & Geraniou	Equivalencia de fracciones, sumas y restas	PFC
2016	Krause, Empson, Pynes & Jacobs	Problemas de fracciones de partición igual	PFC

A partir de la revisión del conocimiento matemático y didáctico de fracciones de profesores de primaria (formación inicial y continua) en algunas investigaciones, es conveniente mencionar el contexto en que nos movemos en el presente estudio. Así, pretendemos contribuir a la identificación de conocimiento matemático y didáctico que profesores en formación inicial de primaria ponen en juego

cuando enseñan fracciones, en especial el significado razón, aunque por el lugar que ocupa entre el estudio de las fracciones y la proporcionalidad: se encuentra en la intersección de los dos temas anteriores (Block, 2001), puede establecerse algunas relaciones, tal como aparece en la investigación de Ramírez y Block (2009). De ahí que nuestra investigación constituye un aporte en el campo de los conocimientos matemáticos y didácticos que futuros profesores de primaria evidencian cuando se enseña la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, lo cual no ha sido el objeto de estudio central en las investigaciones revisadas, a excepción de Ramírez y Block (2009), pero con un profesor de primaria en formación continua.

Por otra parte, en esta investigación, el acercamiento a la identificación del conocimiento matemático y didáctico de los profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, lo realizamos desde el *conocimiento especializado del profesor de matemáticas*; perspectiva teórica que definimos en el capítulo III, la cual sólo ha sido empleada en dos de las investigaciones que revisamos en este apartado de antecedentes (Rojas, 2014; Montes et al., 2015), donde la noción de razón emerge como un significado más de las fracciones, aunque en alguna de ellas se plantean situaciones sobre el estudio de la razón en el campo de la proporcionalidad (Rojas, 2014). En términos concretos, este estudio se constituye como un aporte en la formación inicial de profesores de primaria que permite identificar y caracterizar el conocimiento especializado que ponen en juego cuando enseñan la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en un grupo de quinto grado.

CAPÍTULO III.
PERSPECTIVA TEÓRICA DE LA
INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO III. PERSPECTIVA TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN

III.1. Introducción

A lo largo del tiempo el papel del profesor se ha ido modificado en función de las exigencias de la sociedad y las políticas educativas de cada época, hoy, son bastantes los desafíos que enfrenta y que le demandan, entre otras cosas continuar aprendiendo para mejorar su trabajo. Pero ¿cómo definir ese proceso de aprendizaje en el que el profesor se involucra y tiene impacto en su vida profesional? De acuerdo con Nemiña, García, y Montero (2009) este proceso se denomina *desarrollo profesional* y se concibe como “un proceso de largo alcance en el que se incluyen oportunidades y experiencias planificadas que promueven el crecimiento y el desarrollo en la profesión docente” (p.6). En este sentido se mueve el presente texto, en el de identificar el conocimiento, que de acuerdo con algunos investigadores necesitan los profesores que enseñan matemáticas para ejercer su profesión.

Desde hace décadas, el conocimiento del profesor ha sido estudiado en diversos momentos de la formación del profesor y bajo diferentes enfoques, en este caso se aborda desde una perspectiva cognitiva y para ello se plantean tres apartados. En el primero se analizan los componentes del conocimiento del profesor, así, sin especificar qué disciplina es la que enseña. En el segundo apartado se analiza cómo es que la práctica del profesor se ha convertido en un objeto de estudio que pretende dar cuenta de los conocimientos que necesita un profesor para enseñar una disciplina específica. Finalmente, en un tercer apartado se analizan los componentes del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas*.

La importancia de analizar diferentes perspectivas sobre los componentes que definen el conocimiento del profesor está dada por el hecho de que, posteriormente pueden servir como mirada que permite analizar el conocimiento del profesor en la práctica y diseñar dispositivos de formación que posibiliten desarrollar tal conocimiento.

III.2. El desarrollo profesional y la formación de profesores

Actualmente, la formación de profesores se ha convertido en un tema de estudio para diferentes investigadores (Hargreaves, 1996; Marcelo, 2008; Navia, 2006; Nemiña, García y Montero, 2009; Tardif, 2004; Torres, 1999), desde diferentes perspectivas cada uno intenta definir en qué consiste la formación docente, ¿cuándo comienza?, ¿cuándo concluye?, ¿quiénes pueden involucrarse en ella? y

¿cuál ha de ser su papel a desempeñar? Pero, ¿cuál es la relación que se establece entre formación docente y desarrollo profesional? De acuerdo con la OEI⁴ (2013):

[...] una perspectiva más actualizada de la formación docente plantea el concepto del desarrollo profesional docente como un proceso a lo largo de toda la vida, y refiere, por tanto, a los procesos mediante los cuales los profesores aprenden a enseñar, y desarrollan y mejoran su repertorio de capacidades profesionales, individuales y colectivas, apoyados desde una perspectiva institucional (p.91).

En este sentido, en el presente documento el término de formación docente se aborda como una parte del desarrollo profesional que tiende a caracterizar los procesos a través de los cuales los profesores aprenden a enseñar. Además, resulta necesario ampliar el concepto de formación docente como un aprendizaje permanente que no se limita a lo que proponen las instituciones, es decir, retoma los “[...] aprendizajes realizados a lo largo y ancho de la vida, dentro y fuera de la escuela, y en el ejercicio mismo de la docencia” (Torres, 1999, p.2).

Marcelo (2008) y Tardif (2004) coinciden en que la formación del docente comienza desde que los sujetos ingresan a diferentes instituciones educativas como alumnos. Por ejemplo, en el caso de México se puede decir que su estancia en el preescolar, la escuela primaria, secundaria y preparatoria les brinda diferentes experiencias que les permiten aprender a enseñar, aunque quizá aún no han elegido ejercer la docencia. De ahí que Marcelo (2008) haga énfasis en el reconocimiento de que los aspirantes para maestros que llegan a las escuelas normales no son vasos vacíos, tienen diferentes creencias sobre cómo es la enseñanza.

La formación inicial se ha caracterizado por el momento en que los estudiantes para maestros comienzan un estudio formal a través de los diferentes programas que cursan de manera escolarizada o semi escolarizada. Mellado (2003) señala que “la formación inicial tiene que integrar los conocimientos académicos, las concepciones personales y el conocimiento práctico, y contribuir a generar en los profesores en formación su propio conocimiento didáctico del contenido” (p. 353). Al respecto, Torres (1999) menciona la importancia de rescatar en esta etapa la biografía escolar del futuro docente en relación con los contenidos curriculares, pero sobre todo, lo que han aprendido sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje, ya que pueden ser determinantes en el estilo del docente que se está formando. Por lo tanto, la formación inicial debe incorporar los conocimientos que traen los futuros docentes al ingresar a las escuelas normales, con el propósito de enriquecer esas experiencias y orientarlas al logro del perfil de egreso que se espera alcancen.

⁴ Organización de Estados Iberoamericanos

Una vez que los profesores en formación inicial concluyen esta etapa, se encuentran inmersos en otro proceso denominado formación continua, orientado a profesores que están en servicio, donde “[...] cuentan con una oferta variada de cursos para atender sus intereses personales y las necesidades del servicio, brindados por instituciones de educación superior” (OEI, 2013, p. 63). La formación continua de los docentes tiene gran relevancia para diferentes investigadores que plantean la necesidad de mejorar esta formación para aumentar el tiempo de la formación inicial (Marcelo, 2008). En este sentido, Marcelo (2008) traza un primer periodo para esta formación continua: “la inserción profesional en la enseñanza [...] es el periodo que abarca los primeros años, en los cuales los profesores han de realizar la transición desde estudiantes a docentes” (p.14). Sin embargo, hoy en día en México prevalece el término de formación continua para definir el lapso del tiempo que un docente se encuentra laborando después de concluir su formación inicial.

En términos generales, hablar de formación docente remite a destacar la formación inicial y continua del profesor, la primera se caracteriza porque se brinda en las instituciones formadoras, en el momento que el futuro profesor inicia sus estudios en este campo y en el que desempeña el papel de estudiante, mientras que la segunda hace referencia a los profesores que se encuentran en servicio y continúan estudiando para aumentar la efectividad de su trabajo a través de programas de actualización, entre otras actividades de formación que emprendan. Desde la perspectiva de Navia (2006), la formación inicial se define como formación formal y la formación continua como formación no formal.

De lo que se trata entonces es de analizar el desarrollo profesional de los docentes, es decir, su formación inicial y su formación continua, con el propósito de identificar cuáles conocimientos se pretende que posean los profesores en cada uno de estos momentos, sin dejar de lado la discusión sobre la importancia de retomar los conocimientos que traen sobre la enseñanza y el aprendizaje al ingresar a una escuela formadora de docentes.

III.2.1. Saberes, conocimientos y competencias. Aspectos dominantes en la formación de profesores

La formación de los maestros es compleja, ya que involucra una diversidad de conocimientos, saberes y competencias que deben adquirir durante su formación inicial y continua, los cuales están determinados por algunas instituciones educativas o características del contexto en que se desempeñan. Al respecto, Kuzniak (1994) señala que “los conocimientos que deben adquirir los estudiantes que

desean convertirse en profesores incluyen competencias que apuntan a diferentes saberes” (p. 253). Sin embargo, antes de continuar es preciso preguntarse: ¿Qué es un conocimiento?, ¿Qué es un saber? y ¿Qué es una competencia?

De acuerdo con Altet (2005), “el conocimiento es integrado por el sujeto, y es de orden personal” (p. 7); mientras que el saber se sitúa “entre la interfaz del conocimiento y la información” (Lerbert, 1992, citado en Altet, 2005, p.7), y se construye bajo la interacción de ambos, entre sujeto y entorno. Por su parte la competencia se define como la “capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones” (Perrenoud, 2004, p.11). En este sentido, para que el profesor adquiera un saber ha de poner en juego los conocimientos que posee a partir del desarrollo de ciertas competencias coherentes con la situación que enfrenta. De ahí que resulta conveniente investigar la diversidad de conocimientos del profesor necesarios para ejercer como tal en una institución educativa.

III.2.2. Los conocimientos del profesor

En la actualidad ser profesor implica poseer una variedad de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que se han de poner en juego en el aula. Por lo tanto, ser profesor es una tarea compleja ya que el conocimiento profesional necesario en esta profesión requiere de un conocimiento específico. Al respecto, Climent y Carrillo (2007) señalan que:

La consideración conjunta de la formación inicial y permanente (Carrillo, Coriat y Oliveira, 1999), permite centrar la atención en el inicio del estudiante para maestro en modos de aprendizaje que potencian su desarrollo continuo, enfocando la formación inicial desde una perspectiva profesional que contempla qué necesita saber el profesor para enseñar matemáticas y para su mejora continua en tal tarea (p. 308).

Para ello su práctica debe convertirse en campo de indagación (Jaworski, 1998), algo que desde su formación inicial se puede fomentar, potenciando que problematicen la práctica, la perciban como vía de desarrollo, y empiecen a adquirir modos y herramientas para analizarla. En palabras de Tardif (2004) se hablaría de abrir un espacio mayor a “la formación profesional que reconozca a los alumnos como sujetos de conocimiento” (p.178), se supone que esta lógica profesional toma como referente el análisis de las prácticas, las tareas y conocimientos de los profesores desde donde se busca proceder mediante un enfoque reflexivo, rescatando las condicionantes reales del trabajo del profesor y las estrategias que se emplearon para erradicar esos condicionantes durante la acción.

En la formación inicial, el estudiante tiene que saber identificar y resolver situaciones conflictivas, poniendo en juego estrategias para enfrentar la práctica docente, en la que la mayoría de las veces hay que actuar con premura (Flores, 1998), motivo por el cual resulta interesante analizar qué hacen los profesores en formación inicial durante sus jornadas de práctica en la escuela primaria y cuáles conocimientos emplean.

III.2.3. El conocimiento profesional del profesor

La profesionalización del docente implica el reconocimiento de los conocimientos que están en juego durante el desarrollo de su tarea, conocimientos que por otra parte a lo largo del tiempo han sufrido una serie de cambios en función de las condiciones de la sociedad y se han convertido en objeto de estudio para contribuir a su buen desempeño como docente. Esta temática ha tenido influencia a nivel nacional e internacional, haciéndose palpable en las reformas educativas en educación básica, media superior y superior.

De acuerdo con Flores y Moreno (2000) la caracterización administrativa del conocimiento profesional del docente deja un margen de ambigüedad por lo que se presentan dos problemas: clarificar los componentes del conocimiento profesional y buscar formas para favorecer que los profesores desarrollen este conocimiento, lo lleguen a explicitar y puedan compartirlo.

En la bibliografía de las profesiones (Bourdoncle, 1994; Tardif y Gauthier, 1999; citado en Tardif, 2004) puede observarse que en los últimos veinte años el conocimiento profesional adopta ciertas características específicas, a saber:

- a. En su práctica los profesionales deben apoyarse en conocimientos especializados y formalizados.
- b. Estos conocimientos especializados deben adquirirse a través de una larga formación de alto nivel.
- c. Los conocimientos profesionales son esencialmente pragmáticos, o sea, se modelan y orientan hacia la solución de situaciones problemáticas concretas.
- d. Sólo los profesionales poseen la competencia y el derecho a utilizar sus conocimientos que, en cierto modo, son esotéricos.
- e. La competencia e incompetencia de un profesional sólo la pueden evaluar sus colegas.
- f. Los conocimientos profesionales exigen siempre una parcela de improvisación y de adaptación a situaciones nuevas y únicas que exigen del profesor reflexión para comprender el problema,

organizar y aclarar los objetivos deseados y los medios que utiliza para alcanzarlos. Es lo que Schön (1983) llama “construcción del problema”.

- g. Tanto en sus teorías básicas como en sus consecuencias prácticas, los conocimientos profesionales son evolutivos y progresivos y, por consiguiente, necesitan de una formación continua y continuada.
- h. Un profesional puede cometer errores por los que pueda considerársele técnica y legalmente responsable, lo que quiere decir que se puede, en principio, establecer una relación directa y hasta causal, en ciertos casos, entre la realización de sus actos y la aplicación de sus conocimientos, en función de los modelos de competencia aceptados dentro de su propia profesión.

Como podemos constatar, el individuo al que se le atribuye un conocimiento profesional comparte diferentes responsabilidades con su materia de trabajo en función del conocimiento que posee y al cual debe facilitar el acceso. Al respecto, Tamir, (1991, citado en Sosa, 2011) señala que el conocimiento profesional se refiere al cuerpo de conocimiento y habilidades que son necesarios para funcionar con éxito en una profesión particular. Por su parte, Tardif (2004) señala la importancia de que la formación del profesorado se centre en los conocimientos específicos de su profesión.

De lo anterior concluimos que el conocimiento profesional se va adquiriendo gradualmente al revisar la teoría propia de su campo, al diseñar sus planes de clase y cuando intenta comprender los problemas que se presentan en su práctica. Por otra parte, este conocimiento se manifiesta en las explicaciones que el profesor brinda a sus alumnos al abordar una temática o dar respuesta a sus inquietudes. En palabras de Bromme (1994, citado en Flores y Morcote, 2001, s.p.) el conocimiento profesional del profesor alude al contenido que se habla durante la lección y a ese conocimiento adicional que posee y que le permite ser capaz de enseñar matemáticas en una forma apropiada a sus alumnos.

III.2.4. El conocimiento para la enseñanza

Desde hace décadas se han llevado a cabo una serie de investigaciones con el propósito de definir y organizar el conocimiento profesional de los profesores. Prueba de ello, son los trabajos de Shulman (1986, 1998, 2005) y Shulman, Grossman & Wilson (2005) donde inicialmente se realiza el análisis de la práctica del profesor para posteriormente caracterizar los conocimientos que necesita para enseñar.

Shulman (1998) señala que existe una dependencia entre la teoría y la práctica, es decir, no se pueden desarrollar teorías al margen de la práctica. De ahí que en sus diferentes trabajos de investigación intente definir y reflexionar sobre el conocimiento que el profesor necesita en función del análisis de diferentes momentos de clases de profesores. Además, plantea que “[...] el reto más formidable para cualquier persona en una profesión no es la aplicación de nuevos conocimientos teóricos, sino aprender de la experiencia” (Shulman, 1998, p.519).

Algunos trabajos de Shulman (1986) sobre el conocimiento del contenido para la enseñanza, afirman que los profesores tienen experiencia en torno a los contenidos que enseñan, lo cual lo ha llevado a considerar tres componentes esenciales de la materia que se va a enseñar: el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular.

- a. *Conocimiento del contenido.* “Esto se refiere a la cantidad y organización de conocimiento de contenido en la mente del profesor” (Shulman, 1986, p.9). Sin embargo, para pensar correctamente sobre el conocimiento del contenido se requiere ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos de un dominio. De acuerdo con Sosa (2011) “el profesor debe entender lo que está enseñando y el porqué del contenido a enseñar” (p.19).
- b. *Conocimiento didáctico del contenido.* Aquí se incluyen los conocimientos necesarios para enseñar un contenido. Shulman (1986) plantea en esta categoría la incorporación de analogías, ilustraciones, ejemplos y explicaciones que faciliten hacer un contenido comprensible para otros. Por ende, “el profesor debe tener a la mano un verdadero arsenal de formas alternativas de representación, algunas de las cuales se derivan de la investigación, mientras que pueden originarse en la práctica” (Shulman, 1986, p.9), mismas que permitirán al profesor comprender lo que hace el aprendizaje de temas específicos fácil o difícil, por ejemplo, el papel que desempeñan los conocimientos que traen los alumnos una vez que ingresan a una institución educativa o un grado específico.
- c. *Conocimiento curricular.* Aborda el conocimiento de los materiales curriculares alternativos para la enseñanza de diferentes temas, es decir,

[...] es representado por la gama completa de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos y temas menos, un nivel determinado, la variedad de instrucción materiales disponibles en relación de estos programas, y el conjunto de características que sirven tanto las indicaciones y contraindicaciones para el uso de plan de estudios particular o materiales del programa en determinadas (Shulman, 1986, p.10).

Shulman (1986) ubica en el conocimiento curricular: el conocimiento curricular lateral y el conocimiento curricular vertical. El primero relaciona el conocimiento del currículo que se está

enseñando con el conocimiento del currículo que los estudiantes están aprendiendo paralelamente en otras clases. El conocimiento vertical no se limita a los conocimientos curriculares que se imparten en un determinado ciclo escolar, incluye “la familiaridad con los temas y cuestiones que han sido y serán impartidas en la misma materia durante los años anteriores y posteriores en la escuela” (Shulman, 1986, p. 10).

El estudio del conocimiento y enseñanza del profesor tiene un papel por demás relevante en los trabajos de Shulman (2005), razón por la que los plantea como fundamentos para una nueva reforma sobre la docencia. A pesar de que es consciente de que el conocimiento se encuentra en un proceso de transformación considera cuatro fuentes principales del conocimiento base para la enseñanza:

- Formación académica en la disciplina a enseñar.
- Estructuras y materiales didácticos.
- Literatura educativa especializada.
- La sabiduría adquirida con la práctica.

Más tarde, estas fuentes principales del conocimiento base para la enseñanza le permiten plantear al lado de sus colaboradores Grossman & Wilson (2005) cuatro dimensiones del conocimiento de la materia que tienen influencia en la enseñanza y aprendizaje de los profesores en formación inicial:

- a. *Conocimiento del contenido para la enseñanza*: hace referencia a la información de una disciplina, cómo se encuentran organizados sus principios y cuáles son los conceptos centrales que maneja. Shulman et al. (2005) agregan que los profesores que se inician en el ejercicio de la docencia de manera continua aprenden nuevos contenidos en los asignaturas que abordan con sus alumnos. Sin embargo, la falta de este conocimiento puede también afectar el estilo de su enseñanza.
- b. *Conocimiento sustantivo para la enseñanza*: “[...] incluye los marcos exploratorios o paradigmas que son usados tanto para guiar la investigación en el campo como para dar sentido a los datos” (Shulman et al., 2005, p.14). Aunque en algunos momentos este conocimiento no requiere ser discutido, pero sí puede tener influencia en las decisiones que tome para organizar su clase.
- c. *Conocimiento sintáctico para la enseñanza*: se define como “[...] los medios por los que el nuevo conocimiento es introducido y aceptado en la comunidad” (Shulman et al., 2005, p.15). Este conocimiento permite profundizar en el estudio de las disciplinas; situaciones que son fáciles de presentar en cursos de facultades avanzadas.

- d. *Creencias acerca de la materia*: es aquí donde ocupan un lugar especial las creencias sobre cómo enseñar un determinado contenido, qué es importante conocer, cómo se dirigen en sus clases y cómo aprenden de sus experiencias.

Las tres primeras dimensiones corresponden a la enseñanza, la cuarta rescata las creencias acerca de la materia.

Las diferentes categorías que Shulman y sus colaboradores han planteado en cada uno de sus trabajos caracterizan el conocimiento del profesor en relación con su contenido y su enseñanza, el cual ejemplifican a través del análisis de la práctica en clases de biología, inglés, matemáticas, entre otras áreas.

III.2.5. Otras perspectivas sobre el conocimiento del profesor

Una investigación más que propone definir y organizar el conocimiento profesional de los profesores, es la investigación de Marcelo (1992), este autor toma como referencia los trabajos de Grossman (1990) y Reynolds (1992) para establecer cuatro componentes del conocimiento profesional.

- a. *El conocimiento pedagógico general*. Se relaciona con el conocimiento, creencias y destrezas que los profesores poseen, y se relaciona con los principios generales de la enseñanza, el aprendizaje, los alumnos, aspectos legales de la educación, entre otros (Reynolds, 1991, citado en Marcelo, 1992).
- b. *El conocimiento del contenido*. Este conocimiento está ligado a los conocimientos pedagógicos, lo cual facilita su enseñanza, al conocer con profundidad su materia de trabajo. En este sentido, este conocimiento del contenido hace alusión al conocimiento de la disciplina a enseñar (Buchman, 1984, citado en Marcelo, 1992). En este componente se agregan distintas organizaciones que ha tenido el conocimiento del contenido de los profesores.
- c. *El conocimiento del contexto*. Hace referencia al conocimiento de las condiciones del lugar donde se enseña, así como las características de los alumnos, esto con el propósito de que el profesor relacione con su trabajo del aula lo que sucede fuera de la escuela.
- d. *Conocimiento didáctico del contenido*. En este componente se toma la aportación de Shulman (1986) para definirlo como aquel que incluye los temas más comúnmente enseñados en una asignatura, las formas de representar sus ideas, los ejemplos, las

explicaciones, además de lo que dificulta o facilita el aprendizaje de temas concretos y las concepciones de los estudiantes de acuerdo a su edad. Así, se retoman las ideas de Stengel (1992, citado en Marcelo, 1992) para señalar que también se denomina conocimiento didáctico del contenido a ese conocimiento que favorece se produzca la transformación del conocimiento establecido en el currículo escolar, en algo que tenga sentido para los alumnos.

Además de este trabajo relacionado con el conocimiento profesional de los profesores existen otras investigaciones (Tabla 3.) sobre la cognición o el pensamiento del docente donde los saberes de los profesores son representaciones mentales a partir de las cuales ordenan su práctica y ejecutan sus acciones (Tardif, 2004). Debido a que el campo que interesa estudiar en este momento se centra en las matemáticas, los trabajos de Marcelo (1992), Shulman y sus colaboradores, se toman como antecedente para analizar enseguida los conocimientos que un profesor debe poseer para enseñar matemáticas.

Tabla 3. Los conocimientos del profesor (tomada de Marcelo, 1992, s.p.)

BALL, MCDIARMID, (1989)	CORNBLETH (1989)	GROSSMAN, WILSON & SHULMAN, (1989)	KENNEDY (1990)
Conocimiento Sustantivo	Conocimiento declarativo	Conocimiento del contenido para la enseñanza	Conocimiento del contenido
		Conocimiento sustantivo	
Conocimiento sobre la materia	Conocimiento procedimental	Conocimiento sintáctico	Organización, estructura del contenido
Disposición hacia la materia		Creencias	Modelos de indagación

III.2.6. El conocimiento matemático para la enseñanza. Una visión del conocimiento del profesor desde su práctica

Desde hace décadas, existen investigadores que se han dedicado a profundizar en el estudio del conocimiento profesional de los profesores a partir de diferentes configuraciones. En el caso de los estudios sobre los profesores que enseñan matemáticas surgieron algunas interrogantes sobre el conocimiento matemático que poseía el profesor y sobre el que debería poseer para el ejercicio efectivo de su función docente (Sosa, 2011). Ambos cuestionamientos encuentran respuesta en la práctica, tanto de los docentes en formación continua como de los profesores en formación inicial durante su estancia en la escuela primaria.

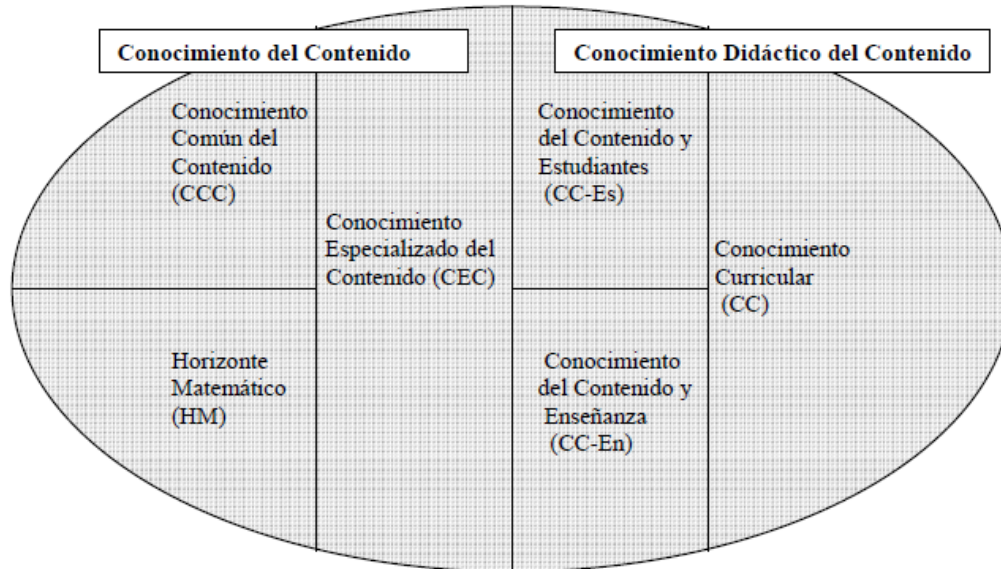
Es así como nace el modelo teórico *Conocimiento matemático para la enseñanza* propuesto por Ball et. (2008), es decir, este modelo surge del análisis que estos investigadores hicieron de la práctica de docentes en servicio en el nivel primaria. En este sentido, es conveniente citar que

El concepto de conocimiento matemático para la enseñanza surge de los estudios referentes a la práctica docente, en el ámbito matemático, y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores que requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento del contenido (Flores y Rojas, 2011, p.18).

Los trabajos de Ball y Shulman se caracterizan por enmarcar en y desde la práctica sus investigaciones sobre el conocimiento del profesor. Las experiencias adquiridas por Ball sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en aulas de escuelas primarias le han permitido caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas. De ahí que comienza por examinar y analizar la práctica, en lugar de analizar lo que propone el currículo o lo que creen los profesores que deben saber. Estas ideas se encuentran presentes en algunas de sus investigaciones como: *Con la mirada puesta en el horizonte matemático: dilemas de la enseñanza de las matemáticas desde la escuela primaria* (Ball, 1993), *Salvando las prácticas: entrelazando contenido y la pedagogía en la enseñanza y el aprendizaje para enseñar* (Ball, 2000), *Las relaciones entre la investigación y la práctica* (Ball, 2002), entre otras investigaciones.

A partir de estos y otros estudios, Ball et al. (2008) presentan una propuesta centrada en el conocimiento matemático para la enseñanza que incluye el conocimiento curricular -planteado por Shulman- y el conocimiento didáctico del contenido, obteniendo así sólo dos grandes dominios, cada uno de ellos está subdividido en tres subdominios. En el diagrama siguiente se puede apreciar el modelo de Ball.

Figura 2. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de Ball et al. (2008, citado en Sosa, 2011, p. 30)



El *Conocimiento Común del Contenido* (CCC) se refiere al conocimiento matemático y a las habilidades que permiten al profesor realizar las actividades que se asignan a los estudiantes, sin embargo, no es exclusivo de la enseñanza. El término “común” se emplea para indicar que dicho conocimiento se puede emplear en una variedad de entornos, por ejemplo, la ingeniería y arquitectura (Ball et al., 2008). Aunque desde este subdominio no se asume que todas las personas tienen este conocimiento.

El *Conocimiento Especializado del Contenido* (CEC) incluye el conocimiento matemático y las habilidades propias de la enseñanza. Este conocimiento se hace evidente en la búsqueda de patrones en errores de los alumnos, por citar un ejemplo, situación que lo guía a hacer una especie de trabajo matemático que otros no hacen. En consecuencia, se asume que durante la enseñanza los profesores requieren de un conocimiento que va más allá de lo que se enseña a los estudiantes, lo cual permitirá interpretar la diversidad de respuestas que los alumnos puedan dar ante una actividad específica. Ball et al. (2008) señalan que “las exigencias de la labor de la enseñanza de las matemáticas crea la necesidad de un cuerpo de conocimiento matemático especializado en la enseñanza” (p.401).

El *Horizonte Matemático* (HM) “es considerado como el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extramatemáticas” (Sosa, 2011, p.31). Este conocimiento permite al profesor determinar cómo abordar un determinado contenido matemático en el primero segundo y tercer año, por citar un ejemplo. Ball et al. (2008), expresan que el HM aún está en estudio y se incluye provisionalmente en el conocimiento del contenido.

El *Conocimiento del Contenido y Estudiantes* (CC-Es) combina el conocimiento de los estudiantes y lo que saben acerca de las matemáticas. En este espacio los profesores pueden anticipar lo que los estudiantes piensan al realizar una actividad, si les resultará interesante o motivante. Aunque también prevén lo que les provocará algunos conflictos durante la enseñanza de un contenido matemático particular y las posibles concepciones erróneas que manifestarán.

El *Conocimiento del Contenido y Enseñanza* (CC-En) involucra el saber sobre la enseñanza y el conocimiento acerca de las matemáticas. El conocimiento de la enseñanza y el contenido se convierte en una amalgama, que implica una idea matemática particular y su familiaridad con los principios pedagógicos para la enseñanza de ese contenido. “El CC-En incluye las habilidades que tienen los profesores para saber qué representaciones son más adecuadas para enseñar un contenido específico y usar diferentes métodos y procedimientos para enseñar ese contenido matemático” (Sosa, 2011, p.32).

Respecto al *Conocimiento curricular* (CC), Ball et al. (2008), manifiestan que se tiene colocada provisionalmente la tercera categoría de curricular de Shulman (1986) en el conocimiento didáctico del contenido, aunque se especifica que no se está seguro si esto puede ser una categoría del conocimiento del contenido y enseñanza o si puede funcionar a través de las varias categorías o ser una categoría en sí misma.

Ahora bien, los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza presentan conocimientos ligados con el conocimiento del contenido y el conocimiento de su enseñanza. Por otra parte, es conveniente mencionar que los dominios y subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza que propone Ball et al. (2008), están siendo estudiados por diferentes investigadores que pretenden profundizar en la caracterización del conocimiento que requiere el profesor para enseñar matemáticas.

III.2.7. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El conocimiento del profesor de matemáticas se ha convertido en el objeto de estudio de diferentes investigadores que tienen el propósito de caracterizar el conocimiento del contenido que deben tener los profesores, es decir, sobre la disciplina y el conocimiento necesario para su enseñanza.

Blanco y Contreras (2012) establecen dos componentes del conocimiento del profesor a partir de la revisión de diferentes trabajos de investigación en este campo: “[...] aspectos generales (conocimiento pedagógico general, conocimiento de las características de los alumnos, conocimiento del contexto educativo), y otro referido al contenido específico que el profesor enseña (conocimiento del contenido, conocimiento del curriculum y conocimiento didáctico del contenido)” (p.102). Sin duda, cada investigación aporta elementos para el diseño de nuevos modelos que toman como pretexto indagar y profundizar en aspectos que están presentes o ausentes en los modelos anteriores.

En el caso del modelo Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), Carrillo et. al. (2013) señalan que ha sido un gran avance en la descripción de los conocimientos que necesita el profesor en su práctica, donde se destacan aquellos ligados a las matemáticas, los alumnos y su aprendizaje, así como los planes y programas de estudio. Sin embargo, manifiestan existen algunas dificultades “[...] en la aplicación de este marco para muestras reales de clases de matemáticas, debido a una tendencia de los subdominios que componen el modelo a superponerse” (Carrillo et. al., 2013, p. 2986.); esta situación se ejemplifica en la diferenciación que se establece al decidir dónde termina el Conocimiento común del contenido (CCC) y donde comienza el Conocimiento especializado del contenido (CEC), pues deja abierta la posibilidad de que todo el conocimiento de los maestros es, en cierta medida especializado. Además, Carrillo y sus colaboradores expresan que existe otra dificultad en la demarcación del CEC del HM y del CEC y el CC-Es. De ahí que estas dificultades se conviertan en el referente para nuevos estudios que sugieren un refinamiento del modelo anterior, desde una perspectiva que contribuya a definir la especificidad del conocimiento especializado del profesor.

En este movimiento de reconstrucción de modelos, Carrillo et al. (2013) presentan el modelo Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el contexto del CERME 8, donde las presentaciones se realizan en inglés, por lo cual, el nombre del modelo aparece como *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), al igual que sus componentes. Desde este modelo se asume que todo el conocimiento del profesor es especializado, en lugar de hablar del conocimiento especializado del contenido, con el propósito de pensar en el conocimiento de los profesores de

matemáticas que tiene relación sólo con ellos (donde la naturaleza especializada define todo el conocimiento en estudio).

En este sentido, Carrillo, Escudero & Flores (2014) agregan que este modelo analítico de tipo descriptivo que estudia una parte del conocimiento profesional del profesor, la que tiene relación con la especificidad de la materia (matemáticas), además de inspirarse en los trabajos de Ball et al. (2008), toma como referente otras “[...] propuestas de modelos de conocimiento profesional del profesor de matemáticas, por ejemplo el *Knowledge Quartet* (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009) y el *Mathematical Proficiency for Teaching* (Kilpatrick, Blume y Allen, 2006)” (Carrillo et al., 2014, p.16).

En el libro *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* Carrillo et al. (2014a), definen qué se entiende por conocimiento desde el MTSK. Así, después de revisar literatura al respecto, toman como referente las aportaciones de Pajares (1992) y Schoenfeld (2010), ya que señalan son compatibles. Pajares (1992) emplea el conocimiento para referirse a la amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos; mientras que Schoenfeld (2010) señala:

Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto! (Schoenfeld, 2010, p. 25)

Después de mencionar este posicionamiento, Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado y Flores (2014) señalan que esta definición introduce dos elementos importantes, además de los términos propios de su modelo de conocimiento como el relacionado a las metas, los cuales describen así:

-Información disponible: Bajo esta nomenclatura caben acciones, comprensión de diferentes tipos, ya sea relacional, instrumental, lógica o simbólica según Skemp, y es adaptable a las diferentes situaciones en las que se ponen en juego comentadas anteriormente.

-Para usar: Este es el elemento discriminador de la definición. Aquella información que no tenga sentido usar en la actividad que se desempeñe (en la tarea concreta de la enseñanza de la matemática en este caso), no tendrá cabida en esta definición de conocimiento. Así, si encontráramos un profesor de primaria que poseyera con amplias nociones de Análisis Funcional, no nos permitiría afirmar que dichas nociones fueran constituyentes de conocimiento *especializado*, como profesor de matemáticas del ciclo que enseña.

-No es necesariamente correcto: Esta aclaración es una llamada de atención sobre la posición del investigador que busca comprender el conocimiento del profesor, siendo la diferencia entre conocimiento correcto o incorrecto irrelevante en algunos casos, especialmente si la intención del investigador es *saber qué conoce el profesor*, ya que, coincida con el referente de corrección o no, el profesor posee dicha información, aunque puede resultar interesante, dependiendo del tipo de investigación en curso, para

comprender el conocimiento del profesor o su actuación. Además, creemos necesario hacer una llamada de atención sobre la consideración negativa del término incorrecto, defendiéndolo no como algo negativo, sino como no coincidente con el referente de *verdad* (Montes et al., 2014, pp. 10-11).

En Climent et al. (2014) se exponen seis características del conocimiento profesional y su consideración en la generación del MTSK y en la investigación sobre éste. Así, asocian el trabajo de Climent (2005) como un referente para la descripción de las anteriores, las cuales exponemos enseguida:

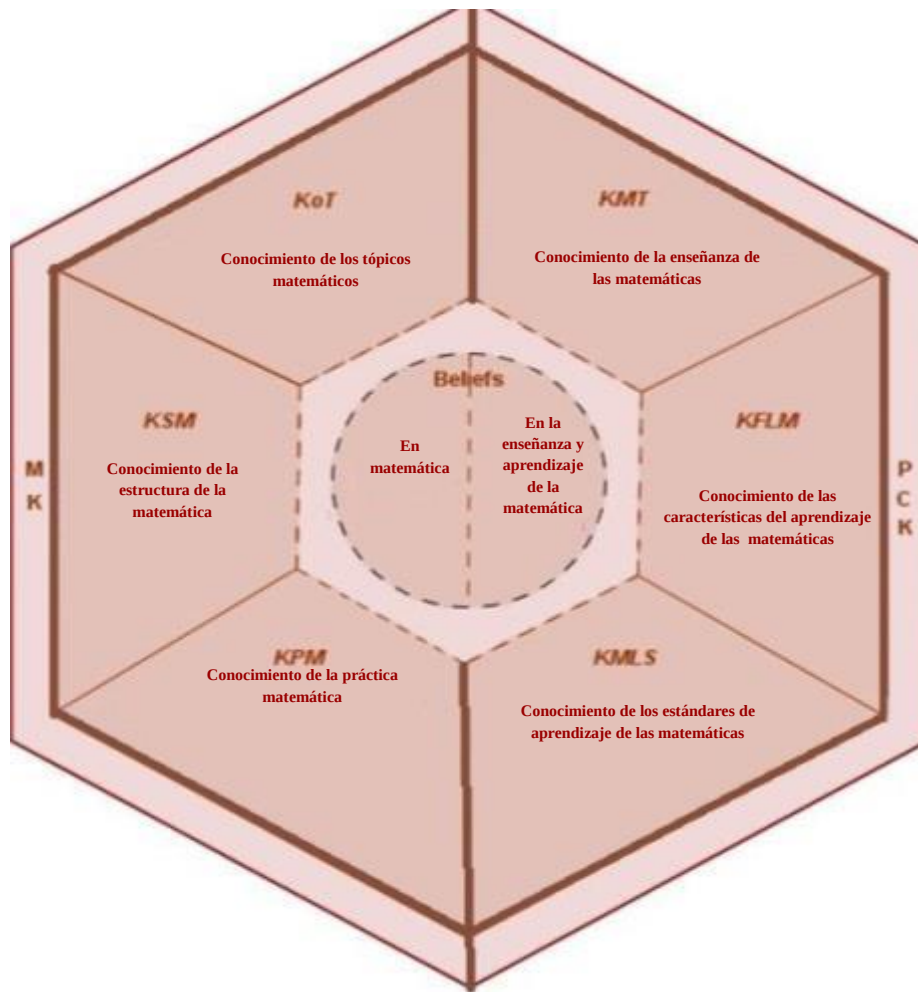
- La primera característica hace énfasis en que el conocimiento profesional del profesor es *personal*, es decir, es propio del individuo, proviene de sus concepciones, valores, actitudes y recoge su experiencia. De ahí que el conocimiento de cada profesor es único.
- Es *contextualizado*, emerge relacionado a diferentes contextos profesionales como las aulas de clases (propias) o de espacios específicos de instituciones formadoras de docentes donde se establecen una serie de relaciones entre diferentes agentes; lo anterior forma parte de su conocimiento.
- Es *integrado y complejo*. Se entiende que está integrado por diferentes saberes, que difícilmente se pueden aislar porque constituyen un sistema.
- Es *práctico* debido a que su fin es la práctica, pero se nutre de ella; en otras palabras, establece una doble relación con la práctica.
- Se le atribuye el carácter de *dinámico* porque está en constante cambio en función de las relaciones y experiencias que adquiere al interactuar con alumnos, profesores, entre otros agentes, que de manera directa o indirecta inciden en su formación y se instauran a través de sus reflexiones personales.
- Por último, el conocimiento es *parcialmente tácito* porque se asocia con el conocimiento práctico común desde la perspectiva de Schön (1983, 1987), el cual se desarrolla de manera especial con la experiencia.

Las características anteriores nos remiten a configurar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas o que enseña matemáticas desde la perspectiva del MTSK.

En la construcción teórica del modelo MTSK importa tanto su composición, como la observación de la práctica de los profesores, por lo cual se divide en dos dominios: conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido. Cabe mencionar que cada uno de estos dominios está conformado por tres subdominios, es decir, pequeños grupos que comparten ciertas características y,

además hacen referencia a los diferentes individuos o instituciones que participan en la identificación y construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En la Figura 2 se presentan los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través de la representación gráfica del modelo MTSK. Las siglas empleadas para los dominios y subdominios corresponden a su nombre en inglés.

Figura 3. Diagrama del *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge-MTSK* (Carrillo et. al, 2013).



A partir de este diagrama y siguiendo a Carrillo et al. (2013), Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014) y, Escudero-Ávila (2015) podemos apreciar que el MTSK está constituido por el dominio del conocimiento matemático (MK), el dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) y las concepciones que se ubican en el centro de la figura; los dos primeros están integrados por diferentes subdominios que incluyen un sistema de categorías que surge de la

elucubración teórica y los datos empíricos con los que se han trabajado, aunque a finales de 2016, en las sesiones del Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIDM) de la Universidad de Huelva, que es de donde emerge este modelo, se han refinado algunas categorías, las cuales se integran al modelo y describen en Liñán (2017). Enseguida presentamos una descripción general de los componentes del MTSK tomando como referente las fuentes citadas.

En el dominio del conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge* - MK) resulta un elemento fundamental el conocimiento que el profesor tiene de la disciplina que enseña, en este caso, matemáticas. De ahí que se plantean como objeto de investigación saber qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas.

El MK está constituido por tres subdominios: conocimiento de los temas matemáticos (*Knowledge of Topics* - KoT), conocimiento de la estructura matemática (*Knowledge of the Structure of Mathematics* - KSM) y conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of the Practices in Mathematics* - KPM). A continuación mencionamos cada uno de ellos y las categorías o indicadores de conocimiento que los integran.

El *conocimiento de los temas matemáticos* (KoT) se considera en el MTSK como el subdominio que permite describir qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar. Así, se supone conoce los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. Incluye el contenido que se quiere aprenda el alumno y permite la consideración de un conocimiento con un nivel de profundización mayor al esperado para los alumnos.

Es conveniente mencionar, se entiende por *tema*⁵ los contenidos que provienen de los bloques de conocimiento tradicionalmente considerados en matemáticas. Aquí emergen como un referente las áreas propuestas por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, los cuales están relacionados entre sí. Los temas son los componentes de estas grandes ramas y pueden variar de acuerdo al currículo de cada país.

Con el propósito de caracterizar el subdominio conocimiento de los temas (KoT) se proponen cuatro categorías, mismas que pueden emplearse indistintamente del tema que el profesor esté abordando. Enseguida describimos cada una de las categorías.

⁵ El énfasis es nuestro.

Definiciones, propiedades y sus fundamentos es una categoría del KoT producto de las últimas refinaciones del SIDM (2016), cuyo proceso se encuentra palpable (principalmente) en diferentes investigaciones (Flores-Medrano et al., 2014; Escudero-Ávila, 2015; Liñán, 2017). En esta categoría se ubica “el conjunto de propiedades que hacen definible a un tema y le dan sentido y significado, además de las formas alternativas de hacerlo; inicialmente se consideraron categorías independientes: definiciones por un lado y propiedades y sus fundamentos por otro [...]” (Liñán, 2017, p. 25).

En la categoría de *Registros de representación* se considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de las distintas formas de representación del tema trabajado (numérica, verbal, analítica, etcétera), así como el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado asociado a dicha representación (Flores-Medrano et al., 2014). En esta investigación retomamos algunas aportaciones de Rojas (2014) en relación con los sistemas de representación para el caso de las fracciones:

-*Verbal o literal*. Mitad, un medio, medio, uno de dos, media parte.

-*Numérico*. División indicada ($1/2$), par ordenado (1,2), razón (1:2), porcentaje (50%), decimal (0,5).

-*Gráfico*. Recta numérica como subconjunto de los R . En el plano cartesiano se puede establecer la correspondencia biunívoca entre los puntos de coordenadas enteros, con la segunda coordenada no nula y los elementos del conjunto $Z \times Z / \{0\}$ y representación de las clases de equivalencia de pares de enteros.

-*Figural*. Una unidad dividida en partes iguales, cada parte representa una cantidad. Relación existente entre el todo (continuo o discreto) y sus partes.

[...]

Estos tipos de representaciones pueden emplearse para trabajar las cantidades como longitud y área en los niveles iniciales de la enseñanza de las fracciones, hasta llegar a representar las clases de equivalencia de pares de enteros en los niveles sucesivos. También, puede relacionarse que los números racionales admiten una representación decimal que se obtiene dividiendo el numerador y del denominador. Luego, todo número con representación decimal finita o periódica puede representarse como un número racional, es decir como un cociente entre dos enteros (pp. 84-85).

Los registros de representación de fracciones descritos por Rojas (2014): verbal o literal, numérica, gráfica y figural se pueden hacer presentes en nuestro trabajo porque la temática general son las fracciones y, de manera específica, la razón como significado de la fracción.

Fenomenología es una categoría más del KoT, considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de los modelos atribuibles a un tema, vistos como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático (Flores-Medrano et al., 2014). Flores (2008) enfatiza en su relación con el conocimiento que tiene un profesor sobre el tipo de problemáticas *ad hoc* a cada algoritmo para

resolver una división de fracciones. En esta categoría recuperamos como ejemplos los indicadores de conocimiento propuestos por Rojas (2014):

- Conocer los distintos significados del concepto de fracción como relación parte-todo, reparto, medida, cociente, operador y razón. Conocer distintos significados de las operaciones con racionales, en diversas formas de representación, como problemas aditivos de cambio, combinación y comparación, y multiplicativos de proporcionalidad, fracción de fracción, producto de medidas y áreas.
- Referencias a campos de utilidad del contenido en ámbitos específicos relacionados con el pensamiento multiplicativo inverso y la proporcionalidad, especialmente si se refiere a contenidos con mayor grado de formalización. Por ejemplo, si el profesor alude a las concepciones de los números racionales como razón, fomenta el pensamiento proporcional, destaca momentos de la génesis de las matemáticas.
- Conocer los contextos que aparecen en las diversas situaciones, como:
 - Medidas de magnitudes (medio kilo, tres cuartos de hora).
 - Relaciones concretas entre cantidades (escala de 1:1000, cartografía; tanto por ciento, comercio, por mil; falta el 10%, descuento de un 10%, construcción) (p.84).

Una cuarta categoría del KoT es *procedimientos* donde se considera el conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos (¿cómo se hace/utiliza?; las condiciones suficientes para proceder (¿cuándo se puede hacer/utilizar?); los fundamentos de los algoritmos (¿por qué se hace/utiliza?) y las características que tendría el objeto resultante asociadas al tema en cuestión (Flores-Medrano et al., 2014). Respecto a esta categoría Rojas (2014) señala:

- Dominio de indicadores de cada operación o de campos de problemas relacionados con ellos, de conceptos matemáticos y procedimientos empleados para realizar las operaciones y resolver situaciones y problemas. Conocimientos tales como:
 - En la división de fracciones conocer el algoritmo de los productos cruzados, el de invertir y multiplicar, o bien el de invertir los numeradores una vez reducidas ambas fracciones a denominar común.
 - Para valorar la equivalencia de fracciones presentar el método de los productos cruzados, multiplicar o dividir numerador y denominador o la división de dos fracciones en que su resultado sea la unidad.
- Dominio de los conceptos y los procedimientos relacionados con las fracciones, como simplificación y amplificación de fracciones, operaciones con fracciones, concepto de fracciones equivalentes, comparación de fracciones, números decimales y operaciones (p. 84).

El segundo subdominio del MK corresponde al *Conocimiento de la estructura de las matemáticas* (KSM). Hace referencia al conocimiento de las relaciones que el profesor establece entre distintos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catlán, 2013) en el curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. En síntesis, se trata de conexiones entre temas matemáticos en función de su temporalidad como visión secuenciadora que genera conexiones de complejización y simplificación y, como la delimitación de objetos matemáticos que generan

conexiones interconceptuales. En este subdominio se consideran cuatro categorías, las cuales enunciamos enseguida.

Conexiones de complejización se relacionan con los contenidos enseñados con los contenidos posteriores, que no necesariamente corresponden al curso posterior, pueden relacionarse con otros contenidos de diferentes cursos posteriores de su formación. Aquí se retoma como ejemplo, el conocimiento que tiene un profesor del trabajo con escalas como una complejización de la actividad de ordenar por tamaños de educación infantil.

La segunda categoría corresponde a las *Conexiones de simplificación* en la cual se relacionan los contenidos enseñados con contenidos anteriores, que no necesariamente corresponden al curso anterior, igual que en la categoría ya descrita, en este caso, pueden relacionarse con otros contenidos anteriores de su formación. En Montes, Contreras y Carrillo (2013) se muestra el ejemplo de un profesor que establece una conexión de simplificación entre la forma de operar los números racionales y la de operar las expresiones algebraicas, al intentar ayudar a un estudiante que tiene dificultades para resolver una expresión algebraica.

En la categoría *Conexiones transversales* se ubican aquellas donde hay una cualidad común en los contenidos que les relaciona, y los modos de pensamiento asociados a dichos temas contemplan esta característica común. Un ejemplo lo constituyen los patrones de igualdad y similitud que relacionan los temas siguientes: propiedades de relaciones de equivalencia (por ejemplo, la propiedad conmutativa), resultados de aplicar operadores a conjuntos numéricos (la función aplicada al conjunto de los números reales), y la congruencia y semejanza entre figuras.

Conexiones auxiliares constituye la última categoría del KSM se presentan entre aquellos conocimientos que se relacionan entre sí como apoyo para un fin (Liñán, 2017). Un ejemplo es el uso de ecuaciones como auxiliar para determinar raíces, es decir, la necesidad de encontrar raíces puede hacer de la ecuación un elemento auxiliar para la función.

El tercer subdominio del MK hace referencia al *Conocimiento de la práctica matemática (KPM)*. Escudero-Ávila (2015) señala que se trata del conocimiento que un profesor tiene sobre las formas de proceder propias de la matemática y destaca en especial de la matemática escolar, agrega el razonamiento matemático, su conocimiento sobre distintos tipos de razonamientos y saber en qué

contextos matemáticos unos son más adecuados que otros, es decir, trata del conocimiento del modo cómo se establecen dichas relaciones.

En este subdominio se hace énfasis en la necesidad de que el profesor conozca las formas de proceder para llegar a los resultados matemáticos y las características del trabajo matemático como disciplina científica, aunque sólo interesa los que tienen relación con la matemática escolar. Flores-Medrano et al. (2014) mencionan, se trata de considerar el conocimiento sobre cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, cómo se razona y cómo se generaliza, qué papel tiene el convenio y qué características tienen algunos elementos con los que se hacen matemáticas (como una definición o una demostración). También se incorpora el conocimiento que tiene el profesor acerca de la lógica proposicional de los modos de proceder (el conocimiento de heurísticos en la resolución de problemas, por citar un ejemplo) y de la sintaxis de las matemáticas (Escudero-Ávila, 2015).

En un primer momento, en el subdominio KPM se definieron dos categorías, pero al identificar que había ciertos solapamientos entre las anteriores se decidió plantear algunos sí indicadores de conocimiento, sin embargo, se está trabajando en ello (Liñán, 2017). Con el propósito de ejemplificar los anteriores, recurrimos a las aportaciones del SIDM (2016) y Liñán (2017).

Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos corresponde al primer indicador de conocimiento que se puede ejemplificar con el uso de las fases de Polya para la resolución de un problema. *Formas de validación y demostración* como segundo indicador de conocimiento, atiende al “conocimiento sobre las diferentes maneras de validar y demostrar, como los procesos abductivos (Soler, 2012), inductivos y deductivos, incluso la comprobación a través de la ejemplificación como paso previo a la demostración, al igual que la denominación (Puig Adam, 1986)” (Liñán, 2017, p. 29).

Papel de los símbolos y uso de lenguaje formal es el tercer indicador de conocimiento que resalta la importancia de la expresión y la comunicación en matemáticas, además del conocimiento de los símbolos y signos propios de la misma. *Los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas* se ubican en el cuarto indicador de conocimiento del KPM, aquí se pueden incluir los heurísticos que permiten resolver un problema. En el quinto indicador de conocimiento se encuentran las *prácticas particulares del quehacer matemático* donde se destaca como

un ejemplo la modelación. En el sexto y último indicador de conocimiento se identifica conocimiento que posee un profesor de las *condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*.

En los párrafos anteriores describimos las categorías o indicadores de conocimiento de los subdominios del MK. Enseguida avanzamos en la identificación de los componentes (subdominios) del dominio Conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge –PCK*).

De acuerdo con Escudero-Ávila (2015), el PCK hace referencia a una parte de lo que el profesor requiere para su trabajo docente, el cual se complementa con el MK, además, ambos dan sentido y orientación a las decisiones y acciones del profesor de matemáticas. En el PCK ubicamos tres subdominios de conocimiento: conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Features of Learning Mathematics – KFLM*), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching – KMT*) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Learning Standards – KMLS*).

En el subdominio *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) se incluyen los conocimientos sobre las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático. El foco de atención está en el contenido matemático como objeto de aprendizaje, lo cual no indica que se quite la importancia al papel del estudiante en el proceso, sino que interesa el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo. En este subdominio se ubican cuatro categorías de conocimiento.

La primera categoría se define como *teorías de aprendizaje*, incluye el conocimiento que tiene el profesor sobre los posibles modos de aprehensión relacionados con la naturaleza misma del contenido matemático. Agrega el conocimiento de estructuras o teorías sobre el desarrollo cognitivo del estudiante para la matemática en general y para contenidos particulares (Escudero-Ávila, 2015). De ahí que el conocimiento de estas teorías puede ser formal o personal. Un ejemplo en el tema de las fracciones puede ser “conocer cómo se desarrolla la cognición sobre el concepto de número racional (etapas de aprendizaje por los que transcurre el pensamiento del estudiante para conocer y comprender el contenido)” (Rojas, 2014, p.88).

La segunda categoría está integrada por *Fortalezas y dificultades* donde se incluyen conocimientos sobre los errores, obstáculos (epistemológico, didáctico y ontogenético) y dificultades asociados a la

matemática en general y a temas concretos. Para el caso de errores y dificultades en el tema de fracciones planteamos, de manera general, algunos indicadores de Rojas (2014):

-Conocer los errores y las dificultades que los estudiantes pueden presentar en la aplicación de conceptos y procedimientos en la resolución de las tareas propuestas. Por ejemplo, dificultades para identificar el todo en cada fracción, empleo parcial de las características de la fracción porción (partes equitativas y exhaustividad de la partición), y las relacionadas con procedimientos, como sumar o restar fracciones con distintos denominadores, donde los alumnos pueden sumar o restar los numeradores y los denominadores entre sí. El profesor puede manifestar que se transfieren las propiedades de los N a las operaciones con Q . Presentar tareas que permitan aclarar el error o que no se incurra en la situación.

--Conocer indicadores de la presencia de errores conceptuales en las declaraciones de los estudiantes (p. 89).

En la categoría de *Fortalezas y dificultades* se considera el conocimiento de las ventajas o potencialidades que podrían aprovecharse para el aprendizaje, asociados a la naturaleza de la matemática en sí misma o de un contenido particular. Se plantea como un ejemplo, reconocer la potencialidad y dificultades involucradas en el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado como consecuencia de su tratamiento gráfico (Flores-Medrano et al., 2014).

Formas de interacción con un contenido matemático corresponde a la tercera categoría del KFLM. Según Sosa, Aguayo y Huitrado (2013) se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes (típicos y no habituales) y a los conocimientos sobre el lenguaje o vocabulario que pueden usar comúnmente al abordar un contenido específico. Un ejemplo de ello, consiste en el conocimiento que tiene el profesor sobre los algoritmos típicamente usados para resolver un sistema de ecuaciones lineales, en función de la forma en la que se presenta la ecuación (general, punto pendiente, ordenada al origen).

En la cuarta categoría se ubica *Intereses y expectativas*, incluye el conocimiento que tiene el profesor sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad de los estudiantes relacionadas con las diferentes áreas de las matemáticas, así como las preconcepciones o concepciones erróneas. Un ejemplo lo constituye el conocimiento del profesor en relación con que el tema de operaciones con números fraccionarios es problemático para los estudiantes, lo cual produce rechazo (Escudero-Ávila, 2015).

El subdominio *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) hace énfasis en el conocimiento del profesor sobre la enseñanza (actividad principal) que involucra diferentes contextos y situaciones (Escudero-Ávila, 2015). Así, se identifican tres categorías de conocimiento:

La primer categoría del KMT se denomina *Teorías de enseñanza*, que pueden ser formales o institucionalizadas y, orientan al profesor en el diseño de actividades para el aula y ambientes de trabajo matemático *ad hoc* con dichas actividades. La Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) se puede convertir en un referente de esta categoría (Acción, formulación, validación e institucionalización).

Una segunda categoría está relacionada con el conocimiento de *Recursos materiales y virtuales*. Escudero-Ávila (2015) agrupa en esta categoría el conocimiento de características matemáticas específicas de recursos y materiales utilizados para la enseñanza de un contenido. Además, se incluyen los beneficios o dificultades relacionados al uso de los anteriores como apoyo para la enseñanza. En esta categoría rescatamos algunos indicadores de conocimiento en relación con el tema de fracciones (Rojas, 2014):

-Promover acciones que permiten el empleo de recursos y situaciones que envuelvan diversos significados y contextos. Por ejemplo, el trabajo de las fracciones como relación parte-todo puede abordarse con modelos concretos (contexto continuo, área) y luego trabajar en contextos concreto (fichas). (Transparencia de los materiales y recursos) (p. 89)

Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos es la tercera categoría del KMT e incluye los conocimientos sobre la potencialidad matemática que pueden tener algunas secuencias de actividades, tareas, estrategias o técnicas didácticas en función del conocimiento de los profesores para que las consideren potentes al abordar un contenido matemático en un momento de la enseñanza. Además del conocimiento de las potencialidades matemáticas de las anteriores, se incluye el conocimiento de sus limitaciones u obstáculos. En esta categoría se agrega el saber el tipo de ayudas que se pueden brindar a los estudiantes, ejemplos potentes para abordar una tarea específica o conocer algunas tareas para favorecer el aprendizaje de un contenido matemático. En el caso de esta investigación podemos mencionar el conocimiento que tienen los profesores en formación inicial sobre algunas tareas que se proponen para enseñar la razón en la escuela primaria.

Rojas (2014) propone algunos indicadores de conocimiento sobre estrategias y tareas asociadas al estudio de las fracciones, las cuales, presentamos a continuación:

Estrategias

- Conocer estrategias para abordar un error o una dificultad.
- Conocer o saber desarrollar líneas argumentales que faciliten la adquisición de los conceptos y procedimientos.

Tareas matemáticas

- Criterios explícitos para justificar que las tareas planteadas son adecuadas al nivel escolar y cognitivo de los estudiantes, como:

- Para manejar símbolos con significado y lograr su comprensión se pueden presentar experiencias de repartir cantidades de manera equitativa, utilizando material concreto, dibujos, etc., de modo que los estudiantes puedan conectar las acciones con los símbolos matemáticos.
- Tareas que permitan presentar ideas desde un plano simbólico pasando previamente por la utilización de representaciones escritas y verbales.
- Tareas propuestas en relación con la diversidad del alumnado.
- Repertorio de tareas que permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos. Por ejemplo, diversidad de situaciones cotidianas que emplea para el trabajo con las fracciones como relación parte-todo.
- La evidencia de que el profesor dispone de un esquema de instrucción. Por ejemplo, comienza con una actividad de reparto, da ocasión a que actúen los estudiantes, presenta los contenidos.
- Riqueza de las tareas matemáticas propuestas o improvisadas en el transcurso de la enseñanza, como:
 - Situaciones en el cual la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o expresar una magnitud.
 - Tareas sobre identificación de la unidad, de modo que los estudiantes puedan reconocer las partes en que está dividida la unidad (pp.91-92).

El tercer subdominio del PCK es el *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), hace referencia al conocimiento que un profesor tiene en relación con lo que está señalado un estudiante debe aprender y el nivel conceptual con el que se espera que lo aprenda en un determinado momento escolar. El profesor posee conocimientos sobre el currículo oficial de donde recupera la ubicación temporal y contextual del contenido a abordar, aunque también puede involucrar el conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje que no son oficiales, puede retomarlos de asociaciones profesionales o grupos de investigadores y, en otros casos, de su experiencia personal (Escudero-Ávila, 2015). El KMLS está constituido por tres categorías de conocimiento, mismas que describimos enseguida.

La categoría *Expectativas de aprendizaje* considera el conocimiento que tiene el profesor sobre lo que se espera que el estudiante aprenda en función del currículo oficial en un determinado nivel escolar: contenidos o abstracciones de las capacidades matemáticas específicas que debe desarrollar en sus estudiantes. Algunos ejemplos lo constituyen el conocimiento de las competencias matemáticas que deben desarrollar en los alumnos en relación con el tema de fracciones.

En el *Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar* se identifica el conocimiento que el profesor tiene sobre la profundidad con la que se debe abordar un contenido matemático en un grado escolar determinado. Por ejemplo, conocer el significado o los significados de la fracción que se estudian en tercero, cuarto, quinto y sexto grado de

educación primaria que, en el contexto del Plan de Estudios 2011 se traducen en aprendizajes esperados para cada grado.

La última categoría del KMLS la constituye la *Secuenciación con temas anteriores y posteriores*, considera el conocimiento que tiene el profesor sobre la secuenciación de diversos contenidos matemáticos (temporal) dentro de un mismo curso, en cursos anteriores o posteriores. Por ejemplo, podemos citar el conocimiento que tiene el profesor sobre el significado parte-todo de la fracción se aborda en segundo ciclo de la educación primaria a partir del empleo de contextos continuos y discretos.

Antes de concluir este apartado, nos parece importante describir, de manera general, el papel de las concepciones en el MTSK, aunque en la presente investigación no es objeto de estudio de manera explícita.

Flores-Medrano et al. (2014) señalan que las concepciones se colocan en el centro de la figura del MTSK y con líneas punteadas para indicar que las concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, permea al conocimiento que tiene en cada uno de los subdominios. Carrillo y Contreras (1995) ubican en las primeras, es decir, en las concepciones que el profesor tiene acerca de las matemáticas, una concepción instrumentalista de la matemática, una concepción platónica y una concepción de resolución de problemas. Respecto a las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas definen una tendencia tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa. Estas categorías se han considerado con fines analíticos en algunos trabajos de investigación (Escudero-Ávila, 2015; Vasco, 2015; Aguilar, 2016).

En este apartado es importante destacar el papel que el MTSK desempeña en la identificación de los conocimientos que los profesores deben poseer; lo anterior lo establecemos a partir de un artículo que se incluye en el Handbook International Research in Mathematics Education (Third Edition). En este contexto, English & Kirshner (2016) escriben la tercera edición del Manual de Investigación Internacional en Educación Matemática donde rescatan los desarrollos teóricos y prácticos más recientes en este campo. En esta obra, Kilpatrick & Spangler (2016) dedican un artículo a la Educación de los Futuros Profesores de Educación Matemática donde examinan los rasgos de los programas de doctorado del profesorado en Educación Matemática que deben persistir a pesar de los años. Así, cuando describen la importancia de los conocimientos, habilidades y aptitudes que todo profesor de educación matemática debe poseer recurren a la presentación del MTSK (Carrillo et al., 2013) para

recuperar la idea de que todo el conocimiento del profesor de matemáticas es especializado; situación que los lleva a describir los dominios y subdominios del MTSK como indicadores de conocimiento que los futuros profesores de Educación Matemática deben adquirir en los programas de doctorado y fuera de ellos, durante su formación inicial y su formación continua, dentro y fuera de las aulas, lo cual les permitirá organizar y construir su conocimiento.

Como podemos observar el MTSK, a partir de las categorías e indicadores de conocimientos presentes en los diferentes dominios y subdominios, establece una visión amplia y profunda sobre los conocimientos que el profesor de matemáticas y el que enseña matemáticas debe poseer.

III.3. Las fracciones a través de la historia

Estudiar el origen de las fracciones remite a las culturas antiguas para identificar el contexto y motivo por el que surgen. Existen algunas investigaciones que evidencian cuáles fueron las situaciones que llevaron al ser humano a recurrir a su uso. Al respecto, León (2010) señala que su invención deriva de la presencia de divisiones inexactas al igual que la aplicación de unidades de medida de longitud. Sin embargo, Rojas (2010) agrega su existencia a la necesidad de incorporar sistemas de medida de peso, tiempo y capacidad. De ahí concluimos, que el ser humano, en sus inicios, ha recurrido al empleo de las fracciones para resolver diferentes situaciones de su vida, es decir, se le otorga un “carácter instrumental” (Fandiño-Pinilla, 2009), mientras que por el momento se deja de lado el papel que desempeña como objeto de estudio.

Enseguida presentamos una tabla que concentra cuál fue el posible origen de las fracciones a partir de diferentes investigaciones consultadas, que corresponden a tesis de maestría y doctorado.

Tabla 4. Origen de las fracciones a través de la historia

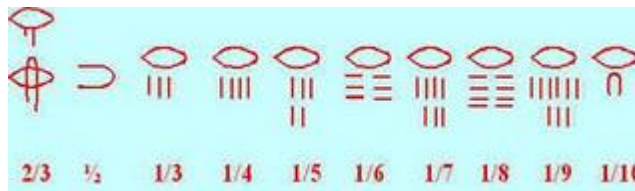
Autor (es) /año	Uso de las fracciones a través de la historia
Flores y Moreno (2000)	“El origen histórico de los números racionales se encuentra en la necesidad de medir, lo que lleva a proponer expresiones numéricas para llevar a cabo la operación (s.p.)”.
Gairín (1998, citado en Flores y Morcote, 2001)	“Las fracciones egipcias surgen en el contexto de la resolución de problemas de reparto y son una adaptación del sistema de numeración a la representación de cantidades no enteras” (pp.2-3).
Flores y Morcote (2001)	Señalan que: “así como el hombre empezó a contar a partir o con los números naturales, empezó a medir con los números racionales cuya idea fundamental históricamente hablando son las fracciones” (p.2).
Andonegui (2006)	Las fracciones surgen “ante diferentes situaciones cotidianas como los repartos de herencias, bienes y tierras, o el pago de tributos,

	diezmos e impuestos, y otras más, en las que, además de las cantidades enteras implicadas, aparecía un nuevo elemento a considerar: la relación entre la parte (la porción de tierra recibida, el monto del tributo o impuesto pagado...) y el todo (la superficie total de la tierra a repartir, el total de los bienes poseídos...)” (pp.6-7).
Martínez y Solano (2008)	Señalan que las fracciones permitían a los egipcios resolver problemas de la vida relacionados a la distribución de pan, a la construcción de pirámides, a medidas agrarias.
Fandiño-Pinilla (2009)	-Las fracciones nacen como <i>instrumento</i> para la humanidad, es decir, son estudiadas en función de los problemas que permiten resolver. -En la Edad Media árabe y europea la fracción comienza a ser considerada como objeto de estudio, “pero nunca separada sus características de instrumento” (p.74).
Rojas (2010)	-Las fracciones nacen de manera intuitiva, “empleadas para resolver problemas de reparto cuando la cantidad a repartir es menor que el número de partes, utilizando sistemas de medida de peso, tiempo, capacidad y longitud” (p. 20).
León (2010)	-Identifica dos motivos por las que fueron inventadas las fracciones: -La existencia de <i>divisiones inexactas</i> . -Aplicación de unidades de medida de <i>longitud</i> .
López (2012)	-Las fracciones se empleaban para representar cantidades no enteras.

Como podemos observar en la tabla anterior, la aparición de las fracciones a través de la historia surge en función de que el ser humano tiene la necesidad de resolver problemas de su vida cotidiana que le implican medir diferentes magnitudes donde requieren representar cantidades no enteras.

A continuación, mostramos un panorama general de los usos de las fracciones en las culturas pasadas a partir de la revisión de diferentes trabajos (Perero, 1994; Flores y Morcote, 2001; Andonegui, 2006; Martínez y Solano 2008; Fandiño-Pinilla, 2009; Rojas, 2010; León, 2010; López, 2012) que indagan sobre su origen y desarrollo a través de la historia, ya que el motivo de este trabajo no es profundizar en esta temática.

Se considera que la historia de las fracciones comenzó con los egipcios al utilizar fracciones unitarias, aquellas de la forma $1/n$, que tienen como numerador 1 y el denominador constante e igual a 1. Los antiguos egipcios no reconocían fracciones como $2/3$ y $3/4$, las consideraban como símbolos divinos.

Ilustración 1. Fracciones históricas (León, 2010, p.6)

Según Maza (2003), la representación de las fracciones consistía en un jeroglífico que empleaba una boca bajo la cual se alineaba el número que correspondía al denominador de la fracción, por lo tanto, como se aprecia en la imagen anterior, las diferentes fracciones se iban formando del mismo modo excepto el $\frac{1}{2}$ que, quizá por su frecuencia tenía un símbolo propio.

El documento matemático del antiguo Egipto donde se encuentra el tratamiento de las fracciones se denomina “Papiro de Ahmes o Papiro de Rhind”, tiene 550 cm de largo y una altura de 33 cm, fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en 1650 a. C., contiene 87 problemas matemáticos, donde se destacan cuestiones relacionadas con fracciones.

La reducción de fracciones complejas en suma de fracciones unitarias se convirtió en una de las problemáticas sobre las fracciones que resultan más debatidas. En este sentido, los papiros revelan que los egipcios fueron verdaderos maestros, como lo muestra el siguiente ejemplo donde se establecen igualdades:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

Es importante citar que los primeros miembros de las igualdades eran expresados por el contexto o a través de ejemplos concretos que se asociaban a la compensación que recibían los trabajadores egipcios a través de la distribución de raciones de diferentes productos de alimentos: panes de distintas clases, cervezas variadas, carne, vegetales, pescado, madera, entre otras mercancías.

De acuerdo con Maza (2003), las mercancías que se repartían entre los trabajadores eran enviadas al templo o a los equipos de trabajadores, pero el reparto sólo era igualitario cuando el grupo de hombres entre los que se repartía pertenecía al mismo nivel laboral. En este sentido, el problema comenzaba cuando se realizaba el reparto tomando en cuenta las diferentes jerarquías presentes.

En términos generales, podemos decir que los egipcios involucraban las fracciones en la resolución de problemas que remitían a ecuaciones, al igual que en problemas de geometría.

A diferencia de los egipcios que empleaban las fracciones unitarias, los babilonios utilizaban fracciones de numerador unidad y denominador fijo (60 notación numérica utilizada). En una tableta babilonia del periodo seléuce, alrededor del III siglo A.C., se encuentra la escritura (que se escribe en los caracteres actuales): 0; 1. Puesto que 1 está después del 0, Fandiño-Pinilla (2009) señala que esta escritura representa la fracción $1/60$.

En el caso de los babilonios se expresa que no crearon símbolos específicos para las fracciones pero su sistema de escritura de números se aproxima a la notación decimal. Además su sistema posicional se conserva en las medidas angulares (ángulo giro mide 360°) y en las temporales (hora 60 minutos).

Los griegos, por un tiempo, abordaron las fracciones con numerador unitario, prueba de ello son los escritos de Herón donde se destaca su recurrencia a las fracciones unitarias para representar las fracciones comunes. Se considera que conocieron los números racionales bajo la geometría sintética. Además, hacia el año 200 a.C. se señala se difundió el estudio de las fracciones como se conocen hoy, sin la restricción de tener 1 como numerador. Se precisa que las fracciones eran consideradas más como un instrumento de trabajo que como un objeto específico de estudio, quizá a ello se deba que no se tenga un tratado teórico verdadero y exacto.

Los chinos conocían las operaciones con fracciones y podían determinar el común denominador de varias fracciones, asumían que los números tenían una vida similar a la del ser humano, por lo cual el numerador era llamado “hijo” y el denominador “madre”. Fueron los chinos quienes de inmediato escogieron para las fracciones el sistema decimal, dando un impulso especial a las fracciones con denominador 10 o sus potencias.

Los hindúes adoptaron la escritura alejandrina para las fracciones, indicaron el denominador sobre el numerador omitiendo la rayita horizontal. Para las fracciones no utilizaron un sistema posicional decimal, usaban sistemas complicados poco funcionales.

Son los árabes quienes contribuyen al desarrollo de las fracciones al introducir el Sistema de Numeración Indoarábigo que permitió expresar las fracciones de manera similar a la usada actualmente. Por su parte, el matemático italiano Leonardo de Pisa llamado “bighello” (vagabundo) (1180-1250) en su obra *Liber abaci*, brinda las reglas de las operaciones sobre las fracciones, encuentra máximos comunes denominadores entre fracciones, transforma las fracciones en suma de fracciones con numerador 1, resuelve ecuaciones encontrando raíces enteras, racionales e irracionales, entre otras.

Además, fue uno de los primeros en introducir la línea fraccionaria para dividir el numerador y el denominador. Stevin, en el siglo XVI establece las operaciones con las fracciones y la expresión decimal. Aunque, Al-Kashi se autodefine “inventor de las fracciones decimales”. Con todo ello se conduce a la formalización del número racional.

Para concluir con este apartado, es pertinente citar a Fandiño-Pinilla (2009) cuando destaca que el estudio de las fracciones como objeto matemático, desde tiempos pasados se deja de lado al abordarse inicialmente como instrumento para la humanidad, situación que hoy en día se presenta fuera de la escuela, ya que el único lugar donde se estudia como objeto es en las diferentes instituciones educativas.

III.3.1. Las fracciones como objeto de estudio. Su papel en el campo de los números racionales.

Inicialmente, en las culturas antiguas el uso de las fracciones adquirió un carácter instrumental, pero conforme pasaron los años la sociedad comenzó a abordar las fracciones como objeto de estudio dentro de los números racionales. Existen diferentes investigaciones cuyo tema central es la definición de los números racionales y su composición. Carrillo et al. (2016) señalan que los números racionales surgen de la limitación de los números enteros para resolver ecuaciones del tipo: $b \times x = a$, $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, ya que no es posible encontrar un número entero que al multiplicarlo por cuatro dé como resultado dos. Por otra parte, existen algunos investigadores que, además de plantear lo anterior, coinciden en que las fracciones y los decimales son objetos matemáticos que permiten expresar/representar los números racionales; asimismo las operaciones entre los números anteriores mantienen las propiedades aritméticas que verifican las operaciones entre naturales, por lo cual, las operaciones entre los números racionales amplían las operaciones de los números naturales, pues son parte de un conjunto en el que siempre se pueden efectuar la multiplicación y la división (Flores & Torralbo, 2011). En este sentido, es conveniente mencionar que el presente trabajo se enfoca en el estudio de las fracciones, aunque puede ser que los conocimientos matemáticos y didácticos que posean los participantes establezcan conexiones con los decimales.

¿Qué se entiende por “fracción”? Según Billstein, Libeskind & Lott (2008) “la palabra *fracción* se deriva de la palabra latina *fractus*, que significa “romper” (p.299), lo cual en ningún momento enuncia que el origen epistemológico de la palabra conlleve la idea de romper en partes iguales (Fandiño-Pinilla, 2009).

La fracción se representa con el símbolo a/b , donde a y b son enteros y $b \neq 0$. En diferentes obras de matemáticas (Baldor, 1990; Bello, 1999; Billstein et al., 2008; O'Daffer, 1998; Rumbos et al., 2009) se identifica a como numerador y b como denominador. Bello (1999) y Cedillo et al. (2012) señalan que la representación de la fracción: a/b se denomina número racional. Por lo tanto, los números racionales se denotan por Q y pueden definirse formalmente como:

$$Q \left\{ a/b \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

(Representación tomada de Rumbo et al., 2009, p.87)

Cuando en una fracción el numerador a es menor que el denominador b , a la fracción a/b se le conoce como fracción propia. Pero, cuando la situación se presenta de manera inversa se denomina fracción impropia. Dentro de este último grupo se agrupan las fracciones mixtas, es decir, aquellas que se escriben en forma de un entero y una fracción, por ejemplo: $1 \frac{1}{4}$.

Smith, Charles, Dossey, Keedy y Bittinger (1990) coinciden en que los números racionales se pueden graficar:

A todo número racional, le corresponde un punto sobre la recta numérica. El número es la coordenada del punto. El punto es la gráfica del número. Cuando dibujamos un punto correspondiente a un número sobre la recta numérica, decimos que hemos graficado el número” (p.67).

Por lo tanto, las fracciones propias e impropias pueden ser graficadas al dividir las unidades de la recta, según lo indique el denominador de la fracción seleccionada.

III.3.1.1. Fundamentos teóricos y propiedades de las fracciones

En el marco de la reforma en la educación normal, para ser específicos en el Plan de Estudios 2012 de la Licenciatura en Educación Primaria se propone el estudio de las fracciones como objeto matemático, desde donde se hace énfasis en el conocimiento de sus fundamentos teóricos y propiedades; información que en los siguientes apartados se enriquece con la consulta de diferente bibliografía (Baldor, 1990; Bello, 1999; Billstein et al., 2008; O'Daffer, 1998; Fandiño-Pinilla, 2009; Smith et al., 1990; Rumbos et al., 2009).

◆ **Fracciones equivalentes**

Dos o más fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad, aunque sus numeradores y denominadores no sean exactamente iguales. Al respecto, Bello (1999) agrega que para obtener una fracción de este tipo, se debe multiplicar o dividir el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número diferente de cero. Para este caso, Billstein et al. (2008) indican como ley fundamental de las fracciones: “Sean a/b cualquier fracción y n un número completo distinto de cero; entonces, $a/b = an/bn$ ” (p.302).

◆ **Simplificación de fracciones**

La simplificación de fracciones también es conocida como reducción de fracciones donde éstas se llevan a su mínima expresión, es decir, cuando no se encuentra un número diferente de uno que pueda dividir al numerador y denominador exactamente. La definición de la forma más simple de la simplificación de fracciones, se enuncia como: “un número racional a/b está en su forma más simple si, y sólo si, a y b no tienen un factor común mayor que 1, esto es, si a y b son primos relativos” (Billstein et al., 2008, p.304).

◆ **Igualdad de fracciones**

De acuerdo con Billstein et al. (2008) se puede mostrar que dos fracciones son iguales por tres métodos: primero, al simplificar las dos fracciones a su forma más simple, segundo, cuando se reescriben ambas fracciones con el mismo mínimo denominador común y, tercero, al reescribir ambas fracciones con un denominador común que no necesariamente es el mismo, por ejemplo se puede determinar un múltiplo común. Finalmente presentan esta propiedad: “Dos fracciones a/b y c/d son iguales si, y sólo si, $ad=bc$ ” (p.306).

◆ **Orden en los números racionales**

La complejidad de la comparación de los números racionales está en función de sus denominadores: si son iguales o diferentes. Aunque cabe mencionar que para establecer estas comparaciones se emplean los mismos signos que para los enteros ($<$ es menor que; $>$ es mayor que).

Cuando dos fracciones tienen el mismo denominador común positivo y numerador no negativo, la que tiene el mayor numerador es la fracción más grande, lo cual se puede enunciar bajo el Teorema 5-1: “Si a , b y c son enteros y $b > 0$, entonces $a/b > c/b$ si y sólo si $a > c$ ” (Billstein et al., 2008, p.307).

Billstein et al. (2008) afirman que se torna más difícil comparar fracciones que poseen diferente denominador, ya que de manera errónea se puede elegir la que posee el numerador y denominador mayor. Para este caso se puede apoyar escribiendo las fracciones con el mismo denominador, es decir, se usa el denominador común. Además, definen el Teorema 5-2: Si a, b, c y d son enteros y $b > 0, d > 0, a/b > c/d$ si y sólo si $ad > bc$.

♦ **Densidad de los números racionales**

Smith et al. (1990) definen que “la propiedad de densidad de los números racionales establece que entre dos números racionales cualesquiera existe otro número racional” (p.70). Billstein et al. (2008) definen como propiedad de densidad de los números racionales: “dados números racionales a/b y c/d , hay otro número racional entre ellos” (p.308).

♦ **Suma de números racionales**

Billstein et al. (2008) señalan que la suma y la resta de racionales es muy parecida a la de números enteros. Además enuncia una serie de definiciones y propiedades relacionadas con las mismas, las cuales nos permitiremos enunciar enseguida.

Definición de suma de números racionales con denominadores iguales: Si a/b y c/d son números racionales, entonces $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Se menciona como propiedad de la suma de números racionales: Si a/b y c/d son dos números racionales cualesquiera, entonces $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

♦ **Propiedades de la suma de números racionales**

Entre otras propiedades que tienen los números racionales para la suma se encuentra: cerradura, conmutativa, asociativa, identidad aditiva e inverso aditivo. En términos de Billstein et al. (2008) la propiedad del inverso aditivo de los números racionales y la propiedad de igualdad de la suma se describen como se expresa en los siguientes apartados.

Propiedad del inverso aditivo de los números racionales. Para cualquier número racional a/b , existe un único número racional $-a/b$, el inverso aditivo de a/b , tal que

$$a/b + (-a/b) = 0 = (-a/b) + a/b.$$

Otra forma de $-\frac{a}{b}$ se puede hallar al considerar la suma $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b}$. Como

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a + -a}{b} = \frac{0}{b} = 0,$$

se sigue que $-\frac{a}{b}$ y $\frac{-a}{b}$ son inversos aditivos de $\frac{a}{b}$, de modo que $-\frac{a}{b} + \frac{-a}{b}$.

En relación con las propiedades del inverso aditivo para números racionales, Billstein et al. (2008) señala que

son análogas a las del inverso aditivo para los enteros[...]. Como sucede en el conjunto de los números enteros, el conjunto de los números racionales también tiene la propiedad de igualdad de la suma (p.322).

Enseguida presentamos una tabla (tomada de Billstein et al., 2008, p.322) donde se hace palpable lo enunciado.

Tabla 5. Inverso aditivo en números enteros y números racionales

Enteros	Números Racionales
1. $-(-a) = a$	1. $-\left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$
2. $-(a+b) = -a + -b$	2. $-\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{-a}{b} + \frac{-c}{d}$

Propiedad de igualdad de la suma. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales cualesquiera tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y si $\frac{e}{f}$ es cualquier número racional, entonces $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

◆ Resta de números racionales

En la escuela primaria la resta de números enteros y números racionales se introduce por medio de un patrón de quitar. Sin embargo, en los números racionales el procedimiento que se sigue para realizar la resta varía en función de los denominadores que se tengan, es decir, si son iguales o son diferentes. Billstein et al. (2008) ejemplifica la resta de números racionales bajo estas condiciones a través de su interpretación parte-todo. En este caso, se enuncia que si se tienen $\frac{5}{6}$ de un pastel y a éste se le quitan $\frac{2}{6}$, quedan $\frac{3}{6}$ del pastel original: esto es, $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6}$. Por lo tanto, la resta de números racionales con denominadores iguales se determina de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

La resta de números racionales a partir de la interpretación parte-todo y medida se puede ejemplificar al usar una recta numérica. Billstein et al. (2008) señala que “si se marca una recta en unidades de longitud $\frac{1}{b}$, entonces $\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$ es igual a $(a-c)$ unidades de longitud $\frac{1}{b}$, lo cual implica que $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ ” (p.322).

Cuando los denominadores no son iguales se efectúa la resta encontrando un denominador común. Por ejemplo:

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{25}{30} - \frac{24}{30} = \frac{25 - 24}{30} = \frac{1}{30}.$$

Billstein et al. (2008) agrega que la resta de los números racionales se puede precisar en términos de la suma, como se expresa a continuación.

Definición de la resta de números racionales en términos de la suma. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales cualesquiera, entonces $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ es el único número racional $\frac{e}{f}$ tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

Además, la resta de los números racionales se puede realizar sumando los inversos aditivos (Billstein et al., 2008); tal como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 5-4

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales cualesquiera, entonces $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}$.

Entonces, al usar la definición de suma de números racionales, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} \\ &= \frac{ad + b(-c)}{bd} \\ &= \frac{ad + -(bc)}{bd} \\ &= \frac{ad - bc}{bd} \end{aligned}$$

Este resultado se resume así:

Propiedad. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales cualesquiera, entonces $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$.

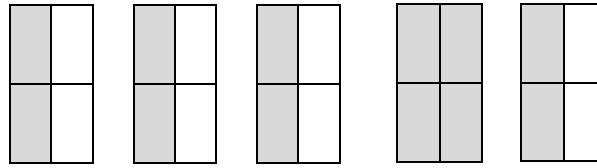
◆ Multiplicación de números racionales

Para explicar cuál es el procedimiento que se sigue en esta operación, así como las propiedades que posee, se recurre a lo expresado por Billstein et al. (2008) en su apartado *los números racionales como fracciones*.

La definición de multiplicación de números naturales, usa la interpretación de multiplicación como suma repetida. Usando la suma repetida se puede interpretar $2 \cdot \frac{2}{4}$ como sigue: $3 \cdot \left(\frac{2}{4}\right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} =$

$$\frac{6}{4} = 1 \frac{2}{4}.$$

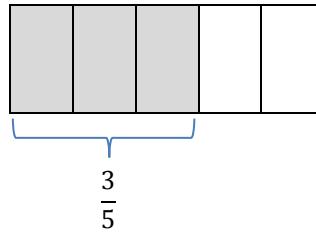
Una manera de mostrar este cálculo es a través de la siguiente figura:



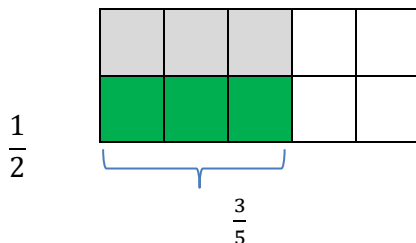
Enseguida se considera que $\left(\frac{2}{4}\right) \cdot 3$. ¿Cómo se debe interpretar ese producto? Si es válida la propiedad conmutativa de la multiplicación de números racionales, entonces $\left(\frac{2}{4}\right) \cdot 3 = 3 \cdot \left(\frac{2}{4}\right) = \frac{6}{4}$.

¿Qué sucede cuando ningún factor del producto es un entero? El siguiente ejemplo lo detalla. Si la vegetación alguna vez cubrió alrededor de $\frac{3}{5}$ de la Tierra y ahora sólo queda $\frac{1}{2}$ de esa vegetación, ¿qué fracción de la Tierra está cubierta de vegetación hoy día? Se puede usar un modelo de área para obtenerlo.

La siguiente figura muestra un rectángulo que representa el *todo* separado en quintos, con $\frac{3}{5}$ sombreado.



Para encontrar $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ se divide la porción sombreada del rectángulo de la figura anterior en dos partes congruentes y se toma una de esas partes. El resultado será la porción verde de la siguiente figura.



Sin embargo, la porción verde representa 3 partes de 10, ó $\frac{3}{10}$, del todo. Así, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5}$.

Este análisis conduce a la siguiente definición de multiplicación para números racionales.

Definición de multiplicación de números racionales. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales cualesquiera, entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

◆ Propiedades de la multiplicación de números racionales

Billstein et al. (2008) menciona que la multiplicación de números racionales tiene propiedades semejantes a las propiedades de suma de números racionales. Éstas incluyen las siguientes propiedades para la multiplicación: cerradura, conmutatividad, asociatividad, identidad multiplicativa e inverso multiplicativo. Para resaltarlas, se listan las dos últimas propiedades.

◆ Propiedades

Identidad multiplicativa de los números racionales. El número 1 es el único número tal que para todo número racional $\frac{a}{b}$,

$$1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot 1.$$

Inverso multiplicativo para números racionales. Para cualquier número racional distinto de cero $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ es el único número racional tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}$. El inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ también se llama recíproco de $\frac{a}{b}$.

Para Billstein et al. (2008)

La multiplicación y la suma están conectadas por medio de la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. También hay una propiedad multiplicativa de la igualdad para números racionales y una propiedad multiplicativa del cero similar a la de los números completos y los enteros (p.331).

◆ Propiedades

Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma de números racionales. Si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ son números racionales cualesquiera, entonces

$$\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \right).$$

Propiedad multiplicativa de la igualdad para números racionales. Si $\frac{a}{b}$, y $\frac{c}{d}$ son números racionales tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y $\frac{e}{f}$ es cualquier número racional, entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$.

Propiedad multiplicativa del cero para números racionales. Si $\frac{a}{b}$ es cualquier número racional, entonces $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \frac{a}{b}$.

◆ **Multiplicación con números mixtos**

Según Billstein et al. (2008) una manera de multiplicar números mixtos, por ejemplo $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}$ es transformar los números mixtos en fracciones impropias y usar la definición de la multiplicación, como se presenta enseguida:

$$3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{9}$$

Se puede entonces transformar $\frac{100}{9}$ en el número mixto $11 \frac{1}{9}$.

Otra manera de multiplicar números mixtos es usar la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} &= \left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot 3 + \left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= 9 + 1 + 1 + \frac{1}{9} \\ &= 11 + \frac{1}{9} \\ &= 11 \frac{1}{9} \end{aligned}$$

◆ **División de números racionales**

De acuerdo con Billstein et al. (2008):

La división de fracciones siempre ha sido muy molesta para los estudiantes. Aunque “invierte y multiplica” ha sido básico en la enseñanza convencional de las matemáticas y aunque parece ser una manera muy sencilla de recordar cómo dividir fracciones, desde hace mucho tiempo los estudiantes han tenido dificultades para hacerlo. Algunos olvidan cuál es el número a invertir y otros se confunden acerca de cuándo es apropiado aplicar el procedimiento. Una manera común de justificar formalmente el procedimiento de “invierte y multiplica” es usar argumentos sofisticados que incluyan la manipulación de expresiones algebraicas racionales. Este proceso puede parecer lejano y misterioso para muchos estudiantes. Al no comprender cabalmente la justificación subyacente, muchos estudiantes son entonces incapaces de reparar sus errores y aclarar por sí mismos sus dudas sobre la división de fracciones (p.219).

◆ Definición de división de números racionales

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales cualesquiera y $\frac{c}{d}$ no es cero, entonces $\frac{c}{d} \div \frac{e}{f} = \frac{e}{f}$ si, y sólo si, $\frac{e}{f}$ es el único número racional tal que $\frac{c}{d} \bullet \frac{e}{f} = \frac{a}{b}$

◆ Algoritmo para la división de fracciones

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales cualesquiera y $\frac{c}{d} \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c}.$$

III.3.1.2. Las fracciones y sus diferentes significados como objeto de estudio

Hoy en día, los problemas que enfrentan los individuos en su vida cotidiana los orientan al empleo de las fracciones para darles respuesta, es decir, su uso no es un tema del pasado, sigue vigente. Por ejemplo, a cuánto equivale un cuarto de hora, de una colección de objetos qué cantidad de éstos representan un tercio, la mitad de un pastel, entre otras. De ahí que ocupen un lugar en el currículo escolar. Más aún, es conveniente advertir que al llegar a la escuela los niños y las niñas ya tienen algunas experiencias. Las nociones informales que presentan los alumnos sobre reparto equitativo y de medida brindan el contexto fenomenológico sobre la base para construir los significados vinculados a los números racionales (Llinares, 2003).

Según Malet (2010) un análisis fenomenológico del concepto de fracción implica remitirse a sus contextos de uso para atender a la pluralidad de significados e interpretaciones que las fracciones permiten y adquieren. Además, agrega que la fracción se reconoce como megaconcepto porque presenta una dimensión dinámica (hace referencia a acciones como fraccionar, medir, comparar o relacionar cantidades, y operar) y otra dimensión estática (hace referencia a los productos o resultados de acciones como la relación entre las partes y el todo fraccionado, entre otras).

A lo largo del tiempo diferentes investigadores han aportado algunos significados al concepto de fracción a través de una serie de enunciados. A continuación se presentan algunas investigaciones sobre esta temática que atienden a los años '70 en adelante.

Dienes (1972, citado en Mancera, 1992) señala que el concepto de fracción se asociaba con “procesos de medición, la idea de comparación y la de operador” (p.33). Esto se concluyó después de señalar que las fracciones se consideraban como: a) Estados, es decir, descripción de un estado de cosas, (comparador) y b) Operadores, que se refiere al resultado de la orden de realización de una operación (operaciones dividir y multiplicar).

Los trabajos de Kieren (1976, 1980, 1988) han contribuido enormemente a la definición conceptual de los diferentes significados/subconstructos de las fracciones, los cuales lo han llevado a situarse como el primero en proponer los anteriores (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005).

Kieren (1980) señala en un análisis que realiza de los números racionales siete interpretaciones para las fracciones y los números racionales: fracciones, decimales, pares ordenados (clases de equivalencia), medidas, cocientes, operadores y razones (Kieren, 1976). Sin embargo, más adelante estudia las fracciones bajo diferentes interpretaciones (razón, operador, cociente y medida) donde considera que la relación parte-todo es su origen (Kieren, 1976).

En 1980, Kieren realiza un análisis matemático sobre los números racionales, donde se pregunta ¿qué clase de objetos matemáticos son esos?, lo cual lo lleva a definir cinco ideas de las fracciones que emergen del constructo de los números racionales: parte-todo, cocientes, medidas, razones y operadores; aquí, hace referencia a subconstructos de la fracción. Según Mancera (1992) en este cambio de conceptos encuentra:

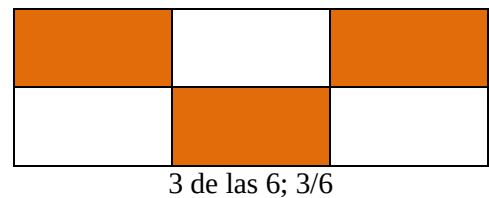
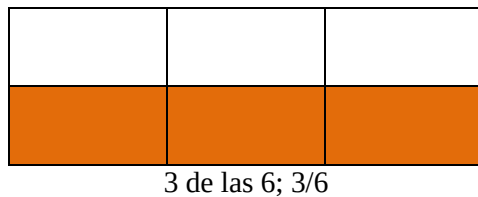
La intención de utilizar el término *subconstructo* en vez del de interpretación puede haberse debido a la consideración de la fracción o del número racional como un *constructo teórico*, el cual puede construirse a partir de ideas o nociones más simples llamadas *subconstructos*. Lo cual hace pensar en la necesidad de aislar las nociones que son mecanismos para la construcción del concepto de las nociones que conforman realmente al *constructo*. Esto no es posible a partir de las interpretaciones porque en este caso éstas están muy interrelacionadas y, aunque se considera al concepto como un conglomerado de interpretaciones, no se identifican con claridad las competencias esenciales (p.36).

Enseguida presentamos en qué consiste cada uno de los diferentes subconstructos, interpretaciones o significados asociados a las fracciones que se abordan en diversos trabajos de investigación en contextos nacionales e internacionales: parte-todo, medida, cociente, razón y operador.

♦ **La fracción como parte-todo**

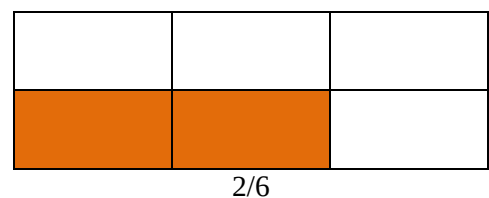
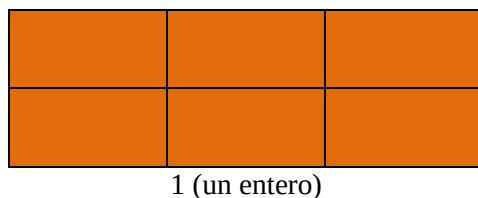
Este subconstucto se presenta cuando un todo (unidad) se divide en partes congruentes en contextos continuos o discretos; a decir de Llinares y Sánchez (1997), esas partes congruentes corresponden a la equivalencia que existe en cantidad de superficie o cantidad de objetos, por lo cual, la fracción bajo esta interpretación siempre hace referencia a la fracción de un objeto.

El contexto continuo, con mayor frecuencia, es el que se encuentra presente cuando se inicia el estudio de las fracciones, cuyas representaciones se apoyan en diagramas rectangulares y circulares; para ejemplificar este tipo de representaciones, recurriremos a algunas ideas planteadas por Llinares y Sánchez (1997). En el caso de los diagramas rectangulares, si de las seis partes de un todo se han sombreado tres, la representación puede quedar así:



Es importante hacer una reflexión frente a los casos anteriores, ya que cuando se suele pedir a los alumnos que representen en una fracción en este tipo de diagramas (rectángulo), se puede esperar que las partes sombreadas se tomen de manera consecutiva, lo cual puede variar, pero no impide la representación de la fracción ($\frac{3}{6}$), siempre que se cumpla con la congruencia de las partes.

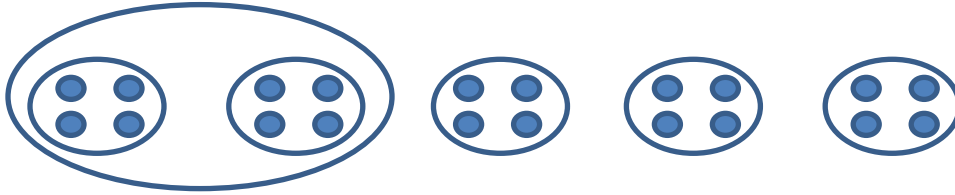
La fracción $\frac{3}{6}$ es propia, ¿qué pasa cuando representamos fracciones impropias? Si tenemos $1\frac{2}{6}$ y la unidad está representada por el rectángulo, queda de la siguiente manera:



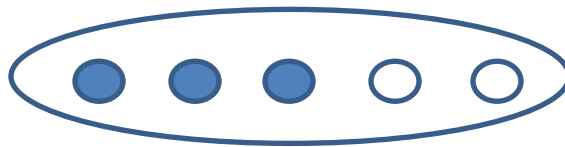
Respecto al contexto discreto, donde se presenta la relación parte-todo, Aguayo (2005, p.115) aporta:

En éste se trata de dividir un conjunto de objetos en subconjuntos que tengan el mismo número de elementos, por ejemplo si un conjunto de 20 objetos se divide en 5 partes iguales, cada parte será un subconjunto de 4 elementos, ahora bien si se “toman 2 de esas partes”, la fracción $\frac{2}{5}$ representa el número de partes o subconjuntos que se “tomó” en relación al conjunto original o al total de partes en las que se dividió dicho subconjunto.

Enseguida procedemos a su representación:



Esta idea ya presente en Llinares y Sánchez (1997), pero cuando el todo está formado por 10 bolas, se acompaña de otro tipo de ejemplos, cuando el todo está representado por cinco bolas de las cuales tres son negras (ya no son 20 bolas o 10 bolas). Aquí señalan que la fracción $\frac{3}{5}$ indica la relación entre el número de bolas negras y el número total de bolas, lo cual representan así:



Los contextos discretos, al igual que los contextos continuos, permiten la representación de fracciones propias e impropias. Sin embargo, los primeros poco están presentes cuando se favorece la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en función de la interpretación parte-todo, situación que presenta algunas dificultades para maestros y alumnos al momento de trabajarlos.

♦ **La fracción como medida**

Las fracciones adquieren el significado de medida cuando se utiliza una unidad arbitraria para determinar cuántas veces cabe en una cantidad medible. Kieren (1980) plantea que en este subconstructo el enfoque está sobre la unidad arbitraria y su subdivisión. Por su parte, Lizarde (2013) relaciona este significado con la idea de conmensuración de la unidad y agrega que la fracción aparece en el momento en que no cabe la unidad un número exacto de veces, por lo cual, se hace necesario

identificar la medida de la parte faltante, además señala que para obtener la medida exacta debe medir empleando múltiplos y submúltiplos de la unidad y realizar comparaciones con la misma.

En la vida cotidiana existen diferentes situaciones que se asocian al empleo de la fracción como medida, por ejemplo $\frac{1}{4}$ kg. de arroz, entre otras; de ahí que una de las tareas de los docentes, que se debe fortalecer, es la identificación y conocimiento de los subconstructos de la fracción (en este caso medida) para abstraer del contexto situaciones concretas que ejemplifiquen su uso e importancia en la vida.

◆ **La fracción como cociente**

La fracción como cociente indica el resultado de dividir una cantidad entre un número de partes, lo cual se expresa como: a/b . De acuerdo con Kieren (1980) este subconstructo está relacionado con las relaciones parte-todo, pero para el estudiante puede tener una aplicación en diferentes contextos: cuantificar el resultado de dividir una cantidad en un determinado número de partes y su relación con el álgebra de ecuaciones lineales.

Llinares y Sánchez (1997) amplían lo planteado por Kieren y ejemplifican que para un niño puede ser diferente dividir una unidad en cinco partes y tomar tres ($\frac{3}{5}$) (parte-todo) que dividir tres unidades entre cinco personas (cociente), aunque el resultado sea el mismo, por lo cual mencionan que en esta interpretación se considera que las fracciones tienen un doble aspecto:

- a) Ver a la fracción $\frac{3}{5}$ como una división indicada, estableciéndose la equivalencia entre $\frac{3}{5}$ y 0.6, en una acción de reparto, y
- b) Considerar las fracciones (números racionales) como los elementos de una estructura algebraica; es decir, como los elementos de un conjunto numérico en el que se ha definido una relación de equivalencia, y en el conjunto cociente resultante unas operaciones –suma y multiplicación– que cumplen ciertas propiedades de tal forma que dotan a dicho conjunto de una estructura algebraica de cuerpo conmutativo (Llinares y Sánchez, 1997, p.63)

En la educación primaria, es importante se diseñen tareas que atiendan a este doble aspecto que mencionan Llinares y Sánchez (1997) respecto al subconstructo cociente (parte-todo y cociente), ya que aunque se suele abordar en los últimos grados, es necesario sea parte de los aprendizajes que lleven los alumnos y las alumnas a la escuela secundaria, donde establecerán un contacto formal y explícito el estudio del álgebra.

♦ La fracción como operador

Desde la perspectiva de Llinares y Sánchez (1997), en esta interpretación las fracciones son vistas en el papel de transformaciones, como algo que actúa sobre un conjunto o un estado inicial y lo modifica, ya sea que la transformación sea una amplificación o una reducción de los valores de un conjunto a través de una sucesión de multiplicaciones y divisiones o la inversa. Para este caso, recurren a la siguiente ejemplificación: si en un contexto discreto se tiene un conjunto de 36 niños de una clase (situación de partida), el efecto de la aplicación del operador $\frac{2}{3}$ se puede representar:

ESTADO-UNIDAD (SITUACIÓN)	OPERADOR	ESTADO FINAL
36 niños	(Dividido por 3, multiplicado por 2)	24 niños

En dicho ejemplo, el estado final también recibe el nombre de dos tercios como la descripción del estado de cosas.

La fracción como operador se puede ver en contextos continuos y discretos y utilizarse en un doble aspecto:

- a) Describiendo una orden, una acción a realizar (operador) y,
- b) describiendo un estado de cosas, es decir, describiendo una situación (Llinares y Sánchez, 1997, 73)

Existen diferentes investigaciones que han profundizado en el tipo de situaciones que se pueden presentar en el estudio de este subconstructo (Llinares y Sánchez, 1997; Aguayo, 2005; Fandiño-Pinilla, 2009; Lizarde, 2013), sin embargo, en este trabajo sólo rescatamos las reflexiones anteriores para profundizar en el subconstructo razón, nuestro objeto de estudio, aunque no se pierde de vista que el conocimiento didáctico y matemático de los participantes, respecto al significado señalado, puede establecer conexiones con el resto, motivo por el cual se presentan.

♦ **La noción de razón. Referentes teóricos para su estudio como un significado de las fracciones**

Hemos dejado la definición de este subconstructo para el final, ya que en este trabajo de investigación deseamos profundizar en su estudio, aunque se pueden establecer algunas relaciones con el resto de los significados.

La fracción como razón permite establecer una comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades de una magnitud o magnitudes diferentes en contextos discretos o continuos donde se puede instaurar una correspondencia entre parte-parte o parte-todo (Llinares, 2003). Un ejemplo de relación parte-parte, es cuando deseamos conocer la relación de chicos y chicas de una clase y se indica que hay 3 chicas por cada 2 chicos (3:2), aquí no se conoce el número total de alumnos del grupo, pero la razón da información sobre la relación entre el número de chicas y chicos; respecto a otros casos donde se aborde la razón bajo la relación parte-todo, se puede citar, al enunciar que el 33% de los alumnos han suspendido el examen de matemáticas (33 de 100).

En palabras de Llinares (2003), esta interpretación de las fracciones permite establecer comparaciones entre dos cantidades de igual o diferente magnitud, que no precisamente se asocia a situaciones de comparación parte-todo. La generalidad de la interpretación como razón consiste en que nos permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte-todo en un contexto de medida sólo nos permite comparar cantidades del mismo tipo.

El significado razón como parte de los números racionales ha sido objeto de múltiples análisis debido a la relación tan estrecha que tiene con la proporcionalidad. De acuerdo con Block (2008), la razón, desde una perspectiva didáctica, se encuentra en la intersección de dos temas muy estudiados: los números racionales y la proporcionalidad. En un análisis que realiza en el contexto de la teoría de los campos conceptuales señala que los estudios sobre proporcionalidad y racionales tienden a converger y destaca aspectos centrales de la noción de fracción cuya construcción se realiza desde las relaciones de proporcionalidad:

De la misma manera en que los números racionales reflejan fenómenos de fracción, también tienen un carácter de proporcionalidad. Así, los números racionales, en sus diversos subconstructos, pueden ser comprendidos como estructuras multiplicativas. Esto se revela de manera particular en los subconstructos de razón y de operador. Pero (...) las nociones de operador escalar y de operador función penetran las nociones de partición y conforman la base matemática objeto/acción para la noción de equivalencia de los números racionales (Kieren, 1988, p.167, citado en Block, 2001, p.229)

Desde esta perspectiva, la noción de razón se encuentra en el campo de las estructuras multiplicativas, por lo que al ubicarse como un subconstructo de los números racionales, su estudio en el conocimiento de los alumnos se ubica en dicha tendencia.

Más adelante, Block (2001), agrega, desde una perspectiva fenomenológica que, Freudenthal (1983) al destacar el estudio de la noción de razón en las matemáticas elementales, dejó ver la existencia de un vínculo con el concepto de número racional, lo cual se expresa enseguida:

El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, "a es a b como c es a d", sin anticipar que "a es a b" puede reducirse a un número o a un valor de magnitud a/b (...) La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas (o de valores de magnitud)... Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad, de bajar el estatuto lógico, a costa, como ocurre, de la lucidez [Freudenthal, 1983, citado en Block, 2001, p. 231]

Block (1987) analizó el número racional como razón y señaló que la noción de razón no involucra explícitamente a la noción de racional, se limita a establecer relaciones entre números enteros; sin embargo, al ejemplificar algunas propiedades de las relaciones multiplicativas entre enteros, llega a la reflexión:

El problema específico que engendra a los números racionales es el siguiente si, por ejemplo, 1 es a 2 como 2 es a 4, como 3 es a 6, etc., ¿qué número es a 1? Este número no es un natural y, puesto que forma una razón con 1 igual a la razón de 1 con 2, podría ser expresado así: $(1,2)$ o bien, así, $\frac{1}{2}$. Entonces, $\frac{1}{2}$ es el número cuya razón con 1 es la misma que la de 1 con 2. El problema consiste en principio en crear nuevos números cuya razón con 1 es la misma que la razón de un entero con otro (Block, 1987, p. 28).

En trabajos posteriores, Block (2001; 2003; 2008) planteó la razón como precursora de las fracciones en su papel de medida y operador multiplicativo; de manera concreta, en la investigación de 2008, Block aplicó algunas secuencias didácticas a alumnos de primaria, lo cual lo lleva a mencionar que en algunas de las anteriores “las fracciones se construyen a partir de las razones bajo el significado de cocientes” (Block, 2008, p. 506), aunque también se aprecian las fracciones como la expresión de las razones (Ramírez & Block, 2009).

En los primeros párrafos del apartado “las fracciones y sus significados”, hemos expuesto como pionero en investigaciones sobre la génesis de los diferentes subconstructos los trabajos de Kieren (1976, 1980, 1988). En este subapartado de la fracción como razón, se ha enfatizado en su vínculo con los números racionales, así como la pertinencia de su estudio previo al significado medida y operador. Existen otras investigaciones que, retomando las aportaciones de Kieren se unen a la propuesta de que

el subconstructo razón es uno de los más efectivos para la introducción de los números racionales (en el siguiente apartado se profundizará esta idea). En este sentido, Lamon (2007) menciona:

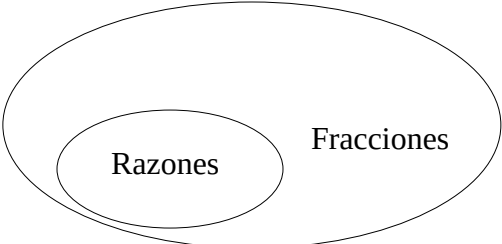
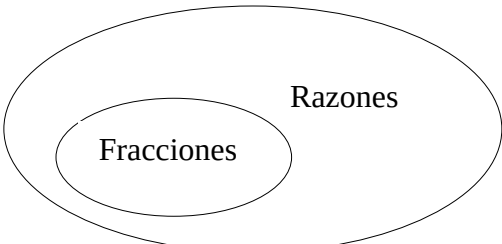
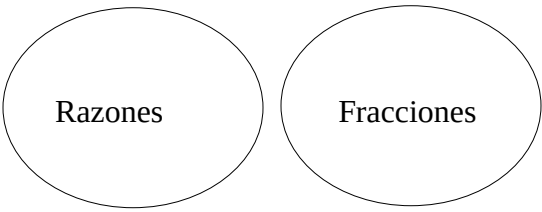
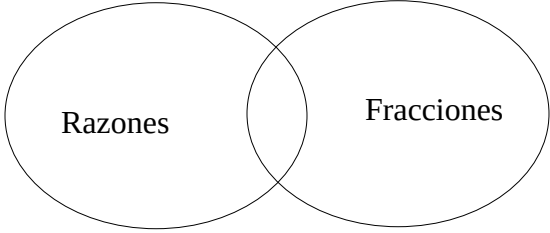
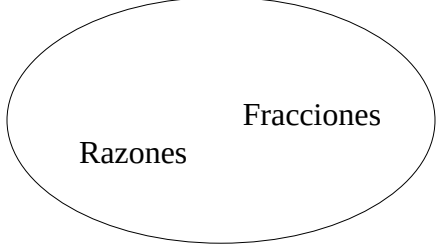
Los alumnos que estudiaron razones y tasas como su primera interpretación de los números racionales desarrollaron una sólida noción de clases de equivalencia y de razonamiento proporcional en general [...] no tuvieron problema con la adición y sustracción de fracciones. La mayoría de ellos desarrollaron sus propias formas de razonamiento en torno a la multiplicación y división [...] desarrollaron un buen conocimiento de razón, parte-todo y operador (Lamon, 2007, p. 659).

Bajo la idea de Lamon (2007), se expone la importancia de estudiar la fracción en función de sus diferentes subconstructos y no limitarse a parte-todo; significado que más se trabaja en las instituciones educativas para iniciar el estudio de los números racionales.

Por otra parte, Clark, Berenson & Cavey (2003) realizaron un trabajo en el que estudiaban la relación entre razón y fracción; al respecto, señalan en la relación entre fracciones y razones se pueden identificar cinco modelos: 1) el conjunto de las razones como subconjunto de las fracciones, 2) el conjunto de las fracciones como subconjunto de las razones, 3) los conjuntos de las razones y las fracciones distintos, 4) el conjunto de las razones y las fracciones son el mismo conjunto y, 5) los conjuntos de las razones y las fracciones tienen partes comunes.

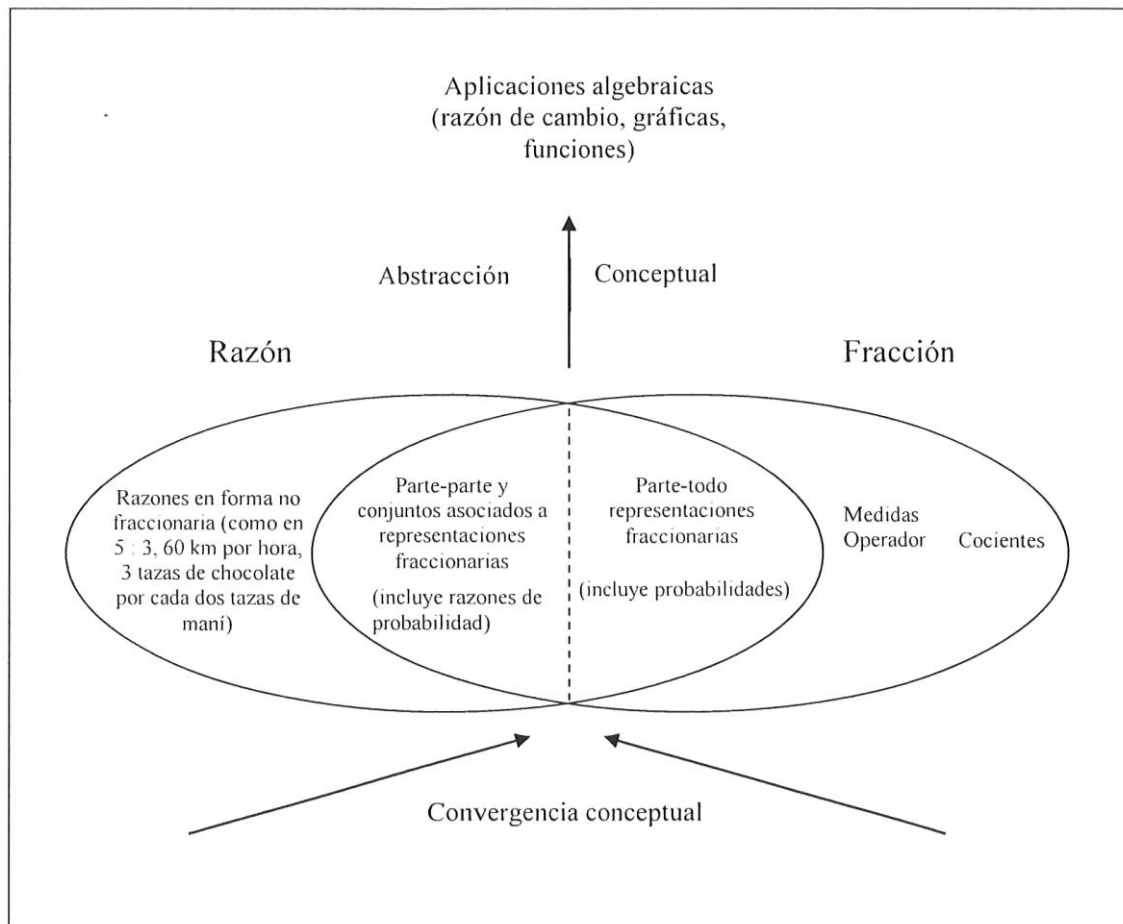
En la investigación de Clark et al. (2003), cada modelo se acompaña de una descripción, una figura y las resoluciones de problemas dadas por alumnos. Enseguida se presentan las figuras que corresponden a cada modelo:

Tabla 6. Modelos de relaciones entre fracciones y razones (Clark et al., 2003, pp. 299-301)

	
1) El conjunto de las razones como subconjunto de las fracciones	2) El conjunto de las fracciones como subconjunto de las razones
	
3) Los conjuntos de las razones y las fracciones distintos	4) El conjunto de las razones y las fracciones como conjuntos superpuestos
	
5) Los conjuntos de las razones y las fracciones como conjuntos idénticos	

Para el caso del modelo 4, Clark y sus colaboradores realizan una interpretación más puntual para explicar algunas de las relaciones que se establecen entre fracciones y razones, admiten que este modelo funciona con pequeños ajustes para una variedad de interpretaciones a diferencia del resto. Enseguida se observa el esquema ampliado del modelo 4:

Figura 4. Modelo 4) de relaciones entre fracciones y razones (Clark et al., 2003, p. 307)



La investigación de Clark y colaboradores concluyó que los participantes se movían fluidamente a través de los límites de esta nueva versión del modelo 4. Por otra parte, en este modelo se observan relaciones entre fracción y razón a partir de la comparación parte-parte y parte-todo, además se establecen conexiones con la probabilidad; situación ya descrita en Llinares y Sánchez (1997) al plantear algunos ejemplos donde se establece una comparación todo-todo entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos posibles, además, asocian la fracción como razón a contextos de

porcentajes, ya que por regla general los porcentajes tienen un aspecto de “operador”, que al interpretar el “60% de 35” se imagina “actuando la fracción 60/100 sobre 35” (hacer 100 partes de 35 y tomar 60).

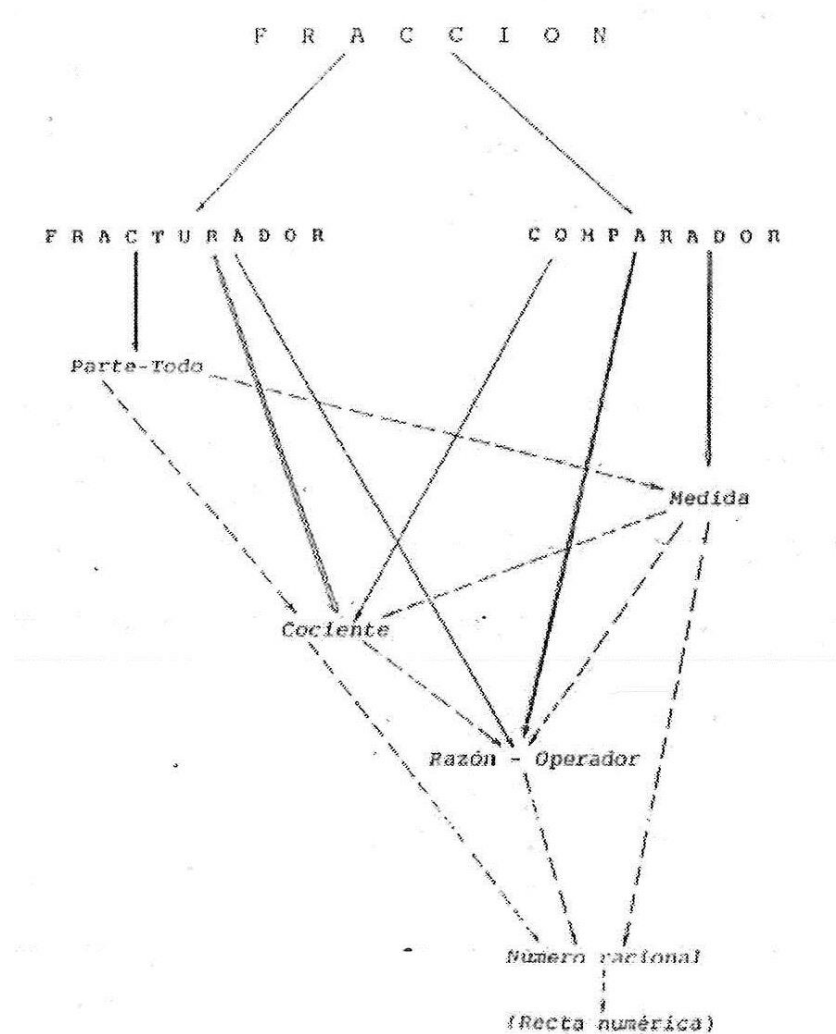
III.3.1.3. Propuestas para la enseñanza de las fracciones y sus significados. El papel del significado razón

La delimitación y conceptualización de los diferentes significados (subconstructos) de las fracciones es el producto de numerosas investigaciones, entre las que destacan los trabajos de Kieren (1976, 1980, 1988), tal y como lo citamos en apartados anteriores. Sin embargo, su análisis y discusión se ha constituido como un tema vigente a lo largo de los años que intenta dar a respuestas a preguntas como las siguientes: ¿cómo iniciar el estudio de las fracciones en las instituciones educativas?, ¿cuáles subconstructos se deben estudiar primero y cuáles después?, ¿cuáles conocimientos matemáticos y didácticos debe poseer el profesor para abordar el estudio de los diferentes subconstructos?, ¿qué tareas le demanda a los docentes y alumnos iniciar el estudio de las fracciones con cualquiera de los cinco subconstructos (parte-todo, medida, cociente, razón y operador)?, entre otras.

En los siguientes párrafos describimos, de manera general, las principales aportaciones de algunas investigaciones, en relación con cuál o cuáles subconstructos de las fracciones funcionan como la entrada para su estudio y cuáles le continúan, además de identificar cuál es el papel que se le otorga al significado razón.

De acuerdo con Lizarde (2013), Mochón (1990) propone un esquema donde ilustra la articulación entre los diferentes significados de las fracciones, a partir de dos concepciones generales de la fracción que plantea Freudenthal (1994): como fracturador y como comparador. Enseguida se presenta el esquema:

Figura 5. Articulación de los diferentes significados de la fracción (Mochón, 1990, citado en Lizarde, 2013, p. 60)

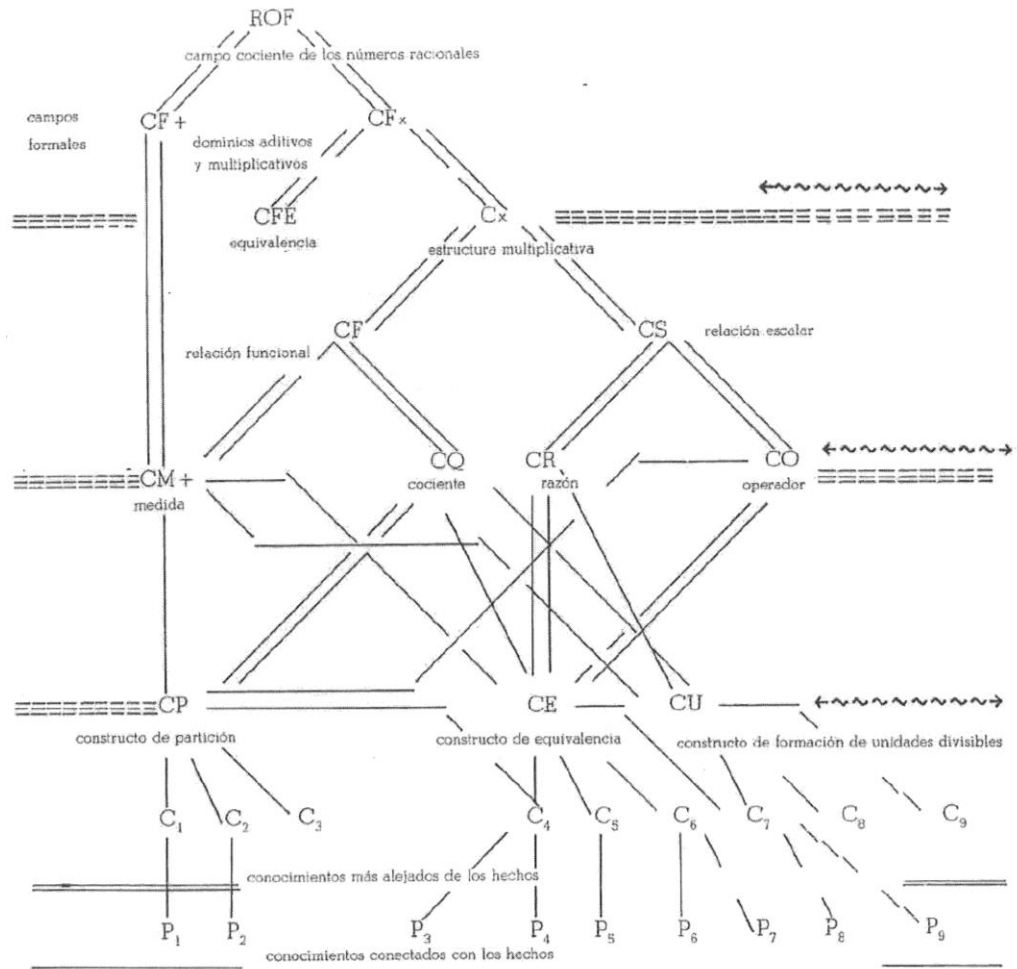


Como se puede observar, las rectas continuas marcan la relación entre fracción-fracturador-parte-todo-cociente y razón-operador, al igual que entre, fracción-comparador-cociente-medida y razón-operador, mientras que las rectas discontinuas la relación entre los subconstructos de la fracción; en este caso, el subconstructo razón y operador se ubican en un mismo nivel y establecen relaciones con cociente y medida, es decir, a su estudio se llega después de abordar parte-todo, medida y cociente, pero antes de número racional y recta numérica.

A pesar de la jerarquía establecida en el esquema, en relación con los diferentes subconstructos de la fracción, se sugiere que su representación en clase atienda a un proceso en espiral de crecimiento ascendente, donde se desarrollen de manera simultánea los mecanismos constructivos con los

subconstructos (Mochón, 1990, citado en Lizarde, 2013). Por otra parte, Kieren (1988) plantea diversos niveles respecto al estudio de los números racionales:

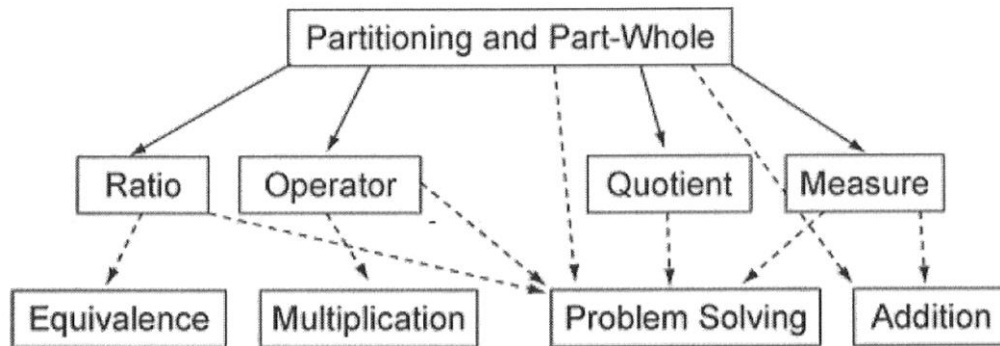
Figura 6. Niveles del conocimiento sobre los números racionales de Kieren (1988, en Mancera, 1992, p. 48)



En esta imagen observamos al campo de los números racionales se accede a partir de los mecanismos de constructo partición (CP), constructo de equivalencia (CE) y constructo de formación de unidades divisibles (CU). En el caso del constructo razón (CR) establece una doble relación con el CE y simple con el CU, a través de los cuales se conecta con conocimientos más alejados de los hechos (C4, C5, C6, C7, C8 y C9) y conocimientos conectados con los hechos (P3, P4, P5, P6, P7, P8 y P9). Además, el CR presenta una doble relación con el constructo relación escalar (CS).

Behr, Lesh, Post & Silver (1983) señalan que los números racionales figuran entre los más complejos e importantes para los niños, por lo cual, realizan una redefinición de las interpretaciones de las fracciones establecidas por Kieren (1976), donde atribuyen a partición y parte-todo como el punto de partida para abordar las diferentes interpretaciones de la fracción, tal como aparece enseguida:

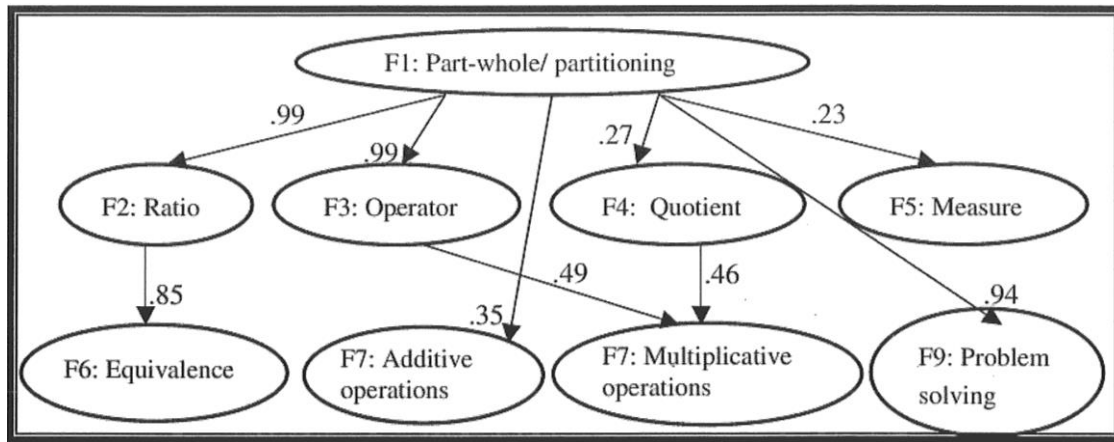
Figura 7. Esquema conceptual para la instrucción de los números racionales (Behr et al., 1983, s.p.)



En la figura anterior, las flechas continuas que emergen de partición y parte-todo establecen relaciones con los constructos (razón, operador, cociente y medida), fracciones y operaciones; por su parte, las flechas discontinuas representan relaciones hipotéticas. En el caso de la razón, el esquema muestra relaciones hipotéticas con equivalencia (equivalencia de fracciones) y resolución de problemas.

El modelo de Behr et al. (1983) fue tomado como referente por Charalambous & Pitta-Pantazi (2005), con el propósito de investigar en qué medida se establecían asociaciones entre los conceptos y operaciones incluidas en el modelo ya descrito, por lo cual, construyeron una prueba sobre fracciones donde asignaron tareas en función de los diferentes subconstructos a estudiantes de quinto y sexto grado. El análisis de los procedimientos empleados por los estudiantes lo guio a modificar el modelo inicial para dar paso a la siguiente propuesta:

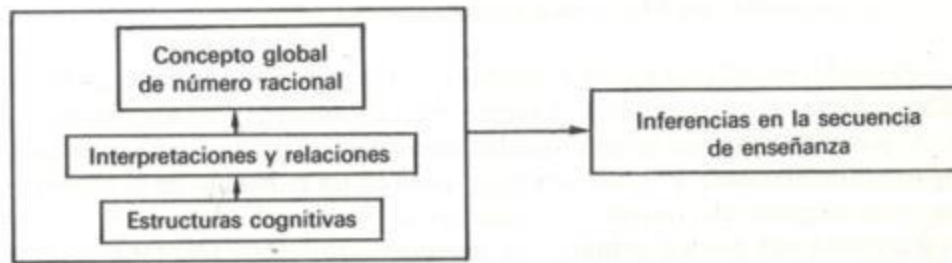
Figura 8. Modelo que vincula los cinco subestructos de las fracciones a las operaciones de fracciones y la resolución de problemas (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005, p. 237)



En este modelo se apoya la hipótesis de que parte-todo y partición son la base para lograr la interpretación de razón, operador, cociente y medida. En lo que respecta a la relación de las cuatro interpretaciones con resolución de problemas se diluye para quedar sólo en parte-todo y procesos de partición. Interesa rescatar que en la investigación se manifiesta apoyo empírico a la hipótesis de que la interpretación razón contribuye enormemente a la búsqueda de fracciones equivalentes; esto sólo constituye algunas de los resultados que emergen del trabajo de Charalambous & Pitta-Pantazi (2005), sin embargo, por el momento, sólo retomamos algunas reflexiones respecto al significado razón.

La enseñanza de las diferentes interpretaciones de las fracciones se ha constituido como una forma de arribar a la comprensión del concepto global del número racionales; idea planteada por Llinares y Sánchez (1997), a partir de la revisión de diferentes investigaciones en el campo, por lo cual proponen el siguiente esquema:

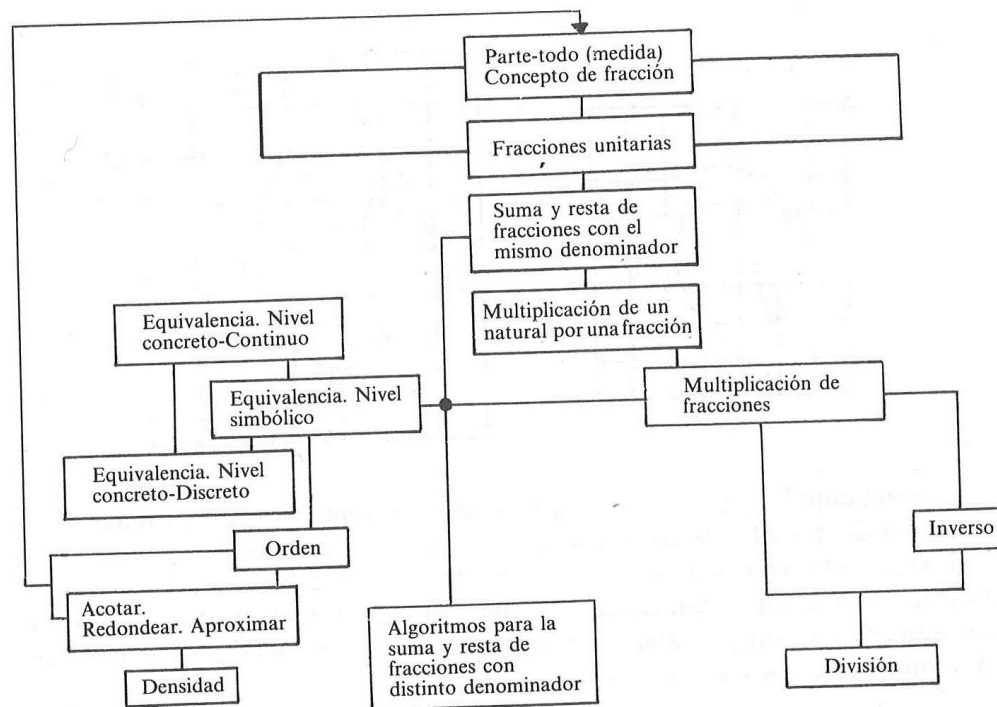
Figura 9. Comprensión del número racional (Llinares y Sánchez, 1997, p. 76)



En este esquema, destaca en la base el conocimiento de algunas estructuras cognitivas que pueden condicionar la forma de abordar las diferentes interpretaciones y relaciones de las fracciones para favorecer la comprensión del concepto global de número racional; lo anterior, puede dotar de algunas inferencias en la secuencia de enseñanza. Llinares y Sánchez (1997) asumen que la interpretación parte-todo se ha definido, con frecuencia, como la piedra angular para el desarrollo de las diferentes interpretaciones; sin embargo, señala que esas introducciones deben ser completadas con el estudio del resto de las interpretaciones para evitar ciertas limitaciones conceptuales.

Más adelante, estos investigadores presentan otro esquema donde intentan identificar las interpretaciones del concepto fracción y su vinculación con operaciones, aunque dejan claro que cada docente puede tomar sus propias decisiones:

Figura 10. Propuesta de enseñanza para la interpretación parte-todo y las operaciones (Llinares y Sánchez, 1997, p. 76)



Hasta aquí hemos identificado, en los esquemas propuestos para el estudio de las fracciones y sus significados, se reproduce la postura de partir del estudio del significado parte-todo y procesos de partición para avanzar en la comprensión del resto de los significados (razón, cociente, operador y medida). En este sentido, se observa que el estudio del significado razón como parte de las fracciones ha establecido diferentes relaciones con algunos objetos matemáticos; primero revisamos, el significado razón, se asociaba a la idea de comparador (vinculación fuerte) y fracturador (vinculación débil), al igual que el significado operador y establece conexión con el constructo cociente, medida y número racional (recta numérica) (Mochón, 1990, citado en Lizarde, 2013); mientras que para Kieren (1988), se relaciona con el constructo de formación de unidades divisibles y (vinculación simple) y el constructo de equivalencia (doble vinculación) para después conectarse con el constructo de relación escalar.

En el modelo de Behr et al. (1983) y en el seguimiento que realizaron del mismo Charalambous & Pitta-Pantazi (2005), permanece el estudio de la razón a partir de parte-todo y los procesos de partición, así como su contribución a la construcción de fracciones equivalentes. Llinares y Sánchez (1997) señalan se puede aceptar que los niños desarrollen una noción de fracción relacionada con la

interpretación parte-todo en un momento de la enseñanza y ampliar su concepto a través del estudio de otras interpretaciones.

La constante en las investigaciones anteriores es tomar el significado parte-todo como base para la construcción del significado razón (y del resto de los significados), del cual se puede avanzar a la construcción de fracciones equivalentes. Enseguida abordaremos una investigación que propone la razón como uno de los significados de la fracción para iniciar su estudio, de la cual ya habíamos realizado una presentación en apartados anteriores.

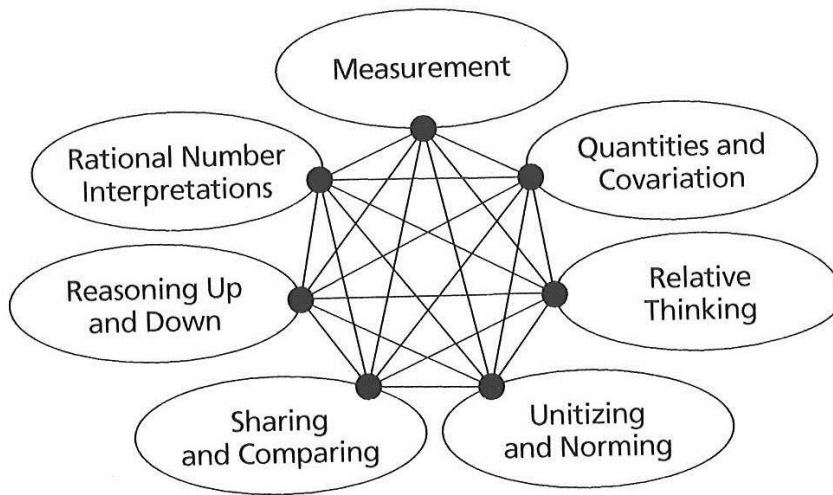
Lamon (2007) realizó un estudio longitudinal durante cuatro años con seis grupos de niños que se ubicaban de tercero a sexto grado de primaria; cada uno de los grupos inició la enseñanza de los números racionales con un subconstructo diferente, en función de los definidos por Kieren (parte-todo, medida, cociente, razón y operador), a excepción de un grupo control. En las primeras páginas del reporte de esta investigación señala que, con frecuencia, hablar de fracciones remite a comparaciones de tipo parte-todo, cuando sólo es uno de sus significados, pues existen otras interpretaciones (medida, cociente, razón y operador) por las que se puede iniciar su estudio.

Por otra parte, Lamon plantea que los números racionales y la proporcionalidad son dos constructos de las matemáticas que no están desarticulados:

[...]Los números racionales tienen una naturaleza proporcional, es decir, dentro de cada clase de equivalencia, cada elemento es un múltiplo constante de todos los demás. Sin embargo, como se esperaba, la comprensión de los números racionales y la comprensión de la proporcionalidad no son equivalentes (Lamon, 2007, p. 636).

Debido al planteamiento anterior, señala que su hipótesis es que las proporciones surgen en el estudio de los números racionales como una expresión natural de equivalencia y que a medida que se desarrolla el sentido de los números racionales a través de diversas experiencias con muchas personalidades de los números racionales, se aprende a razonar proporcionalmente. De ahí que en su estudio, emplea un modelo con siete puntos para la construcción de la enseñanza de las matemáticas, donde uno de ellos son los subconstructos de los números racionales, que conectan los niños con otras seis ideas consideradas centrales para el desarrollo del pensamiento multiplicativo, lo cual se expresa en la siguiente figura:

Figura 11. Siete puntos considerados para el desarrollo del pensamiento multiplicativo (Lamon, 2007, p. 652)



Como podemos observar, los siete puntos están integrados por: interpretaciones de los números racionales, medición, cantidades y covarianza, pensamiento relativo, unificación y normalización, compartir y comparar y, razonamiento arriba y abajo.

En este trabajo, nos limitamos a las aportaciones que plantea Lamon (2007) respecto a las interpretaciones de los números racionales, con el propósito de rescatar el papel que otorga al subconstructo razón. En sentido, señala que la razón se convierte en uno de los subconstructos más poderosos para iniciar el estudio de los números racionales, ya que en el grupo donde se puso en juego, los alumnos mostraron un mejor desempeño que los de otros grupos.

En esta última propuesta que presentamos para el estudio de los números racionales, el subconstructo razón se convierte en uno de los primeros con los que se puede iniciar su enseñanza y aprendizaje, además se destaca, establece algunas relaciones con el razonamiento proporcional, cuyo concepto central es del desarrollo del pensamiento multiplicativo en ambas temáticas.

CAPÍTULO IV.
PERSPECTIVA METODOLÓGICA DE LA
INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO IV. PERSPECTIVA METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN

IV.1. Introducción

La dirección de una investigación está definida por un proceso sistemático que articula diferentes elementos que pretenden dar respuesta a alguna o algunas preguntas de investigación, de donde emergen diferentes objetivos; en este escenario se mueve nuestra investigación. De ahí que recuperamos la pregunta central, que enunciamos en la introducción de la presente investigación: ¿Cuál es el conocimiento especializado que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad? A la par, agregamos como preguntas complementarias:

- ¿Cuáles son los elementos de conocimiento matemático que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?
- ¿Cuáles son los elementos de conocimiento didáctico del contenido que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?
- ¿Cuáles son las posibles relaciones entre dominios de conocimiento que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?

A partir de lo anterior, nuestro objetivo principal se traduce en identificar y caracterizar el conocimiento especializado que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad. Así, en los objetivos particulares definimos:

- Identificar y caracterizar los elementos de conocimiento matemático que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.
- Identificar y caracterizar los elementos de conocimiento didáctico del contenido que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.
- Identificar y caracterizar las posibles relaciones entre dominios de conocimiento que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón

en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

Una vez que recuperamos las preguntas y los objetivos de esta investigación, en los siguientes apartados damos cuenta del paradigma y diseño de la misma, el proceso e instrumentos de recuperación de datos, así como el proceso e instrumentación de su análisis.

IV.2. Paradigma de investigación

La caracterización de una investigación implica señalar sus principios, supuestos y características que le otorgan identidad, en algunos casos, compartida por una comunidad científica o un grupo de investigadores. En este apartado iniciamos con la definición de paradigma desde el campo educativo, en el cual nos movemos. Así, De Miguel (1988) lo describe como:

Un punto de vista o modo de ver, analizar e interpretar los procesos educativos que tienen los miembros de una comunidad científica y que se caracteriza por el hecho de que tanto científicos como prácticos comparten un conjunto de valores, postulados, fines, normas, lenguajes, creencias y formas de percibir y comprender los procesos educacionales (p. 66).

La aportación anterior se ha destacado por diferentes autores (Sandín, 2003; Bisquerra, 2004) como una de las que ilustran la definición de paradigma en el ámbito educativo. En este sentido, un paradigma nos permitirá conocer e interpretar la realidad desde una perspectiva teórica establecida.

Corbetta (2007), apoyado en Guba y Lincoln (1994), hace referencia a tres paradigmas: positivismo (realismo ingenuo), postpositivismo (realismo crítico) e interpretativismo (constructivismo). Además, describe algunas de sus características en función de su perspectiva ontológica (conciene a la naturaleza de la realidad social y su forma), epistemológica (aborda la relación entre el quién y el qué, y el resultado de esa relación) y metodológica (es la cuestión del cómo, es decir, cómo se puede conocer la realidad social); indicadores de un paradigma que determinarán las acciones que se realicen en un estudio (Lincoln & Guba, 1985; Cohen y Manion, 2002; Denzin & Lincoln, 2003).

En esta investigación nos situamos en el paradigma interpretativo. Para Denzin & Lincoln (2003) toda investigación interpretativa está orientada por un conjunto de creencias y sentimientos sobre el mundo, cómo debe ser entendido y estudiado. Agregan que algunas creencias pueden ser sólo asumidas, mientras que otras son problemáticas y controvertidas. Por lo cual, este paradigma interpretativo hace demandas particulares al investigador, incluyendo las preguntas que hace y las interpretaciones que el

investigador les trae. En general, percibimos en la formación inicial de profesores de primaria existen algunas dificultades en la delimitación de conocimiento matemático y didáctico que se asocia con la noción de razón desde las fracciones y la proporcionalidad. Enseguida, de manera concreta, describimos cómo se visualiza en nuestra investigación la perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica de este paradigma, su separación en los siguientes párrafos no significa que no están estrechamente relacionadas, ya que en la investigación existe una correspondencia entre ellas (Bisquerra, 2004; Corbetta, 2007; Muñoz-Catalán, 2009).

En relación con la perspectiva ontológica, Santos (2002) la define como “la forma en que encaramos una realidad y lo que consideramos posible saber sobre esa misma realidad” (p. 158). Así, desde el paradigma interpretativo en el que nos movemos en esta investigación, asumimos un posicionamiento ontológico relativista de la realidad, donde se considera la existencia de múltiples realidades situadas que son el resultado de la construcción humana. Desde este enfoque, Muñoz-Catalán y Monteiro (2016) señalan que “[...] el investigador considerará que los resultados de su trabajo es una construcción personal, consecuencia de su interpretación, a través de la cual reconstruye los significados puestos en juego durante la interacción con el fenómeno estudiado” (p. 49).

Debido a la naturaleza cualitativa de esta investigación, Bryman (2012), destaca como orientación ontológica el construccionismo, sostiene que los fenómenos sociales y sus significados son continuamente realizados y revisados por los actores sociales. Así, en este estudio, el acercamiento al conocimiento especializado⁶ de los dos profesores en formación inicial los realizamos a partir de sus interpretaciones sobre la realidad en producciones escritas y orales.

La perspectiva epistemológica está relacionada con la teoría del conocimiento, sus principios y sus reglas que nos permiten conocer los fenómenos sociales y demostrar el conocimiento (Mason, 2002). Muñoz-Catalán (2009) se refiere a esta perspectiva como el conocimiento resultante de la investigación, a cómo podemos conocer la realidad y a cuál es la base de nuestro conocimiento. En este estudio adoptamos un enfoque epistemológico asociado a la subjetividad, donde los resultados son construcciones humanas (Santos, 2002). Dicho enfoque coincide con la orientación epistemológica que Bryman (2012) denomina interpretativismo, la cual resalta la importancia de que el científico social capte el significado subjetivo de la acción social. Por su parte, Merriam & Tisdell (2016), agregan que el enfoque interpretativo como una perspectiva epistemológica tiene como propósito describir,

⁶ En el capítulo del marco teórico realizamos una descripción de los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

entender e interpretar múltiples realidades, vinculadas al contexto. La investigación desde este enfoque, nos permitirá identificar y caracterizar el conocimiento especializado de dos profesores en formación inicial a través de las interpretaciones de sus formas de proceder en diferentes escenarios y momentos de su formación.

Ritchie & Lewis (2003) plantean tres aspectos epistemológicos que están en debate en la investigación social: la relación entre el investigador y el investigado, las teorías de la “verdad” y el modo en que se adquiere el conocimiento. Respecto a la relación entre el investigador y el investigado, Ritchie & Lewis (2003) señalan que en el modelo de las ciencias naturales los fenómenos estudiados no son afectados por el comportamiento del investigador, mientras que en el mundo social las personas son afectadas por el proceso de estudio y la relación entre el investigador y los fenómenos sociales es interactiva. Así, al ubicarnos en este último escenario asumimos que durante el estudio (observación de clases y entrevistas) puede existir una influencia recíproca entre el investigador y los participantes que lleva a la construcción de una investigación conjunta (Muñoz-Catalán, 2009), aunque ese no era el propósito, sin embargo, es inevitable la transmisión de diferentes emociones de manera inconsciente.

En este trabajo, la relación entre el investigador y los informantes (Daniela e Israel⁷) se caracteriza por una serie de interacciones en diferentes momentos de la investigación, que van desde la aplicación de entrevistas hasta la videograbación de las clases; situaciones que propician un intercambio de mensajes a través de la expresión verbal y corporal, que en algunos casos, influyen en la información que vierten Daniela e Israel cuando como investigadores solicitamos externen algunas ideas respecto a temáticas que abordamos.

Las teorías sobre la “verdad”, constituyen la segunda cuestión epistemológica desde donde Ritchie & Lewis (2003) abordan similitudes o diferencias entre lo natural y el mundo social. En este sentido, mencionan que en las ciencias naturales la teoría dominante de la verdad es la de correspondencia, es decir, hay un equilibrio entre las observaciones del mundo natural y la realidad. Ante esto, en el mundo social, surge la teoría de la verdad intersubjetiva donde la realidad puede medirse de una manera consensual. De ahí que si varios informes confirman una afirmación puede considerarse verdadera como una representación de la verdad socialmente construida. En nuestro estudio, adoptamos la teoría de verdad intersubjetiva que nos permite analizar documentos, entrevistas y videograbaciones de clases para interpretar el conocimiento especializado que Daniela e Israel evidencian. En este contexto, nuestra sensibilidad teórica (Satruss & Corbin, 1994) desempeña un

⁷ Seudónimos que empleamos para mantener el anonimato de los informantes.

papel fundamental, es decir, nuestros conocimientos y experiencias, personales y profesionales (Muñoz-Catalán, 2009).

En relación con el modo en que se adquiere el conocimiento, Ritchie & Lewis (2003) hacen referencia a la descripción de procesos inductivos y deductivos en la investigación, además, especifican que aunque la investigación cualitativa con frecuencia se visualiza con un enfoque inductivo; éste no es una característica que lo define. Al respecto, Bryman (2012), señala que, “en gran medida, las estrategias deductivas e inductivas se pueden considerar mejor como tendencias más que como distinción rígidamente impuestas” (p. 27). Por tanto, partimos de un proceso deductivo-inductivo, porque empleamos como referente las categorías e indicadores de los subdominios del marco teórico MTSK para identificar y caracterizar el conocimiento matemático y didáctico que Daniela e Israel ponen en acción cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad. Además, en algunos momentos seguimos un proceso inductivo-deductivo, con el propósito de generar indicadores de conocimiento especializado que los dos profesores en formación inicial evidencian.

La perspectiva metodológica al interesarse en cómo se puede conocer la realidad, involucra la instrumentación técnica empleada en el proceso cognitivo entre el investigador y los informantes en la fase empírica de la investigación. Así, desde el paradigma interpretativo, se asocia la perspectiva metodológica de la investigación con el empleo de técnicas de investigación cualitativa (Corbetta, 2007). En el siguiente apartado presentamos el diseño metodológico que caracteriza esta investigación cualitativa.

IV.3. Diseño de la investigación

El diseño de esta investigación cualitativa emerge de nuestra reflexión para aproximarnos a la realidad del objeto de estudio (Rodríguez, Gil y García, 1996). Al respecto, Sandín (2003) expresa:

La investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos (p. 123).

En coincidencia con las ideas anteriores y algunas aportaciones de Merriam & Tisdell (2016), respecto al rol que desempeñamos como investigadores desde el enfoque de la investigación cualitativa, destacamos las siguientes características que marcan nuestro estudio: ampliamos la comprensión de los

fenómenos a través de la comunicación verbal o no verbal, procesamiento de datos y exploración o verificación de las respuestas que brindan los participantes y, recurrimos al marco teórico del MTSK para la interpretación de los datos con el propósito de identificar el conocimiento matemático y didáctico que Daniela e Israel ponen en acción cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

Bisquerra (2004) menciona que una manera práctica de responder a las preguntas planteadas y alcanzar los objetivos propuestos es a través del diseño de la investigación para aplicarlo en un contexto particular. Así, “el diseño de la investigación es el plan o estrategia concebida para obtener la información que se requiere, dar respuesta al problema formulado y cubrir los intereses del estudio” (p. 120). Bajo la perspectiva de este autor, a continuación enunciamos el estudio de casos como el método, es decir, el camino para alcanzar los objetivos de la investigación, seguido de las estrategias o instrumentos para la obtención de la información (técnicas).

IV.3.1. Estudio de casos

Hacer investigación cualitativa demanda al investigador profundizar en el conocimiento de los sujetos involucrados con el propósito de obtener información específica y detallada sobre su actuar en relación con un fenómeno que se estudia. En este sentido, es importante determinar el método que se empleará, teniendo presente que el anterior constituye la vía para alcanzar los propósitos de la misma y está determinado por su carácter regular, explícito, repetible, racional, ordenado y objetivo para conseguirlo (Latorre, Del Rincón y Arnal, 1996). Ante esto, recurrimos al estudio de casos, como “[...] el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 1999, p. 11). De esta manera, planteamos el estudio de caso como “la selección del escenario desde el cual se intenta recoger información pertinente para dar respuesta a las cuestiones de la investigación” (Rodríguez, Gil y García, 1996, p.91).

El estudio de casos resulta relevante en el proceso de una investigación porque permite investigar determinados sujetos en un contexto específico, mismo que en ciertas ocasiones tiene injerencia en su desempeño y que demanda su estudio para comprender sus acciones. De acuerdo con Albert-Gómez (2007) “el potencial del estudio de casos radica en que permite centrarse en un caso concreto o situación e identificar los distintos procesos interactivos que lo conforman, así como su flexibilidad [...]” (p.216). Desde el momento en que el estudio de casos plantea un acercamiento a los sujetos de investigación e intenta profundizar en su estudio, se identifica que su cometido es la particularización y

no la generalización; esto con el propósito de identificar qué es, qué hace (Stake, 1999). En la revisión de la literatura sobre los tipos de estudios de casos destacan las aportaciones de Merriam (1998), Stake (1999) y Yin (2003 (Bassey, 1999; Simons, 2011)). En este espacio revisamos los planteamientos de Stake y Yin.

Stake (1999) identifica tres tipos de estudios de casos: intrínseco, instrumental y colectivo. En el estudio intrínseco de casos, se pretende alcanzar una mejor comprensión de un caso particular que no representa a otros, el estudio se define por el interés mismo del caso. Por otra parte, el estudio de casos instrumental se caracteriza por investigar cuestiones o situaciones paradójicas con el propósito de obtener información para comprender algún aspecto de la realidad social. Respecto al estudio colectivo de casos, Stake (1999) menciona en una misma situación se puede elegir a varios profesores como objeto de estudio o varias escuelas como casos, por citar un ejemplo. Así, cada estudio de casos es un instrumento, pero debe existir buena coordinación en los estudios individuales que integran el estudio colectivo.

En función de los tres tipos de casos descritos por Stake (1999), el diseño de caso utilizado es consistente con un estudio de casos instrumental, con la intención de avanzar en la comprensión del conocimiento especializado sobre la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, a través de la revisión de documentos (planificaciones y documentos de análisis de la práctica), entrevistas semiestructuradas y videgrabaciones de clases de dos profesores en formación inicial (Daniela e Isarel), que se constituyen como informantes en este tipo de estudio de casos.

De acuerdo con Yin (2003), los estudios de casos, en primer lugar, pueden ser únicos o múltiples; en segundo lugar, se pueden clasificar en exploratorios, descriptivos o explicativos. Un estudio de caso exploratorio puede basarse en un único caso o múltiples casos, cuyo propósito puede ser la definición de preguntas o hipótesis de estudios posteriores, aunque también se puede emplear para determinar la factibilidad de un procedimiento. Respecto al estudio de casos descriptivo menciona presenta una descripción de un fenómeno en su contexto. Por su parte, el estudio de casos explicativo, aborda datos relacionados con la causa-efecto al explicar cómo sucedieron los eventos.

En términos generales, definimos el estudio de casos de esta investigación como instrumental (Stake, 1999) y exploratorio (Yin, 2003); este último carácter lo atribuimos al estudio con el propósito de plantear algunas hipótesis de estudios posteriores de investigación en torno al conocimiento

especializado sobre la noción de razón como significado de la fracción, ya que en el apartado de la revisión de antecedentes no encontramos investigaciones donde el significado razón constituyera el objeto central de estudio.

IV.3.1.1. Selección y caracterización del caso

La selección de los casos para obtener información en esta investigación la realizamos en dos etapas: 1º definir la situación que se pretende investigar en relación con el conocimiento profesional en el campo de las matemáticas para obtener información y comprender algún aspecto de la realidad y 2º definir las condiciones y acceso a los escenarios.

1º Desde el inicio de esta investigación definimos identificar y caracterizar el conocimiento especializado sobre la enseñanza de la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en la formación inicial de profesores de primaria, lo cual, atiende al carácter instrumental y exploratorio de este estudio de casos. Simons (2011) señala que cuando se realiza un estudio de caso instrumental “se puede escoger cualquiera de una serie de pasos para investigar el tema que se está estudiando” (P. 53); situación que nos llevó a la segunda etapa.

2º Realizar un estudio en una escuela formadora de docentes de educación primaria que se ubicara en el estado de Zacatecas, México. Debido a que una de las investigadoras (autora) del equipo trabaja en una de estas instituciones, decidimos que el estudio se desarrollara en la Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”, ubicada en la localidad de San Marcos, municipio de Loreto, Zacatecas. Además, identificamos dos escuelas primarias cercanas a la escuela normal que, desde hace años, colaboran con la misma, facilitando a los profesores en formación inicial el desarrollo de sus prácticas. Para este trabajo de investigación tendríamos acceso a dos grupos de quinto grado. Con esto garantizaríamos el fácil acceso al escenario, que existiera una alta probabilidad de diferentes interacciones entre los informantes (dos casos) y la investigadora en función de los objetivos de la investigación; por otra parte, se aseguraría la calidad y credibilidad del estudio (Rodríguez, Gil y García, 1996).

IV.3.1.2. Caso Daniela e Israel

En este trabajo seleccionamos como nuestro caso a dos profesores en formación inicial de primaria: Daniela e Israel. En el momento de la investigación Daniela e Israel se ubicaban en un grupo de quinto

semestre de la Licenciatura en Educación en Primaria bajo el Plan de Estudios 2012. Su selección la realizamos tomando en cuenta los siguientes criterios:

a) habían llevado en primer semestre el curso de aritmética: su aprendizaje y enseñanza (donde abordan el estudio de la noción de razón), en segundo semestre trabajaron álgebra: su aprendizaje y enseñanza, el curso de geometría: su aprendizaje y enseñanza lo abordaron en tercer semestre y en cuarto semestre trabajaron procesamiento de la información estadística; cursos que se insertan en la línea de matemáticas en la malla curricular de la licenciatura;

b) en el primer semestre de la licenciatura aplicamos un instrumento que contenía reactivos sobre la resolución y planteamiento de problemas que involucraban diferentes significados de las fracciones (Llinares y Sánchez, 1997) al grupo donde se ubican los dos casos, aquí identificamos Daniela e Israel destacaban en relación con el conocimiento matemático y didáctico, lo cual, se convirtió en un indicador para su selección;

c) otro criterio fue la información brindada por los maestros responsables de los cursos de matemáticas de primer semestre a cuarto semestre en relación con su desempeño académico (destacado), participación activa en las clases en la escuela normal y en las jornadas de práctica en las escuelas primarias; es decir, recurrimos a personas que conocieran la cultura que estábamos estudiando (Rodríguez, Gil y García, 1996). Por lo tanto, estábamos en condiciones de:

d) identificar a Daniela e Israel como informantes clave de un grupo de treinta y cinco estudiantes de quinto semestre de la licenciatura que destacaban por su conocimiento del contexto estudiado (Rodríguez, Gil y García, 1996) y debido a que se pretende hacer un estudio de casos instrumental, donde el énfasis está en identificar y caracterizar el conocimiento especializado de la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en la formación inicial de profesores de primaria.

IV.3.2. Escenarios de la investigación

El Acuerdo 649 por el que se establece el Plan de Estudios 2012 de la Licenciatura en Educación Primaria en México, plantea que la escuela normal y la escuela primaria se convierten en los principales escenarios que contribuyen a la adquisición de las competencias ⁸ genéricas ⁹ y profesionales ¹⁰ del perfil de egreso, que se favorecen en coordinación con dos orientaciones curriculares: el enfoque centrado en el aprendizaje y la flexibilidad curricular, académica y administrativa.

Respecto al enfoque centrado en el aprendizaje, destacamos una de sus características: “propicia la integración entre la teoría y la práctica y permite la transferencia de los saberes a situaciones más allá del momento en que fueron aprendidos” (DOF, 2012, p. 6). Atendiendo a esta característica, decidimos realizar nuestra investigación cuando Daniela e Israel cursaban quinto semestre de la licenciatura, es decir, ya habían abordado los cursos del área de matemáticas (primero a cuarto semestre).

Por otra parte, el Plan de Estudios 2012 señala que la organización de la malla curricular en trayectos formativos, entre los que se encuentran preparación para la enseñanza y el aprendizaje (incluye el estudio de los cursos de matemáticas) y el trayecto de práctica profesional se convierten en parte de los ejes vertebradores de la formación profesional de los futuros profesores (flexibilidad curricular), donde se hace énfasis en los acercamientos e inmersiones a las escuelas primarias, sobre todo en este último. Así, avanzamos en la identificación de las prácticas profesionales como “el conjunto de

⁸ “[...]Una competencia permite identificar, seleccionar, coordinar y movilizar de manera articulada e interrelacionada un conjunto de saberes diversos en el marco de una situación educativa en un contexto específico” (DOF, 2012, p. 7)

⁹ Competencias genéricas: usa su pensamiento crítico y creativo para la solución de problemas y la toma de decisiones; aprende de manera permanente; colabora con otros para generar proyectos innovadores y de impacto social; actúa con sentido ético; aplica sus habilidades comunicativas en diversos contextos y emplea las tecnologías de la información y la comunicación.

¹⁰ Competencias profesionales: diseña planeaciones didácticas, aplicando sus conocimientos pedagógicos y disciplinares para responder a las necesidades del contexto, en el marco del plan y programas de estudio de la educación básica; genera ambientes formativos para propiciar la autonomía y promover el desarrollo de las competencias en los alumnos de educación básica; aplica críticamente el plan y programas de estudio de la educación básica para alcanzar los propósitos educativos y contribuir al pleno desenvolvimiento de las capacidades de los alumnos del nivel escolar; usa las TIC como herramienta de enseñanza y aprendizaje; emplea la evaluación para intervenir en los diferentes ámbitos y momentos de la tarea educativa; propicia y regula espacios de aprendizaje incluyentes para todos los alumnos, con el fin de promover la convivencia, el respeto y la aceptación; actúa de manera ética ante la diversidad de situaciones que se presentan en la práctica profesional; utiliza recursos de la investigación educativa para enriquecer la práctica docente, expresando su interés por la ciencia y la propia investigación y, en lo que respecta al ámbito de vinculación con la institución y el entorno: interviene de manera colaborativa con la comunidad escolar, padres de familia, autoridades y docentes, en la toma de decisiones y en el desarrollo de alternativas de solución a problemáticas socioeducativas.

acciones, estrategias y actividades que los estudiantes desarrollarán de manera gradual, en contextos específicos, para ir logrando las competencias profesionales que se proponen” (DOF, 2012, p. 16).

El trayecto de práctica profesional posee un carácter integrador porque recupera los trayectos formativos para responder a situaciones o problemas encontrados o “sugeridas intencionalmente para la formación profesional” (DOF, 2012, p. 15). En este sentido, solicitamos a Daniela e Israel diseñaran una planificación donde abordaran la enseñanza de la razón como significado de la fracción, a partir de los conocimientos teóricos y prácticos que poseían en función de lo revisado en primero, segundo, tercero y cuarto semestre de la licenciatura, sin descartar la formación matemática adquirida durante la educación básica y media superior.

El estudio de los significados de las fracciones es uno de los contenidos del Plan y programas de estudio 2011 de educación primaria vigente en el momento de la investigación; aspecto que se incorpora en el trayecto de práctica profesional en quinto semestre de la licenciatura.

Entre los materiales curriculares de educación primaria, destacamos el Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria de quinto grado y el libro de matemáticas para el alumno (ciclo escolar 2013-2014) plantean de manera explícita, por primera vez en el nivel de primaria, el estudio de la noción de razón como significado de la fracción (Llinares y Sánchez, 1997) y desde el tema de la proporcionalidad (situación que se expuso en el apartado de la revisión de los materiales de educación primaria); en particular, en el segundo (razón como cociente) y quinto (razón como significado de la fracción) bloque del libro del alumno. De ahí que debido al carácter instrumental de este estudio de casos, donde nos interesa identificar y caracterizar el conocimiento especializado sobre la noción de razón como significado de la fracción, Daniela e Israel diseñaron una planificación para enseñar la razón como significado de la fracción en dos grupos de quinto grado, en el momento en que dos profesores de dos escuelas primarias, en función del orden de las lecciones del libro de matemáticas del alumno, tenían previsto se abordaría, pero otorgando la oportunidad a los futuros docentes.

Por lo tanto, con el propósito de contribuir a la sistematización de la práctica con un sentido formativo (Ver Figura 12) y, a la vez, avanzar en la identificación y caracterización del conocimiento especializado de la noción de razón como significado de la fracción, solicitamos, acompañamos la planificación de las actividades de Daniela e Israel y el desarrollo de las mismas, con entrevistas y análisis de la práctica elaborados por cada uno de los informantes.

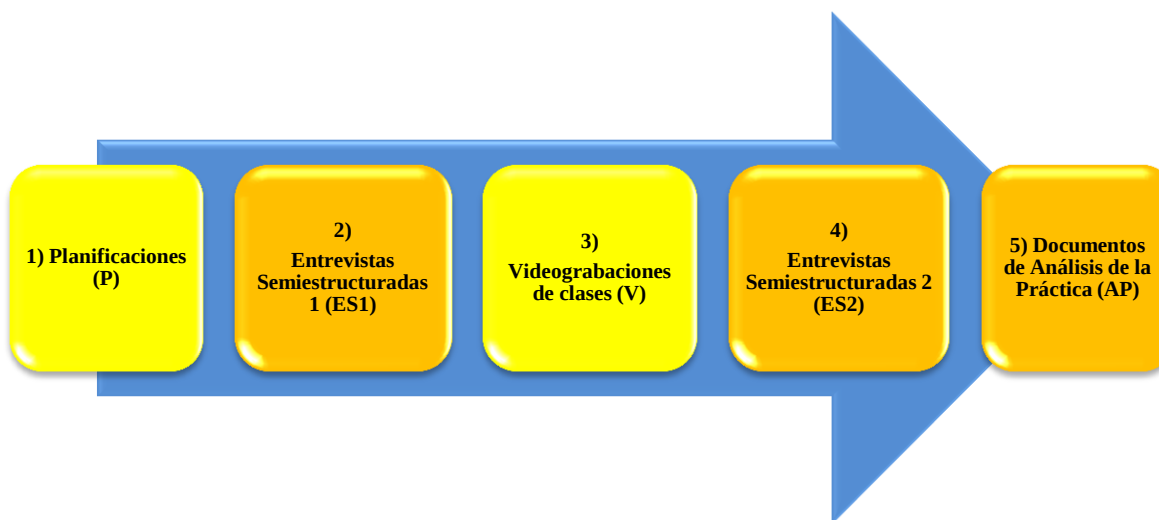
Figura 12. Sistematización y sentido formativo de la práctica (tomada de SEP, 2012c, p. 17)



Rescatamos la figura anterior del documento “el trayecto de práctica profesional: orientaciones para su desarrollo” de la Licenciatura en Educación Primaria (Plan de estudios 2012), donde se plantea la elaboración analítica y reflexiva de la docencia con el propósito de mejorar la práctica, reorientar las acciones y decisiones, así como comprenderse como maestro. De ahí su importante en esta investigación.

IV.4. Proceso e instrumentos de recuperación de datos

Una vez que definimos el propósito de esta investigación es identificar y caracterizar el conocimiento especializado para enseñar la noción de razón como significado de la fracción, conviene citar que, debido a que la razón se encuentra en la intersección dos temas: las fracciones y la proporcionalidad (Block, 2001), pueden emerger algunas relaciones con la proporcionalidad, mismas que serán objeto de caracterización. Una vez definido lo anterior, nos dispusimos a recuperar datos, entendiendo esto como “reducir de modo intencionado y sistemático, mediante el empleo de nuestros sentidos o de un instrumento mediador, la realidad natural y compleja que pretendemos estudiar a una representación o modelo que nos resulte más comprensible y fácil de tratar” (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 142). Así, seleccionamos diferentes instrumentos y documentos que nos aportaran información sobre nuestra pregunta de investigación y objetivos, organizados de la siguiente manera, en función del orden de recuperación y/o aplicación:

Figura 13. Proceso de recuperación de datos de la investigación

Como podemos apreciar la Figura 13, en primer lugar, recuperamos las Planificaciones de Daniela e Israel donde diseñaron actividades para abordar la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad; este documento lo identificamos con la letra P. Por lo tanto, en los siguientes apartados cuando hagamos referencia a la Planificación de Daniela lo acompañaremos con Daniela_P, en el caso del segundo profesor en formación queda: Israel_P; lo mismo pasará con el resto de documentos e instrumentos que citamos enseguida (Daniela_ES1; Daniela_V; Daniela_ES2; Daniela_AP; Israel_ES1; Israel_V1; Israel_V2; Israel_ES2; Israel_AP).

El diseño de la Entrevistas Semiestructuradas 1, que identificamos como ES1, surgió de los datos recuperados en la Planificación en relación con algunas categorías de los subdominios del MTSK. Así, la aplicamos posteriormente. En un tercer momento, recurrimos a la Videograbación de la clase o clases (V) donde Daniela e Israel aplicaron las actividades de sus Planificaciones. Enseguida, las Entrevistas Semiestructuradas 2 (ES2) nos permitieron agregar algunas interrogantes sobre situaciones que se presentaron en la clase e información que había quedado pendiente en la ES1 y P. Finalmente, Daniela e Israel elaboraron y nos entregaron un documento de Análisis de su Práctica (clase o clases), al cual denominamos AP.

Entre las fuentes de datos recuperadas, identificamos dos tipos: fuentes primarias y secundarias. En este sentido, las planificaciones y las videograbaciones de las clases constituyen las fuentes primarias, mientras que las entrevistas semiestructuradas y el documento de análisis de la práctica se ubican en las

fuentes secundarias. En términos generales, la diversidad de fuentes de datos se convertía en una oportunidad para obtener mayor cantidad de información que permitiera identificar y caracterizar el conocimiento especializado para enseñar la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad. En los siguientes apartados definimos algunas características de las diferentes fuentes recuperadas, mismas que agrupamos en revisión de documentos, videograbación de clases y entrevistas semiestructuradas.

IV.4.1. Revisión de documentos

Cuando de investigación cualitativa se habla existen diferentes autores que abordan la importancia de la revisión de documentos (Flick, 2004; Simons, 2011; Stake, 1999). En este trabajo, adoptamos el sentido amplio que Simons (2011) le otorga a la palabra “documento” para referirse a documentos políticos formales, registros públicos o cualquier cosa que se haya escrito o producido relativa al contexto o el escenario. Por lo tanto, en este espacio ubicamos la Planificación (P) y el documento de Análisis de la Práctica (AP), los cuales se redactaron de manera intencionada por Daniela e Israel durante el desarrollo de esta investigación.

En la planificación, Daniela e Israel presentan las actividades que diseñaron para trabajar la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en un grupo de quinto grado de educación primaria, a partir de los conocimientos matemáticos y didácticos que cada uno posee, tomando como referente que es la primera vez que los alumnos abordan, de manera explícita, este contenido. Las planificaciones se convirtieron en una fuente primaria porque permitieron diseñar las Entrevistas Semiestructuradas 1 y, que los dos profesores en formación inicial desarrollarán sus actividades en un grupo de quinto grado, es decir, fueron precursoras de la entrevistas y la videograbaciones de clases (Simons, 2011).

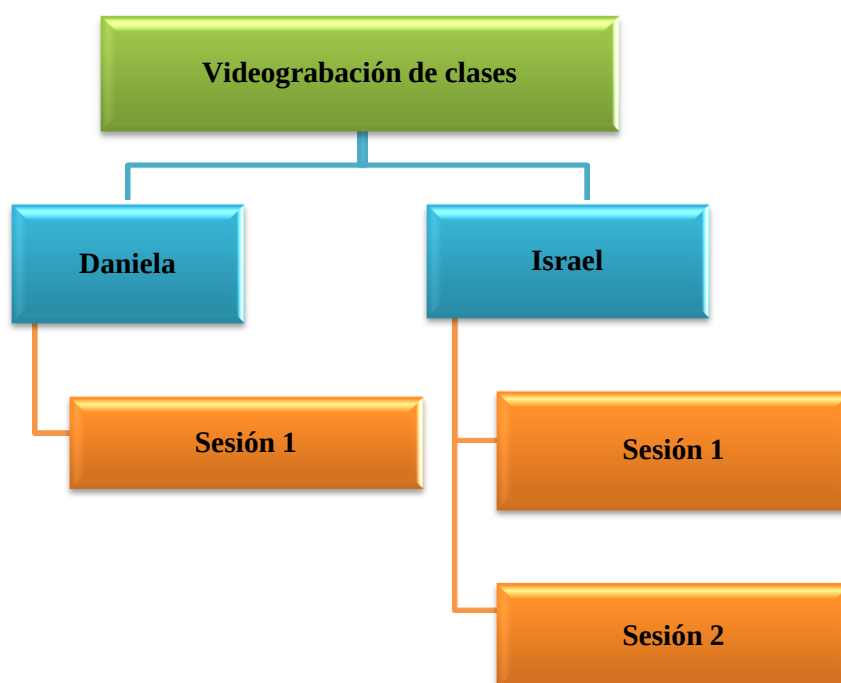
En la escuela normal a la que pertenece Daniela e Israel la sistematización de las prácticas profesionales, por lo general, se realiza a través de un ensayo donde analizan las actividades que desarrollaron con un grupo escolar fuera o dentro del aula, ya sea apoyados en videograbaciones, planificaciones, diarios, notas de campo, evidencias de los alumnos, entre otras fuentes que les aportan información relacionada con su desempeño. Por lo tanto, debido a que el Plan de estudio 2012 de la licenciatura hace énfasis en la sistematización de la práctica para contribuir a la formación integral de los futuros profesores y la cultura instituida en la comunidad escolar da cuenta de estos procesos, decidimos solicitar a Daniela e Israel elaboraran un análisis de las actividades que aplicaron con los

grupos de quinto grado tomando como referente para su construcción los conocimientos que cada uno tenía. Así, el Análisis de la Práctica lo ubicamos como una fuente secundaria que nos puede otorgar información para complementar lo recabado en los instrumentos y documentos que habíamos recuperado con anterioridad.

IV.4.2. Videograbación de clases

La recuperación de datos a través del video ha representado una importante innovación para la investigación en el aula (Fitzgerald, Hackling y Dawson, 2013). En el campo de la Educación Matemática, Planas (2006) señala que el contenido de video se ha convertido en la base, de manera frecuente, en algunos trabajos empíricos. Además, agrega “en la fase de recolección de datos, el video de una sesión de clase proporciona una perspectiva poliédrica de las interacciones entre participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez” (Planas, 2006, p.40). Por su parte, Ruíz (2011), presenta en un trabajo el análisis de tres estudios de videos sobre lecciones en la enseñanza de la matemática, donde rescata se usa el video como principal apoyo para obtener su información de referencia.

En la presente investigación recurrimos a la videograbación de clases de Daniela e Israel cuando enseñaban la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad; cada uno en un grupo de quinto grado de educación primaria. Así, la videograbación de clases se convirtió en una de las fuentes primarias para recuperar datos en relación con el conocimiento matemático y didáctico que ponían en juego cuando enseñaban dicho contenido. Es conveniente mencionar que la videograbación de las clases la realizamos como observadores no participantes, donde se permanece separado de las actividades del grupo o individuos que se está investigando y se evita ser miembro del grupo (Cohen y Manion, 2002). En la siguiente figura rescatamos las sesiones observadas en cada caso:

Figura 14. Videograbaciones de clases recuperadas

Como podemos observar la Figura 13, Daniela trabaja en una sesión, por primera vez, en un grupo de quinto grado, la enseñanza de la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad; la anterior tiene una duración aproximada de una hora y media, es decir, 90 minutos. Israel trabaja este contenido matemático en dos sesiones, la primera de 140 minutos y la segunda de 120 minutos.

Durante la formación inicial de los profesores de primaria, de manera específica, en el caso de la institución donde realizamos esta investigación, es común que la recuperación de la práctica se realice a partir del empleo de la videograbación con el propósito de analizar sus intervenciones y contribuir a su formación integral; algo semejante a lo que reporta Bayat (2010) en un estudio con profesores en formación inicial de educación infantil donde recurren al video como un medio formativo. De ahí que Daniela e Israel estaban familiarizados con la ubicación de una cámara en sus aulas.

En relación con las ventajas o bondades de la videograbación de clases en la investigación existen diferentes estudios: Fitzgerald, Hackling y Dawson (2013), Planas (2006), Ruíz (2011), entre otros. En este trabajo recurrimos a algunas de las aportaciones de Ruíz (2011):

- Posibilidad de múltiples reanálisis. Nuevas preguntas de investigación pueden contestarse con base en los videos existentes. Debido al carácter instrumental y exploratorio de este estudio de casos, las videograbaciones de las sesiones de Daniela e Israel las analizamos desde la perspectiva del MTSK a través de varios análisis. Por lo cual, recurrimos una y otra vez a su revisión. Aunque pueden ser objeto de estudio en otras investigaciones desde diferentes referentes.
- Facilitan la colaboración entre investigadores con perspectivas distintas, que serían muy limitadas con otros métodos tradicionales. Esta segunda ventaja de la videograbación de clases favorece que distintos investigadores analicen el contenido de una misma videograbación desde diferentes lugares y con diferentes perspectivas como lo enunciamos en la viñeta anterior. En nuestro caso, hemos participado de su estudio investigadores con diferentes perspectivas, lo cual nos ha dotado de una gran riqueza de indicadores para su análisis.
- La misma codificación y sus análisis cuantitativos permiten observar detalles muy difíciles de apreciar con otros medios: por ejemplo, los tiempos dedicados a cada fase de la lección, o las interacciones entre estudiantes y profesores. En esta investigación, la codificación que damos a las videograbaciones está en función de las categorías de conocimiento de algunos subdominios del MTSK. Así, entre más cantidad de categorías encontremos, mayor cantidad de conocimientos matemáticos y didácticos pueden estar presentes.
- Es posible la incorporación de otras fuentes o instrumentos como cuestionarios, entrevistas anteriores o posteriores a los videos, que permiten añadir aspectos culturales o contextuales. Para el caso de esta investigación, incorporamos previo a las videograbaciones, planificaciones y entrevistas semiestructuradas, mientras que posterior a las videograbaciones, agregamos entrevistas semiestructuradas y documentos de análisis de la práctica; lo que nos permitió tener mayor información para identificar y caracterizar el conocimiento especializado para la enseñanza de la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

Una vez que teníamos las videograbaciones de clases, procedimos a las transcripciones de las mismas como una fuente auxiliar en la investigación (Planas, 2006). Además de que “la mayoría de los datos de audio y video se transforman en texto para su análisis” (Gibbs, 2012, p. 21). Más adelante detallamos el proceso que seguimos para el análisis de las transcripciones de las videograbaciones.

IV.4.3. Entrevistas semiestructuradas

Las entrevistas son una fuente importante para la recuperación de datos en la investigación cualitativa. Para Rodríguez, Gil y García (1996), “la entrevista es una técnica en la que una persona (entrevistador) solicita información de otra o de un grupo (entrevistados, informantes), para obtener datos sobre un problema determinado” (p.167). Así, la entrevista se convierte en “[...] una forma específica de conversación en la que se genera conocimiento mediante la interacción entre un entrevistador y un entrevistado” (Kvale, 2011, p. 19)

Hernández-Sampieri, Fernández-Collado y Baptista Lucio (2006), señalan que de acuerdo con Grinnell (1997), las entrevistas se dividen en tres tipos: entrevistas estructuradas, semiestructuradas o no estructuradas y abiertas. En las entrevistas estructuradas el entrevistador tiene un instrumento de preguntas definidas, así como el orden. En el caso de las entrevistas semiestructuradas se tienen algunas preguntas definidas, pero el entrevistador puede agregar otras preguntas que considere necesarias para obtener mayor cantidad de información sobre el tema de interés. Por otra parte, en las entrevistas abiertas se emplea una guía general de contenido y el entrevistador tiene toda flexibilidad para manejarla.

En esta investigación decidimos recurrir a las entrevistas semiestructuradas. Flick (2004) destaca la entrevista semiestructurada como una de las bases metodológicas de la investigación cualitativa que ha suscitado interés y se utilizan mucho “este interés se asocia con la expectativa de que es más probable que los sujetos entrevistados expresen sus puntos de vista en una situación de entrevista diseñada de manera relativamente abierta que en una entrevista estandarizada o un cuestionario [...]” (p. 89). Es decir, en nuestro trabajo, nos interesa definir algunas preguntas a través del tema de la investigación: el conocimiento especializado para enseñar la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, pero también, pretendemos exista cierta flexibilidad para agregar otras preguntas que complementen la información que nos proporcionen los dos profesores en formación inicial (entrevistados).

La información que expresamos en el párrafo anterior se enriquece con la aportación de Kvale (2011) cuando señala que la entrevista semiestructurada

[...] trata de obtener descripciones del mundo vivido de los entrevistados con respecto a la interpretación del significado de los fenómenos descritos. Se acerca a una conversación cotidiana, pero, en tanto que entrevista profesional, tiene un propósito e

implica un enfoque y una técnica específicos. Es semi-estructurada: no es ni una conversación cotidiana abierta ni un cuestionario cerrado (p. 34).

Respecto al uso y papel de las entrevistas semiestructuras en educación matemática, Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) destacan las entrevistas semiestructuradas como uno de los métodos cualitativos más utilizados con el propósito de obtener un tipo específico de datos, “las entrevistas pretenden recoger información sobre las historias, experiencias y perspectivas personales en relación a un tópico de interés” (p.80). Así, como lo habíamos descrito, el tema de interés es la identificación y caracterización del conocimiento matemático y didáctico, desde la perspectiva del MTSK para enseñar la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

En esta investigación diseñamos dos entrevistas semiestructuradas para cada profesor en formación inicial que atendían a diferentes momentos: 1) después de la planificación y 2) posterior a la videograbación de las sesiones; las fuentes primarias (planificación y videograbación de clases) fueron el principal detonante para el diseño de preguntas, las cuales presentamos en el siguiente apartado, acompañadas de la descripción de un propósito específico en función de algunos subdominios del MTSK.

Todas las entrevistas semiestructuradas las videograbamos con la finalidad de conservar con detalle la información obtenida para regresar a revisar su contenidos cuantas veces fuera necesario. Además, nos permitía concentrarnos en el tema y en la dinámica de la entrevista, sin estar preocupados por escribir todo lo que nos comunicaran los entrevistados (Kvale, 2011). Posterior a ello, pasamos a realizar la transcripción de las mismas, Kvale (2011) menciona “[...] por la transcripción, la conversación directa cara a cara se abstrae y fija en una forma escrita. Una vez realizadas las transcripciones de la entrevista, tienden a considerarse como los datos empíricos fundamentales firmes de un proyecto de entrevista” (p. 124), en palabras de Gibbs (2012), las transformamos en texto para su análisis.

IV.4.3.1. Entrevista Semiestructurada 1

La Entrevista Semiestructurada 1 (ES1) la realizamos tomando como punto de partida el contenido de la Planificación de cada profesor en formación inicial (Daniela e Israel) y algunos subdominios del MTSK que tenían relación con lo plasmado en las primeras; lo anterior, previo a la aplicación de las Planificaciones. En términos generales, presentamos algunas preguntas del guion que empleamos en la Entrevista Eemiestructurada 1 para Daniela e Israel. De acuerdo con Kvale (2011),

El escenario de la entrevista se prepara habitualmente con un guion. Una guía de entrevista es un guion que estructura el curso de la entrevista de manera más o menos ajustada. La guía puede simplemente contener algunos temas que deben cubrirse [...] (p. 85).

Enseguida presentamos el guion que empleamos en las Entrevistas Semiestructuradas 1 (ES1):

Tabla 7. Preguntas de Entrevista Semiestructurada 1

Preguntas de la Entrevista Semiestructurada 1 (ES1)	Propósito
• ¿Cuál es el grado donde pondrá en práctica su plan de clase?	Obtener información en relación con el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (expectativas de aprendizaje; nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado).
• ¿Cuál es el eje de las matemáticas que se aborda en su plan de clase? ¿Por qué?	
• ¿Cuáles son las competencias matemáticas que favorece? ¿Por qué?	
• ¿Cuál es el aprendizaje esperado de este plan de clase? ¿En qué consiste?	
• ¿Cómo organizó su plan de clase? ¿Por qué?	Recuperar información sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, en particular, teorías de enseñanza.
• ¿Cree que existe alguna relación entre este aprendizaje esperado y el estudio de las fracciones en la escuela primaria?	Indagar sobre los conocimientos de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, en concreto, secuenciación con temas anteriores y posteriores.
• ¿Cuál es el significado y/o parte de las fracciones que aborda en su plan de clase?	
• ¿Cuáles significados y/o partes de la fracción se estudian en los grados anteriores? ¿Por qué?	
• ¿Cuáles significados y/o partes de la fracción se estudian en sexto grado? ¿Por qué?	
• ¿En cuáles materiales o recursos se apoyó para diseñar esta planificación?	Obtener información en relación con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (recursos materiales y virtuales).
• Describa en términos generales las actividades que ha diseñado para cada momento de su plan de clase, ¿por qué?	Identificar conocimientos sobre teorías de enseñanza, así como estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.
• ¿Cuáles son los procedimientos o estrategias que pueden emplear los alumnos para resolver cada una de las actividades?	Recuperar información sobre conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (formas de interacción con un contenido matemático y fortalezas y
• ¿Cuáles son las posibles fortalezas o dificultades de los alumnos en cada una de las actividades que diseñó? ¿A qué cree se pueden deber?	

	dificultades).
Las actividades que se incluyen en el inicio de su plan de clase, ¿tienen una relación estrecha con algún significado de la fracción? Sí/No ¿Por qué? ¿Por qué plantear ese tipo de situaciones?	Obtener información en relación con el conocimiento de los temas, en particular, fenomenología y aplicaciones.
Respecto a las actividades que se ubican en el desarrollo de la planificación, ¿por qué el planteamiento de la actividad surge de ese contexto? ¿Cuáles son los contextos que cree más apropiados para favorecer la enseñanza de la razón como significado de la fracción?	
¿Cómo definiría la razón como significado de la fracción?	Indagar sobre el conocimiento de los temas, en especial, conocimientos de definiciones, propiedades y fundamentos.
¿Cómo definiría una fracción?	
¿Cómo definiría una razón?	
Respecto al cierre de la planificación (última parte), ¿por qué se proponen ese tipo de actividades? ¿Cuál es su propósito?	Recuperar información el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).
De todos los planteamientos que diseñó, ¿cuál cree que es el medular? ¿Por qué?	
¿Cuáles son sus expectativas con la aplicación de esta planificación?	Obtener información sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (intereses y expectativas; fortalezas y dificultades).
En forma general, ¿Cuáles son los planteamientos que pueden resultar fáciles de resolver para los alumnos? ¿Por qué?	
¿Cómo se hace presente el enfoque de las matemáticas en su situación didáctica?	Indagar conocimientos sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas (expectativas de aprendizaje).
¿Cuáles cree que son los momentos que caracterizan el modo en que los alumnos aprenden el significado de la razón como significado de la fracción?	Recuperar información en relación con conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (teorías de aprendizaje).
¿Cuáles cree que son los modos o maneras en que se puede enseñar la razón como significado de la fracción?	Identificar conocimientos sobre teorías de enseñanza, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.
¿Cree que el estudio de la razón como significado de la fracción es uno de los contenidos que más interesa	Recuperar información en relación con conocimientos de las

a los niños y niñas en la escuela primaria? Sí /No ¿Por qué?	características de aprendizaje de las matemáticas (intereses y expectativas).
¿Cuál es el conocimiento matemático que cree debe poseer un profesor para enseñar este aprendizaje esperado (razón como significado de la fracción) a un grupo de alumnos de la escuela primaria?	Indagar sobre los conocimientos de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza).
¿Cuáles son los conocimientos que cree debe tener un profesor acerca cómo aprenden los alumnos el aprendizaje esperado (razón como significado de la fracción) que aborda en su planificación?	Obtener información en relación con conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (teorías de enseñanza).

IV.4.3.2. Entrevista Semiestructurada 2

Posterior a la Videograbación de las clases de Daniela e Israel donde abordaban la enseñanza de la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, avanzamos en el diseño de las Entrevistas Semiestructuradas 2, donde retomamos algunas cuestiones pendientes en las Planificaciones y Entrevistas Semiestructuradas 1 que tenían relación con lo que sucedió en las clases. Al igual que en la Entrevista Semiestructurada 1, aquí presentamos algunas preguntas que contenía el guión de la Entrevista Semiestructurada 2:

Tabla 8. Preguntas de la Entrevista Semiestructurada 2

Preguntas de la Entrevista Semiestructurada 2 (ES2)	Propósito
Respecto a las actividades diseñadas en el inicio de la planificación: ¿Cuáles fueron los procedimientos o estrategias que los alumnos emplearon para resolverlas? ¿A qué cree se debe?	Obtener información en relación con conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (formas de interacción con un contenido matemático; fortalezas y dificultades).
¿Cuáles fueron las dificultades y fortalezas que los alumnos experimentaron al resolver esas actividades? ¿A qué cree se debe?	
¿Qué toma de decisiones le implicó a usted como profesor? ¿Qué le demandó? ¿Por qué?	Indagar sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; recursos materiales y virtuales)
¿Cuál fue la función de los materiales o recursos que empleo en este momento de la clase?	

• ¿Cómo le resultaron a los alumnos las actividades: fáciles o difíciles? ¿A qué cree se debe?	Recuperar información de los conocimientos de las características de aprendizaje en relación con intereses y expectativas.
• ¿Cuál fue su papel como docente?	Obtener información sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza; estrategias, técnicas, tareas y preguntas).
• Sí en la entrevista pasada señala que recurrió a la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) para decidir qué actividades poner y cómo organizarlas, ¿cree estuvo presente en el desarrollo de la clase?, ¿cómo?, ¿qué le implicó a usted como docente?	
• ¿Cuál fue el propósito de las actividades del inicio de la clase?	
• ¿Cuál fue la función del trabajo en forma grupal, en equipos o individual en relación con la enseñanza de la razón como significado de la fracción?	
Respecto a las actividades diseñadas en el desarrollo de la planificación: • ¿Cuáles fueron los procedimientos o estrategias que los alumnos emplearon para resolverlas? ¿A qué cree se debe?	Obtener información en relación con conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (formas de interacción con un contenido matemático; fortalezas y dificultades).
• ¿Cuáles fueron las dificultades y fortalezas que los alumnos experimentaron al resolver esas actividades? ¿A qué cree se debe?	
• ¿Qué toma de decisiones le implicó a usted como profesor? ¿Qué le demandó? ¿Por qué?	Indagar sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; recursos materiales y virtuales)
• ¿Cuál fue la función de los materiales o recursos que empleo en este momento de la clase?	
• ¿Cómo le resultaron a los alumnos las actividades: fáciles o difíciles? ¿A qué cree se debe?	Recuperar información de los conocimientos de las características de aprendizaje en relación con intereses y expectativas.
• ¿Cuál fue su papel como docente?	Obtener información sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza; estrategias, técnicas, tareas y preguntas).
• Sí en la entrevista pasada señala que recurrió a la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) para decidir qué actividades poner y cómo organizarlas, ¿cree estuvo presente en el desarrollo de la clase?, ¿cómo?, ¿qué le implicó a usted como docente?	
• ¿Cuál fue el propósito de las actividades del desarrollo de la clase?	
• ¿Cuál fue la función del trabajo en forma grupal, en equipos o individual en relación con la enseñanza de	

la razón como significado de la fracción?	
Respecto a las actividades diseñadas en el cierre de la planificación:	Obtener información en relación con conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (formas de interacción con un contenido matemático; fortalezas y dificultades).
¿Cuáles fueron los procedimientos o estrategias que los alumnos emplearon para resolverlas? ¿A qué cree se debe?	
¿Cuáles fueron las dificultades y fortalezas que los alumnos experimentaron al resolver esas actividades? ¿A qué cree se debe?	
¿Qué toma de decisiones le implicó a usted como profesor? ¿Qué le demandó? ¿Por qué?	Indagar sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; recursos materiales y virtuales)
¿Cuál fue la función de los materiales o recursos que empleo en este momento de la clase?	
¿Cómo le resultaron a los alumnos las actividades: fáciles o difíciles? ¿A qué cree se debe?	Recuperar información de los conocimientos de las características de aprendizaje en relación con intereses y expectativas.
¿Cuál fue su papel como docente?	Obtener información sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza; estrategias, técnicas, tareas y preguntas).
Sí en la entrevista pasada señala que recurrió a la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) para decidir qué actividades poner y cómo organizarlas, ¿cree estuvo presente en el cierre de la clase?, ¿cómo?, ¿qué le implicó a usted como docente?	
¿Cuál fue el propósito de las actividades del cierre de la clase?	
¿Cuál fue la función del trabajo en forma grupal, en equipos o individual en relación con la enseñanza de la razón como significado de la fracción?	
¿Cómo define una razón como significado de la fracción?	Recuperar información en relación con conocimientos de los temas (definiciones, propiedades y fundamentos).
¿Cómo define una fracción?	
Matemáticamente, ¿cómo se puede demostrar una fracción y una razón?	Indagar sobre algunos conocimientos de la práctica matemática (formas de validación y demostración; papel de los símbolos y uso del lenguaje formal).
¿Cuáles son las diferentes formas de representación de una razón y una fracción?, ¿cuáles cree que se les	Obtener información del conocimiento de los temas

facilitan a los alumnos?, ¿cuáles no?, ¿por qué?	(registros de representación) y conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (fortalezas y dificultades).
¿Cuáles temas se relacionan con el estudio de la razón como significado de la fracción?	Recuperar información sobre conocimientos de la estructura de las matemáticas (conexiones de complejización y simplificación).
¿Existe una relación entre las actividades de la planificación (inicio, desarrollo y cierre)? Sí/ No ¿Por qué?	Indagar sobre conocimientos de la enseñanza de las matemáticas (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).
Al final de la aplicación de esta planificación, ¿usted cree que se logró el objetivo esperado? ¿Por qué?	Obtener información en relación con el conocimiento de los estándares de aprendizaje (nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado).
¿Se favoreció la adquisición de un aprendizaje significativo? Sí/ No ¿Por qué?	Recuperar información sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (teorías de aprendizaje; intereses y expectativas).
¿Se favoreció el enfoque de las matemáticas? Sí/No ¿Por qué?	Indagar sobre conocimientos de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (expectativas de aprendizaje)
Cuáles competencias matemáticas se favorecieron? ¿Cómo?	
¿En términos generales, ¿cuál fue el papel del profesor en todas las sesiones y cuál el papel de los alumnos?	Obtener información en relación con conocimientos de la enseñanza de las matemáticas (teorías de aprendizaje) y conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (teorías de aprendizaje).
Si tuviera la oportunidad de planificar la continuación de estas sesiones, ¿cuáles actividades agregaría?, ¿por qué?, ¿cuáles actividades omitiría?, ¿por qué?	Recuperar información sobre conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

IV.5. Proceso e instrumentación de análisis de datos

Los datos cualitativos están impregnados de una gran diversidad de significados, por lo cual, su análisis requiere de un tratamiento especial (Gibbs, 2012), más aún, cuando las fuentes de datos a las que se ha recurrido son diferentes. En esta investigación, tomamos como fuentes de datos: planificaciones, videgrabaciones de clases, entrevistas semiestructuradas y documento de análisis de la práctica para cada uno de los informantes (Daniela e Israel). Una vez que la transcripción permitió transformar en texto las videgrabaciones de las clases y las entrevistas, contábamos con las planificaciones y los documentos de análisis de la práctica en texto, así procedimos a realizar un análisis cualitativo de los datos, bajo el enfoque del análisis del contenido, mismo que describimos en el siguiente apartado.

IV.5.1. Análisis de contenido

Existen diferentes estudios sobre el papel del análisis de contenido en educación y otros campos (Hayman, 1991; Fox, 1981; Bardin, 1996; Krippendorff, 1990; Flick, 2004; Franzosi, 2009). De acuerdo con Fox (1981), “se define como un procedimiento para la categorización de datos verbales o de conducta, con fines de clasificación, resumen y tabulación” (p. 709). En este caso, este procedimiento de categorización se aplica a los datos convertidos en texto a partir de las diferentes fuentes de datos obtenidas (Flick, 2004).

El proceso del análisis de contenido está integrado por diferentes momentos donde destaca: la identificación de unidades de análisis, la definición de categorías que se van a emplear, la codificación de las unidades de análisis correspondientes a cada categoría y el análisis de los datos donde se puede interpretar en función de la pregunta de investigación (Fox, 1981; Bardin, 1996; Mayring, 1983, citado en Flick, 2004).

IV.5.1.1. Unidades de análisis

La revisión del texto de la transcripción de las videgrabaciones de clases y las entrevistas semiestructuradas nos llevó a refinar su contenido al emplear una de las técnicas del análisis cualitativo del contenido: resumir el análisis del contenido, donde “el material se parafrasea, lo que significa que los pasajes menos pertinentes y las paráfrasis con el mismo significado se pasan por alto (primer

reducción) y las paráfrasis similares se juntan y se resumen (segunda reducción)” (Flick, 2004, p. 207). Después insertamos números de líneas al texto de las planificaciones, los documentos de análisis de la práctica, transcripciones de las entrevistas semiestructuradas y transcripciones de las videograbaciones de las clases; en el caso de estas últimas fuentes de datos separamos las participaciones de los diferentes agentes involucrados. Enseguida presentamos algunos ejemplos del trabajo realizado con las diferentes fuentes de información recuperadas, para ello tomamos como referente a Daniela.

Tabla 9. Ejemplo de números insertados en las líneas del texto de la Planificación de Daniela

1	Competencias que se favorecen: Validar procedimientos y resultados, Comunicar
2	información matemática y Manejar técnicas eficientemente.
3	Aprendizaje Esperado: Que los niños aprendan la razón como un significado de la
4	Fracción
5	Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

En la figura anterior presentamos la primera parte de la Planificación de Daniela, a cuyo contenido insertamos un número consecutivo para cada línea. En este caso, se inicia con el número 1 y termina con el número 5. Cabe hacer mención que una idea se puede expresar en una, dos o más líneas. Por ejemplo, tenemos que el contenido del apartado *competencias que se favorecen* se ubica en la línea 1 y 2, mientras que el apartado *eje* sólo en la línea 5. A continuación agregamos un ejemplo de esta situación en la Entrevista Semiestructurada 1 (ES1), misma que aplica a la ES2 de Daniela:

Tabla 10. Ejemplo de números insertados en las líneas de la transcripción de la Entrevista Semiestructurada 2 de Daniela

1	E: ¿Cuál es el grado donde va a poner en práctica esta planificación?
2	Daniela: El tema son las fracciones y se va a dar en el grado de quinto.
3	E: Y en este caso, ¿cuál eje de las matemáticas que estaría abordando?
4	Daniela: Se maneja lo que es el sentido numérico y el pensamiento algebraico; sentido
5	numérico porque las fracciones se componen de números y pensamiento algebraico porque [...]

En la transcripción de la ES1 insertamos números a cada línea de manera consecutiva, igual que en el caso de la Planificación, pero agregamos las intervenciones del entrevistador (E) y Daniela, a quien corresponde la entrevista realizada. En la transcripción de la Videograbación de las clases, insertamos números a las líneas y destacamos las intervenciones Daniela y los alumnos como expresamos enseguida:

Tabla 11. Ejemplo de números insertados en las líneas de la transcripción de la Videograbación de Daniela

1	Daniela: Niños necesito que pongan atención acá al frente. Ahora vamos a trabajar con esta
2	caja.
3	/Daniela toma una caja donde se almacenan huevos y la coloca a un costado del escritorio/
4	Daniela: Si yo quisiera representar mediante una fracción toda la caja, ¿qué fracción tendría?
5	Aos: Un entero.

En el cuadro anterior, las intervenciones de la profesora en formación inicial las identificamos con **Daniela** y los alumnos con **Aos**, donde incluimos niños y niñas, cuando existe la participación de un alumno lo señalamos con **Ao** y si es alumna con **Aa**. Escribimos entre diagonales acciones de Daniela o los alumnos durante las clases, las cuales complementan los diálogos. El documento de Análisis de la Práctica constituye la última fuente de recuperación de datos. De igual manera insertamos números consecutivos en cada línea del texto:

Tabla 12. Ejemplo de números insertados en las líneas del texto del Análisis de la Práctica de Daniela

1	REFLEXIÓN DE LA PRÁCTICA DOCENTE AL APLICAR ESTRATEGIAS PARA
2	LA ENSEÑANZA DE LA FRACCIÓN COMO RAZÓN A ALUMNOS DE QUINTO
3	GRADO DE PRIMARIA
4	INTRODUCCIÓN
5	El tema que se desarrolla en la planificación de esta clase de matemáticas, tiene lugar
6	dentro del contenido de fracciones, conformando uno de sus subconstructos o
7	interpretaciones que tiene la fracción, como las nombra Llinares y Sánchez (1997). Las
8	facciones entres sus diferentes interpretaciones, son entendidas como una “razón”.

En la primera parte del documento de Análisis de la Práctica de Daniela, ubicamos el título en las líneas 1-3, en la línea 4 presentamos el apartado de introducción y, el primer párrafo del apartado anterior, comprende de la línea 5 a la línea 8. Como podemos observar, al pasar los datos a un cuadro para su presentación se disminuye espacio, situación que provoca el contenido de una línea en el documento original se amplié a dos. Así, en el análisis, ubicaremos fragmentos de diferentes fuentes en recuadros, pero el número de línea que asignamos en el documento original se retoma y expresa sintetizado, por ejemplo, nos ubicamos en el documento de análisis de la práctica y rescatamos el primer párrafo del apartado de la introducción, lo referiremos como: primer párrafo de la introducción del AP [Líneas 5-8]

El tema que se desarrolla en la planificación de esta clase de matemáticas, tiene lugar dentro del contenido de fracciones, conformando uno de sus subconstructos o interpretaciones que tiene la fracción, como las nombra Llinares y Sánchez (1997). Las facciones entres sus diferentes interpretaciones, son entendidas como una “razón”.

De esta manera nos es más fácil visualizar los datos, sin importar la extensión del fragmento (pequeña o extensa) que rescatemos de las Planificaciones (P), Entrevistas Semiestructuradas (ES), Videograbaciones de clases (V) o documentos de Análisis de la Práctica (AP).

Para definir las unidades de análisis de las fuentes de datos recuperadas, comenzamos a trabajar con las planificaciones de cada informante para identificar las tareas que diseñaron con el propósito de abordar

la razón como significado de la fracción en un grupo de quinto grado de educación primaria, aunque en algunos fragmentos de las mismas, establecen relaciones con la proporcionalidad. En este sentido, la *tarea* hace referencia a la unidad de análisis que nos permitirá dar seguimiento a la identificación y caracterización de los conocimientos matemáticos y didácticos que los profesores en formación inicial ponen en juego en las entrevistas semiestructuradas, videograbaciones de clases y documentos de análisis de la práctica. De ahí que consideramos la aportación de Hayman (1991) cuando señala “la unidad debe ser bastante grande como para proveer de significado, al menos mediante algún contexto, pero bastante pequeña como para permitir objetividad en su uso” (p. 128).

El concepto de tarea como unidad de análisis lo acuñamos a Stein & Smith (1998), quienes definen una tarea como “a segment of classroom activity that is devoted to the development of a particular mathematical idea” (p. 269). Además, de acuerdo con Thanheiser et al. (2016), identificamos una tarea puede estar compuesta por varios problemas o un problema complejo, lo cual la guía a que se pueda convertir en una tarea auténtica en la medida en que se conecta con el mundo real y sus niveles de exigencia cognitiva son altos. Así, “la enseñanza eficaz de las matemáticas utiliza las tareas como una manera para motivar el aprendizaje del estudiante y para ayudar a construir nuevo conocimiento a través de la resolución de problemas” (NCTM, 2000, p. 18). Al respecto, Mason & Johnston-Wilder (2006) aportan diferentes tipos de tareas en función de su propósito y momento de aplicación: presentación de la tarea, dimensiones de posible variación de la tarea, posibilidades y oportunidades de las tareas, tareas de apertura, entre otras, que nos sirven como referente para definir unidades de análisis y subunidades de análisis en las fuentes de datos recuperadas. Enseguida presentamos la planificación de Daniela organizada en función de las tareas diseñadas (unidades de análisis).

Tabla 13. Elementos que contextualizan el diseño de tareas

1. Elementos que contextualizan el diseño de tareas de Daniela	
1	Competencias que se favorecen: Validar procedimientos y resultados, Comunicar
2	información matemática y Manejar técnicas eficientemente.
3	Aprendizaje Esperado: Que los niños aprendan la razón como un significado de la
4	Fracción
5	Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
6	Análisis a priori:

7	A partir del diseño de las actividades o planteamientos que se realizarán en la clase, se toma
8	en cuenta uno de los posibles conocimientos previos de los alumnos, el cual consiste en
9	que éstos deben conocer lo que las fracciones representan dentro de un entero o ciertas
10	cantidades, según sea la situación. Hay que considerar las posibles dificultades a las cuales
11	se enfrentarán al momento de resolver los problemas, se puede presentar que los alumnos
12	no establezcan la relación entre las dos cantidades que se están comparando, confusión de
13	lo que representa una fracción y una razón, no entender de como contestar las tablas, o
14	relacionar los resultados con las frases que se requieren completar, dudas en cuanto al uso
15	de los dos puntos (:) para leer las razones, la diferencia entre una razón y una fracción.
16	Para lo anterior, ¿qué haré?
17	Es importante la utilización de esquemas que representen de manera simbólica y numérica
18	las comparaciones y representaciones fraccionarias que se están haciendo para establecer su
19	relación. Realizaré la diferenciación de una razón y una fracción mediante un cuadro
20	comparativo, para que los alumnos enfrentados a la misma situación problemática expresen
21	el resultado mediante una razón y luego en una fracción. Resolver cualquier duda en el
22	proceso de llenado de las tablas, solicitando al grupo o un compañero que pueda apoyar.
23	¿Qué procedimientos pueden utilizar los alumnos? Es probable que se recurra a la división
24	y multiplicación, las representaciones gráficas, los alumnos pueden expresar una forma de
25	la fracción no simplificada por lo que hay que inducirlos para que lo hagan.

A continuación presentamos las *tareas de apertura* de la planificación:

Tabla 14. Tareas de apertura de la Planificación de Daniela

2. Tareas de apertura de la planificación de Daniela	
26	INICIO
27	VERIFICANDO CONOCIMIENTOS PREVIOS (<i>Las representaciones que tiene una</i>
28	<i>fracción en sus diferentes formas como la gráfica y la numérica</i>)
2.1. Tarea de apertura	

29	- Mostraré una caja con algunas divisiones con cartoncillo. Preguntaré a los alumnos: -¿En
30	cuántas partes está dividida la caja? (Con solo un cartoncillo atravesado a la mitad de la
31	caja). Después pondré una botella de agua en una de las mitades, para cuestionar a los
32	alumnos: -¿Qué parte de la caja está ocupando la botella? Luego colocaré un cartoncillo
33	atravesando a la mitad del cartoncillo anterior y volveré a cuestionar: Y ahora, ¿en cuántas
34	partes está dividida la caja? Y volveré a colocar una botella de jugo en una de las partes
35	para finalmente solicitar a los alumnos darle respuesta a esta pregunta: -¿Qué parte de la
36	caja está ocupando la botella?
2.2. Tareas de apertura	
37	-Pasaré a 5 alumnos. Cada uno tomará una tarjeta donde estará anotada una fracción. En el
38	pintarrón colocaré una lámina con 5 pequeños y simples ejercicios de representaciones con
39	fracciones. De manera grupal, se realizará el razonamiento y los alumnos indicarán qué
40	fracción corresponde a cada ejercicio, indicándole a su compañero coloque la tarjeta en la
41	parte de la lámina donde se encuentre éste.
42	<i>(En la lámina se coloca la representación que tiene una fracción cuando se refiere a</i>
43	<i>figuras geométricas fragmentadas en partes iguales, es decir, de forma gráfica. También</i>
44	<i>fracciones para significar partes de cantidades tomándolas en cuenta como un entero, de</i>
45	<i>forma numérica. Se trata de abarcar lo que puede ser representado mediante fracciones.</i>
46	<i>Así se conocerá si los alumnos relacionan las representaciones que se pueden tener y como</i>
47	<i>se opera con las diferentes formas ya sea gráfica y/o numérica)</i>

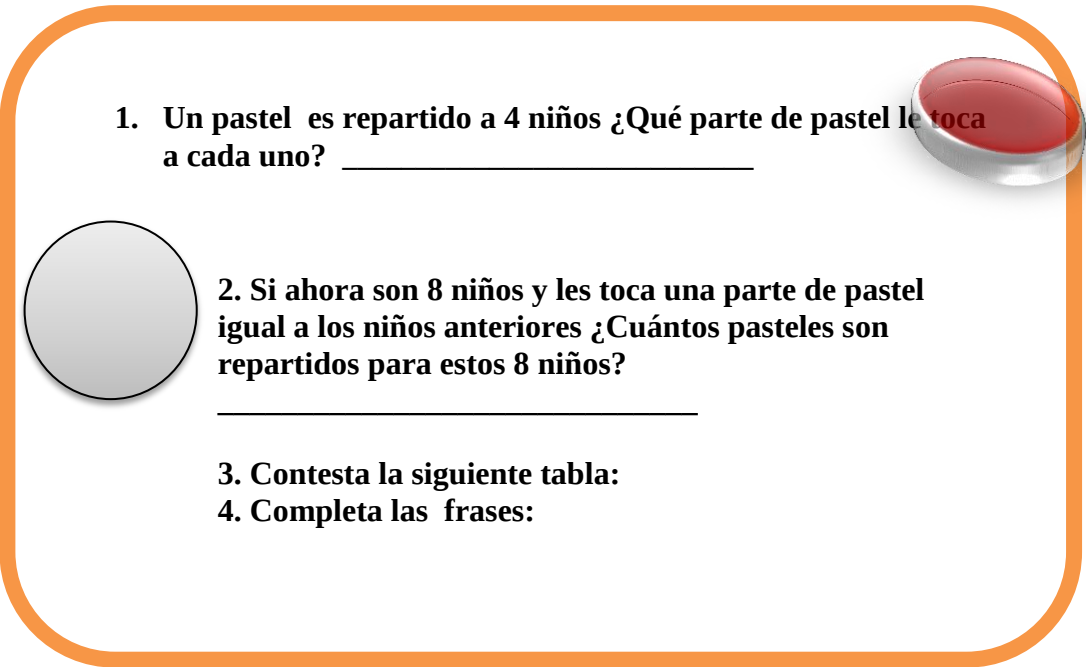
Ahora presentamos el fragmento de la Planificación de Daniela que corresponde a la tarea principal:

Tabla 15. Tarea principal de Daniela

3. Tarea principal de Daniela	
48	DESARROLLO
49	PROBLEMA A RESOLVER (<i>Desafío matemático a enfrentar</i>)
50	-Los alumnos resolverán un problema planteado en la hoja de trabajo 1, de manera
51	individual, pidiendo que anoten sus procedimientos se les dará un tiempo estimado de 15
52	min.
53	ESCUELA: _____
54	NOMBRE DEL ALUMNO: _____
55	GRADO: _____ GRUPO: _____
56	1. Resuelve el siguiente planteamiento de manera individual, puedes usar
57	calculadora pero anota tus procedimientos.
58	
59	
60	En la empacadora de lechugas de Loreto, trabajan Manuel y Sofía, ellos son
61	los encargados de hacer los pedidos de las cajas que se ocuparán para empacar
62	las lechugas que se cosechan. Ayúdales a encontrar lo siguiente:
63	Si en 4 cajas se empacan 64 lechugas...
64	1. ¿Cuántas cajas se ocuparán para empacar 112 lechugas?_____
65	2. ¿Cuántas cajas se ocuparán para 32 lechugas?_____
66	3. ¿Qué parte de la caja corresponde a una lechuga?_____
67	4. ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de
68	lechugas?_____
69	
70	PROCEDIMIENTO:

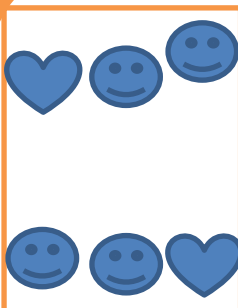
71	<i>(En esta hoja de trabajo se presenta una situación que es el problema central de la clase en</i>
72	<i>el que se involucra la representación de relaciones entre cantidades a manera de razón y,</i>
73	<i>a su vez en fracción, encontrando el valor unitario. Este problema se presenta en primera</i>
74	<i>instancia para que los alumnos se enfrenten al desafío de resolverlo, lo cual lo tendrán que</i>
75	<i>hacer con las herramientas que cuenten previamente)</i>
76	-Se pedirá a un mínimo de tres o alumnos compartan su procedimiento así como sus
77	resultados. Se hará la formulación sin que todavía se involucre la validación. Los
78	resultados se registrarán en el pintarrón para posteriormente retomarlos.

Tabla 16. Subtareas de Daniela. Subtarea 3.1.

Subtareas de Daniela	
79	CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO (<i>Elementos necesarios para resolver el</i>
80	<i>problema central</i>)
81	-Pediré a los alumnos, que por ahora no atiendan el problema de la hoja de trabajo 1.
82	-Les entregaré la hoja de trabajo 2, donde hay tres pequeños planteamientos, los cuales se
83	resolverán de manera grupal.
3.1. Subtareas	
84	-Se comenzará por contestar el planteamiento 1: “Pastel partido”
85	“Pastel partido”  1. Un pastel es repartido a 4 niños ¿Qué parte de pastel le toca a cada uno? _____ 2. Si ahora son 8 niños y les toca una parte de pastel igual a los niños anteriores ¿Cuántos pasteles son repartidos para estos 8 niños? _____ 3. Contesta la siguiente tabla: 4. Completa las frases:
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	
97	
98	
99	
100	
101	

102	1 pastel para _____ _____ para 8 niños	No. de Pasteles	No. de Niños
103		1	
			8
104	(En el planteamiento 1, se pretende rescatar la manera en cómo se expresa una razón ,		
105	tomando como primera parte una fracción de $\frac{1}{4}$, que es la parte que le corresponde de		
106	pastel a un niño y, en cuatro niños, se forma el pastel entero. Después se pide buscar el		
107	número de pasteles para ser repartidos en la misma cantidad de $\frac{1}{4}$, pero ahora para 8		
108	niños. Enseguida se propone una tabla para que los alumnos tengan mayor facilidad de		
109	establecer las relaciones entre el número de niños y de pasteles; todo esto para llegar a		
110	representar estas relaciones al momento de leerlas como razones, las cuales se solicita a		
111	los alumnos que completen: 1 pastel para 4 niños y 2 pasteles para 8 niños).		

Tabla 17. Subtareas de Daniela. Subtarea 3.2.

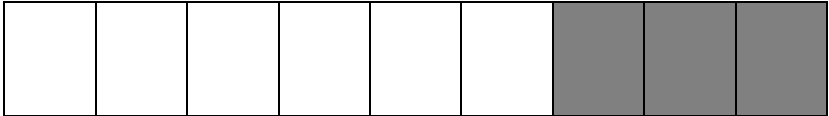
3.2. Subtareas	
112	-Se dará paso a contestar el planteamiento 2: “Caritas y Corazones”
113	
114	“Caritas y corazones”
115	
116	
117	
118	
119	1. ¿Cuántos corazones hay en el rectángulo? _____
120	2. ¿Cuántas caritas? _____
121	3. Si a los corazones se les repartiera el número total de caritas ¿Cuántas caritas le tocan a cada corazón? _____
122	4. En el rectángulo hay:
123	
124	corazones para
125	
126	caritas
127	:
128	
129	
130	
131	
132	(El elemento que se pretende incorporar ahora es expresar la razón de manera numérica
133	con el uso de los dos puntos (:) que se desprenderá de la forma verbal: 4 corazones para 8
134	caritas, que es igual a 4:8. En este apartado la ayuda que se les da a los alumnos es
135	informarles que para representar razones se utilizan los dos puntos, en un pequeño

PARA SABER MÁS

Se utiliza el símbolo de los dos puntos (:) para indicar una comparación entre dos cantidades.

136	espacio de la hoja de trabajo bajo el apartado “Para saber más”)

Tabla 18. Subtareas de Daniela. Subtarea 3.3.

3.3. Subtareas																
137	-Se continuará contestando el planteamiento 3: “Tiras de papel”															
138	“Tiras de papel” Observa la siguiente tira de papel:  1. ¿Qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros? _____ 2. ¿Cuántas tiras de papel hay? _____ 3. ¿Cuántos cuadritos oscuros hay en la tira de papel? _____ En tira hay cuadritos oscuros.  															
139																
140																
141																
142																
143																
144																
145																
146																
147																
148																
149																
150																
151																
152																
153	Contesta el siguiente cuestionamiento: Es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción. A) FRACCIÓN B) SUMA C) RAZÓN															
154																
155																
156	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th align="center" colspan="3">REGISTREMOS LOS RESULTADOS</th> </tr> <tr> <th align="center">PLANTEAMIENTOS</th> <th></th> <th align="center">FRACCIÓN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Pastel partido</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Caritas y corazones</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Tiras de papel</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	REGISTREMOS LOS RESULTADOS			PLANTEAMIENTOS		FRACCIÓN	Pastel partido			Caritas y corazones			Tiras de papel		
REGISTREMOS LOS RESULTADOS																
PLANTEAMIENTOS		FRACCIÓN														
Pastel partido																
Caritas y corazones																
Tiras de papel																
157																
158																

159	
160	
161	(El elemento que ahora descubrirán los alumnos es que las razones también pueden ser
162	representadas en fracciones , pues 1:3 es traducido como $1/3$, es una tira de papel dividida
163	en 9 cuadros y tres de ellos estas oscuros, por lo tanto, como es de 1 a 3, es decir, que por
164	1 tira de papel hay tres cuadritos oscuros, es igual a decir, que un tercio de esa misma tira
165	de papel está ocupado por los cuadros oscuros)
166	-Para concluir se leerá otro apartado donde los alumnos al leer la definición, la relacionarán
167	con el concepto de Razón . Después se completará la tabla 2. “¿Razones es Fracciones?”
168	continuando el trabajo de manera grupal. (A partir de las razones que se obtuvieron en los
169	tres planteamientos anteriores, serán representados por fracciones y viceversa, mediante
170	un cuadro comparativo, con la finalidad de que los alumnos reconozcan las dos formas de
171	expresar medidas fraccionarias)

Tabla 19. Subtareas de Daniela. Subtarea 3.4.

3.4. Subtarea	
172	CIERRE
173	-Pediré a los alumnos que retomen el problema inicial y solicitaré que analicen nuevamente
174	sus respuestas y procedimientos.
175	-Se pasará a validar los resultados (Ahora los alumnos cuentan con los elementos para
176	resolver eficazmente el problema).

En resumen, la Planificación de Daniela está constituida por tres unidades de análisis principales: 1) Elementos que contextualizan el diseño de tareas, 2) Tareas de apertura y 3) Tarea principal; estas últimas unidades de análisis (2 y 3) se dividen en subunidades en función de las variables que se incluyen en las actividades propuestas. En la unidad de análisis *tareas de apertura* ubicamos dos

subunidades de análisis o subtareas (2.1 y 2.2) y en la unidad de análisis *tarea principal* cuatro subtareas (3.1, 3.2, 3.3 y 3.4).

A continuación presentamos las unidades de análisis (tareas) que identificamos en la Planificación de Israel al tomar como referente el momento y propósito de su aplicación en la clase.

Tabla 20. Elementos que contextualizan el diseño de tareas de Israel

1. Elementos que contextualizan el diseño de tareas de Israel	
1	Asignatura: Matemáticas
2	Tema: La fracción como razón
3	Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico
4	Propósito:
5	Identificar el papel de la noción de razón en las matemáticas y su vínculo con la noción de
6	fracción.
7	Aprendizaje esperado:
8	- Usa fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales.
9	Competencias que se favorecen:
10	- Resolver problemas de manera autónoma.
11	- Validar procedimientos y resultados.
12	- Comunicar información matemática.

Enseguida agregamos las *tareas de apertura* de Israel:

Tabla 21. Tareas de apertura de la Planificación de Israel

2. Tareas de apertura de la planificación de Israel	
13	SITUACIÓN DIDÁCTICA
14	Preparación del medio
15	Valoración de conocimientos previos:
16	-Leer un cuento a los alumnos titulado “La gran fiesta”

17	Había una vez en un lugar muy muy lejano una ciudad donde reinaba la justicia, no había
18	criminal que se le escapara al gran guardián del planeta.... ¿Saben quién es?... así es, se
19	trata del Capitán de las tres “R” (Recicla, Reúsa y Reduce), él junto con su pandilla de
20	guardianes defienden la limpieza del planeta y pelean en contra de la contaminación y de
21	cualquiera que se atreva a tirar basura y a desperdiciar los recursos que la naturaleza nos da.
22	Un día el alcalde de Ciudad “limpieza” organizó una fiesta para el capitán “R” por su gran
23	trabajo y por mantener la ciudad fuera de basura y de los desperdicios. Toda la ciudad
24	Estaba invitada a este gran evento, en especial los niños, ya que querían celebrar juntos con
25	su gran súper héroe. Después de la fiesta habría un baile en el que tocarían “Los 5 de
26	Zacatecas”; el alcalde de la ciudad prometió a todos sus invitados un gran festín en donde
27	habría ricos antojitos y de postres pasteles de todos los sabores. También prometió traer
28	toda una feria con juegos y puestos para que todos se divirtieran.
29	El Alcalde al quererse lucir para festejar a lo grande al Capitán “R”, no se dio cuenta que
30	había gastado mucho dinero en contratar al grupo, en el mobiliario, en la feria y en la
31	comida, así que tendría que economizar en los postres, ya que no los había comprado
32	todavía y no le podía quedar mal al pueblo porque se los había prometido, así que tuvo que
33	ir a preguntar los precios a las pastelerías del pueblo para ver en donde le convenía
34	comprarlos.
35	El Alcalde es algo distraído con las cuentas y no se le dan mucho las matemáticas, así que
36	ahora te toca a ti ayudarlo a decidir en dónde le conviene hacer la compra de los pasteles.
37	Se les presentará a los alumnos a través de una proyección las dos ofertas de las dos
38	pastelerías, se aclarará que el pastel es del mismo tamaño en los dos establecimientos. La
39	pregunta central será, ¿en cuál de las dos pastelerías le conviene hacer la compra?
40	Se abrirá un espacio para la argumentación de la pregunta.
41	En este primer momento se trabajará de forma individual, utilizando solamente lápiz y

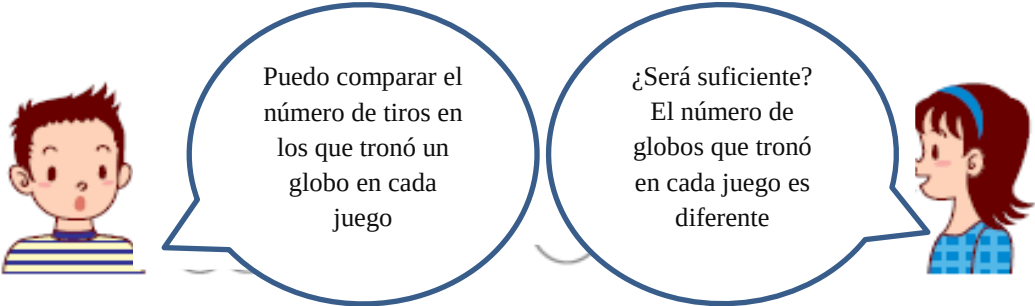
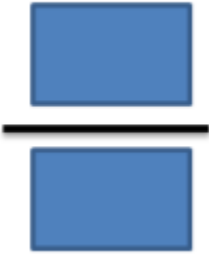
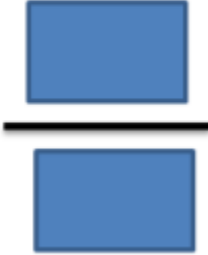
42	papel.
43	
44	
45	
46	
47	
48	
49	
50	
51	
52	
53	
54	
55	
56	
57	
58	
59	
60	
61	Organización del grupo:
62	Enseguida se saldrá un momento a fuera del salón para realizar una dinámica titulada “El
63	trenecito”, ésta permitirá formar 5 equipos (el número de equipos puede variar según el
64	número de los estudiantes).
65	Materiales:
66	Hoja de trabajo.

En la Planificación de Israel, en el apartado *desarrollo*, ubicamos tres hojas de trabajo compuestas por diferentes actividades. De ahí que a continuación presentamos las *tareas del desarrollo de la Planificación de Israel*, integradas por diferentes *subtareas*.

Tabla 22. Tareas de desarrollo de la Planificación de Israel. Subtareas 3.1.

3. Tareas del desarrollo de planificación de Israel	
67	DESARROLLO
3.1 Subtareas de la hoja de trabajo 1	
68	<i>Consigna:</i>
69	Organizados en equipos, resuelvan los problemas que parecen en la hoja de trabajo 1.
70	Tienen 20 minutos para realizar la actividad y se podrá hacer uso de la calculadora.
71	<i>Devolución de la consigna:</i>
72	Preguntar a un alumno sobre qué es lo que van a realizar, con el propósito de que no existan
73	dudas con base en la consigna.
74	Hoja de trabajo 1
75	1. Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas sin realizar
76	operaciones. Justifiquen sus respuestas.
3.1. 177	En la mesa A se reparte un pastel entre 5 invitados, en la mesa B se reparten 2 pasteles entre 7 invitados, ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado?
78	_____
79	
80	¿Por qué?
81	_____
3.1. 282	Carlos y sus amigos fueron a saludar al Capitán “R” y él los invitó a un puesto de la feria
83	que había contratado el Alcalde. Encontraron dos puestos de “truenas globos” con diferentes
84	promociones. En el puesto de Don Benjamín tiene que tronar 6 globos con 8 dardos para

85	ganarse un regalo, en el puesto de Don Octavio tiene que tronar 7 globos con 10 dardos								
86	para ganarse el regalo. ¿En cuál de los dos puestos le conviene jugar para llevarse un								
87	regalo?								
88									
89	Justifiquen su respuesta								
90									
3.1. 391	Carlos quiso participar en el puesto de Don Benjamín. La tabla de abajo muestra los								
92	registros de tiros que hizo Carlos en 3 rondas.								
93	Juego 1								
94									
95	Juego 2								
96									
97	Juego 3								
98									
99									
100	 Globos  Tiros fallidos								
101									
102	¿Creen que en algún juego ganó un premio?								
103									
a) 104	Piensa cómo comparar los resultados y discute tus ideas con tus compañeros.								

105				
106				
107				
108				
109				
110				
111				
112				
113	Haz un registro de el número de tiros en los que tronó el globo y el número de			
114	lanzamientos.			
115		Juego 1	Juego 2	Juego 3
116	Globos tronados			
117	Número de lanzamientos			
118				
b)	<u>Expresa como fracciones</u> los datos de la tabla anterior, usa el <u>número de globos tronados</u>			
119				
120	<u>como numerador</u> y el <u>número del total de lanzamientos como denominador.</u>			
121	Juego 1  Juego 2  Juego 3 			
122				
123				
124				
125				
126				
127				
128				
c)1	Ahora <u>convierte las fracciones</u> anteriores <u>en números decimales.</u>			
29				

130	
131	
132	
133	
134	
135	
136	
137	<i>Fase de acción:</i>
138	- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 1, los alumnos comienzan a realizar conjeturas
139	mentales, pensando en cuáles promociones serán las idóneas según la pregunta planteada.
140	Cada equipo debe hacerse cargo del problema planteado haciendo sus propias analogías y
141	asimilando la actividad de acuerdo a lo que ya conoce y a lo que se realizó en la valoración
142	de conocimientos previos.
143	- El maestro sólo interviene para solucionar dudas en algún aspecto, pero lo hace mediante
144	devoluciones para poner al alumno en situación a-didáctica.
145	-En esta misma fase se contestarán las preguntas que se incluyeron en la hoja de trabajo 1.
146	<i>Fase de formulación-validación:</i>
147	- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las
148	preguntas planteadas y qué les permitió llegar a esos resultados. Los alumnos pueden
149	pasar al frente para representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar
150	atentos
151	en la participación de sus compañeros, para que afirmen si es correcto el mensaje que se
152	emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de
153	casos que permitieron llegar a lo deseado.
153	<i>Fase de institucionalización:</i>
154	Se dará una breve introducción a la razón de manera formal. Para ello, se les presentará a

155	los alumnos la diapositiva 2, que muestra la relación que guarda el número de globos
156	tronados con el número de dardos. Para una mejor comprensión en este primer momento, se
157	presentará la diapositiva 3 como ejercicio de retroalimentación.

Tabla 23. Tareas de desarrollo de la Planificación de Israel. Subtareas 3.2.

3.2 Subtareas de la hoja de trabajo 2											
158	Consigna 2										
159	Una vez analizado lo anterior se les entregará una hoja de trabajo 2. Organizados en los										
160	mismos equipos resuelven los problemas que aparecen en sus hojas, menos la última										
161	actividad, ésta se separa del resto con una línea negra, no la contesten todavía, recuerden										
162	que no se puede estar platicando con otros equipos. Tienen 20 minutos para terminar, de										
163	igual manera, se podrá hacer uso de la calculadora.										
3.2.1 164	Hoja de trabajo 2										
165	Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la										
166	tienda “Fiesta Alegre” le rentaron una mesa “chica” para 130 personas y en la tienda										
167	“Todo para tu fiesta” le rentaron una mesa “grande” para 520 personas. Carlos y sus amigos										
168	registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.										
169	Número de personas y asientos										
170	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>Mesa “Chica”</th><th>Mesa “Grande”</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Número de personas</td><td>117</td><td>416</td></tr> <tr> <td>Número de asientos</td><td>130</td><td>520</td></tr> </tbody> </table>			Mesa “Chica”	Mesa “Grande”	Número de personas	117	416	Número de asientos	130	520
	Mesa “Chica”	Mesa “Grande”									
Número de personas	117	416									
Número de asientos	130	520									
171											
172											
173											
174	¿Cuál mesa se encuentra más llena?										

175	_____
176	_____
3.2.2 177	Para saber que tan llena se encuentra cada mesa, el grado de aglomeración se describe
178	como un número que permite comparar el número de personas sentadas respecto al
179	número
180	de asientos.
181	Grado de aglomeración Número de personas Número de asientos
182	Cantidad que está siendo comparada Cantidad de referencia
183	
184	
185	Encuentra que tan cerca están cerca están de agotar su capacidad las mesas.
186	Mesa chica $117 \div 130 =$
187	
188	Mesa grande $\div$ $=$
189	
190	
191	
3.2.3 192	Expresa el grado de aglomeración de la mesa grande coloreando el siguiente gráfico.
193	
194	
195	Número de asientos ocupados 0 520(personas)
196	Razón 0 0.5 1
197	
198	
199	

200	<i>Fase de acción:</i>
201	- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 2, los alumnos comienzan a realizar conjeturas
202	mentales y se espera que el trabajo en equipo trate de brindar más ideas para resolver los
203	problemas.
204	<i>Fase de formulación-validación:</i>
205	- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las
206	preguntas y qué les permitió llegar a esos resultados. Pueden pasar al frente para
207	representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación
208	de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es.
209	También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que
210	permitieron llegar a lo deseado.
211	<i>Fase de institucionalización:</i>
212	A manera de conclusión de la hoja de trabajo 2 se les presentará a los alumnos la
213	diapositiva 4, en donde a grandes rasgos se clarifica lo que estuvieron realizando al
214	comparar la razón de dos cantidades. En este punto será necesario hacer mención del
215	concepto de Razón. Para retroalimentar lo institucionalizado se contestará el último
216	ejercicio que quedó pendiente en la segunda hoja.

Tabla 24. Tareas de desarrollo de la Planificación de Israel. Subtareas 3.3.

3.3 Subtareas de la hoja de trabajo 3													
217	Consigna 3												
218	Para finalizar se les entregará una hoja de trabajo 3, organizados en los mismos equipos												
219	resuelvan los problemas que aparecen en su hoja, recuerden que no se puede estar												
220	platicando con otros equipos. Tienen 10 minutos para terminar, de igual manera se podrá												
221	hacer uso de la calculadora.												
222	Hoja de trabajo 3												
3.3.1 223	Para la comida el Alcalde quiere mandar preparar un rico pozole, para preparar una ración												
224	para 5 personas se necesitan, entre otros, los siguientes ingredientes y sus respectivas												
225	cantidades.												
226	<table><tr><th>Ingredientes</th><th>Cantidad</th></tr><tr><td>Maíz</td><td>1 kg</td></tr><tr><td>Carne</td><td>750 g</td></tr><tr><td>Chile guajillo</td><td>$\frac{1}{4}$ kg</td></tr><tr><td>Agua</td><td>1.5 L</td></tr><tr><td>Sal</td><td>Al gusto</td></tr></table>	Ingredientes	Cantidad	Maíz	1 kg	Carne	750 g	Chile guajillo	$\frac{1}{4}$ kg	Agua	1.5 L	Sal	Al gusto
Ingredientes		Cantidad											
Maíz		1 kg											
Carne		750 g											
Chile guajillo		$\frac{1}{4}$ kg											
Agua		1.5 L											
Sal		Al gusto											
227													
228													
229													
230													
231													
232													
233													
234													
235													
236	¿Cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere preparar para 8 personas?												
237	<table><tr><th>Ingredientes</th><th>Cantidad</th></tr><tr><td>Maíz</td><td></td></tr><tr><td>Carne</td><td></td></tr></table>	Ingredientes	Cantidad	Maíz		Carne							
Ingredientes		Cantidad											
Maíz													
Carne													
238													
239													
240													

241		Chile guajillo	
242		Agua	
243		Sal	
244			
245	<i>Fase de acción:</i>		
246	- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 3 a los alumnos comienzan a realizar		
247	conjeturas mentales.		
248	<i>Fase de formulación-validación:</i>		
249	- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las		
250	preguntas planteadas y qué les permitió llegar a esos los resultados. Pueden pasar al frente		
251	para representarlas al pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la		
252	participación de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o		
253	si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos		
254	que permitieron llegar a lo deseado.		
255	<i>Fase de institucionalización:</i>		
256	En este último momento se les hablará a los alumnos que lo que estuvimos realizando fue		
257	comparar razones y se dará la siguiente definición más sintética:		
258	<i>Una razón es el cociente entre dos cantidades.</i>		
259	Se pondrá un ejemplo:		
260	En el ejercicio del pozole la razón entre la cantidad de maíz y el número de personas es:		
261	$\frac{\text{Cantidad de maíz}}{\text{Número de personas}} = \frac{1000 \text{ gramos}}{5}$		
262			
263			
264	El número obtenido al simplificar la fracción anterior es el maíz añadido para cada persona.		

265	Así es más fácil saber la cantidad de maíz, por ejemplo para 7 personas.
266	Simplemente se calcula:
267	$7 \times 1000/5 = 1.4 \text{ kg.}$ o $7 \times 200\text{gr.} = 1400 \text{ gr.}$ O 1.4 Kg.
268	Podemos realizar el mismo procedimiento para saber la cantidad unitaria, ya teniendo esta
269	cantidad es más fácil saber las demás.
270	Para comprobar lo anterior y como última actividad se les presentará la diapositiva 5 en
271	donde los alumnos tratarán de encontrar la cantidad de ingredientes del pozole para una
272	persona.

En la Planificación de Israel identificamos tres unidades de análisis: 1) Elementos que contextualizan el diseño de tareas, 2) Tareas de apertura y 3) Tareas en el desarrollo de la planificación. En la unidad de análisis 3 ubicamos diferentes tipos de subtarear (subunidades de análisis) que atienden a las actividades propuestas en las hojas de trabajo 1, 2 y 3. Una vez que definimos las unidades y subunidades de análisis (tarear y subtarear) de las planificaciones de Daniela e Israel, avanzamos en la descripción de su codificación en el siguiente apartado.

IV.5.1.2. Categorías y codificación

Una vez que definimos las unidades de análisis de las fuentes de datos recuperadas en este trabajo de investigación, procedimos a su categorización, entendida como “una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por género (analogía), a partir de criterios previamente definidos” (Bardin, 1996, p. 90). En este estudio, las categorías que empleamos emergen de los dominios y subdominios del MTSK, descritas en el capítulo de la perspectiva teórica. Así, las categorías están establecidas por este modelo teórico (Flick, 2004).

El MTSK está compuesto por dos dominios: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido; el primer dominio integra conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura matemática y conocimiento de la práctica matemáticas. En el segundo dominio ubicamos el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. A excepción del

subdominio conocimiento de la práctica matemática que contiene indicadores de conocimiento, el resto de los subdominios incluyen un sistema de categorías que varían entre tres y cuatro.

En el proceso de codificación de las categorías lo realizamos en dos etapas: 1º retomamos los códigos definidos en el modelo teórico para cada uno de los subdominios, por ejemplo, en conocimiento de los temas, el código es *KoT* y 2º para asignar el código a las categorías, al inicio, tomamos como referente el código del subdominio que le corresponde y, enseguida, alguna o algunas de las grafías que corresponden a la palabra de cada una, por ejemplo, en el subdominio conocimiento de los temas, ubicamos la categoría asociada a conocimientos sobre procedimientos, por lo cual, retomamos la grafía inicial de la palabra para expresar: *KoT_P*. Realizamos este proceso con todas la categorías del MTSK. En algunas situaciones seleccionamos más de una grafía debido a la similitud que existía entre las palabras de las categorías. Así, los códigos asignados nos proporcionan información sobre el texto y su interpretación (Gibbs, 2012).

En la Tabla 25 presentamos las categorías del MTSK con su respectivo código que, en palabras de Franzosi (2009), se denomina *esquema de codificación* porque muestra “el conjunto de todas las categorías de codificación que se aplicarán a un conjunto de textos” (p. 550).

Tabla 25. Categorías MTSK (18-11-2016)

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio	
		<i>Conocimiento sobre:</i>	
Conocimiento matemático	Conocimiento de los tópicos KoT	Procedimientos KoT_P	¿Cómo se hace?
			¿Cuándo puede hacerse?
			¿Por qué se hace así?
			Características del resultado
		Definiciones ¹¹ , propiedades y sus fundamentos ¹² KoT_D	

¹¹ Los ejemplos de conceptos o definiciones forman parte de la imagen conceptual, por lo que se asocian a definiciones. Esto no significa que no se contemplen ejemplos en otras categorías. En particular, la inclusión del conocimiento de ejemplos en el KMT se refiere a su uso en la enseñanza.

¹² Se incluyen aquí las conexiones intraconceptuales.

		Registros de representación KoT_R
		Fenomenología y aplicaciones KoT_F
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM¹³	Conexiones de complejización KSM_C
		Conexiones de simplificación KSM_S
		Conexiones transversales KSM_T
		Conexiones auxiliares KSM_A
	Conocimiento de la práctica matemática KPM¹⁴	<i>Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos</i> KPM_PR
		<i>Formas de validación y demostración</i> KPM_VD
		<i>Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal</i> KPM_SL
		<i>Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas</i> KPM_RP
		<i>Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)</i>

¹³ Queda pendiente reflexionar sobre la exhaustividad de las categorías, pues puede suceder que algunas conexiones interconceptuales no puedan asociarse a ninguna de las categorías consideradas.

¹⁴ Se incluyen algunos indicadores de este subdominio, a falta de establecer su categorización.

Conocimiento Didáctico del Contenido		KPM_P
		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones
		KPM_CD
	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	Teorías de aprendizaje ¹⁵ KFLM_T
		Fortalezas y dificultades KFLM_FD
		Formas de interacción con un contenido matemático KFLM_IC
		Intereses y expectativas KFLM_IE
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías de enseñanza ¹⁶ KMT_T
		Recursos materiales y virtuales KMT_R
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos KMT_ES_T_TA_E
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Expectativas de aprendizaje KMLS_EA
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado KMLS_NCP
		Secuenciación con temas anteriores y posteriores KMLS_TAP

¹⁵ Pueden ser formales o personales.

¹⁶ Pueden ser formales o personales.

En la tabla anterior, la codificación asignada a la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* del subdominio *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, integra diferentes grafías en función de las cuatro palabras que la componen: KMT_ES_T_TA_E, por lo cual, durante el análisis, al identificar *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* de Daniela o Israel en relación con las estrategias, destacamos con negrita las grafías que le corresponden, por ejemplo: KMT_**ES**_T_TA_E; lo mismo realizamos cuando identifiquemos conocimiento de *técnicas, tareas y ejemplos*. Por otra parte, asignamos códigos a los indicadores de conocimiento del subdominio *conocimiento de la práctica matemática* porque no se dispone de su categorización, pero pueden ser identificados en Daniela e Israel. Por último, es pertinente mencionar la asignación de códigos a las categorías del MTSK la realizamos bajo la asesoría de doctores en didáctica de las matemáticas que participan en el desarrollo de este modelo teórico.

IV.5.1.3. Identificación de evidencia, indicio y oportunidad de investigación

En algunos estudios, la identificación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas ha llevado a investigadores a definir tres tipos de conocimiento con el propósito de caracterizar una mayor cantidad de ellos en las fuentes de datos que se recuperan (Escudero-Ávila, 2015; Flores-Medrano, 2015). Así, en este trabajo recurrimos a la identificación de *evidencias de conocimiento, indicios de conocimiento y oportunidades de investigación/de exploración de conocimientos* en las planificaciones, videgrabaciones de clases, entrevistas semiestructuradas y documentos de análisis de la práctica de Daniela e Israel, tomando como unidades de análisis las tareas diseñadas por cada uno de los profesores en formación inicial para enseñar la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

Como lo hemos explicado en los primeros apartados de este capítulo, la planificación de cada profesor en formación inicial se convirtió en una fuente primaria para la identificación de conocimiento especializado. Así, procedimos a identificar evidencias de conocimiento, entendidas como “aquellos elementos que nos permiten afirmar que un profesor posee un determinado conocimiento, ya sea profundo o superficial. Habitualmente proviene de una triangulación para garantizar la existencia de dicho conocimiento” (Flores- Medrano, 2015, p.79).

Enseguida presentamos una evidencia de conocimiento de Daniela recuperada de la planificación [P_Daniela_2.2. 26-28; 37-47], cuya codificación es: Daniela_KMT_ES_T_TA_E; lo anterior expresa en el fragmento de planificación, existe conocimiento del subdominio *Conocimiento de la enseñanza*

de las matemáticas (KMT) en relación con la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, aunque sólo nos enfocamos en la identificación de conocimiento de tareas (TA) de apertura en las líneas comprendidas del número 26 al 28 y 37 al 47.

Figura 15. Fragmento de Planificación de Daniela

Inicio
VERIFICANDO CONOCIMIENTOS PREVIOS *(Las representaciones que tiene una fracción en sus diferentes formas como la gráfica y la numérica)*

[...]

-Pasaré a 5 alumnos. Cada uno tomará una tarjeta donde estará anotada una fracción. En el pintarrón colocaré una lámina con 5 pequeños y simples ejercicios de representaciones con fracciones. De manera grupal, se realizará el razonamiento y los alumnos indicarán qué fracción corresponde a cada ejercicio, indicándole a su compañero coloque la tarjeta en la parte de la lámina donde se encuentre éste.

(En la lámina se coloca la representación que tiene una fracción cuando se refiere a figuras geométricas fragmentadas en partes iguales, es decir, de forma gráfica. También fracciones para significar partes de cantidades tomándolas en cuenta como un entero, de forma numérica. Se trata de abarcar lo que puede ser representado mediante fracciones.

En el fragmento anterior, identificamos que Daniela evidencia conocimiento de tareas de apertura para verificar conocimientos previos de la fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos a partir del uso de material (láminas y tarjetas); el primero se muestra cuando señala “[...] se coloca la representación que tiene una fracción cuando se refiere a figuras geométricas fragmentadas en partes iguales [...]” y, el segundo contexto aparece al expresar: “[...] fracciones para significar partes de cantidades tomándolas en cuenta como un entero[...]”; contextos que resume en “Se trata de abarcar lo que puede ser representado mediante fracciones”. Llinares y Sánchez (1997) asocian la representación de fracciones en contextos continuos a través de tiras de papel, figuras geométricas como rectángulos, entre otros. Respecto a la representación de fracciones en contextos discretos las relacionan con una determina colección de objetos como canicas y caramelos, por citar algunos ejemplos.

La evidencia que presentamos es rescatada de la planificación, es decir, de una fuente de datos, debido a la potencialidad de información que brinda, aunque es preciso mencionemos, la mayoría de las evidencias de conocimiento que mostramos en el análisis vienen de una triangulación. ¿A qué se debe? Existen algunas situaciones donde la información que brinda una fuente no es suficiente para que el profesor en formación inicial (Daniela o Israel) evidencie conocimiento de una temática determinada. Por ejemplo, en párrafos anteriores, en el fragmento que rescatamos de Daniela encontramos indicios de conocimiento de la representación gráfica de las fracciones en contextos continuos, pero no podemos decir posee ese conocimiento porque el texto no se acompaña de dicha representación.

Flores-Medrano (2015) menciona que los indicios de conocimiento permiten reconocer que se requiere de información amplia para convertirse en evidencia de conocimiento, por lo cual, se pueden traducir como sospechas. Los indicios de conocimiento identificados en la planificación (textual) de Daniela e Israel nos permitieron plantear algunas preguntas (Moriél-Junior y Carrillo, 2014) para aplicar en las entrevistas semiestructuradas (ES1 y ES2), revisar la transcripción de las videograbaciones de las clases y los documentos de análisis de la práctica, con el propósito de obtener más información que, en algunos casos, llevó a que los indicios de conocimiento identificados se convirtieran en evidencias de conocimiento, a partir de la información que arrojaban las diferentes fuentes de datos. Para el caso del indicio de conocimiento de la representación gráfica o figural de la fracción (Rojas, 2014), en la videograbación de la clase encontramos información que nos llevó a convertirlo en evidencia de conocimiento, de manera concreta cuando Daniela muestra una lámina que contiene dicha representación, tal como se aprecia en la siguiente imagen:

Ilustración 2. Representación figural de un medio



Los diálogos que se establecen entre Daniela y los alumnos en relación con el empleo del contenido de la lámina enriquece la evidencia de conocimiento de Daniela sobre la representación gráfica o figural de la fracción (parte-todo) en contextos continuos (KoT_R).

Respecto a las oportunidades para explorar conocimiento (Flores, Escudero y Aguilar (2013) o de investigación (Flores-Medrano, 2015) a través de la información de momentos o situaciones que nos brindaban las fuentes de datos recuperadas, podemos mencionar nos permitió explorar conocimiento de alguna o algunas categorías de uno o más subdominios del MTSK, al convertirse en evidencia e indicio de conocimiento; sin embargo, en algunas situaciones se quedaron en oportunidades para investigar en trabajos posteriores.

Con el propósito de ejemplificar cómo algunas oportunidades para explorar conocimiento o seguir investigando se convirtieron en evidencias retomamos el fragmento referenciado en evidencia e indicio de conocimiento, debido a que una parte del texto nos remite a indagar si Daniela evidencia conocimiento de la representación numérica de la fracción o si se refiere al número que se le otorga a la cantidad total de una colección de objetos: *“También fracciones para significar partes de cantidades tomándolas en cuenta como un entero, de forma numérica”*. En la videograbación de clase, Daniela recurre al empleo de tarjetas donde representa fracciones de manera numérica que corresponden a una representación gráfica o figural contenida en una lámina. A continuación mostramos una imagen de las tarjetas:

Ilustración 3. Representación numérica y figural de fracciones



En la Ilustración 3 observamos una niña y tres alumnos, tienen sobre su pecho tarjetas con la representación numérica de la fracción $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{6}$ (de izquierda a derecha), mismas que previamente fueron entregadas por Daniela; situación que a la par de las interacciones que se establecen en el aula, nos muestra evidencia de conocimiento de Daniela sobre la representación numérica de la fracción; la evidencia de este indicador de conocimiento la ampliamos en el capítulo del análisis.

En términos generales, cuando teníamos las fuentes de datos en texto con el correspondiente número de línea, según la extensión de los diferentes documentos, así como la separación de las unidades de

análisis (tareas) en las planificaciones de ambos profesores en formación inicial, procedimos a asignar códigos a las líneas en función de las categorías e indicadores de conocimiento del MTSK (Gibbs, 2012), tomando como referente el orden en que se obtuvieron las fuentes de datos: planificaciones, entrevistas semiestructuradas 1, videograbaciones de las clases, entrevistas semiestructuradas 2 y documentos de análisis de la práctica. Enseguida identificamos en cada fuente de datos evidencias de conocimiento, indicios de conocimiento y oportunidades para explorar conocimiento o seguir investigando; lo anterior lo realizamos con lápiz y papel a través del esquema de codificación que definimos, donde agregamos los tipos de conocimientos identificados de los profesores en formación inicial.

IV.6. Triangulación de las fuentes de datos

La naturaleza del proceso de identificación y caracterización del conocimiento especializado de los dos profesores en formación inicial (Daniela e Israel), a partir de las tareas que diseñaron en sus planificaciones y con el apoyo de las categorías del MTSK para definir evidencias de conocimiento, indicios de conocimiento y oportunidades para explorar conocimiento o seguir investigando en las planificaciones, entrevistas semiestructuradas, videograbaciones de clases y documentos de análisis de la práctica, de acuerdo al momento de su aplicación y recuperación, nos situó en la triangulación de las fuentes de datos.

En este trabajo recurrimos a la triangulación “como el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano” (Cohen y Manion, 2002, p. 331). Para fines de este estudio se traduce en el estudio del conocimiento especializado de dos profesores en formación inicial que enseñan la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

Por otra parte, Flick (2004) aborda diferentes tipos triangulación, donde toma como referente las aportaciones de Denzin (1989): triangulación de datos, triangulación del investigador, triangulación de la teoría y triangulación metodológica. En esta investigación, presentamos el conocimiento especializado de Daniela e Israel con apoyo en la triangulación de datos, de manera específica, realizamos una triangulación en función del tiempo a través de un estudio longitudinal porque reunimos fuentes de datos de cada profesor en formación inicial en diferentes momentos de una secuencia temporal (Cohen y Manion, 2002). Además, realizamos una triangulación de investigadores porque participamos diferentes investigadores en la identificación y caracterización del MTSK para

enseñar la noción de razón. Por último, recurrimos a la triangulación metodológica entre los métodos cuando empleamos diferentes métodos en la investigación (Flick, 2004).

Los tres tipos de triangulación descritos se favorecen de manera conjunta, durante el análisis de los datos de la investigación. Además, destacamos que la triangulación tiene algunos usos prácticos: proporciona diferentes visiones de una situación para definir limitaciones y seleccionar la más probable y muestra diferentes dimensiones de la realidad social de los sujetos que participan en la investigación (Gibbs, 2012); usos que nos ayudan a avanzar en la identificación y caracterización del conocimiento especializado para enseñar la noción de razón.

IV.7. Rigor de la investigación

Con el propósito de dar cuenta del rigor de esta investigación recurrimos a cuatro criterios expresados por Lincoln y Guba (1985), los cuales son rescatados por Rodríguez, Gil y García (1996): valor de la verdad, aplicabilidad, consistencia y neutralidad. Enseguida citamos la descripción que realizan de cada criterio y cómo se inserta en nuestro trabajo.

- a) *Valor de la verdad.* Hace referencia a la confianza en la veracidad de los descubrimientos realizados en una investigación. Aquí Lincoln y Guba (1985) proponen el término de credibilidad “para hacer referencia a la necesidad de que exista un isomorfismo entre los resultados de la investigación y las percepciones que los sujetos participantes poseen sobre las realidades estudiadas” (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 286). Por lo tanto, destacan el papel que desempeña la triangulación de datos, investigadores y metodologías. En este sentido, nuestro trabajo de investigación posee credibilidad por recurrimos a los tres tipos de triangulación, los cuales describimos en el apartado anterior.
- b) *Aplicabilidad.* Se refiere a las posibilidades de aplicar los resultados de una investigación a otros sujetos o contextos. Al respecto, Lincoln y Guba (1985), proponen el concepto análogo de transferibilidad. “Aunque la generalización no es posible dado el carácter único e irreplicable de los contextos, conductas y fenómenos estudiados, sí que cabe la posibilidad de algún tipo de transferencia entre contextos dependiendo del grado de similitud entre los mismos” (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 287). Puesto que esta investigación se realiza con dos profesores en formación inicial de primaria que enseñan la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en dos grupos de quinto grado, bajo el enfoque del Plan de Estudios 2012, una vez que han llevado los cursos del área de

matemáticas, puede existir la posibilidad de que las descripciones que se realicen permitan determinar el grado de correspondencia con otros contextos. Aunque en esta investigación nuestro objetivo no es llegar hasta la generalización, sino a la particularización del MTSK para enseñar la noción de razón.

- c) *Consistencia*. Hace referencia a la posibilidad de que se obtuvieran los mismos resultados al replicar el estudio con los mismos o similares sujetos y contextos. En este caso, Lincoln y Guba (1985) plantean el término de dependencia que “implica tanto la estabilidad de los resultados como el conocimiento de los factores que explicarían la variación observada en los mismos al replicar un estudio” (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 288). Para este criterio, aparece como apoyo la triangulación, la cual seguimos en el análisis de la diversidad de datos obtenidos, a partir de diferentes fuentes y, con el apoyo de investigadores del campo.
- d) *Neutralidad*. Ante este término, Lincoln y Guba (1985) proponen el concepto de confirmabilidad, y trasladan la neutralidad del investigador a los datos y las interpretaciones.

La forma en que se intenta ofrecer evidencia de la confirmabilidad de los datos se basa, durante la investigación, en el empleo de estrategias de triangulación y, sobre todo, en el ejercicio de la reflexión, que se considera condición “sine qua non”. El investigador habría de comunicar a la audiencia los supuestos epistemológicos que le llevan a formularse las preguntas o presentar los descubrimientos en un modo determinado” (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 288).

En este caso, en el apartado *caracterización de la investigación: paradigma, perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica*, describimos nuestros supuestos epistemológicos y destacamos que en la interpretación que realizamos partimos de la información que nos arrojan las diferentes fuentes con respecto a Daniela e Israel y el marco teórico del MTSK, el cual nos permite identificar y caracterizar el conocimientos matemático y didáctico que ponen en juego cuando enseñan la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

CAPÍTULO V.

ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LOS DATOS

CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LOS DATOS

V.1. Introducción

En este capítulo presentamos el análisis y los resultados de la revisión de Planificaciones (P), Entrevistas Semiestructuradas (ES1 y ES2), Videgrabaciones de clases (V) y documentos de Análisis de la Práctica (AP) de dos profesores en formación inicial de primaria: Daniela e Israel, cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad. En concreto, damos respuesta a la pregunta central que guía esta investigación: ¿Cuál es el conocimiento especializado que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación?, así como a las preguntas complementarias: ¿Cuáles son los elementos de conocimiento matemático que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad? ¿Cuáles son los elementos de conocimiento didáctico del contenido que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad? ¿Cuáles son las posibles relaciones entre dominios de conocimiento que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?

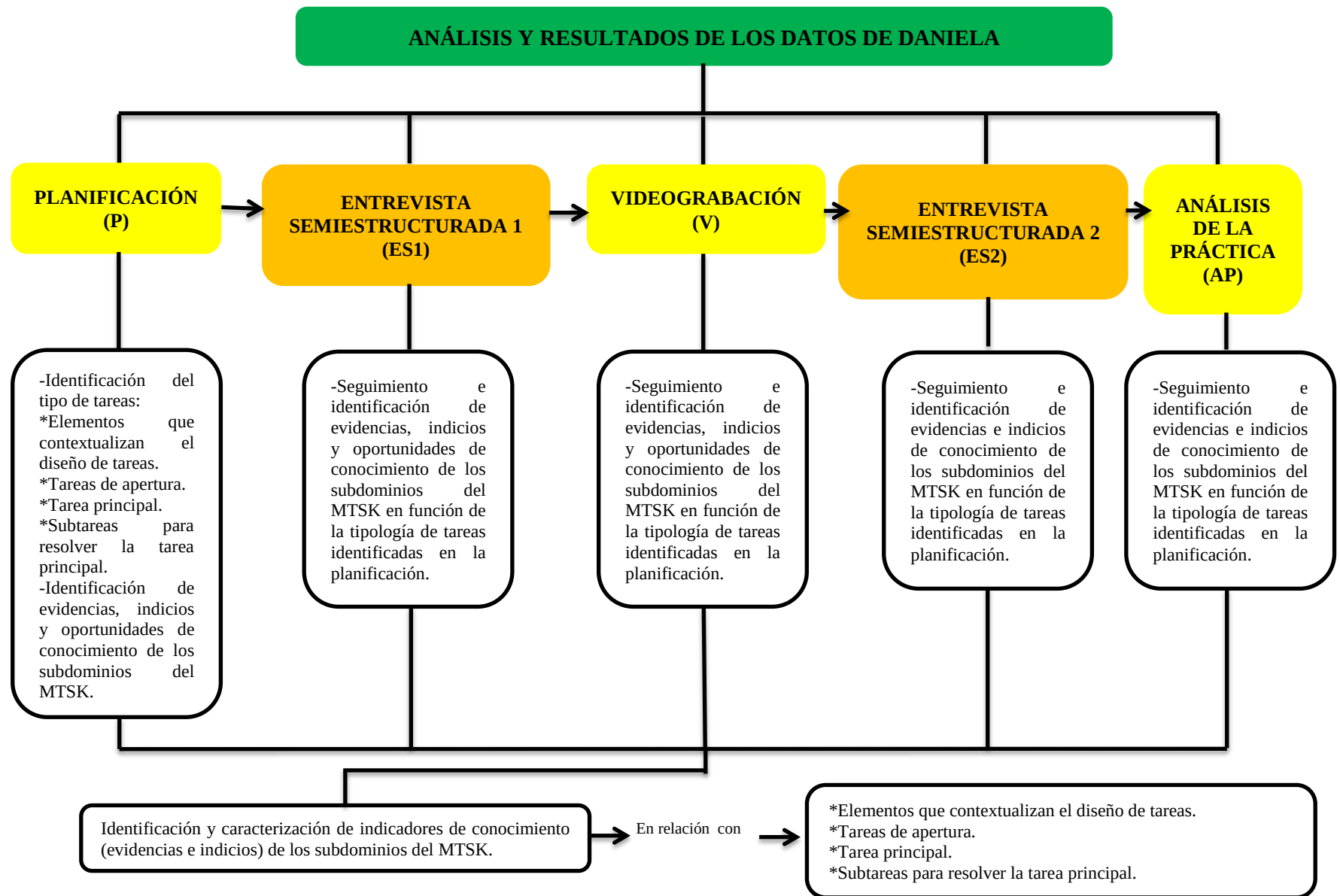
Las tareas (Stein & Smith, 1998), se convierten en la unidad de análisis que nos permiten organizar la información de los diferentes instrumentos que aplicamos para el caso de Daniela e Israel. Además, recurrimos a Mason & Johnston-Wilder (2006), así como Thanheiser et al. (2016) para recuperar diferentes tipos de tareas en relación con su propósito y momento de aplicación desde la planificación y en la clase: tareas de apertura, tarea principal, entre otras aportaciones.

A la par de la organización de la información en tareas, el MTSK se convierte en el referente teórico para identificar y caracterizar indicadores de conocimiento (evidencias e indicios) en función de los diferentes dominios y subdominios del mismo. Así, en la primera parte de este capítulo ubicamos el conocimiento especializado de Daniela y enseguida el conocimiento especializado de Israel; previo al desarrollo de cada uno de los anteriores presentamos un esquema donde describimos (Figura 16 y Figura 17), de manera general, los diferentes instrumentos aplicados, su temporalidad y su contribución para la identificación y caracterización de indicadores de conocimiento de los dos informantes.

El análisis del conocimiento especializado de Daniela lo hemos organizado en cinco apartados: 1) Elementos que contextualizan el diseño de tareas, 2) Tareas de apertura, 3) Tarea principal (1), 4) Subtareas para resolver la tarea principal y, 5) Tarea principal (2). Al final de cada uno de los apartados anteriores, agregamos una figura y un resumen de relaciones entre subdominios del MTSK; en éstos incluimos los indicadores de conocimientos (evidenciase indicios) identificados en algunos dominios y subdominios del MTSK.

En el caso del análisis del conocimiento especializado de Israel ubicamos tres apartados principales: 1) Elementos que contextualizan el diseño de tareas, 2) Tareas de apertura y 3) Tareas de desarrollo (Subtareas 3.1, 3.2 y 3.3). Al igual que en el caso de Daniela, al final de los apartados anteriores incluimos un resumen de relaciones entre subdominios del MTSK y una tabla con el resumen de indicadores de conocimientos (evidenciase indicios) identificados en algunos dominios y subdominios del MTSK.

Figura 16. Instrumentos de recuperación de la información de Daniela



V.2. Análisis de conocimiento especializado de Daniela

El conocimiento especializado de Daniela; una profesora en formación inicial que enseña la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, lo organizamos en función de las tareas que incluye en su Planificación (P). En primer lugar, ubicamos el apartado elementos que contextualizan el diseño de tareas, seguido de las tareas de apertura y la presentación de una tarea principal, la cual está constituida por tres subtareas; cada uno de los apartados anteriores muestra evidencias e indicios de su conocimiento especializado a través de la información que arrojan las Entrevistas Semiestructuradas (1 y 2), la Videograbación de la clase (V) y el documento de Análisis de la Práctica elaborado por Daniela.

Daniela inicia su Planificación con la presentación de algunos elementos que contextualizan el diseño de las tareas [P_Daniela_1. 1-5], entre los que destacan las competencias que se favorecen, aprendizaje esperado y eje; mismos que permiten identificar evidencias e indicios de sus conocimientos matemáticos y didácticos que, en un primero momento, giran en torno al *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS).

En las tareas de apertura [P_Daniela_2. 26-47], Daniela diseña actividades que se apoyan en diferentes recursos materiales para rescatar los conocimientos de los alumnos en relación con las fracciones y algunas de sus representaciones. Así, avanzamos en la identificación y la caracterización del conocimiento especializado de la profesora en formación inicial cuando enseña la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

En la Planificación, Daniela destaca el diseño de una tarea principal [P_Daniela_3. 48-78] a través de un problema donde favorece la enseñanza de la noción de razón en la que muestra evidencias e indicios de conocimientos de diferentes dominios y subdominios del conocimiento especializado. La tarea principal está integrada por tres subtareas [P_Daniela_3.1. 79-111; P_Daniela_3.2. 112-136; P_Daniela_3.3. 137-171] que proporcionan elementos para que los alumnos puedan resolver la tarea principal en el cierre de la Planificación [P_Daniela_3.4. 172-176].

En los siguientes apartados identificamos y caracterizamos, de manera detallada, el conocimiento especializado de Daniela cuando enseña la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en un grupo de quinto grado de educación primaria en México.

V.2.1. Conocimiento especializado de Daniela en función de los elementos que contextualizan el diseño de tareas [Planificación_Daniela_1. 1-5]

Durante la formación inicial de profesores de primaria, se enfatiza que las planificaciones deben incluir algunos referentes del Plan de Estudios de Educación Básica y de los Programas de estudio de Educación Primaria. En esta investigación no hubo consigna alguna, sin embargo, al inicio de la Planificación, Daniela presenta algunos conceptos que indican lo que pretende favorecer en sus alumnos al desarrollar las tareas que diseñó [P_Daniela_1. 1-5]:

Competencias que se favorecen: Validar procedimientos y resultados, Comunicar información matemática y Manejar técnicas eficientemente.

Aprendizaje Esperado: Que los niños aprendan la razón como un significado de la fracción.

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Las competencias que se favorecen, el aprendizaje esperado y el eje, se convirtieron en oportunidades de conocimiento para indagar en la Entrevista Semiestructurada 1, la Videograbación, la Entrevista Semiestructurada 2 y el documento de Análisis de la Práctica; de donde surgieron evidencias e indicios de indicadores de conocimiento de diferentes subdominios del MTSK. Comenzamos por presentar los que ubicamos en la categoría *Expectativas de aprendizaje* del subdominio KMLS [KMLS_EA]:

Daniela_KMLS_EA_1. Conoce competencias matemáticas que se pretenden favorecer en la Educación Primaria.

En la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela identifica como competencias matemáticas: validar procedimientos y resultados, comunicar información matemática y manejar técnicas eficientemente. En el documento Análisis de la Práctica evidencia conocimiento de su presencia en los Programas de Estudio de Educación Primaria [AP_Daniela_KMLS_EA_1. 11-18]:

[...] Es así que se identifica dentro de los programas de estudio para Educación Primaria [...] que en su desarrollo permite favorecer en los alumnos las competencias de: “Comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente” (SEP, 2011, pág.71) debido a que en el proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla, los alumnos resuelven problemas matemáticos utilizando procedimientos en los que necesitan comunicar y validar resultados a través de sus propias estrategias.

A partir de la información que arrojó la Entrevista Semiestructurada 2, encontramos que Daniela, evidencia conocimiento de las tres competencias matemáticas¹⁷ que cita, por lo que cada una se convierte en subindicador de conocimiento:

Daniela_KMLS_EA_1.1. Conoce validar procedimientos y resultados.

Desde el Plan de Estudios 2011 de la Educación Básica se plantea que los alumnos desarrollen la competencia matemática validar procedimientos y resultados con el propósito de que adquieran la confianza para explicar y justificar los procedimientos y soluciones que encuentran a los problemas que se les plantean, además avancen en el razonamiento deductivo y la demostración formal (SEP, 2011). En este caso, en la entrevista semiestructurada 2, Daniela evidencia conocimiento de lo que implica validar procedimientos y resultados, a partir de las tareas que resolvieron los alumnos en el desarrollo de su clase [ES2_Daniela_KMLS_EA_1.1. 24-30]:

[...] validar procedimientos y resultados, cuando puse a los niños a que resolvieran el problema principal, hicieron sus procedimientos y después estos ejercicios (señala hojas del planteamiento 1, 2 y 3); les dieron las herramientas para que validaran sus propios resultados y los procedimientos que hicieron y, en cierta forma, hicieran una autocorrección o regularan, por ejemplo, que dijeran “ah pues aquí en este procedimiento estuve mal” o desde la forma de comprender el problema o resolverlo.

En el fragmento anterior, Daniela enfatiza en la validación de procedimientos y resultados de las tareas que resolvieron los alumnos en la clase como un medio para autoevaluarse y tomar decisiones que les permitieran mejorar la resolución del problema planteado.

Una competencia matemática más que se plantea desde los Programas de estudio de Educación Primaria es manejar técnicas eficientemente, incluye el uso eficiente de procedimientos y formas de representación realizadas por los alumnos en cálculos, por lo cual debe desarrollarse el significado y uso de los números y las operaciones, al seleccionar aquéllas que mejor resuelven un problema, además requiere se sometan a prueba en diferentes problemas (SEP, 2011). Al respecto, Daniela evidencia conocimiento de su ausencia en la clase [ES2_Daniela_KMLS_EA_1.2. 30-34]:

¹⁷ En México, en los Programas de Estudio de Educación Primaria (2011) se entiende que el concepto de competencia matemática implica el uso de conocimientos, habilidades, actitudes y valores.

[...] comunicar técnicas eficientemente, yo creo que faltó un poquito más que los niños se involucraran y dijeran, por ejemplo, “hice esto por esto, y esto otro”, sin necesitar los planteamientos que hicimos. Aquí simplemente los niños dijeron “pues aquí no lo entiendo, no sé cómo, yo pienso que es así”, pero no dieron una argumentación que sustentara su respuesta. Entonces se ve que no manejaron las técnicas eficientemente [...]

Para Daniela, un elemento fundamental en la competencia de manejar técnicas eficientemente, es que los alumnos logren justificar sus respuestas sin depender de las actividades que realizaron en clase para contextualizarlas; de ahí que se infiere que esa situación les puede permitir desarrollar seguridad en las técnicas que manejan. Así, identificamos:

Daniela_KMLS_EA_1.2. Conoce manejar técnicas eficientemente.

En la Planificación, Daniela identifica comunicar información matemática como una competencia matemática que se favorece en la Educación Primaria. En este sentido, en la Entrevista Semiestructura 2 le preguntamos qué implica esta competencia, con lo cual obtuvimos evidencia de su conocimiento y su presentación la damos a conocer en tres fragmentos. A continuación mostramos la primera parte [ES2_Daniela_KMLS_EA_1.3. 43-51]:

Implica utilizar términos matemáticos, por ejemplo, aquí el término matemático que se tenía pensado que lograron los niños era la razón, identificar razón y fracción. Aquí los niños leían la razón “uno para cuatro” /señala en una hoja de trabajo $1:4$ / y la fracción “un cuarto” /señala en una hoja de trabajo $\frac{1}{4}$ /, es decir, que sepan los términos; por ejemplo, en un cuarto hay unos niños que dicen “uno rayita cuatro”, esa es información matemática, pero de un nivel más bajo, cuando están empezando a conocer las fracciones. Estos niños con los que trabajé dicen “es un cuarto”, eso se considera ya como un término matemático dentro de su lenguaje, porque en ocasiones si se encuentra con muchos niños que en un cuarto, sólo dicen uno y no saben qué es, si son cuartos, tercios.

En el fragmento anterior, Daniela visualiza como información matemática el empleo de términos matemáticos, en el caso de su clase, la representación numérica y verbal de la razón ($1:4$; uno para cuatro) y la fracción ($1/4$; un cuarto). Además, identifica la representación verbal de $\frac{1}{4}$: “uno rayita cuatro” o sólo “uno” como un nivel bajo de información matemática. Así, considera que los alumnos con los que trabajó manejan información matemática y muestra como ejemplo la correspondencia que existe entre la representación verbal y figura de la expresión $\frac{1}{4}$. Por lo anterior, podemos decir que

Daniela evidencia conocimiento de otra competencia matemática y de la categoría *Registros de representación* del subdominio KoT [KoT_R], lo cual nos lleva a definir los siguientes indicadores:

Daniela_KMLS_EA_1.3. Conoce comunicar información matemática.

Daniela_KoT_R_1. Conoce la representación numérica y verbal de la razón en función de la expresión $a:b$.

Daniela_KoT_R_2. Conoce la representación numérica y verbal de fracción en función de la expresión a/b .

En los Programas de Estudio de Educación Primaria, la expresión, representación e interpretación de información matemática de diferentes situaciones por parte de los estudiantes, así como las relaciones que se establezcan entre representaciones de información cualitativa y cuantitativa se ubican en la competencia comunicar información matemática (SEP, 2011), parte de lo cual se ubica en la fragmento de la entrevista anterior.

Una segunda parte de la evidencia de conocimiento de la competencia comunicar información matemática, la constituye el uso de los términos que señaló en el fragmento anterior, la coherencia que debe existir y, a la par, rescata momentos de lo que pasó en su clase, tal como se aprecia enseguida [ES2_Daniela_KMLS_EA_1.3. 51-61]:

[...] La terminología de cómo se determinan las expresiones simbólicas, en este caso de fracciones y de razón, que era el propósito de la clase, los niños si llegaron a comprenderlo porque decían “si es cierto, si es uno para cuatro niños y así es una razón”. Además, implica llevar una coherencia, por ejemplo, en el justificar los resultados y cuando comunica la información matemática y también la claridad, es decir, que sean claros, porque a veces dicen “es que yo no le entendí a mi compañero” y, por eso, se pide la participación de varios niños [...]a veces es más conveniente preguntarle a un niño que tiene dudas “¿cómo le hiciste tú?” o “¿qué entendiste de lo que explicó tu compañero?” para ver si el otro compañero adopta las terminologías que utilizó el otro. De esta manera se va dando un aprendizaje entre todos, es decir, se va produciendo el aprendizaje.

Desde la perspectiva de Daniela, la terminología que se emplee en matemáticas debe poseer coherencia y claridad para que pueda ser comunicada y cumpla con su función. Sin embargo, en las últimas líneas del fragmento anterior, plantea que el aprendizaje de la terminología puede ser el producto de un trabajo colectivo. Daniela realiza una serie de suposiciones sobre los comentarios que pueden emerger en los alumnos durante su interacción en el grupo, al momento de comunicar información matemática, lo cual señala puede apoyar al aprendizaje de la misma, a través de las participaciones de sus compañeros.

Un segundo elemento que contextualiza el diseño de tareas en la Planificación de Daniela, es el aprendizaje esperado¹⁸. Aquí es importante citar, que al inicio de la investigación la consigna que se dio al Daniela fue planificar una clase para la enseñanza de la razón como significado de la fracción, lo cual, enuncia como parte del aprendizaje esperado *“que los niños aprendan la razón como un significado de la fracción”*. A partir de esto, se convirtió en una oportunidad de conocimiento para indagar en los instrumentos aplicados (ES1, ES2, V y AP), de donde surgió el siguiente indicador de conocimiento:

Daniela_KMLS_NCP_1. Conoce que la razón (relación entre cantidades) como significado de la fracción es un aprendizaje esperado en quinto grado de Educación Primaria.

En la Entrevista Semiestructurada 2, preguntamos a Daniela si creía en quinto grado se abordaba la enseñanza de la razón como significado de la fracción, a lo cual contestó [ES2_Daniela_KMLS_NCP_2. 248-257]:

En quinto grado sí, pero sólo en fracción, se le da el concepto hasta sexto. En quinto grado es un cuarto y si es el doble dos cuartos, sólo hay un acercamiento. Se ven los conocimientos previos que van a necesitar los niños para abordar la razón, de manera más formal, en sexto grado; desde quinto se va dando de lo más simple a lo más complejo.

En quinto grado se establecen relaciones, pero en sexto grado se trabaja cómo se le llama a esas relaciones, es decir, se menciona se le llama razón y obviamente son conocimientos que ocupan en grados superiores, por ejemplo, en la secundaria, donde abordan más los términos de las razones: “¿cuál es la razón entre esta cantidad y esta cantidad?”; ya no se trabaja tanto como relación, sino “¿cuál es la razón en función de [...]?”, a partir de situaciones que manejan proporcionalidad [...]

¹⁸ Los aprendizajes esperados “[...]” son enunciados que señalan de manera sintética los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio de varios contenidos “[...]” (SEP, 2011, p. 75).

A partir de la información que Daniela brinda en el fragmento anterior, identificamos evidencia conocimiento de que las fracciones se trabajan en quinto grado y que las razones se trabajan como relaciones entre dos cantidades. Además, identificamos:

Daniela_KMLS_TAP_1. Conoce que la noción de razón adquiere diferentes maneras de abordarse en cada grado o nivel educativo.

En el documento de Análisis de la Práctica es donde Daniela evidencia conocimiento de lo que implica la razón como significado de la fracción [AP_Daniela_KoT_D_1. 5-8; 60-69]:

El tema que se desarrolla en la planificación de esta clase de matemáticas, tiene lugar dentro del contenido de fracciones, conformando uno de sus subconstructos o interpretaciones que tiene la fracción, como las nombra Llinares y Sánchez (1997). Las fracciones entre sus diferentes interpretaciones, son entendidas como una “razón”.

Retomado lo que se había indicado en los párrafos anteriores, la fracción como razón, es una de las interpretaciones o formas de entender al concepto de fracción como han sido denominadas por algunos autores. Esta interpretación o subconstructo se entiende como la manera de comparar objetos heterogéneos, es decir, de diferente naturaleza, esto es posible entenderlo tras el enunciado: “Tanto por cada tanto”. La razón matemática también puede entenderse como el cociente entre dos medidas de diferentes magnitudes, por lo que se puede expresar también en forma de fracción.

Si se resume lo anterior, se puede decir que las razones son una comparación de dos cantidades que establecen una relación. Por ejemplo, $6/12$ o $6:12$. Dado que las razones son fracciones se pueden simplificar para obtener fracciones equivalentes.

En función de la información proporcionada por Daniela en el documento de Análisis de la Práctica, identificamos cuatro indicadores de conocimiento de la categoría *Definiciones del Conocimiento de los Temas* [KoT_D] y un indicador de conocimiento de la categoría *Conexiones transversales del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas* [KSM_T]:

Daniela_KoT_D_1. Conoce la razón como una interpretación o subconstructo de la fracción.

Daniela_KoT_D_2. Conoce la razón como una comparación entre objetos de diferente naturaleza.

Daniela_KoT_D_3. Conoce la razón como el cociente entre dos medidas de diferentes magnitudes que se puede expresar en forma de fracción.

Daniela_KoT_D_4. Conoce la razón como una comparación de dos cantidades que establecen una relación.

Daniela_KSM_T_1. Conoce que las razones son fracciones, por lo cual, la simplificación permite obtener fracciones equivalentes.

De los cuatro indicadores de conocimiento para la definición de razón, sólo en el primero [*Daniela_KoT_D_1.*] Daniela se apoya en un referente bibliográfico para argumentar lo que expone: Llinares y Sánchez (1997).

El último elemento que contextualiza el diseño de las tareas en la Planificación de Daniela es el eje *sentido numérico y pensamiento algebraico*, mismo que como citamos en párrafos anteriores, se convirtió en oportunidad de conocimiento para indagar en las Entrevistas Semiestructuras (1 Y 2) y en el documento de Análisis de la Práctica.

En el documento de Análisis de la Práctica, Daniela establece una relación entre Programas de Estudios de Educación Primaria, eje¹⁹ y fracción como razón [AP_Daniela_KMLS_EA_2. 9-13]:

¿De qué manera la fracción como razón está presente en las concepciones que los alumnos de educación primaria tienen? o ¿Cómo se estructura su conocimiento? ¿Cómo se estructura este tema en los contenidos de matemáticas? Es así que se identifica dentro de los Programas de Estudio para Educación Primaria, a este tema perteneciente al eje de *Sentido numérico y pensamiento algebraico* [...]

En la información recabada en la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela establece una relación entre el eje sentido numérico y pensamiento algebraico y las fracciones [ES1_Daniela_KMLS_EA_2. 4-7]:

Se maneja lo que es el sentido numérico y el pensamiento algebraico; sentido numérico porque las fracciones se componen de números y pensamiento algebraico porque las fracciones se llevan con base en algoritmos y estructuras. Además, se abordan con base en la resolución de problemas.

En el fragmento anterior, Daniela establece una relación entre el eje y las fracciones en función del concepto de números, al igual que en la Entrevista Semiestructurada 2, donde hace énfasis en la

¹⁹ En matemáticas, la organización de los aprendizajes se ha realizado en tres ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida y manejo de la información. La idea de eje se retoma porque indica una dirección o rumbo de una acción (SEP, 2011).

fracción como razón a través de algunas situaciones de la clase que precisan el manejo de números; lo anterior, nos guío a definir el siguiente indicador:

Daniela_KMLS_EA_2. Conoce que el estudio de las fracciones se ubica en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico.

Durante la aplicación de la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela menciona conoce el enfoque de las matemáticas y cómo lo visualiza en su Planificación. Enseguida presentamos el fragmento de entrevista que corresponde al conocimiento que tiene del enfoque de las matemáticas [ES1_Daniela_KMLS_EA_3. 806-810]:

E: ¿Cuál es el enfoque de las matemáticas?

Daniela: Es que el niño resuelva problemas y los reflexione, se abarca en todos los grados de la escuela primaria. En mi planificación se contribuiría en una mínima parte, pero a un porcentaje alto de problematizar. Mi planeación sería parte para favorecer un 70% del enfoque de las matemáticas que se debe de abordar en este grado. en la escuela primaria.

En el fragmento anterior, Daniela asocia el enfoque de las matemáticas con la posibilidad de que el niño resuelva problemas, además, se espera lo desarrolle durante su Educación Primaria, por lo cual, menciona su Planificación contribuirá a esto. En otra parte de la misma entrevista, cita que ese enfoque está presente desde el inicio de su clase; situación que se enriquece cuando en la Entrevista Semiestructurada 2, al preguntársele cómo favoreció el enfoque de las matemáticas en clase señala [ES2_Daniela_KMLS_EA_3. 858-863]:

Si se favoreció que el niño sea capaz de resolver problemas, porque en la evaluación cuando los niños se enfrentaron al problema principal, lo pudieron resolver y, lo podemos ver con facilidad, no porque el maestro les explicó cómo en la institucionalización o dijo “así es”, se fue justificando porqué ese procedimiento, a partir del trabajo de los niños, desde la misma realización de estos planteamientos de la clase (señala el planteamiento 1, 2 y 3)[...]

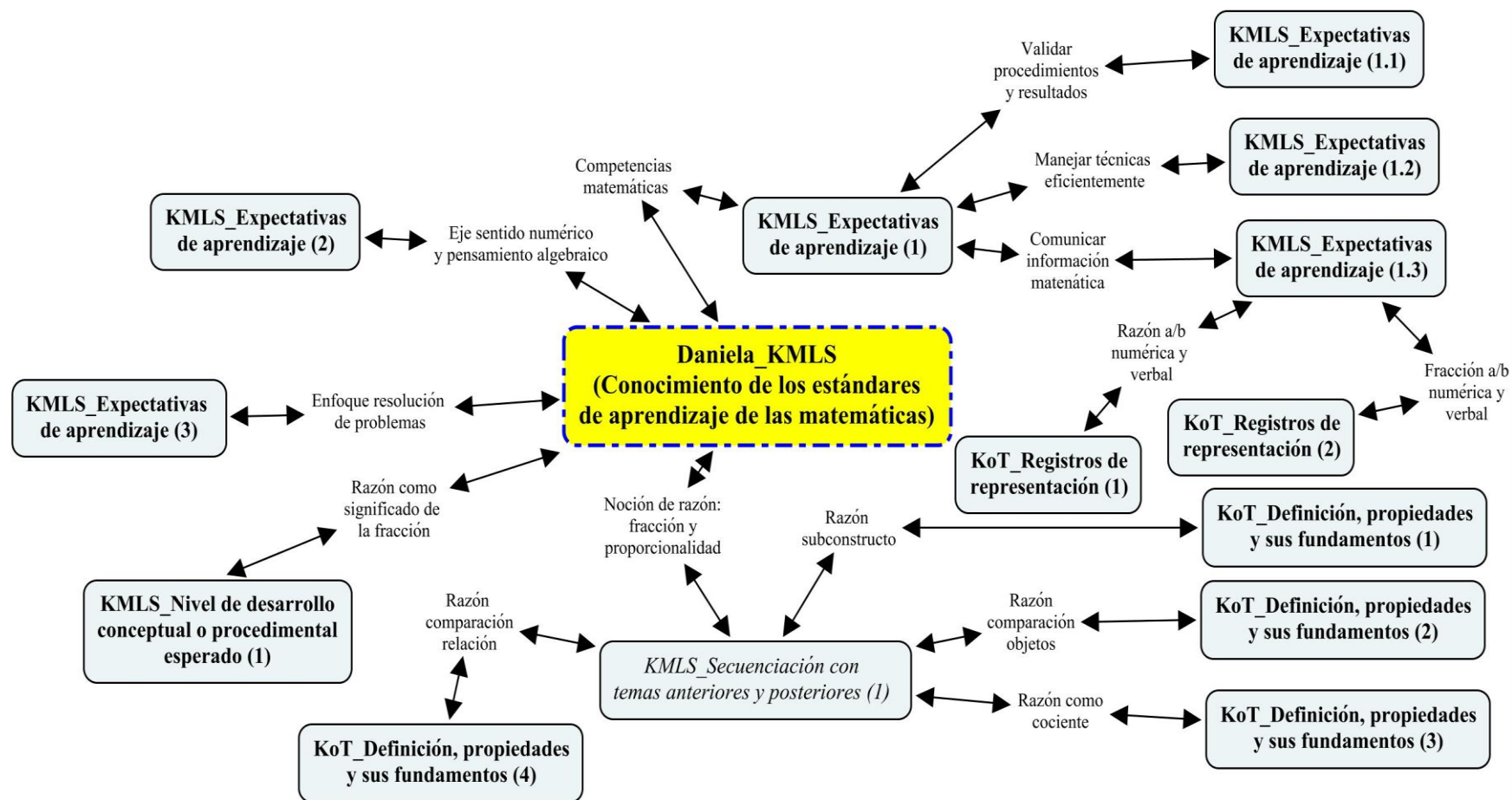
En la Entrevista Semiestructurada 2, Daniela evidencia conocimiento de lo que implica el enfoque de las matemáticas “resolución de problemas” y lo relaciona, de manera general, con algunas de las tareas que realizaron en la clase. Así, se pretende el alumno avance en el desarrollo de su autonomía para resolver problemas. En función de lo anterior identificamos:

Daniela_KMLS_EA_3. Conoce la resolución de problemas como parte del enfoque de las matemáticas.

En este primer apartado de la Planificación, que corresponde a los *Elementos que contextualizan el diseño de tareas*, identificamos diferentes evidencias e indicios de conocimiento de Daniela [KMLS_EA, KMLS_NCP y KMLS_TAP; KFLM_T; KSM_T; KoT_D y KoT_R], cuya característica principal es relacionar algunas cuestiones que se plantean en los Programas de Estudio de Educación Primaria (competencias, aprendizaje esperado, eje y enfoque) con lo que se presenta en su Planificación y en la Videograbación de la clase.

En el siguiente apartado, presentamos una figura donde incluimos las relaciones que se establecen entre algunos de los diferentes dominios y subdominios del MTSK, así como un apartado que plantea un resumen de dicha figura.

V.2.1.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Elementos que contextualizan el diseño de tareas.



V.2.1.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Elementos que contextualizan el diseño de tareas.

En la primera parte de la Planificación, Daniela hace referencia a validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente y comunicar información matemática como competencias matemáticas establecidas desde los Programa de Educación Primaria (**KMLS_EA_1**), lo cual, reafirma en la Entrevista Semiestructurada 1.

En la Entrevista Semiestructurada 2, Daniela asocia la validación de procedimientos y resultados se presenta en su clase cuando los alumnos resuelven el problema principal, apoyados entres planteamientos, además agrega esto permite corrijan sus procedimientos, en caso de equivocarse (**KMLS_EA_1.1**).

Respecto a la competencia matemática manejar técnicas eficientemente, Daniela involucra a los alumnos para que den a conocer procedimientos que argumenten la resolución de un problema, sin necesidad de establecer relaciones con las tareas realizadas en clase, sin embargo, menciona es algo que no se logró desarrollar en su clase (**KMLS_EA_1.2**).

Comunicar información matemática, es una competencia que en la Entrevista Semiestructurada 2, Daniela asocia con el empleo de lenguaje matemático por parte de los alumnos, al momento de resolver un problema y dar a conocer sus procedimientos al grupo (**KMLS_EA_1.3**). Esta competencia matemática la ejemplifica al tomar como referente expresiones de los alumnos en la clase cuando se refieren a la razón y a la fracción; para el caso de la primera señala que los alumnos poseen cierto lenguaje matemático porque al observar 1:4 expresan “uno para cuatro” (**KoT_R_1**), en el caso de la fracción, veían $\frac{1}{4}$ y decían representaba “un cuarto” (**KoT_R_2**); en ambos casos existe un conocimiento del registro de su representación numérica y verbal (**KoT_R**).

El aprendizaje esperado es un elemento de la Planificación que contextualiza en el diseño de tareas de Daniela, mismo que enuncia como “que los niños aprendan la razón como significado de la fracción” (**KMLS_NCP_1**), lo cual, enriquece en la Entrevista Semiestructurada 2, al citar que en quinto grado sólo se trabaja la razón como relación entre cantidades y en sexto grado es cuando se aborda de manera formal, es decir, se establece el concepto de razón, mismo que se aborda como tal en educación secundaria (**KMLS_TAP_1**).

En el documento de Análisis de la Práctica, Daniela amplía información sobre el aprendizaje esperado que favorece en la clase. Así, evidencia conocimiento de la razón como una interpretación o subconstructo de la fracción (**KoT_1**), la razón como una comparación entre objetos de diferente naturaleza (*KoT_D_2*), la razón como el cociente entre dos medidas de diferentes magnitudes que se pueden expresar en forma de fracción (*KoT_D_3*) y la razón como una comparación entre dos cantidades que establecen una relación (*KoT_D_4*). En el fragmento del documento que evidencia lo anterior, menciona que las razones son fracciones y se pueden simplificar para obtener fracciones equivalentes, es decir, les otorga cualidades en común (*KSM_T_1*).

En la primera parte de la Planificación, Daniela muestra indicio de conocimiento de que el estudio de las fracciones se aborda en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico, lo cual, se convierte en evidencia cuando en el documento de Análisis de la Práctica argumenta su postura en función de la organización que se establece en el Programa de Estudio de Educación Primaria y, en la Entrevista Semiestructurada 1, establece una relación a través del estudio de los números (**KMLS_EA_2**).

El enfoque de las matemáticas es un elemento que no está explícito en la Planificación, sin embargo, durante la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela evidencia su conocimiento al expresar la importancia de favorecer en su clase la resolución de problemas como parte del enfoque de las matemáticas que se espera los niños desarrollen durante toda la Educación Primaria, lo cual, la lleva a enunciar en la Entrevista Semiestructurada 2, sí se favoreció que los alumnos fueran capaces de resolver problemas, debido a que el papel del maestro no consistió en institucionalizar previamente la forma de resolver los problemas, de lo contrario, se realizó a partir del trabajo de los alumnos que, contribuyó a resolver el problema central (**KMLS_EA_3**).

En el apartado de la Planificación *elementos que contextualizan el diseño de tareas*, la Entrevista Semiestructurada 1, la Entrevista Semiestructurada 2 y el documento de Análisis de la Práctica nos brindaron evidencias e indicios del conocimiento especializado de Daniela cuando enseña la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

V.2.2. Tareas de apertura [Planificación_Daniela_2. 26-47]. Conocimiento especializado de Daniela.

En este trabajo, el concepto de tareas de apertura lo acuñamos a Mason & Johnston-Wilder (2006), como aquellas que se realizan cuando se comienza el estudio de una lección con diversos propósitos, entre ellos, refrescar la memoria de los estudiantes para el trabajo que se va a realizar (tareas de calentamiento). El propósito de las tareas de apertura y el contenido de las mismas, son establecidas por los profesores en función de diferentes variables, entre las que podemos destacar el nivel educativo y grado que atienden, los planteamientos de los programas de estudios vigentes (en relación con los anteriores), las características de los niños, de la institución y el contexto de la institución. Por lo tanto, el concepto de tareas de apertura nos ha permitido organizar la Planificación de Daniela para fines de caracterización del conocimiento matemático y didáctico que evidencia al enseñar la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad. Es conveniente mencionar que en el apartado anterior, revisamos los elementos que contextualizan el diseño de tareas de Daniela, en este espacio abordamos las tareas de apertura que establece al inicio de su planificación, las cuales, podemos visualizar a partir de las situaciones que presentamos en el siguiente fragmento [P_Daniela_2. 26-41]:

Inicio

VERIFICANDO CONOCIMIENTOS PREVIOS (*Las representaciones que tiene una fracción en sus diferentes formas como la gráfica y la numérica*)

- Mostraré una caja con algunas divisiones con cartoncillo. Preguntaré a los alumnos: -¿En cuántas partes está dividida la caja? (Con solo un cartoncillo atravesado a la mitad de la caja). Después pondré una botella de agua en una de las mitades, para cuestionar a los alumnos: -¿Qué parte de la caja está ocupando la botella? Luego colocaré un cartoncillo atravesando a la mitad del cartoncillo anterior y volveré a cuestionar: Y ahora, ¿en cuántas partes está dividida la caja? Y volveré a colocar una botella de jugo en una de las partes para finalmente solicitar a los alumnos darle respuesta a esta pregunta: -¿Qué parte de la caja está ocupando la botella?

-Pasaré a 5 alumnos. Cada uno tomará una tarjeta donde estará anotada una fracción. En el pintarrón colocaré una lámina con 5 pequeños y simples ejercicios de representaciones con fracciones. De manera grupal, se realizará el razonamiento y los alumnos indicarán qué fracción corresponde a cada ejercicio, indicándole a su compañero coloque la tarjeta en la parte de la lámina donde se encuentre éste.

En el fragmento anterior, Daniela identifica con la palabra *inicio*, la presentación de dos tareas, cuyo propósito es verificar conocimiento previos sobre las representaciones que tiene una fracción de manera figural y numérica. En la primera tarea, Daniela señala se apoyará en una caja, a la cual, realizará algunas divisiones para que los niños expresen las fracciones que represente, en la segunda, entregará a los alumnos algunas tarjetas que tienen diferentes fracciones para que las relacionen con su

representación figural en una lámina; ambas tareas se realizarán cuando comience la clase y de manera grupal. De ahí que definimos el siguiente indicador de *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* de Daniela, ligado a la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* [KMT_ES_T_TA_E]:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce tareas de apertura que permiten verificar los conocimientos previos de los alumnos en relación con algunas representaciones de la fracción (numérica, verbal y figural).

En la Entrevista Semiestructurada 1, agregamos una interrogante que nos permitió obtener evidencia de conocimiento del indicador anterior: “¿cómo organizó su planificación?”, aunque la respuesta de Daniela es extensa, aquí sólo presentamos lo que corresponde al fragmento de Planificación que hemos revisado [ES1_ Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 56-59]:

Primero parto de verificar los conocimientos previos, me refiero a identificar si los alumnos saben qué representa una fracción gráficamente y lo relacionan con el término numérico. Entonces, me baso en analizar los conocimientos previos: que los niños identifiquen las fracciones gráficamente o como parte de cantidades.

En la Planificación y en la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela manifiesta conocer se debe iniciar la clase con la verificación de conocimientos previos de los niños sobre fracciones, de manera específica, señala la representación figural y numérica. Al final de la información que arroja en la entrevista, hace énfasis en su representación figural y su representación en contextos continuos. Más adelante, en la Entrevista Semiestructurada 2, Daniela aporta información sobre la función de los conocimientos previos [ES2_ Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 138-143]:

[...] en los conocimientos previos que pongo en la planeación, primero debo asegurarme que el niño conoce cuánto es un medio, un cuarto en varias expresiones, por ejemplo, en cantidades y en representación gráfica, es decir, que sepan qué son las fracciones, porque si no hubiera tomado en cuenta eso de la representación gráfica, no hubiera podido ponerles este problema inicial (señala la hoja de trabajo que contiene el problema central).

En el fragmento anterior, los conocimientos previos tienen la función de recuperar conocimientos de fracciones de los alumnos para que puedan acceder a la resolución de un problema central. Como hemos identificado, la Planificación, la Entrevista Semiestructurada 1 y 2, nos han permitido

evidenciar el conocimiento que Daniela posee en relación con el diseño de tareas de apertura para rescatar conocimientos previos de los alumnos sobre fracciones.

Más adelante, en el documento de Análisis de la Práctica, Daniela evidencia conocimiento de cómo la activación de conocimientos previos, en el inicio de la clase, favorece la construcción del aprendizaje de la fracción como razón, pues menciona que las actividades que agrega en la Planificación son congruentes con el tema y pretenden que los alumnos demuestren lo que saben sobre el mismo, es decir, tiene el propósito de saber si los alumnos reconocen las fracciones en sus representaciones gráfica (figural) y simbólica (numérica), por ejemplo, cuando se trabaja la identificación de fracciones a partir del empleo de la caja; lo anterior lo fundamenta desde la teoría del aprendizaje significativo propuesto por David Ausubel al señalar establece [AP_Daniela_KFLM_T_1. 188-192]:

[...] el verdadero conocimiento sólo puede ser posible cuando los nuevos contenidos tienen un significado a la luz de los conocimientos que ya tienen, es decir, los nuevos aprendizajes conectan con los anteriores, no precisamente porque sean lo mismo, sino porque de alguna manera se relacionan con estos creando un nuevo significado más amplio o más diverso de lo que ya conocían.

Lo anterior, nos permite identificar:

Daniela_KFLM_T_1. Conoce el rescate de conocimientos previos como una forma de favorecer la construcción del aprendizaje de la razón como significado de la fracción.

En función de lo expuesto en párrafos anteriores, podemos avanzar en la especificidad del conocimiento de Daniela:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1.1. Conoce tareas para verificar conocimientos previos de la fracción como parte-todo en contextos continuos a partir del uso de material concreto (caja).

En el inicio de la clase, Daniela muestra a los alumnos una caja y les pide que representen toda la caja mediante una fracción en el pintarrón, algunos alumnos pasan al pintarrón escriben “un entero” o dibujan una caja. En el documento de Análisis de la Práctica Daniela señala que realiza una pregunta directa sobre la noción de fracción “*Si yo quisiera representar mediante una fracción toda la caja, ¿qué fracción tendría?*” y menciona que debido a que no observan alguna división en la caja responden un entero, lo cual les permitió iniciarse en el contexto de fracciones y agrega “*se sabe que los alumnos reconocen que un elemento sin partición es un entero*”. Así, identificamos:

Daniela_KoT_D_1. Conoce un entero como aquel elemento, objeto o imagen sin partición.

Después Daniela pide representen el entero en el pintarrón, un alumno pregunta que si lo escribe y dibuja, Daniela le contesta que ambas y agrega [AP_Daniela_KoT_R_1. 239-246]:

[...] se le pide que realice ambas, de tal manera que lleva al reconocimiento de que tiene una representación gráfica al mencionar la palabra dibujo, donde efectivamente traza la caja sin ninguna división, sin embargo, se presenta algo no esperado, puesto que el escribirlo se asimiló como docente que lo haría con número, pero lo que el alumno realiza es escribirlo con letra, es decir, de manera textual “un entero” [...] para cumplir con el propósito de la actividad era necesario indicar que lo escrito por el alumno con letra debería de escribirse pero con el uso de números [...]

En este sentido, Daniela pide a los alumnos representar “un entero” con número y, así escriben el número 1 en el pintarrón. A partir de lo anterior identificamos:

Daniela_KoT_R_1. Conoce la representación numérica (1) y figural de un entero (dibujar una caja sin divisiones).

Después de que los alumnos representan de manera figural y numérica un entero, se establecen los siguientes diálogos en la clase [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1.1. 33-55]:

Daniela: Ahora esta caja, yo la parto en dos, por aquí.
/Daniela introduce un pedazo de cartón por uno de los orificios que se hicieron en la caja por la mitad/
Daniela: ¿En cuánto se divide?
Aos: En medios.
Daniela: En medios, ¿cuántos medios tengo?
Aos: Dos.
/Daniela coloca una botella en uno de los espacios que quedan en la caja/
Daniela: Ahora yo pongo esta botella aquí, ¿qué parte de la caja está ocupando el enjuague?
Aos: Un medio.
Daniela: ¿Por qué un medio?
Ao: No sé.
Daniela: Ponga atención. Ahora yo coloco dos de estos pedazos de cartones, ¿en qué está dividida la caja?
Aos: En tercios.
Daniela: Y ahora, ¿cuánto espacio de la caja ocupa este?
/Daniela coloca un botella en un espacio de la caja/
Ao: Un tercio.
Daniela: Y si yo pongo el fabuloso y el agua ¿Cuánto?
Ao: Tres tercios.
Daniela: Entonces hay que dibujar esto en su hojita, y le ponen lo que representa en fracción.

A partir de la primera tarea de apertura, Daniela rescata conocimientos previos de la fracción como parte-todo en contextos continuos a través del empleo de una caja rectangular. En un inicio realiza divisiones a la caja y cuestiona a los alumnos “¿en cuánto se divide?”, obtiene como respuesta “medios, tercios”; seguido de la colocación de objetos en algunas de las divisiones de la misma, que acompaña con la pregunta “¿cuánto espacio de la caja ocupa?”; situación que lleva a los alumnos a enunciar de manera verbal fracciones propias “un medio, tres tercios”. Tal parece que en las repuestas que dan los alumnos sobre en cuánto se divide la caja, atiende a que en el inicio de la clase Daniela pide representen con una fracción toda la caja y la respuesta que obtiene es un entero, en consecuencia, las respuestas que dan están asociadas al tema de fracciones. Así, Daniela evidencia conocimiento de otros subdominios del MTSK:

Daniela_KoT_R_2. Conoce la representación figural y verbal de la fracción como parte-todo a través de material concreto (empleo de caja).

Dentro de las tareas de apertura que Daniela enuncia al inicio de la clase para rescatar conocimientos previos de los alumnos en relación con la fracción como parte-todo, se hacen presentes algunas variables. Después de que Daniela trabajó de manera verbal la identificación de fracciones propias a partir del empleo de la caja, describe en el documento de Análisis de la Práctica [AP_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1.2. 308-312]:

[...] ahora se hace pertinente saber los contextos con los que los alumnos han trabajado en relación con las fracciones, por lo que en la siguiente actividad implementada en la fase de inicio, como se puede apreciar en la figura 3, se pide a los alumnos que relacionen la fracción simbólica a cada una de las situaciones que se presentan en la lámina.

La figura 3 a la que hace referencia consiste en una lámina que pega en el pintarrón, la cual, señala contiene un círculo dividido en partes e iluminada una, un conjunto de barras donde algunas están encerradas, así como dos cantidades de las que se extraen algunas cantidades. Enseguida, entrega a diferentes alumnos algunas tarjetas con la representación numérica de fracciones con el propósito de que las relacionen; lo anterior, nos ha permitido identificar:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1.2. Conoce tareas para verificar conocimientos previos de la fracción como parte-todo de manera figural, numérica y verbal en contextos continuos y discretos a partir del uso de material (láminas y tarjetas).

A continuación presentamos la lámina que Daniela mostró a sus alumnos:

Ilustración 4. Representación figural de fracciones en contextos continuos o discretos



La información que nos proporciona la lámina anterior, nos permite identificar:

Daniela_KoT_R_3. Conoce la representación figural de fracciones (parte-todo) en contextos continuos (círculo y rectángulos) y discretos (cantidad de huevos y cantidad de dinero) a través de una lámina.

Enseguida presentamos diferentes fragmentos de registro de la clase que acompañan el trabajo que Daniela realizó a partir de la lámina anterior [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1.2. 71-81]:

Daniela: América me va ayudar a leer, ¿qué dice aquí? /Señala el título de la lámina/
Aa: ¿Qué representa?
Daniela: ¿Qué representa? ¿Qué se imaginan que vamos a hacer?
Aos: Fracciones.
Ao: Fracción.
Daniela: Las fracciones.
Ao: Suma de fracciones.
Aa: Las fracciones [...]
Ao: Qué representa el dibujo [...]
Daniela: Muy bien, pues de todas las aportaciones que hicieron la de Jesús es la más acertada. /Se refiere al alumno que expresa la última participación/

Antes de que Daniela mencione a los alumnos en qué consiste el trabajo con la lámina, los cuestiona para que aporten predicciones sobre lo que van a realizar en clase en función del contenido que observan en la lámina. En las participaciones de los alumnos prevalece la idea de fracciones, mientras que uno de ellos lo asocia con suma de fracciones y otro señala lo que representa el dibujo, sin embargo, Daniela destaca que la participación del último niño es la más acertada.

En la Entrevista Semiestructurada 2, preguntamos a Daniela por qué cuando cuestionó a los alumnos en relación con el trabajo con la lámina, ellos le respondían “*fracciones, suma de fracciones*” y, menciona [ES2_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1.2. 291-300]:

Se debe a algo crucial en todo; el primer dibujo que les presento es un círculo y está dividido, los niños de inmediato lo relacionan, pues desde que empiezan a ver la fracción se ha manejado “dibuja un círculo, divídelo en dos, ese es un medio, son fracciones” y, siempre de manera gráfica. Al ver esa representación del círculo, reconocen que son fracciones y relacionan esa forma gráfica con las fracciones [...] es algo que se ha universalizado, los niños lo saben aunque no se les diga de qué va a tratar el tema.

En el fragmento anterior identificamos:

Daniela_KMLS_TAP_1. Conoce el estudio de la representación figural de las fracciones (parte-todo) como el que marca el inicio del trabajo con las mismas, por lo cual, los alumnos asocian la representación figural en contextos continuos al tema de fracciones.

Después de que Daniela pegó la lámina y cuestionó a los niños sobre su contenido, solicitó a algunos alumnos pasaran al frente para pegarles tarjetas que tenían diferentes fracciones:

Ilustración 5. Representación numérica y figural de fracciones



Debido a que en la lámina se presentan cuatro situaciones de representación de fracciones, Daniela muestra cuatro tarjetas con fracciones, mismas que entrega a algunos alumnos; la primera alumna tiene la fracción $\frac{2}{4}$, el segundo alumno $\frac{1}{2}$, el tercero $\frac{1}{10}$ y el cuarto $\frac{1}{6}$. Como observamos, todas las fracciones son propias, de las cuales, tres son unitarias. Así, identificamos:

Daniela_KoT_R_4. Conoce la representación numérica de la fracción como parte-todo (fracciones propias) en tarjetas.

El trabajo que Daniela continúa en la clase consiste en favorecer que los alumnos relacionen las fracciones con su representación figural (lámina -contextos continuos y discretos-) y numérica (tarjetas). Enseguida presentamos los diálogos que se establecen para cada una de las fracciones de las tarjetas: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{4}$. Comenzamos por la representación figural y numérica de $\frac{1}{10}$ [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 89-119]:

Daniela: A ver niños [...] este niño ¿qué fracción tiene? /señala el alumno que tiene un décimo/
Aos: Un décimo.
Daniela: Un décimo. ¿En qué parte creen que va?
/Daniela señala los dibujos colocados en el pintarrón/
Aos: ¡En los huevos! ¡En los huevos! [...]
Ao: En los huevos.
Daniela: ¿Por qué en los huevos?
Ao: Está representado [...]
Daniela: Está representado [...] ¿Cuántos huevos tenemos en total?
Aos: Trescientos sesenta.
Daniela: Trescientos sesenta y ¿cuántos huevos hay en la bolsa?
Aos: Sesenta.
Daniela: Sesenta, ¿qué parte de fracción es de aquí? /señala la caja que tiene escrito 360 huevos/
Aa: Un sexto porque [...]
Daniela: Un sexto, ¿por qué?
Aa: Porque seis por sesenta nos da trescientos sesenta. Trescientos sesenta lo dividimos entre sesenta nos da seis.
Daniela: Muy bien [...]
Ao: En el de mil doscientos, es un décimo; ciento veinte por diez son mil doscientos.
Daniela: Entonces, ¿en dónde va?, ¿aquí o aquí? /señala la caja de huevos y la cantidad de 1200/
Aos: ¡Ahí, ahí...!
Daniela: Entonces [...] ¿En dónde?
Aos: En el de mil doscientos.
Daniela: ¿Si se entiende porqué en el de mil doscientos?
Ao: Es un una décima parte ciento veinte de mil doscientos.
Daniela: ¿Diana si se entiende aquí, porqué es un décimo?, ¿si Monse?
/Los alumnos hacen un gesto de afirmación. El alumno que tiene la tarjeta con $\frac{1}{10}$ lo pega en 120/

En el trabajo que Daniela realiza con la con la tarjeta $1/10$ prevalecen diferentes tipos de cuestionamientos: a) *¿qué fracción tiene?*, b) *¿en qué parte creen que va?*, c) *¿por qué en los huevos?*, *¿cuántos huevos tenemos en total?*, *¿cuántos huevos hay en la bolsa?*, *¿qué parte de fracción es de aquí?*, *¿por qué?* d) *¿en dónde va?*, *¿aquí o aquí?* d) *¿en dónde?*, *¿se entiende por qué en el mil doscientos?*; las anteriores cumplen con diferente propósito: a) identificar una fracción de manera verbal a partir de su representación numérica, b) asociar una fracción con su representación figural en contextos continuos o discretos (en este caso discretos), c) que los alumnos den una justificación a su respuesta y, a la vez, identifiquen las cantidades que se establecen para el caso de los huevos (cantidad de huevos en caja y cantidad de huevos en bolsa) en la lámina, misma que previamente han seleccionado algunos alumnos, lo cual le permitirá llevarlos a la reflexión de la fracción que se encuentra representada en la situación señalada y no en la tarjeta, por lo que nuevamente cree importante justifiquen su respuesta y, d) al final, Daniela busca que los alumnos definan en dónde va la fracción representada en la tarjeta ($1/10$), es decir, la relacionen con la cantidad de huevos (360) o la cantidad de dinero (1200), al escuchar la respuesta de los alumnos, que corresponde a lo esperado (1200), vuelve a preguntar el porqué, sin embargo, en ese momento se corta la actividad para pasar a la identificación de otra fracción.

En términos generales, las preguntas emitidas por Daniela nos permiten identificar el conocimiento que tiene sobre la representación numérica, verbal y figural de la fracción $1/10$ (KoT_R), ya que con las anteriores los orienta para que contesten de manera correcta el planteamiento propuesto. Además, en el documento del análisis de la práctica Daniela, identifica a la pregunta como una herramienta didáctica en el desarrollo de la tarea para rescatar conocimientos, lo cual expresa [AP_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 366-377]:

La fracción que se va a ubicar es la de $1/10$ y se realiza la pregunta a todo el grupo, los cuales rápidamente lo relacionan con la caja de huevos que se encuentra en la lámina (Figura 3), así que como estrategia para que los alumnos reflexionen y justifiquen, se emplea como herramienta didáctica la pregunta. Se pregunta a uno de los alumnos que ofrece dicha respuesta el porqué, si la respuesta no es muy contundente o detallada, se procede a realizar preguntas más concretas y con cierta intencionalidad, donde se realiza una especie de acompañamiento a los alumnos para reconocer cada una de las partes que componen la situación y el tipo de relación de cada una a partir de su posición para llegar a una aseveración, producto o resultado lógico, porqué es acertada la manera en la que se le puntualiza la cantidad total de los huevos y la cantidad que se extrae. Y se califica como acertada, ya que finalmente una de las alumnas logra dar una respuesta y justifica que es otra fracción la que en ello corresponde.

En función de la información que proporciona el fragmento anterior, identificamos:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce la pregunta como una herramienta didáctica para que los alumnos reflexionen y justifiquen sus respuestas al establecer algunas relaciones entre la representación numérica, verbal y figural de algunas fracciones (parte-todo).

Después de que Daniela desarrolló la clase, le preguntamos a qué se debía que algunos alumnos relacionaran la fracción numérica $1/10$ con la imagen de la caja y la bolsa de huevos y expresó [ES2_Daniela_KFLM_IC_1. 306-309]:

La caja tenía 360, yo pienso que al dividir $60/6$ les daba un 10 o porque terminaban en cero o porque si multiplicaban cierto número por 10, sólo le agregaban un cero y veían 360 como una cantidad cerrada y no con un cinco u otro número al final; por eso, de inmediato relacionaban el diez con el décimo.

En el fragmento anterior, identificamos indicio de conocimiento de Daniela sobre las formas de interactuar de los alumnos con un contenido matemático, en este caso, con la representación figural de $1/10$ (KFLM_IC_1). Daniela señala que los alumnos pudieron asociar $1/10$ con la caja y bolsa de huevos porque la cantidad que contenían era 360 y 60. En general, asocia estas cantidades porque mencionan que tienen algo en común: el último dígito de las cantidades es cero, aunque en un inicio señala que al dividir $60/6$ obtenían diez, pero no obtuvimos información para profundizar al respecto. De ahí que identificamos:

Daniela_KFLM_IC_1. Conoce que los alumnos pueden asociar valores semejantes de diferentes cantidades para relacionar/justificar la representación numérica y figural de una fracción (contexto discreto).

Es importante destacar que antes de la ejecución de las tareas de apertura, Daniela mencionó que creía que la representación figural de $1/10$ les resultaría fácil. De ahí que señala que la aplicación de este tipo de situaciones demanda al profesor cuestionar constantemente al alumno sobre el porqué de sus respuestas, ya que pueden existir casos donde los alumnos no relacionen el número diez con las cantidades cerradas y pueden dar otra respuesta, quizá la correcta. Finalmente, en el documento de Análisis de la Práctica, Daniela menciona que en función de las interacciones anteriores, en el trabajo con la fracción $1/10$ se puede identificar cómo los alumnos conciben a las fracciones desde el subconstructo parte-todo para avanzar en el tema de clase. Enseguida presentamos los diálogos que

emergen entre profesor y alumnos durante la clase cuando se aborda la tarjeta $\frac{1}{2}$ [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 121-131]:

/Pasa otro de los alumnos que están formados, que trae como valor fraccionario $\frac{1}{2}$ /
 Aos: En el círculo.
 Aa: Porque es la mitad de un entero.
 Daniela: Porque es la mitad de un entero, y ¿qué te hace pensar que esa es la mitad?
 Aa: ¿Cómo?
 Daniela: ¿Qué te hace pensar que esa es la mitad?
 Aa: Porque está coloreada la mitad, está dividido en dos el círculo.
 Daniela: Entonces, ¿dónde vamos a poner el medio?
 Aos: En el círculo.
 Ao: Y también en el de los verdes.
 Aos: Pero es más representable en el círculo.

En el fragmento anterior podemos observar que Daniela pide a los alumnos justifiquen por qué la tarjeta que tiene $\frac{1}{2}$ va en el círculo y plantea algunas preguntas como herramienta didáctica. En un primer momento, se refieren a la fracción $\frac{1}{2}$ como mitad de un entero. La alumna señala que la mitad está coloreada y el círculo está dividido en dos. Enseguida Daniela pregunta al resto de la clase “¿dónde vamos a poner el medio?”; la respuesta de los alumnos “en el círculo”, lleva a que Daniela institucionalice que la tarjeta que tiene $\frac{1}{2}$ está representada en el círculo (KoT_R).

En la Entrevista Semiestructurada 2, Daniela menciona que la representación figural de la fracción $\frac{1}{2}$ resultó fácil para los niños y agrega [ES2_Daniela_KFLM_FD_1. 332-339]:

Porque son cantidades pequeñas, en cuestión de un medio; pero, entre más chico el número de la fracción, más grande es la cantidad. Me parece que siempre han manejado un entero, después se les enseñan un medio, no les enseñan tres quintos o un quinceavo. Con frecuencia, un medio siempre lo ponen como ejemplo en cada tema de fracciones, por eso se les va grabando más a los niños y de inmediato reconocen que es un medio. En el caso de cantidades más elevadas como trescientos sesenta de los huevos empiezan a pensarle más [...] un medio es como el referente principal para de ahí desplegar el tema de las fracciones.

En el fragmento anterior, Daniela evidencia conocimiento de algunas fortalezas de los alumnos al identificar que la representación figural de $\frac{1}{2}$ está asociadas al valor pequeño de las cantidades (1 y 2), además, constituye un ejemplo frecuente cuando se comienzan a enseñar las fracciones, tanto su representación numérica como figural ($\frac{1}{2}$). En términos concretos identificamos:

Daniela_KFLM_FD_1. Identifica el conocimiento que los alumnos tienen de la representación figural de una fracción ($1/2$) desde que inician su formación, en algunos casos les permite establecer la relación entre la representación numérica y figural de una fracción.

La relación figural y numérica de fracciones que Daniela pretende que los alumnos logren identificar con las últimas tarjetas ($1/6$ y $2/4$), se ve influenciada por los conocimientos puestos en juego al trabajar con las primeras dos tarjetas ($1/10$ y $1/2$). De ahí que, en el caso de la fracción $1/6$, Daniela intervenga para validar los procedimientos de los alumnos y en consecuencia, defina cuál es la situación de la lámina que le corresponde. Recordemos en el trabajo con la fracción $1/10$ las participaciones de los alumnos, pero sobre todo, las intervenciones de Daniela que dieron la pauta para avanzar en la representación figural y numérica de $1/6$. Veamos lo que sucede en la clase cuando se vuelve a retomar la fracción $1/6$ [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1.2. 132-144]:

/Pasa otro alumno de los que tienen la tarjetita con el valor fraccionario de $1/6$ /
 Ao: Un sexto.
 Aos: En los huevos [...]
 Aa: En los huevos de gallina.
 Daniela: ¿Por qué?
 Aa: Porque tienen [...]
 Aa: Ya sabemos que sesenta por sesenta da trescientos sesenta, es un sexto.
 Daniela: ¿Sí? [...] ¿Sí Jesús?
 Ao: Entonces también sé otro [...] pero se me olvidó. Es que haga de cuenta que seis por seis, treinta y seis.
 Daniela: Muy bien este es otro procedimiento que podemos hacer. Entonces ¿en dónde ponemos el sexto?
 /El alumno señala el espacio en donde está el dibujo de la caja de huevos/

En el fragmento anterior, observamos que el conocimiento que tiene Daniela sobre la representación numérica y figural de la fracción, la lleva a cuestionar a los alumnos por qué señalan que la tarjeta de $1/6$ va en la caja de huevos y al final, en función de lo que dicen los alumnos, menciona que existen dos procedimientos para justificar la relación entre la representación numérica y figural. De ahí que identifiquemos:

Daniela_KoT_P_1. Conoce que la representación figural de la fracción $1/6$ se puede multiplicar sesenta por sesenta que es igual a trescientos sesenta o multiplicar seis por seis que da como resultado treinta y seis.

En la Entrevista Semiestructurada 1 preguntamos a Daniela a qué cree se debían los procedimientos que expusieron los niños: “*porque sesenta por sesenta son trescientos sesenta; porque seis por seis son treinta y seis*”; y expresa [ES2_Daniela_KFLM_IC_2. 356-359]:

Porque la multiplicación de tres por ochenta, la realizan tres por ocho igual a veinticuatro, son doscientos cuarenta, porque el ochenta ya son décimos; digo que hay un cálculo avanzado porque los niños ya no hacen la multiplicación tal y como es el algoritmo convencional, sólo multiplican estos dos términos tres por ocho y se le agrega el cero.

En el fragmento anterior, Daniela retoma el primer procedimiento empleado por los alumnos para relacionarlo con el segundo, es decir, señala que quizá el alumno está empleando un cálculo mental más avanzado, expresa: seis por seis igual a treinta y seis, igual a trescientos sesenta. Así, plantea que otro ejemplo puede ser cuando multiplican tres por ocho veinticuatro, doscientos cuarenta; como si fuera tres por ochenta. Así, identificamos:

Daniela_KFLM_IC_2. Conoce que los alumnos pueden emplear el cálculo mental al relacionar/justificar la expresión numérica y figural de fracciones (contextos discretos). En este caso, les permite multiplicar sólo dos cantidades con un dígito (tres por ocho; seis por seis) para después agregar el cero que corresponde a la segunda cantidad (80; 360).

Al inicio del trabajo con la última tarjeta (2/4), Daniela menciona “*ahora tenemos dos cuartos*”; expresa su representación verbal en función de su representación numérica (KoT_R). De inmediato, una alumna señala que va en las rayitas, refiriéndose a la última representación figural de la lámina. Enseguida Daniela pide a los alumnos que mencionen por qué esa respuesta, situación que propicia los siguientes diálogos [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1.2. 145-162]:

Daniela: Ahora tenemos dos cuartos [...]
 Aa: Es donde están las rayitas [...]
 Daniela: A ver América ¿Por qué?
 Aa: Porque como están [...] están encerradas, están dividido en octavos y como está son cuatro /señala el círculo que tiene dos octavos/, entonces son dos octavos, son dos círculos y los dos tienen dos [...]
 Daniela: A ver Chino [...]
 Ao: Cuatro octavos es igual a un medio y dos cuartos es igual a un medio, así que es lo mismo [...] Y así que si le quitamos [...] si le quitamos los cuatro coloreados de los octavos y nada más guardamos dos octavos, ya quedan cuartos y no más quedan dos cuartos y es la mitad.
 Aa: Juntando dos octavos, serían un cuarto y juntando otros dos octavos forma otro cuarto y, un cuarto más un cuarto, forman dos cuartos.
 Daniela: Muy bien [...]
 Aa: Es que los palitos que están encerrados son cuatro y el total de rayitas son ocho, entonces son cuatro octavos, y cuatro octavos es equivalente a dos cuartos, que es equivalente a un medio.
 Daniela: Muy bien, lo colocamos aquí /señala la figura que representa dos cuartos/

En esta parte de la clase los alumnos expresan diferentes justificaciones para señalar que la fracción $\frac{2}{4}$ se relaciona con la situación de las barras que se presenta en la lámina. Ante la variedad de participaciones de los alumnos, preguntamos a Daniela si esperaba que dieran esas respuestas y, de inmediato contesta [ES2_Daniela_KFLM_IC_3. 372-376]:

[...] son fracciones equivalentes [...] cuando sacaron esa parte, se presenta otro conocimiento previo que se debió de haber tomado en cuenta para saber fracciones como razones, porque las razones también son fracciones equivalentes, bueno expresadas ya como fracciones equivalentes.

En el fragmento anterior, identificamos que:

Daniela_KFLM_IC_3. Conoce que los alumnos pueden obtener fracciones equivalentes para relacionar/justificar la representación numérica y verbal de fracciones (contexto discreto).

Daniela_KMLS_TAP_2. Conoce que las fracciones equivalentes se abordan antes de estudiar la razón como significado de la fracción.

Daniela_KoT_D_2. Conoce que las fracciones se pueden definir como razones y ambas pueden ser equivalentes.

A partir de la ejecución de la segunda tarea de apertura, la cual se basa en la representación numérica, figural y verbal de la fracción en el trabajo con la lámina y las tarjetas, identificamos Daniela tiene conocimiento sobre los registro de representación de la fracción en contextos continuos y discretos

(KoT_R); lo anterior se argumenta con lo expresado en los párrafos anteriores y en un fragmento de la Planificación que presenta al final del diseño de las tareas de apertura [P_Daniela_KoT_R_5. 42-47]:

(En la lámina se coloca la representación que tiene una fracción cuando se refiere a figuras geométricas fragmentadas en partes iguales, es decir, de forma gráfica. También fracciones para significar partes de cantidades tomándolas en cuenta como un entero, de forma numérica. Se trata de abarcar lo que puede ser representado mediante fracciones. Así se conocerá si los alumnos relacionan las representaciones que se pueden tener y como se opera con las diferentes formas ya sea gráfica y/o numérica)

En función del fragmento de Planificación anterior, identificamos que:

Daniela_KoT_R_5. Conoce la representación figural, numérica y verbal de fracciones como parte-todo (propias) en contextos continuos y discretos.

En la Entrevista Semiestructurada 2, posterior al desarrollo de la clase, preguntamos a Daniela cuáles fueron algunas de las fortalezas de los alumnos en la actividad de la lámina, a lo cual contestó [ES2_Daniela_KFLM_FD_2. 386-393]:

Relacionar la imagen gráfica con las fracciones de las tarjetas. También identificar fracciones cuando se manejan cantidades, por ejemplo trescientos sesenta, que se divide entre seis y da sesenta, entonces es un sexto y el de las barras que se dividía en cuartos, son dos cuartos, con lo que los niños obtuvieron fracciones equivalentes. En términos generales representaron con fracciones lo que se veía en la lámina, además me ayudó a saber que los niños manejaban cuartos, sextos, décimos y medios, saber qué se les facilitaba más y qué se les facilitaba menos; otra fortaleza en los niños fue el cálculo mental, por ejemplo, seis por seis es igual a treinta y seis, en lo de trescientos sesenta.

A partir del fragmento de entrevista anterior, identificamos que:

Daniela_KFLM_FD_2. Conoce los alumnos identifican la representación numérica y figural de la fracción en contextos continuos y discretos, la obtención de fracciones equivalentes y el empleo del cálculo mental se convierte en una fortaleza que les permite establecer la relación entre la representación numérica y figural de una fracción como parte-todo.

Cuando preguntamos a Daniela por qué no representar todas las fracciones a través de un círculo, enunció que las fracciones se tocan en diferentes tipos de temas, por ejemplo, de manera gráfica y en cantidades de dinero (contextos discretos), además señala que estas situaciones se manejan en los problemas que vienen en los libros. Así, identificamos:

Daniela_KoT_F_1. Conoce que las fracciones se emplean en diferentes situaciones, por ejemplo, su identificación en cantidades de dinero (contextos discretos).

Antes de concluir con este apartado del conocimiento especializado de Daniela en el diseño y ejecución de las tareas de apertura, recuperamos información que proporciona en algunos de los instrumentos aplicados y tiene relación con lo que diseñó. Durante la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela expone cómo los niños se inician en el estudio de las fracciones en los grados anteriores a quinto [ES1_Daniela_KMLS_TAP_3. 25-36]:

E: Y, ¿cuál cree que son los significados o partes de la fracción que se abordan en los grados anteriores?

Daniela: Los significados de la fracción primero se abordan como enteros, y luego se le explica al niño que esta fracción, por ejemplo, en un dibujo (se levanta y realiza un círculo), a los niños se les empieza con representaciones gráficas, es decir, que este círculo representa un entero y se representa con un uno (escribe 1) y luego se empieza con medio (representa en un círculo un entero y luego un medio). Entonces cuando los niños logran identificar que todo esto es un entero (sombrea el círculo) y la mitad de esto es un medio (lo sombrea), se va a lo que es la representación numérica. Entonces a los niños siempre se les explica que el de arriba es el numerador y el de abajo el denominador, es decir, las dos partes de la fracción; el que numera cuántas partes de una fracción hay sombreadas (señala el uno de $\frac{1}{2}$).

En el fragmento anterior, identificamos que:

Daniela_KMLS_TAP_3. Conoce que el estudio de la fracción en la escuela se inicia con el significado parte-todo en contextos continuos, a partir de su representación figural que va desde un entero hasta un medio, enseguida se favorece la representación numérica de las fracciones. Además, menciona cada parte de la fracción bajo su expresión a/b recibe un nombre: numerador y denominador, donde el primero tiene la función de identificar cuántas partes de una fracción están sombreadas.

Con el indicador de conocimiento anterior culminamos la identificación y caracterización del conocimiento especializado de Daniela en el diseño y ejecución de las tareas de apertura cuando enseña la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad. En los siguientes apartados presentamos un resumen de los indicadores de conocimientos descritos.

V.2.2.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Tareas de apertura.

Las tareas de apertura diseñadas por Daniela aparecen al inicio de la planificación de la clase con el propósito de rescatar conocimientos previos de los alumnos en relación con algunas representaciones de la fracción (numérica, verbal y figural) (**KMT_ES_T_TA_E_1**). Además, Daniela conoce el rescate de conocimientos previos como una forma de favorecer la construcción del aprendizaje de la razón como significado de la fracción (**KFLM_T_1**).

En las tareas de apertura ubicamos dos subtareas donde Daniela trabaja la fracción como parte-todo con algunas variables que se constatan en el diseño de éstas. En la primer subtask Daniela presenta una actividad para verificar conocimientos previos de los alumnos sobre la fracción como parte-todo en contextos continuos a partir del uso de material concreto como una caja rectangular (**KMT_ES_T_TA_E_1.1**). Aquí Daniela muestra indicios de conocimiento de la definición de un entero como elemento, objeto o imagen sin partición (**KoT_D_1**); conoce la representación numérica (1) y figural de un entero (dibujar una caja sin divisiones) (**KoT_R_1**) y conoce la representación figural y verbal de la fracción como parte-todo a través de material concreto (empleo de caja) (**KoT_R_2**); conocimiento que le permite gestionar diferentes interacciones al inicio de la clase.

Una segunda subtask que diseña y aplica Daniela consiste en verificar conocimientos previos de la fracción como parte-todo de manera figural, numérica y verbal en contextos continuos y discretos a partir del uso de una lámina y tarjetas (**KMT_ES_T_TA_E_1.2**). Aquí, destaca las fracciones se emplean en diferentes situaciones, por ejemplo, su identificación en cantidades de dinero (contextos discretos) (**KoT_F_1**). En esta subtask, Daniela evidencia conocimiento de la representación figural de fracciones (parte-todo) en contextos continuos (círculo y rectángulos) y discretos (cantidad de huevos y cantidad de dinero) a través de imágenes y cantidades que presenta en una lámina (**KoT_R_3**). En la Entrevista Semiestructurada 2, muestra indicios de conocimiento del estudio de la representación figural de las fracciones (parte-todo) como el que marca el inicio del trabajo con las mismas, por lo cual, los alumnos asocian la representación figural en contextos continuos al tema de fracciones (**KMLS_TAP_1**). Es en este contexto donde Daniela evidencia conocimiento de la representación numérica de la fracción como parte-todo (fracciones propias) en tarjetas (**KoT_R_4**), cuyas fracciones inscritas son: $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{6}$.

En la ejecución de la subtask 2, Daniela destaca el empleo de la pregunta como una herramienta didáctica para que los alumnos reflexionen y justifiquen sus respuestas al establecer algunas relaciones entre la representación numérica, verbal y figural de algunas fracciones (parte-todo)

(KMT_ES_T_TA_E_1). Al inicio de la actividad, la fracción $1/10$ posiblemente llevó a los alumnos a establecer relación con la cantidad de los huevos (360 y 60), ya que ambas terminaban en cero, por lo cual, conoce los alumnos pueden asociar valores semejantes de diferentes cantidades para relacionar/justificar la representación numérica y figural de una fracción (contexto discreto) (KFLM_IC_1). Aunque conoce que algunos alumnos pueden emplear el cálculo mental al relacionar/justificar la expresión numérica y figural de fracciones (contextos discretos). En este caso, les permite multiplicar sólo dos cantidades con un dígito (tres por ocho; seis por seis) para después agregar el cero que corresponde a la segunda cantidad (80; 360) (KFLM_IC_2), por ejemplo, conoce que para identificar la representación figural de la fracción $1/6$ se puede multiplicar sesenta por sesenta que es igual a trescientos sesenta o multiplicar seis por seis que da como resultado treinta y seis (KoT_P_1). Por último, Daniela conoce que los alumnos pueden recurrir a la obtención de fracciones equivalentes para relacionar/justificar la representación numérica y verbal de fracciones (contexto discreto).

Daniela también conoce algunas de las fortalezas que pueden tener los alumnos al resolver la subtarea 2. Por ejemplo, en la relación entre la representación numérica y figural de la fracción $1/2$, señala que resultó fácil para los alumnos porque son cantidades pequeñas (1 y 2), además, después de abordar el estudio de un entero, con frecuencia, se sigue con el estudio de la fracción $1/2$ (contexto continuo), caso contrario con la representación de fracciones de cantidades como trescientos sesenta (contextos discreto). Así, observamos conoce los alumnos identifican la representación figural de una fracción ($1/2$) desde que inician su formación, lo cual, les permite establecer la relación entre la representación numérica y figural de una fracción como parte-todo (KFLM_FD_1); a lo anterior se une el conocimiento que los alumnos tienen de la representación numérica y figural de la fracción en contextos continuos y discretos, la obtención de fracciones equivalentes y el empleo del cálculo mental (KFLM_FD_2).

En términos concretos, en la subtarea 2, Daniela evidencia conocimiento de la representación figural, numérica y verbal de fracciones como parte-todo (propias) en contextos continuos y discretos (KoT_R_5). Por otra parte, en función de lo que plantean los Programas de Estudio de Educación Primaria, conoce que las fracciones equivalentes se abordan antes de estudiar la razón como significado de la fracción (KMLS_TAP_2). Además, conoce que el estudio de la fracción en la escuela se inicia con el significado parte-todo en contextos continuos, a partir de su representación figural que va desde un entero hasta un medio, enseguida se favorece la representación numérica de las fracciones, donde menciona cada parte de la misma bajo su expresión a/b recibe un nombre: numerador y

denominador, donde el primero tiene la función de identificar cuántas partes de una fracción están sombreadas (**KMLS_TAP_3**).

V.2.3. Tarea principal (Primera parte) [Planificación_Daniela_3. 48-78]. Conocimiento especializado de Daniela.

En este tercer apartado identificamos y caracterizamos el conocimiento matemático y didáctico que Daniela pone en juego durante el diseño y aplicación de una tarea principal para abordar la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en un grupo de quinto grado de educación primaria. Thanheiser et al. (2016) retoman el concepto de tarea propuesto por Stein & Smith (1998) y señalan que las tareas pueden estar compuestas de varios problemas o por un problema complejo. En este trabajo, para fines de análisis denominamos como “tarea principal” aquella que se presenta en el desarrollo de una clase, es decir, después del trabajo de alguna o algunas tareas de apertura (Mason & Johnston-Wilder, 2006) donde se rescataron conocimientos previos sobre el concepto matemático que se estudia en la tarea principal.

En el apartado anterior “tareas de apertura”, identificamos que Daniela evidencia conocimiento de la fracción parte-todo como un significado que se estudia en la escuela primaria previo a la enseñanza del significado razón en quinto grado. Además, recurre al empleo de contextos continuos y discretos para favorecer la representación numérica, figural y verbal de fracciones propias a través de diferentes recursos materiales. Enseguida presentamos el fragmento de la Planificación de Daniela que corresponde a la tarea principal [P_Daniela_3. 48-78]:

Desarrollo

PROBLEMA A RESOLVER (*Desafío matemático a enfrentar*)

-Los alumnos resolverán un problema planteado en la hoja de trabajo 1, de manera individual, pidiendo que anoten sus procedimientos se les dará un tiempo estimado de 15 min.

ESCUELA: _____
NOMBRE DEL ALUMNO: _____
GRADO: _____ GRUPO: _____
1. Resuelve el siguiente planteamiento de manera individual, puedes usar calculadora pero anota tus procedimientos.

En la empacadora de lechugas de Loreto, trabajan Manuel y Sofia, ellos son los encargados de hacer los pedidos de las cajas que se ocuparán para empacar las lechugas que se cosechan. Ayúdales a encontrar lo siguiente:

Si en 4 cajas se empacan 64 lechugas...

1. ¿Cuántas cajas se ocuparán para empacar 112 lechugas? _____
2. ¿Cuántas cajas se ocuparán para 32 lechugas? _____
3. ¿Qué parte de la caja corresponde a una lechuga? _____
4. ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas? _____

PROCEDIMIENTO:

(En esta hoja de trabajo se presenta una situación que es el problema central de la clase en el que se involucra la representación de relaciones entre cantidades a manera de razón y a su vez en fracción, encontrando el valor unitario. Este problema se presenta en primera instancia para que los alumnos se enfrenten al desafío de resolverlo, lo cual lo tendrán que hacer con las herramientas que cuenten previamente)

-Se pedirá a un mínimo de tres o alumnos compartan su procedimiento así como sus resultados. Se hará la formulación sin que todavía se involucre la validación. Los resultados se registrarán en el pintarrón para posteriormente retomarlos.

El fragmento anterior, que hemos denominado “tarea principal”, se identifica el “problema a resolver” o “desafío matemático a enfrentar” para enseñar la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad; complementa esta información al citar que *los alumnos resolverán un problema en una hoja de trabajo 1*, de manera individual. Para finalizar, menciona la dinámica posterior al trabajo individual con la hoja de trabajo que previamente entregó, sólo pretende que se expresen en el pintarrón las formulaciones realizadas por los alumnos, sin pasar a la validación de los procedimientos.

En la primera parte de la tarea principal, Daniela plantea algunos datos personales generales que deben ser registrados por cada uno de los alumnos (escuela, nombre del alumno, grado y grupo). Enseguida presenta la consigna de la tarea, es decir, las indicaciones que deben atender, en este caso, señala, se debe resolver de manera individual, se permite usar calculadora, pero deben escribir sus procedimientos. Así, da paso a la presentación del “problema central”, que para fines de análisis hemos denominado “tarea principal”. El contexto del problema hace referencia a una empacadora de lechugas, donde Manuel y Sofía deben solicitar las cajas que se requieren para empacarlas; situación que involucra a los alumnos de quinto grado en el apoyo a los anteriores a través de la resolución de una serie de cuestionamientos, cuyo punto de partida es “*si en 4 cajas se empacan 64 lechugas...*”, donde se establece una relación entre la cantidad de cajas respecto a la cantidad de lechugas, para el primer caso, la cantidad está compuesta por una cifra (4) y, en el segundo, por dos cifras (64).

En la pregunta 1 y 2 se establecen relaciones de proporcionalidad directa, donde se pretende encontrar la cantidad de cajas para 112 lechugas; cantidad mayor al enunciado de partida, así como encontrar una cantidad menor al enunciado dado (número de cajas que se ocuparán para 32 lechugas). La fracción como parte-todo aparece en la pregunta 3 cuando Daniela solicita que los alumnos identifiquen el espacio que ocupa una lechuga (parte) en una caja (todo) para obtener una fracción unitaria. Por último, en la pregunta 4, aparece la noción de razón como la relación entre cantidad de cajas y lechugas. En relación con la tarea principal, Daniela expresa en la Entrevista Semiestructurada que 1[ES1_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 77-79]:

El problema principal se basa en hacer una comparación de cantidades que es en lo que se basa la razón; esa comparación de cantidades la van a expresar de forma fraccionaria.

Como podemos observar, Daniela menciona que en el problema principal está en juego la razón (comparación de cantidades) y la fracción (expresión de la comparación de cantidades), lo que evidencia su conocimiento en relación con los conocimientos matemáticos que pretende favorecer en el desarrollo de la clase: razón y fracción. A partir de lo anterior, identificamos diferentes indicadores de conocimientos, entre ellos destacamos el indicador relacionado con la enseñanza de las matemáticas, de manera específica con la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* [KMT_ES_T_TA_E]:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. Conoce una tarea principal para abordar la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en un contexto específico (lechugas) a partir del planteamiento de un problema.

Daniela_KoT_D_1. Conoce que la razón y la fracción son una representación de relaciones entre cantidades que guían a encontrar el valor unitario.

Daniela_KoT_D_2. Conoce la razón como una comparación de cantidades.

Daniela_KoT_D_3. Conoce a la fracción como la expresión de la comparación de cantidades.

En otro momento de la Entrevista Semiestructurada 1 interrogamos a Daniela sobre por qué plantear el “problema principal” en un contexto de lechugas, a lo que responde [ES1_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 312-317]:

Porque los niños son de una escuela de la cabecera municipal de Loreto, Zacatecas. Muy cerca de la cabecera está una empacadora de lechugas, entonces los niños tienen más conocimiento de que han visto a los lechugeros [...] por eso, así se va a empezar la clase, para platicar sobre los lechugeros, si conocen una empacadora cerca; el propósito es se contextualice el problema. Así, se utilizan estos recursos para que los niños los relacionen con algo de su comunidad.

A partir del fragmento anterior, identificamos que:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. Conoce que una tarea principal está compuesta por un problema principal que gira en torno al contexto de los alumnos, en este caso, una empacadora de lechugas.

Durante la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela señala que la situación problemática descrita en la hoja de trabajo 1 constituye la parte más fuerte de la clase y comenta [ES1_Daniela_KMT_T_1. 67-69]:

[...] en esta situación los alumnos hacen lo que es la fase de acción, contestan el problema, sin ayuda, de manera individual y sólo se les da oportunidad de utilizar los conocimientos que tienen como base.

En este fragmento Daniela menciona que cuando los alumnos resuelven el problema de la tarea principal se inician en una fase de acción, misma que atribuye al enfoque de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD); conocimiento que evidencia en la Videograbación de la clase, Entrevista

Semiestructurada 2 y el documento de Análisis de la Práctica. En éste último, Daniela señala recurrió a la TSD como metodología para el diseño de su Planificación [AP_Daniela_KMT_T_1. 78-96]:

La Teoría de las Situaciones Didácticas es un dispositivo que permite guiar la actuación docente, que consiste en propiciar determinados procesos en el aula interdependientes que buscan la generación de un aprendizaje significativo a partir de situaciones problemáticas. Guy Brousseau (2007) en su libro “*Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*” explica en qué consiste este concepto de situaciones y la clasificación o tipologías de situaciones que se derivan a su vez de ésta. Las situaciones son consideradas como:

Una “situación” es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar este medio un estado favorable es una gama de decisiones que dependen del uso de un conocimiento preciso. Consideramos el *medio* como un subsistema autónomo, antagonista del sujeto. Al tomar como objeto de estudio las circunstancias que presiden la difusión y adquisición de los conocimientos, nos interesamos, pues, por las situaciones [...] es, entonces, un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente que la considera como una herramienta (pág. 17)

Es un problema que el docente genera en clase, con la firme intención de que los alumnos actúen sobre éste movilizándolo los conocimientos que poseen y relacionándolos para estructurar procedimientos propios y buscar solución a dicho problema, lo cual es muy probable que descubran nuevos conocimientos que posteriormente serán institucionalizados por el profesor.

En este fragmento del documento de Análisis de la Práctica, Daniela se refiere a la TSD apoyándose en los argumentos de Brousseau (2007). Señala que dicha teoría es un dispositivo que guía la actuación del docente y busca un aprendizaje significativo en función de situaciones problemáticas. Así, retoma la definición de situación que maneja Brousseau (2007, p. 17) “un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado”. Además, agrega el docente debe generar el problema en la clase para que los alumnos traten de resolverlo con base en los conocimientos que tienen y, quizá, al presentarse nuevos conocimientos el profesor los institucionalizará; lo descrito, nos permite identificar que:

Daniela_KMT_T_1. Conoce la TSD (Brousseau, 2007) como una metodología que recurre a situaciones problemáticas para la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

Como podemos observar, la información que brinda Daniela evidencia conocimiento de que las situaciones problemáticas que involucra en su Planificación (tareas de apertura y en principal) atienden a la perspectiva de la TSD, lo cual la lleva a citar en el documento de Análisis de su Práctica, que las situaciones didácticas que emanan de dicha teoría pueden ser identificadas como fases y

desarrolladas en diferentes momentos de la clase. En este contexto, rescatamos el indicio de conocimiento que Daniela expresó en la Entrevista Semiestructurada 1 en relación con la fase de acción que se hace presente en su clase cuando los alumnos se enfrentan a la tarea principal; aportación que se enriquece y convierte en evidencia de conocimiento cuando en el documento de Análisis de la Práctica presenta la fase de acción como la primera de la situación didáctica [AP_Daniela_KMT_T_1.1. 99-103]:

[...] dentro de ésta el alumno entra en contacto con el medio, es decir, puede ser una problemática a la cual le debe dar solución, así mismo comienza un proceso de interacción dentro del cual el alumno pone en juego el bagaje de conocimientos que posee y que relaciona para tomar decisiones que le ayuden a estructurar estrategias que le permitan superar al medio determinado.

Bajo las condiciones anteriores emerge el siguiente indicador de conocimiento:

Daniela_KMT_T_1.1. Conoce la fase de acción como una situación de la TSD que permite a los alumnos resolver un problema donde se aborda la noción de razón en su doble manifestación.

Después de que Daniela presentó la tarea principal, en la Entrevista Semiestructurada 1 le preguntamos por qué en la Planificación menciona que los alumnos pueden recurrir a la división y a la multiplicación en la resolución de las tareas que propone, la información que brinda la asocia con la tarea principal [ES1_Daniela_KFLM_IC_1. 275-284]:

La división porque se está repartiendo, en lo que es el primer planteamiento y, lo que es la multiplicación, porque en el problema central, lo que les estoy pidiendo a los alumnos es que interpreten que, si en cuatro cajas se empacan sesenta y cuatro lechugas, para cuatro cajas son 64 lechugas. Entonces, para saber cuántas lechugas van en una caja, pues se haría lo que es la división, por eso digo que pueden recuperar esta división. Ahora, con respecto a la multiplicación se voltean las incógnitas, se voltean las variables en el problema; ya sería si en una caja tengo dieciséis lechugas, cuántas ocupo para llenar [...] por ejemplo, las otro cuatro cajas; a partir de eso se desprende lo que es la fracción y luego que lo den a conocer como un razón. Por eso pueden utilizar lo que es la multiplicación y la división.

En función del fragmento de entrevista anterior identificamos que:

Daniela_KFLM_IC_1. Conoce que los alumnos pueden recurrir a la división o a la multiplicación para resolver algunas interrogantes de un problema principal donde se plantea la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación. En otro fragmento de la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela

plantea otras posibles estrategias que pueden emplear los alumnos para resolver la tarea principal [ES1_Daniela_KFLM_IC_2. 331-344]:

E: ¿Cuáles cree que serán los procedimientos y estrategias que emplearán los niños para resolver la actividad 1 o el problema central como usted lo denomina en el plan de clase?

Daniela: Como estrategia utilizarían lo que son las operaciones aritméticas, de multiplicación y división y, como procedimiento, debido a que hago mención de cajas y lechugas, pueden hacer los dibujos. Entonces sería gráficamente o con operaciones, aunque también por la serie de preguntas que se les hacen, puede que los niños realicen una tablita [...].

E: ¿Dónde cree que pueden realizar una tablita? ¿Para cuál de estas preguntas?

Daniela: Para la primera pregunta, porque dice si en 4 cajas empaacan 64 lechugas ¿cuántas cajas se ocuparán para empaacar 120 lechugas? Realizarían una tablita porque puede que los niños busquen el valor unitario para encontrar en una caja cuántas lechugas hay y, ahora, una caja son estas [...] y cuatro caja son estas [...], pero en 112 lechugas, cuántas cajas van a ser. A partir de la tablita pueden establecer una relación y el procedimiento de estrategia que utilicen sería la regla de tres.

En el fragmento anterior, Daniela retoma la multiplicación y la división como las operaciones que los alumnos pueden emplear para resolver algunas preguntas de la tarea principal, pero agrega otros posibles procedimientos. Así, identificamos que:

Daniela_KFLM_IC_2. Conoce que los alumnos pueden representar de manera gráfica la información que se plantea en la tarea principal (cajas y lechugas). *Daniela_KFLM_IC_3.* Conoce que los alumnos pueden elaborar una tabla para ubicar y establecer relaciones entre las cantidades de la tarea principal (en 4 cajas se empaacan 64 lechugas); situación que los puede llevar a encontrar el valor unitario y/o recurrir a la regla de tres.

A partir de lo anterior, indagamos con Daniela sobre las acciones que los niños podrían realizar para responder a cada una de las preguntas. En el caso de la pregunta 1 y 2 menciona que pueden realizar una tabla para encontrar el valor unitario, es decir, en una caja cuántas lechugas hay, a partir de la tabla pueden establecer una relación y quizá emplear la regla de tres. En el caso de la pregunta 3 y 4 señala [ES1_Daniela_KFLM_IC_4. 347-366]:

[...] Luego dice, qué parte de la caja corresponde a una lechuga. Ahí es para que los niños lo pongan de manera de fracción, por ejemplo, si en una caja hay 16 lechugas, 1 lechuga qué parte de la caja va a ocupar. Ah pues un dieciseisavo que es a lo que se quiere llegar.

E: En la última pregunta, ¿qué cree que los niños realicen para contestarla?

Daniela: La última pregunta si va a estar un poquito difícil para ellos, porque a lo mejor no van a estar muy familiarizados con el concepto de razón, va a preguntar y la razón qué es.

E: Y ¿qué les explicaría?

Daniela: Dice cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas. Cuando lo estén resolviendo no se les va a explicar nada, se les va a decir contéstalo como tú puedas, con lo que tú sabes.

[...]

Yo pienso que ahí los niños ni siquiera van a hacer el intento de realizar un procedimiento, porque si no entienden razón, no van a saber si voy a dividir, voy a multiplicar, voy a restar, voy a sumar, porque siempre se da con base en una operación cualquier pregunta de un problema de matemáticas [...]

[...]

E: ¿Y cuál sería la respuesta correcta a esta pregunta?

Daniela: Para una caja son 16 lechugas, pues ya la manera de representarlo de ponerlo en fracción, pues que una lechuga ocupa un dieciseisavo de la parte de la caja.

A partir de la información que brinda Daniela en relación con las posibles respuestas que los alumnos pueden dar a las preguntas 3 y 4 identificamos que:

Daniela_KFLM_IC_4. Conoce que los alumnos pueden recurrir a la representación verbal de una fracción como parte-todo para identificar una lechuga ocupa un dieciseisavo de una caja.

Daniela_KFLM_FD_1. Conoce que cuando los alumnos no están familiarizados con un concepto matemático es posible que de inmediato no intenten resolver las situaciones que lo implican. En este caso, la noción de razón.

Daniela_KoT_R_1. Conoce la representación verbal de la razón (“Para una caja son 16 lechugas”) y la fracción (“una lechuga ocupa un dieciseisavo de la parte de la caja”).

En esta investigación, las evidencias e indicios de conocimientos que Daniela muestra en relación con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas varían en ocasiones en función del momento de la investigación que se reflexiona, ya que en cada etapa se hacen presentes diferentes situaciones que condicionan el conocimiento matemático y didáctico que puede poner en juego.

Enseguida agregamos un fragmento de registro que corresponde a la presentación de la tarea principal [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 180-188]:

Daniela: ¿Quién me quiere ayudar a leer el primer punto?, a ver alguien que lea fuerte y claro [...] Yose, ¿me ayudas?
Aa: Resuelve el siguiente planteamiento de manera individual, puedes usar calculadora pero anota tus procedimientos.
Daniela: Muy bien niños, como los estuve observando, vamos a quitar algo que dice [...], para resolver el problema va a ser sin calculadora. Y las operaciones que realicen me las van a hacer aquí abajito donde dice [...]
Aos: Procedimiento
Daniela: Procedimiento. Si no alcanzan de espacio en la parte de atrás [...]

En el fragmento anterior, Daniela inicia la tarea principal solicitando a una alumna apoye con la lectura de la misma. De inmediato agrega que después de observarlos decide que van a resolver el problema sin usar la calculadora y que las operaciones que requieran las van a realizar en la hoja de trabajo donde dice “procedimientos”. Pero, ¿por qué modificar las condiciones iniciales de resolución de la tarea principal (uso de calculadora) y hacer énfasis en plasmar las operaciones que realicen? En la Entrevista Semiestructurada 2 Daniela expresa la situación que la llevó a modificar el planteamiento del problema principal respecto al uso de la calculadora [ES2_Daniela_KFLM_IC_5. 407-413]:

[...] me doy cuenta de la situación en la que están los niños, son capaces de manejar las operaciones de manera mental, no sé bien si escrita, pero no necesitan usar la calculadora porque los números que se manejan dentro de la situación problemática son simples para ellos (de una y dos cifras); por lo cual para hacer ese tipo de cálculos no la necesitan. Me faltaba ese conocimiento de saber qué tanto los niños manejaban diferentes cantidades de números, por eso tomé la decisión de decirles sin calculadora, ya que muchos niños si van a poder resolver la actividad fácilmente.

A partir de la información que Daniela expone rescatamos que:

Daniela_KFLM_IC_5. Conoce que cuando los alumnos resuelven una tarea donde se aborda la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad con cantidades de una o dos cifras, no requieren del empleo de una calculadora, ya que pueden recurrir al cálculo mental.

Más adelante, Daniela agrega que el conocimiento que el maestro adquiere de los alumnos durante el desarrollo de la clase le permite tomar decisiones, por ejemplo, si tuviera una siguiente clase con ellos no les permitiría usar la calculadora porque les impide desarrollar el potencial que tienen. En relación con la insistencia de que los alumnos registraran en el apartado “procedimientos” (tarea principal) las operaciones que realizaran, Daniela comenta que siempre plantea ese apartado porque los alumnos no están habituados a escribirlos, lo cual les ayudaría a que lo escribieran y se dieran cuenta de lo que

hacían, además de que pudieran justificar sus respuestas, pues señala, en algunas ocasiones al preguntar a los niños cómo resolvieron un problema, contestan “*con la mente y no saben explicar*”. Sobre el respecto, en la Entrevista Semiestructurada 2 expresa [ES2_Daniela_KMLS_EA_1. 434-441]:

[...] creo se debe a que en la mayoría de los casos, en matemáticas, se hacen ejercicios de que $5 + 2$ y el resultado igual a siete y se deja así; se le ha dado más importancia a los resultados que a los procedimientos y en este nuevo enfoque, en el de las situaciones didácticas y en el Plan de estudios 2011 de primaria, es darle más importancia a los procedimientos para justificar los resultados, porque existen ocasiones en que los procedimientos están muy bien elaborados y el resultado no puede coincidir, entonces es importante que los niños escriban ese procedimiento, porque si el resultado estaba mal, se puede ver en qué parte del procedimiento se equivocó y es más fácil que corrijan [...]

En este fragmento de entrevista, Daniela destaca el papel de los procedimientos en la resolución de un problema y que, en algunos casos, los alumnos le han dado más importancia al resultado de un problema debido a la forma de trabajo en matemáticas. Por lo anterior, identificamos:

Daniela_KMLS_EA_1. Conoce el enfoque de las situaciones didácticas y el Plan de estudios 2011, en la resolución de una tarea, resaltan la importancia de los procedimientos para justificar los resultados.

En la clase, después de que Daniela explica de manera general cómo van a resolver la tarea principal, realiza diferentes intervenciones donde involucra a algunos alumnos [V_Daniela_KMT_T_1.2. 188-199]:

Daniela: A ver, ¿si quedó claro lo que van a hacer?
Aos: ¡Sí!
Daniela: A ver Diana, ¿qué vamos a hacer?
Aa: Vamos a hacer esto /señala la hoja de trabajo 1 que les entregó la maestra/
Daniela: Vamos a hacer eso, y ¿cómo le vamos a hacer?
Ao: Sin calculadora.
Daniela: Sin calculadora. ¿De manera individual o en equipos?
Aos: ¡En equipos!
Daniela: Es de manera individual [...] ustedes solitos como ustedes puedan. ¿Sí? Como ustedes puedan.
/Los alumnos comienzan a leer el primer planteamiento y a contestar [...]/

En el fragmento anterior, Daniela plantea a los alumnos diferentes interrogantes en relación con la tarea principal: ¿qué van a realizar? (contestar la hoja de trabajo 1), ¿cómo lo van a realizar? (sin calculadora) y ¿de qué manera? (individual); interrogantes que asocia con la “devolución de la consigna”, misma que describe en la Entrevista Semiestructurada 2 [ES2_Daniela_KMT_T_1.2. 475-480]:

E: ¿De dónde viene ese concepto de devolución de la consigna?
Daniela: También viene de la Teoría de las Situaciones Didácticas, hay que devolver la consigna que se le da al niño para saber si la comprendió, y también para que sea consciente de cuál va a ser su papel durante el desarrollo de la clase, qué es lo que va a tener permitido hacer y qué no va a tener permitido hacer; por eso en la clase estaba permitido trabajar de manera individual y no se permitía utilizar calculadora.

Entonces, durante la Entrevista Semiestructurada 2 identificamos que :

Daniela_KMT_T_1.2. Conoce la devolución de la consigna como un elemento de la TSD que permite los alumnos avancen en la comprensión de las condiciones para resolver una tarea principal donde se enseña la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, en este caso se trabaja de manera individual y se prohíbe el uso de calculadora. En el documento de Análisis de la Práctica, Daniela evidencia conocimiento del indicador anterior, a la par de otro concepto [AP_Daniela_KMT_T_1.2. 384-387; 398-401; 413-417]:

En esta parte se presenta a los alumnos el problema a resolver con lo que se aprenda en la situación didáctica. Para tal efecto se dan a conocer las reglas del juego, es decir, lo que se tiene permitido hacer o utilizar para resolver el problema, la modalidad de trabajo, el tiempo del que se dispone [...]
Del mismo se puede señalar que debido a que en la fase de inicio se identificó que los alumnos tienen la facilidad de realizar operaciones, se realiza una adecuación a la consigna, mencionando que no se podrá utilizar calculadora, por lo que es correcto se haya realizado dicha indicación.
[...] se realiza una devolución de la consigna para rescatar si los alumnos entendieron lo que se va a realizar dentro de la siguiente actividad, para ello se le cuestiona a uno de los alumnos, si la respuesta no es muy completa se puede ayudar a través de la realización de preguntas que conduzcan a los alumnos a decir las condiciones que faltaron mencionar por parte del alumno que participó.

A partir de los fragmentos anteriores identificamos que:

Daniela_KMT_T_1.3. Conoce la consigna como las indicaciones que se brindan a los alumnos al inicio de la resolución de una tarea, en este caso, se debe resolver de manera individual y sin el uso de calculadora.

Una vez que Daniela presenta la tarea principal “el problema central”, donde aborda la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, realiza la devolución de la consigna y, pide a los alumnos comiencen a resolverlo a partir de lo que conocen. En este momento de la clase, una niña se acerca con Daniela y le externa que no le entiende, a lo cual le pregunta que si se acuerda de la actividad que realizaron con la caja y que trate de resolverlo como pueda; esta situación

se presenta con otros alumnos a quienes les vuelve a señalar que lo contesten como puedan. En el documento de Análisis de la Práctica Daniela visualiza este tipo de situaciones en la fase de acción de la situación didáctica [AP_Daniela_KMT_T_1.1. 440-459]:

[...] como característica principal de esta fase, la responsabilidad está depositada absolutamente para el alumno por lo que la intervención como docente sólo se remite a ayudar al alumno a entender los planteamientos volviendo a leer, dando la pista de que lo realizado en las actividades anteriores le pueden ser de utilidad, también establecer las partes y sus relaciones a partir de preguntas [...]
Con esto queda por sentado lo que Brousseau (2007) describe como fase de acción: *“Para un sujeto “actuar” consiste en elegir directamente los estados del medio antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad el sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones [...] Los conocimientos permiten producir y cambiar estas anticipaciones”* (Brousseau, 2007, pág. 24) Los alumnos ya cuentan con el medio y comienzan a interactuar con éste, de manera que demuestren la habilidad para resolver problemas poniendo en práctica los conocimientos o saberes que ya tienen, para tomar decisiones bajo el esquema de solución que el mismo alumno diseñe [...] En resumen, el sujeto interactúa con el medio, y en esa interacción se produce información que en un primer momento es informal.

En el fragmento del documento de Análisis de la Práctica, Daniela evidencia conocimiento de la fase de acción, a la cual atribuye ciertas características: el alumno es el responsable de resolver el problema y el docente interviene a través de preguntas para que el alumno se haga responsable del mismo; en lo anterior, retoma algunas aportaciones de Brousseau (2007). Esta evidencia de conocimiento de Daniela en relación con las teorías de enseñanza, la describimos en párrafos anteriores (Daniela_KMT_T_1.1.), aquí sólo retomamos otro tipo de información que la argumenta.

En la Entrevista Semiestructurada 2, Daniela comenta que cuando los alumnos se encuentran resolviendo la tarea principal, ella pasa por sus lugares y les cuestiona sobre los procedimientos que empleaban para resolver el problema, algunos alumnos le decían que habían multiplicado y ella les pedía escribieran lo que estaban diciendo o agregaran las operaciones correspondientes. Más adelante expresa, esperaba que los alumnos emplearan la multiplicación y la división porque el enunciado *“si en 4 cajas se empaacan 64 lechugas”* los podía llevar a las operaciones anteriores. Enseguida presentamos un fragmento de la Entrevista Semiestructurada 2 donde Daniela muestra los procedimientos que emplearon los alumnos al multiplicar o dividir en algunas situaciones de la tarea principal [ES2_Daniela_KFLM_IC_1. 460-464]:

[...] como la razón se relaciona con la proporcionalidad, para sacar las proporciones tienes que dividir y multiplicar, porque siempre se involucra una misma cantidad, en este caso, 16, 16, 16 [...] aquí de hecho está la división: $32/2=16$ en una evidencia de un niño /señala una hoja de trabajo 1 de un niño/ y, está la multiplicación $16 \times 7=112$ para poder confirmar su resultado en la primer pregunta.

En este fragmento de entrevista, Daniela retoma algunas operaciones realizadas por alumnos para comprobar las respuestas que dieron a las primeras preguntas: ¿cuántas cajas se ocuparán para empacar 112 lechugas? y, ¿cuántas cajas se ocuparán para 32 lechugas? Así, destaca: $32/2=16$ (división) y $16 \times 7=112$ (multiplicación). Además, identificamos que:

Daniela_KSM_C_1. Conoce que la noción de razón se relaciona con el estudio de la proporcionalidad.

En función del indicador de conocimiento anterior, Daniela agrega ese contexto involucra una cantidad constante (16) que se requiere multiplicar o dividir con otras para obtener lo que se pide. Después de que los alumnos tienen algunos momentos resolviendo la tarea principal, algunos mencionan que terminaron, enseguida Daniela les pregunta si tuvieron dudas para contestar la pregunta 1, le contestan que no, de igual manera cuestiona sobre la pregunta 2 y 3, donde obtiene la misma respuesta “no”, pero cuando llegan a la cuarta pregunta, comienzan a externar lo siguiente [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 227-238]:

Daniela: ¿La cuarta?
 Aos: ¡Sí!
 Ao: Yo sí, mucho.
 Ao: Yo tuve poquito [...] pero sí.
 Daniela: ¿Qué fue lo que no entendieron de la cuarta pregunta?
 Aa: ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y lechugas?
 Daniela: Entonces [...] ahorita, vamos a ver lo que es la razón. Les voy a pedir de favor que [...] en la hojita que están trabajando ahí la dejen [...]
 /La maestra hace una señal, donde los alumnos entienden que dejen la actividad/
 Daniela: Entonces [...]
 Ao: ¿Si puedo hacer esto yo?
 Daniela: Espéreme [...]

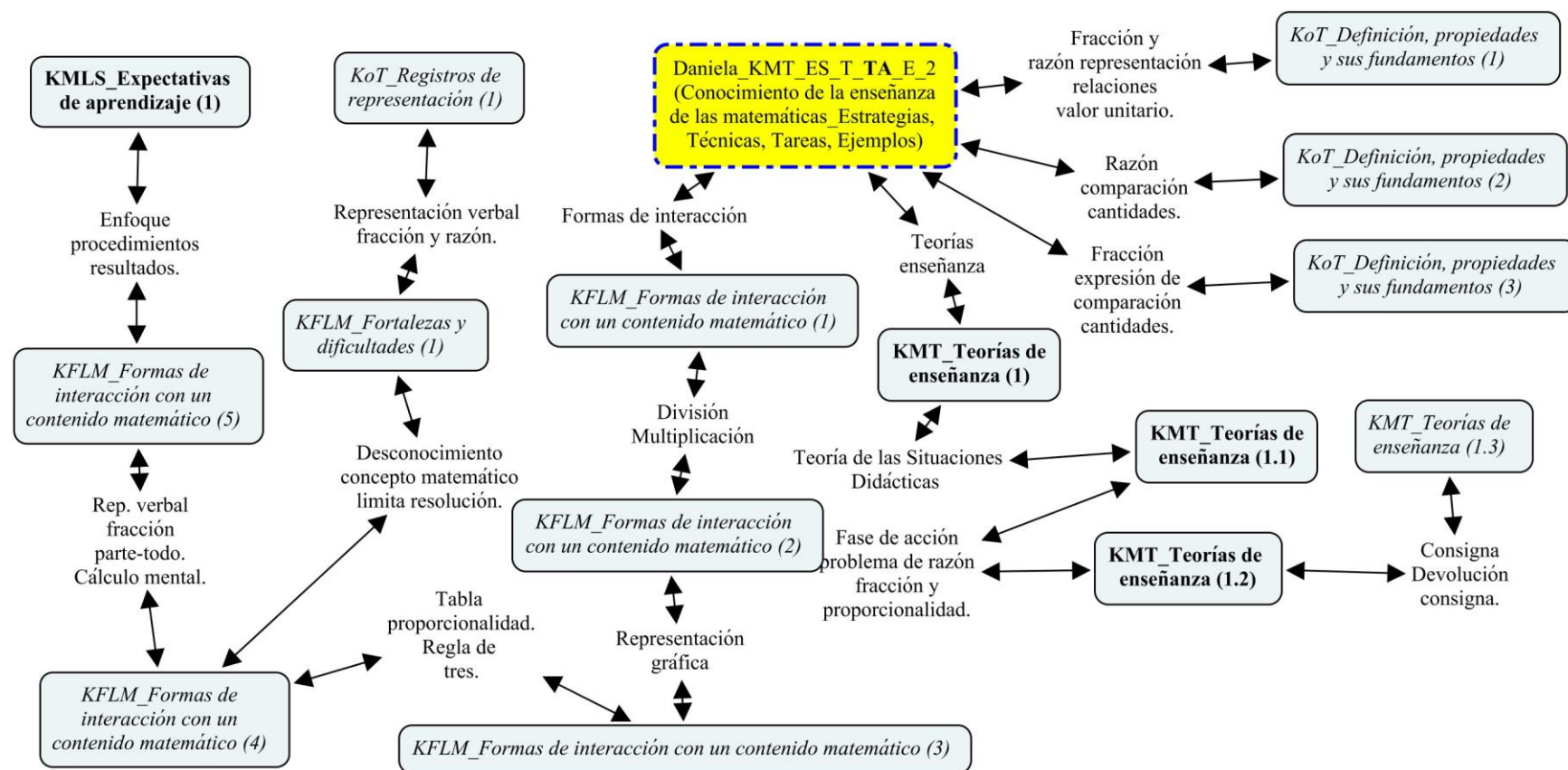
Durante la clase, cuando Daniela pregunta a los alumnos si tuvieron dificultades al resolver la pregunta 4 y escuchar que sí, les comenta que enseguida van a abordar lo que es la razón. Así, Daniela hace explícito el aprendizaje. En la Entrevista Semiestructurada 1 Daniela comenta que lo realizado por los alumnos en este momento de la clase no se iba a socializar, ya que posteriormente presentaría tres problemas que les brindaban elementos para resolver el problema central. En la Entrevista

Semiestructurada 2 señala la decisión que sorprendió a los alumnos porque quizá pensaban que les iba a dar la respuesta y agrega [ES2_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 515-522]:

[...] pienso que eso es importante, que en matemáticas generamos esa necesidad, de cuál es la respuesta correcta y cómo le vamos a hacer, porque estaban muy interesados en resolverla. Entonces, en ese momento de la clase, se creó cierta necesidad de poder resolver el problema y esa necesidad iba a ser como un motivante para poder abordar los demás planteamientos que les iban a dar los insumos para resolver el planteamiento principal y ya no se quedaban en el fracaso de que no pudieron resolver la actividad. Por lo tanto, se van a dar cuenta que por el momento no pueden resolverla porque falta aprender algo para poder resolverla.

La información que arroja Daniela respecto de cómo concluye la primera parte de trabajo con la tarea principal, hace énfasis en crear una necesidad en los alumnos para que se involucraran en el desarrollo de otros problemas (planteamientos) que les brinden los elementos para resolver el problema central. Así, avanzamos en la presentación de las “subtareas para resolver la tarea principal que aborda la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad”, pero antes agregamos un resumen del conocimiento matemático y didáctico de Daniela en el diseño y aplicación de la tarea principal (primera parte).

V.2.3.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores de conocimiento del MTSK. Tarea principal (primera parte).



V.2.3.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Tarea principal (primera parte).

En la primera parte de la tarea principal, Daniela evidencia conocimiento de una tarea principal donde aborda la noción de razón en su doble manifestación, la cual está compuesta por un problema principal que gira en torno al contexto de los alumnos, en este caso, una empacadora de lechugas (KMT_ES_T_TA_E_3); la información que Daniela brinda en la Planificación y las Entrevistas Semiestructuradas (1 y 2) muestra sus conocimientos en relación con la razón y la fracción como una representación de relaciones entre cantidades que guían a encontrar el valor unitario (KoT_D_1). De manera concreta identificamos que conoce la razón como una comparación de cantidades (KoT_D_2) y la fracción como la expresión de la comparación de cantidades (KoT_D_3).

Más adelante, Daniela evidencia conocimiento de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) como una metodología que recurre a situaciones problemáticas y le permite contribuir a la enseñanza de la noción de razón (KMT_T_1). De ahí se desprende la fase de acción como una situación de la TSD que permite a los alumnos resolver el problema central, a partir de los conocimientos que tienen (KMT_T_1.1). Así, Daniela conoce que los alumnos pueden recurrir a la división o a la multiplicación para resolver algunas interrogantes del problema donde se plantea la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación (KFLM_IC_1), aunque destaca que los alumnos pueden representar de manera gráfica la información que se plantea en la tarea principal (cajas y lechugas) (KFLM_IC_2) o pueden elaborar una tabla para ubicar y establecer relaciones entre las cantidades de la tarea principal (en 4 cajas se empacan 64 lechugas); situación que los puede llevar a encontrar el valor unitario y/o recurrir a la regla de tres (KFLM_IC_3) o pueden recurrir a la representación verbal de una fracción como parte-todo para identificar que una lechuga ocupa un dieciseisavo de una caja (KFLM_IC_4). Por último, Daniela expresa que cuando los alumnos resuelven una tarea de este tipo con cantidades de una o dos cifras, no requieren del empleo de una calculadora, ya que pueden recurrir al cálculo mental (KFLM_IC_5).

De manera general, Daniela señala que cuando los alumnos no están familiarizados con un concepto matemático es posible que de inmediato no intenten resolver las situaciones que lo implican. En este caso, la noción de razón (KFLM_FD_1), lo que es un indicio de que Este contexto conoce la representación verbal de la razón (“Para una caja son 16 lechugas”) y la fracción (“una lechuga ocupa un dieciseisavo de la parte de la caja”) (KoT_R_1). A la par, Daniela expresa la importancia de que los alumnos escriban los procedimientos que empleen para resolver el problema de la tarea

principal, de tal manera que puedan justificar sus resultados; lo anterior se plantea desde el enfoque de las situaciones didácticas y el Plan de estudios 2011 de educación básica (**KMLS_EA_1**).

Durante la ejecución de la tarea principal, Daniela evidencia conocimiento de dos conceptos que emergen en el contexto de la TSD: la consigna como las indicaciones que se brindan a los alumnos al inicio de la resolución de la tarea principal(**KMT_T_1.3**) y la devolución de la consigna que permite los alumnos avancen en la comprensión de las condiciones para resolver la tarea principal (**KMT_T_1.2**). Al final de la primera parte de la tarea principal, Daniela señala que la noción de razón se relaciona con el estudio de la proporcionalidad (**KSM_C_1**).

V.2.4. Subtareas para resolver la tarea principal [Planificación_Daniela_3.1. 79-111; 3.2. 112-136; 3.3. 137-171]. Conocimiento especializado de Daniela.

En el presente apartado, identificamos el conocimiento matemático y didáctico de Daniela en el diseño y aplicación de los tres problemas que componen las subtareas. Al respecto, Thanheiser et al. (2016) señalan que una tarea puede estar compuesta de varios problemas o por un problema complejo. Así, cada problema que Daniela diseñó lo hemos identificado como subtarea; elementos que contribuyen a resolver la tarea principal. Para identificar y caracterizar el conocimiento especializado de Daniela, recuperamos información de la Planificación, de las Entrevistas Semiestructuradas (1 y 2), de la Videograbación de la clase y del documento de Análisis de la Práctica.

En las tareas de apertura identificamos que Daniela diseñó tareas para rescatar conocimientos previos de los alumnos en relación con la fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos, a partir del empleo de diferentes materiales (caja, lámina y tarjetas), lo que le permitió registrar la representación numérica, verbal y figural de la fracción. Más adelante, Daniela presentó una tarea principal para abordar la enseñanza de la razón en su doble manifestación, sin embargo, cuando los alumnos llegan a la cuarta pregunta donde aborda la razón carecen de conocimientos para resolverla, por ello Daniela les pide suspendan la actividad porque van a ver lo que es razón. De ahí nacen las “subtareas para resolver la tarea principal”.

Enseguida presentamos el fragmento de la Planificación que corresponde a las subtareas para resolver la tarea principal [P_Daniela_3.1. 79-111; 3.2. 112-136; 3.3. 137-171]:

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO *(Elementos necesarios para resolver el problema central)*

- Pediré a los alumnos, que por ahora no atiendan el problema de la hoja de trabajo 1.
- Les entregaré la hoja de trabajo 2, donde hay tres pequeños planteamientos, los cuales se resolverán de manera grupal.
- Se comenzará por contestar el planteamiento 1: “Pastel partido”

“Pastel partido”

1. Un pastel es repartido a 4 niños ¿Qué parte de pastel le toca a cada uno?

2. Si ahora son 8 niños y les toca una parte de pastel igual a los niños anteriores ¿Cuántos pasteles son repartidos para estos 8 niños?

3. Contesta la siguiente tabla:

No. de Pasteles	No. de Niños
1	4
8	8

4. Completa las frases:

1 pastel para _____
para 8 niños

(En el planteamiento 1, se pretende rescatar **la manera en cómo se expresa una razón**, tomando como primera parte una fracción de $\frac{1}{4}$, que es la parte que le corresponde de pastel a un niño y, en cuatro niños, se forma el pastel entero. Después se pide buscar el número de pasteles para ser repartidos en la misma cantidad de $\frac{1}{4}$, pero ahora para 8 niños. Enseguida se propone una tabla para que los alumnos tengan mayor facilidad de establecer las relaciones entre el número de niños y de pasteles; todo esto para llegar a representar estas relaciones al momento de leerlas como razones, las cuales se solicita a los alumnos que completen: 1 pastel para 4 niños y 2 pasteles para 8 niños)

-Se dará paso a contestar el planteamiento 2: “Caritas y Corazones”

“Caritas y corazones”



1. ¿Cuántos corazones hay en el rectángulo? _____
 2. ¿Cuántas caritas? _____
 3. Si a los corazones se les repartiera el número total de caritas ¿Cuántas caritas le tocan a cada corazón? _____
 4. En el rectángulo hay:

corazones para caritas

:

PARA SABER MÁS

Se utiliza el símbolo de los dos puntos (:) para indicar una comparación entre dos cantidades.

(El elemento que se pretende incorporar ahora es **expresar la razón de manera numérica** con el uso de los dos puntos (:) que se desprenderá de la forma verbal: 4 corazones para 8 caritas, que es igual a 4:8. En este apartado la ayuda que se les da a los alumnos es informarles que para representar razones se utilizan los dos puntos, en un pequeño espacio de la hoja de trabajo bajo el apartado “Para saber más”)

-Se continuará contestando el planteamiento 3: “Tiras de papel”

“Tiras de papel”

Observa la siguiente tira de papel:



1. ¿Qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros? _____
 2. ¿Cuántas tiras de papel hay? _____
 3. ¿Cuántos cuadritos oscuros hay en las tira de papel? _____

En tira hay cuadritos oscuros.

:

Contesta el siguiente cuestionamiento:
 Es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción.
 A) FRACCIÓN B) SUMA C) RAZÓN

REGISTREMOS LOS RESULTADOS		
PLANTEAMIENTOS		FRACCIÓN
Pastel partido		
Caritas y corazones		
Tiras de papel		

(El elemento que ahora descubrirán los alumnos es que **las razones también pueden ser representadas en fracciones**, pues 1:3 es traducido como $\frac{1}{3}$, es una tira de papel dividida en 9 cuadros y tres de ellos están oscuros, por lo tanto, como es de 1 a 3, es decir, que por 1 tira de papel hay tres cuadritos oscuros, es igual a decir, que un tercio de esa misma tira de papel está ocupado por los cuadros oscuros)

-Para concluir se leerá otro apartado donde los alumnos al leer la definición, la relacionarán con el concepto de **Razón**. Después se completará la tabla 2. “¿Razones es Fracciones?” continuando el trabajo de manera grupal. (A partir de las razones que se obtuvieron en los tres planteamientos anteriores, serán representados por fracciones y viceversa, mediante un cuadro comparativo, con la finalidad de que los alumnos reconozcan las dos formas de expresar medidas fraccionarias)

En la primera parte del apartado de la planificación que hemos definido como subtareas, Daniela hace referencia a éstas como “*construcción del conocimiento*” y agrega “*elementos necesarios para resolver el problema central*”. De ahí que señale que entregará a los alumnos la hoja de trabajo 2 donde se encuentran los tres planteamientos (subtareas): pastel partido, caritas y corazones y tiras de papel. De manera general, Daniela expresa en cada planteamiento algunos conceptos matemáticos que pretende enseñar a los alumnos: razón y fracción. Con el propósito de identificar el conocimiento matemático de Daniela en las subtareas, presentamos en una tabla la representación de cada planteamiento en la hoja de trabajo 2 y la descripción que agrega en su planificación.

Subtarea 1 “Pastel partido”							
Estructura en la hoja de trabajo 2	“Pastel partido” 2. Un pastel es repartido a 4 niños ¿Qué parte de pastel le toca a cada uno? _____ 2. Si ahora son 8 niños y les toca una parte de pastel igual a los niños anteriores ¿Cuántos pasteles son repartidos para estos 8 niños? _____ 3. Contesta la siguiente tabla: 4. Completa las frases: 1 pastel para _____ _____ para 8 niños <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>No. de Pasteles</th><th>No. de Niños</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td></td></tr> <tr> <td></td><td>8</td></tr> </tbody> </table>	No. de Pasteles	No. de Niños	1			8
No. de Pasteles	No. de Niños						
1							
	8						
Descripción en la planificación	(En el planteamiento 1, se pretende rescatar la manera en cómo se expresa una razón, tomando como primera parte una fracción de $\frac{1}{4}$ que es la parte que le corresponde de pastel a un niño y, en cuatro niños, se forma el pastel entero. Después se pide buscar el número de pasteles para ser repartidos en la misma cantidad de $\frac{1}{4}$, pero ahora para 8 niños. Enseguida se propone una tabla para que los alumnos tengan mayor facilidad de establecer las relaciones entre el número de niños y de pasteles; todo esto para llegar a representar estas relaciones al momento de leerlas como razones, las cuales se solicita a los alumnos que completen: 1 pastel para 4 niños y 2 pasteles para 8 niños).						

En el caso de la subtarea 1 “Pastel partido” Daniela plantea un problema en el contexto de pasteles, agrega dos interrogantes y dos indicaciones que, de acuerdo con lo que menciona en la descripción de la Planificación “pretende rescatar la manera como se expresa una razón”. En la pregunta 1 “un pastel es repartido a 4 niños ¿Qué parte del pastel le toca a cada niño?”, presenta una situación de partición que llevará a los alumnos a la fracción como parte-todo para expresar la parte de pastel que le toca a un niño (fracción unitaria). En la descripción, Daniela señala que pretende abordar la expresión de la razón a partir del trabajo con la fracción $\frac{1}{4}$ (parte de pastel que le corresponde a un niño) y complementa citando que *en cuatro niños se forma el pastel entero*. En la segunda pregunta, Daniela

toma como referente la información proporcionada en la pregunta 1 (un pastel es repartido en cuatro niños) donde el “todo” estaba representado por un pastel, pero ahora pretende que los alumnos encuentren el “todo” cuando son ocho niños a los que se repartirá la misma cantidad de pastel, para este caso, serían dos pasteles (todo).

En la segunda parte de la subtarea 1 “Pastel partido” Daniela señala dos indicaciones. Al inicio pide que completen una tabla con dos columnas escribiendo el número de pasteles de las situaciones anteriores y el número de niños que corresponda, en la primera columna proporciona el número 1, en la segunda fila el número de pasteles, mientras que en el segunda columna el 8 y en la tercera fila el número de niños. De ahí que se requiera agregar la cantidad de niños en la que se reparte un pastel y viceversa, la cantidad de pasteles que se requieren repartir a 8 niños. En la segunda indicación solicita que completen dos frases “*1 pastel para ____; ____ para 8 niños*”. En la descripción de la Planificación que acompaña este apartado, Daniela menciona “*enseguida se propone una tabla para que los alumnos tengan mayor facilidad de establecer las relaciones entre el número de niños y de pasteles; todo esto para llegar a representar estas relaciones al momento de leerlas como razones, las cuales se solicita a los alumnos que completen: 1 pastel para 4 niños y 2 pasteles para 8 niños*”. Como podemos observar, en las indicaciones 3 y 4 Daniela establece la expresión de la razón de manera verbal y textual con números naturales a partir de la relación entre cantidades de pasteles y número de niños. En términos generales, en la subtarea 1 identificamos que:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.1. Conoce un problema para expresar la fracción (parte-todo) y la razón (parte-parte) de manera verbal y textual, donde profundiza en ésta última como la comparación/relación entre dos números naturales a partir de un contexto real (partición de pastel entre diferente cantidad de niños). En la siguiente tabla presentamos la estructura de la subtarea 2 “Caritas y corazones” y la descripción que le corresponde en la Planificación:

Subtarea 2 “Caritas y corazones”	
Estructura en la hoja de trabajo 2	“Caritas y corazones” 1. ¿Cuántos corazones hay en el rectángulo? _____ 2. ¿Cuántas caritas? _____ 3. Si a los corazones se les repartiera el número total de caritas ¿Cuántas caritas le tocan a cada corazón? _____ 4. En el rectángulo hay: corazones para caritas : PARA SABER MÁS Se utiliza el símbolo de los dos puntos (:) para indicar una comparación entre dos cantidades.
Descripción en la Planificación	(El elemento que se pretende incorporar ahora es expresar la razón de manera numérica con el uso de los dos puntos (:), que se desprenderá de la forma verbal: 4 corazones para 8 caritas que es igual a 4:8. En este apartado la ayuda que se les da a los alumnos es informarles que para representar razones se utilizan los dos puntos, en un pequeño espacio de la hoja de trabajo bajo el apartado “Para saber más”)

En la estructura de la subtarea 2 “Caritas y corazones” Daniela presenta tres interrogantes (1, 2y 3), una indicación (4) y un pequeño cuadro que ha denominado “para saber más”. En la pregunta 1 y 2 pretende que identifiquen el total de las cantidades que se comparan: caritas y corazones. En la pregunta 3 plantea una división partitiva (obtener el total de caritas para cada corazón). En la indicación (4) establece una comparación-relación entre dos cantidades: corazones y caritas, la cual acompaña con el apartado “para saber más”, donde especifica que el uso de los dos puntos (:) se emplea para indicar comparaciones entre dos cantidades, mismos que busca empleen al final de la subtarea (indicación 4).

En la descripción de la subtarea 2, Daniela señala que pretende que los alumnos *expresen la razón de manera numérica* a través del empleo de los dos puntos (:), cuyo antecedente es la expresión verbal “*4 corazones para 8 caritas*” y agrega que también se puede señalar como 4:8. Además, menciona que el apartado “para saber más” cumple la función de informar a los alumnos que para representar razones se utilizan los dos puntos. Al igual que en la subtarea 1, enseguida definimos un indicador de conocimiento de Daniela en relación con la subtarea 2.

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 2. Conoce un problema para expresar la razón (parte-parte) de manera verbal y de forma numérica bajo la expresión $a:b$, a partir de un contexto –natural-artificial.. A continuación mostramos la estructura de la subtarea 3 “Tiras de papel”, así como la descripción que la acompaña en la Planificación.

Estructura en la hoja de trabajo 2

Descripción en la Planificación

Subtarea 3 “Tiras de papel”

“Tiras de papel”

Observa la siguiente tira de papel:

- 1. ¿Qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros?_____
- 2. ¿Cuántas tiras de papel hay?_____
- 3. ¿Cuántos cuadritos oscuros hay en la tira de papel?_____

En

↓

 tira hay

↓

 cuadritos oscuros.

Contesta el siguiente cuestionamiento:

Es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción.

A) FRACCIÓN B) SUMA C) RAZÓN

REGISTREMOS LOS RESULTADOS

PLANTEAMIENTOS		FRACCIÓN
Pastel partido		
Caritas y corazones		
Tiras de papel		

-Se continuará contestando el planteamiento 3: “Tiras de papel” (*El elemento que ahora descubrirán los alumnos es que las razones también pueden ser representadas en fracciones, pues 1:3 es traducido como 1/3, es una tira de papel dividida en 9 cuadros y tres de ellos están oscuros, por lo tanto, como es de 1 a 3, es decir, que por 1 tira de papel hay tres cuadritos oscuros es igual a decir que un tercio de esa misma tira de papel está ocupado por los cuadros oscuros*)

-Para concluir se leerá otro apartado donde los alumnos al leer la definición, la relacionarán con el concepto de **Razón**. Después se completará la tabla 2. “¿Razones es Fracciones?” continuando el trabajo de manera grupal. (*A partir de las razones que se obtuvieron en los tres planteamientos anteriores, serán representados por fracciones y viceversa, mediante un cuadro comparativo, con la finalidad de que los alumnos reconozcan las dos formas de expresar medidas fraccionarias*)

En la segunda fila de la tabla anterior agregamos la subtarea 3 “Tiras de papel” (estructura en la hoja de trabajo 2), misma que está acompañada de un cuadro donde viene un enunciado que los alumnos deben complementar para establecer la definición de razón y una tabla donde representarán de manera numérica las situaciones abordadas en las subtareas 1, 2 y 3 (razón y fracción).

La subtarea 3 está integrado por tres interrogantes y un enunciado incompleto que requiere sea completado por los alumnos. Al inicio de la subtarea, Daniela solicita que observen una tira de papel dividida en nueve partes, tres sombreadas. En la pregunta 1, pide a los alumnos que identifiquen la fracción que representa los cuadros coloreados, es decir, pone en juego la representación de fracciones bajo el significado parte-todo en contextos continuos. En la pregunta 2 pide que señalen la cantidad de tiras (identificación de la unidad) y en la pregunta 3, el número de cuadros que están sombreados (parte). Según la descripción de la subtarea 3 en la Planificación, las preguntas 2, 3 y la situación gráfica que se presenta, pretenden introducir la expresión de la razón en su forma $a:b$, aunque también se pretende expresar como fracción (a/b), tomando como referente que hay una tira y tres cuadritos oscuros, sin embargo, debido a que en este contexto emerge la fracción como parte-todo, en situaciones posteriores pueden generarse confusiones con el papel que desempeña el denominador (9), hasta el grado de omitirlo y señalar sólo el número de tiras y las partes sombreadas, sin importar el número de partes en que está dividido el todo, en este caso, cada tira (rectángulo). A partir de la información que Daniela arroja en la Planificación en relación con la subtarea 3, definimos el siguiente indicador:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.3. Conoce un problema para expresar la representación numérica de la fracción como parte-todo (a/b) y a través de la simplificación de fracciones acceder a la expresión de la razón (parte-todo) de manera verbal y numérica ($a:b$).

Como podemos observar en los párrafos anteriores, Daniela evidencia conocimiento de subtareas para resolver una tarea principal donde aborda la razón y la fracción, subtareas que ubica en el apartado “*construcción del conocimiento*” de su Planificación; los constatamos en un fragmento del documento de Análisis de la Práctica [AP_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.1.; 3.2. y, 3.3. 500-513]:

[...]Es imprescindible señalar que estas actividades se realizaron en continuidad de la fase de acción y que no se realizó una formulación, validación e institucionalización del problema que los alumnos resolvieron en su fase de acción (problema central); señaladas estas fases dentro de la situación didáctica, que si bien es el dispositivo con el que se trabajó la clase. Las actividades que se realizan es una adaptación o adecuación al seguimiento de las etapas que intervienen en la situación didáctica, utilizadas como estrategia para favorecer la construcción de los conocimientos y posteriormente su aplicación en problemas más concretos. Se decide hacer dicha modificación ante la dificultad que representa el contenido de la fracción expresada en una razón.

Las actividades implementadas fueron tres y cada una se caracteriza por aportar una parte a la noción y significado de lo que son las razones así como su interpretación, lectura y escritura, de manera concreta. Se realizan las actividades de manera grupal, de una manera guiada para que los alumnos pudieran responder y comprender fácilmente [...]

En el fragmento anterior, identificamos que Daniela expresa el propósito de las tres subtareas “*las actividades implementadas fueron tres y cada una se caracteriza por aportar una parte a la noción y significado de lo que son las razones así como su interpretación, lectura y escritura*”; previo a esto, especifica que las tres subtareas se realizaron enseguida de la fase de acción donde se planteó el problema central (tarea principal). En este sentido, Daniela muestra evidencias de conocimiento de otras fases de la TSD (formulación, validación e institucionalización) que señala, no se realizaron con el problema central. Con el propósito de avanzar en la identificación y caracterización del conocimiento matemático y didáctico de Daniela en las subtareas que diseñó y aplicó para resolver la tarea principal donde abordó la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, en los siguientes párrafos realizamos un análisis detallado de las mismas.

V.2.5. Subtarea 1 [Planificación_Daniela_3.1. 79-111]. Conocimiento especializado de Daniela.

En la subtarea 1 “Pastel partido”, Daniela plantea un problema en el contexto de partición de pasteles entre diferentes cantidades de niños; en un inicio pretende que los alumnos recurran a la representación de una fracción (parte-todo) para identificar la parte de pastel que le corresponde a 1 niño cuando se reparte 1 pastel entre 4 niños. Enseguida busca que los alumnos identifiquen la cantidad de pasteles necesarios para repartir a 8 niños la misma cantidad, al final indica que expresen la razón entre las cantidades anteriores como una relación entre dos números naturales. Durante la Entrevista Semiestructurada 1 Daniela expresa información al respecto [ES1_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.1. 79-92]:

[...] los problemas que se van a realizar primero empiezan a hacer como comparaciones entre [...] primero de reparto y después cómo se representaría con una fracción y de la fracción los lleva al uso de la razón. Por ejemplo, en el primer problema es 4 niños (lo escribe en el pintarrón) se reparten un pastel, entonces cuánto le toca a cada niño y sería un cuarto (representa en forma figural y numérica un cuarto- $1/4$ -). Enseguida les comento, por ejemplo, a ocho niños les va a tocar la misma cantidad de pastel que a estos otros (señala un cuarto) y les cuestiono, ¿cuántos pasteles se les van a repartir o se ocuparán para repartírselos?, serían dos pasteles divididos en cuartos (representa gráficamente dos pasteles en forma de círculo divididos en cuartos). Entonces aquí se hace una comparación de 1 pastel para 4 niños (escribe en el pintarrón 1:4), o sea a los niños se les quiere llevar de la representación fraccionaria a la representación en forma de razón y le encuentren la relación, por ejemplo, 1 pastel para cuatro niños (señala 1:4) se entiende en la razón y en la fracción es un cuarto de pastel para cada niño, como si fuera un pastel para cuatro niños.

En el fragmento anterior, constatamos la descripción que realizamos de la subtask 1, es decir, identificamos que Daniela inicia con el planteamiento de actividades que involucran la fracción en contextos de partición y como parte-todo para luego avanzar a la razón como una comparación entre dos cantidades. Así, identificamos los siguientes indicadores de conocimientos:

Daniela_KoT_R_1. Conoce la representación figural, numérica y verbal de la fracción como parte-todo, de manera específica, cuando hace referencia a un cuarto, cantidad que le corresponde a cada niño al repartir un pastel entre cuatro niños. **Daniela_KoT_R_2.** Conoce la representación verbal y numérica de la razón al expresar “1 pastel para 4 niños” y señalar 1:4. **Daniela_KoT_D_1.** Conoce la razón como una relación entre dos cantidades de números naturales (1 pastel para 4 niños).

Al final, Daniela señala intenta que los alumnos encuentren una relación entre la fracción y la razón, lo cual traduce en “1 pastel para cuatro niños (señala 1:4) se entiende en la razón y en la fracción es un cuarto de pastel para cada niño, como si fuera un pastel para cuatro niños”. En este momento, identificamos oportunidades de conocimiento respecto a que la relación que establece entre razón y fracción tiene como referente el empleo de las mismas cantidades de números: 1 y 4. Para avanzar en la identificación del conocimiento matemático y didáctico que Daniela evidencia en la subtask 1, presentamos algunos procedimientos o estrategias que cree, los alumnos pueden emplear al enfrentarse a la resolución del problema [ES1_Daniela_KFLM_IC_1. 415-432]:

Primero dice un pastel es repartido a 4 niños, ¿qué parte del pastel le toca a cada niño? Se le está dando un poco de ayuda al niño, porque tiene dibujados dos círculos y puede utilizar esto como referencia de pastel. Entonces la estrategia que utilizaría es dividir los círculos y poner en cada parte del pastel que a un niño le tocaría un cuarto y luego cuando se les pregunta, que ahora son ocho niños, pero les va a tocar la misma cantidad de pastel que a los cuatro niños anteriores, entonces ¿cuántos pasteles serían? Aquí pueden utilizar la operación de la multiplicación, nada más se multiplicaría por dos o si todavía no llegan a ese tipo de procedimiento, también se les da otro circulito donde pueden dividir en cuatro partes y establecer “a para los ocho niños”, si les toca la misma cantidad de pastel van a ser dos pasteles y después se les pide que organicen esas dos respuestas, que las estructuren que encuentren la relación, por eso se pone una tablita [...] dice número de pasteles 1, luego número de niños 4; número de pasteles 2 y número de niños 8, tomando en cuenta que a cada niño le va a tocar la misma cantidad de pastel y luego se empieza en el cuadrito azul que está en la parte final de ese primer planteamiento de un pastel para [...] cuántos niños [...], para dos y dos pasteles para cuántos niños, para ocho, porque se empieza con lo que es la comparación entre cantidades, donde se les empieza a dar la noción [...] bueno es la base para entender la razón; a ver si dos pasteles para ocho niños, un pastel para cuatro niños [...]

En función de la información plasmada en el fragmento anterior, identificamos que:

Daniela_KFLM_IC_1. Conoce que los alumnos pueden recurrir a la representación figural de la fracción (parte-todo) en contextos continuos para resolver una situación de partición (pasteles) al tomar como referente las imágenes que se proporcionan en la subtask 1: círculos.

Daniela_KFLM_IC_2. Conoce que los alumnos pueden recurrir a la multiplicación (maneja cantidades mayores a las iniciales) o la representación figural de la fracción (parte-todo) en contextos continuos para resolver situaciones que implican la expresión de la razón como una relación entre cantidades de números naturales (pasteles y niños).

En otro momento de la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela menciona que algunas de las fortalezas que cree tienen los alumnos al resolver la subtask 1 [ES1_Daniela_KFLM_FD_1. 442-444]:

[...] las fortalezas que tienen los niños es que ya saben dividir gráficamente o repartir los pasteles, porque es un reparto muy simple que desde tercero se aborda.

En este fragmento de entrevista identificamos que:

Daniela_KFLM_FD_1. Conoce que en quinto grado los alumnos pueden representar de manera gráfica (figural) la partición de un pastel (parte-todo contextos continuos).

Daniela_KMLS_TAP_1. Conoce que desde tercer año los alumnos abordan la representación figural de fracciones como parte-todo en contextos continuos (partición de pasteles).

En la Planificación, las Entrevistas Semiestructuradas (1 y 2), la Videograbación de la clase y el documento de Análisis de la Práctica, Daniela destacó que cada una de las subtarefas se resolverían de manera grupal con el apoyo de algunos alumnos. Enseguida agregamos el fragmento de registro que corresponde al trabajo con la subtarea 1 [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.1. 246-266]:

Daniela: Dice planteamiento 1, “Pastel partido”.
/Daniela se acerca a una de las alumnos para indicar que le ayude a leer/
Aa: Un pastel está partido para cuatro niños ¿Cuánto le toca a cada niño?
Aos: Un cuarto.
Daniela: A ver, Monse pásale a anotarlo al pintarrón, dice que un pastel es repartido a cuatro niños [...] Entonces ¿Cuánto le toca a un niño? /la niña escribe $\frac{1}{4}$ en el pintarrón/
Aos: Un cuarto.
Daniela: Si dos niños juntan su pedazo de pastel ¿cuánto se forma?
Aos: Dos cuartos.
Daniela: ¿Y si tres niños los juntan?
Aa: Tres cuartos.
Daniela: Serán tres cuartos, ok. Entonces, ¿qué respuesta va en la primera pregunta?
Aos: Un cuarto.
Daniela: Yose, ¿si le entendiste? /La niña le hace una señal de que sí le entendió/
Daniela: Sí, ¿por qué Yose?
Aa: Porque tenemos así, una ruedita y esta partida en cuartos, agarramos uno y se forma un cuarto.
Daniela: Agarramos uno para dárselo a un [...]
Aos: Niño
Daniela: ¿Cuántos niños son?
Aos: Cuatro.

En los diálogos presentados se observa que Daniela interviene con diferentes propósitos: solicitar que los alumnos den lectura y respuesta a la primer pregunta de la subtarea 1, pedir a una alumna represente de manera numérica la fracción que le toca a cada niño ($\frac{1}{4}$ del pastel), plantear dos sumas de fracciones cuyo denominador es el mismo (4) y que una alumna explique por qué $\frac{1}{4}$ es la respuesta correcta, lo cual complementa en función de la información que se maneja en la subtarea (pasteles). En este contexto, en el documento de Análisis de su Práctica destaca una reflexión sobre la situación de la suma de fracciones de manera verbal [AP_Daniela_KFLM_IC_3. 521-525]:

Se cuestiona sobre si se juntan las partes del pastel que tienen entre dos y tres niños, con la intención de que los alumnos razonen que la cantidad de pastel no cambia siempre será de un cuarto, para que posteriormente cuando se mencione que son 8 niños, los alumnos conformen dos pasteles con los ocho cuartos, o bien, razonen que en otros cuatro niños son otros cuatros pedazos de $1/4$ que conforman otro entero.

A partir de esta información identificamos que:

Daniela_KFLM_IC_3. Conoce que plantear una suma de fracciones de manera verbal cuya constante es un $\frac{1}{4}$ (parte de pastel que le toca a un alumno), contribuye a que los alumnos encuentren la relación entre la cantidad de niños y la cantidad de pasteles cuando ambas aumentan, pero la cantidad que le corresponde a cada niño es la misma ($1/4$).

A continuación, avanzamos en la presentación de las interacciones que se dieron en la clase cuando llegaron a la segunda pregunta, donde al igual que en la anterior, una alumna participa en la lectura de la misma [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.1. 268-278]:

Aa: Si ahora son ocho niños y les toca una parte de pastel igual a los niños anteriores, ¿Cuántos pasteles son repartidos para estos ocho niños?
Aos: Dos.
Daniela: ¿Por qué vamos a ocupar dos pasteles?
Ao: Porque un pastel [...] tiene uno en cuatro, cuatro cuartos [...]
Daniela: Cuatro cuartos.
Ao: Y más otros cuatro cuartos, se forman ocho cuartos.
Daniela: Pero, ¿por qué son otros cuatro cuartos?
Ao: Para repartir a los otros cuatro niños.
Daniela: Entonces, ¿cuál es la respuesta?
Aos: Dos.

En este fragmento observamos que Daniela toma como referente el número 2 proporcionado por los alumnos; cantidad de pasteles que se requieren para repartir a ocho niños. Enseguida, emite una serie de preguntas con el propósito de que los niños validen y justifiquen por qué es la respuesta correcta. Aquí, algunos alumnos expresan algunas reflexiones que menciona en el documento de Análisis de la Práctica y que destacamos en párrafos anteriores: “*los alumnos razonen que la cantidad de pastel no cambia siempre será de un cuarto [...] cuando se mencione que son 8 niños, los alumnos conformen dos pasteles con los ocho cuartos, o bien, razonen que en otros cuatro niños son otros cuatros pedazos de $1/4$ que conforman otro entero*”. Enseguida presentamos lo que sucede en la clase al resolver las indicaciones 3 y 4 de la subtarea 1[V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.1. 280-306]:

Ao: Contesta la siguiente tabla, numero de pasteles, número de niños.
 Daniela: Número de pasteles ¿Cuántos pasteles tenemos? [...]
 Aos: Uno.
 Daniela: ¿Para cuántos niños es ese pastel?
 Aos: Cuatro.
 Daniela: Un pastel es para [...] ¿cuántos niños?
 Aos: Cuatro
 /Daniela anota las cantidades en el pintarrón “1 para 4”/
 Daniela: Uno para cuatro.
 Aa: Y dos pasteles son para ocho niños.
 Daniela: A ver Diana, si tenemos los ocho niños, ¿cuántos pasteles vamos a ocupar?
 Aa: Dos [...]
 Daniela: ¿Si estamos de acuerdo con esa respuesta?
 Aos: Sí.
 /Daniela escribe en el pintarrón “2 para 8”/
 Daniela: A ver y si yo tuviera aquí [...] Doce niños, ¿cuántos pasteles necesito?
 Aos: Tres
 Daniela: Y ¿si tuviera 40 niños?
 Aos: Diez /La maestra escribe en el pintarrón “3 para 12” y “10 para 40”/
 Daniela: Entonces [...] Uno para [...]
 Aos: Cuatro
 Daniela: Dos pasteles para [...]
 Aos: Ocho
 Aos: Tres para doce.
 Aos: Y diez para cuarenta.
 Daniela: ¡Qué listos! Ahora en el cuadrito que tenemos dice: “Un pastel para cuatro niños”
 Ao: Dos pasteles para ocho niños.

Las indicaciones 3 (completa la siguiente tabla) y 4 (completa las siguientes frases) que vienen en la subtarea 1 “Pastel partido” con el propósito de que los alumnos establezcan relaciones entre las cantidades de pasteles y de niños, se hacen presentes en el fragmento anterior. Las interrogantes que realiza Daniela: “¿cuántos pasteles tenemos?, ¿para cuántos niños es ese pastel? y “un pastel es para, ¿cuántos niños?”, los inician en la representación verbal y escrita de la razón como una comparación entre dos cantidades (1 para 4; 2 para 8) (KoT_R). Después, Daniela agrega otros ejercicios relacionados con lo anterior, “si yo tuviera aquí [...] Doce niños, ¿cuántos pasteles necesito?, y ¿si tuviera cuarenta niños?”, a lo cual los alumnos le contestan 3 y 10 respectivamente, cantidades que escribe en el pintarrón “3 para 12” y “10 para 40”. Después, realiza una lectura de las cuatro relaciones que se encuentran escritas en el pintarrón. Al finalizar, Daniela los guía a contestar el último cuadro que viene en la subtarea 1 al expresar “un pastel para cuatro niños” y los alumnos completan la siguiente frase “dos pasteles para ocho niños”. Durante la Entrevista Semiestructurada 2, preguntamos a Daniela por qué plantea otras situaciones que no estaban en la subtarea 1 y expresa [ES2_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 537-544]:

Se plantean para saber si los niños van entendiendo la intención de la clase, aunque no se les diga directamente, yo me doy cuenta si los niños van comprendiendo la intención del planteamiento uno. Entonces me van a poder responder los otros planteamientos que les estoy haciendo en el pizarrón y si no me responden, es porque algo falta o hay dudas o porque realmente no lo han entendido, por eso siempre hago eso, planteo otras situaciones para saber, si aunque sean en diferente contexto los niños están estableciendo relaciones entre las cantidades que, finalmente, los van a llevar a sacar las razones.

En este fragmento, Daniela señala agrega otros ejercicios para identificar si los alumnos logran establecer relaciones entre las cantidades que se manejan para obtener razones; estas decisiones de Daniela se enriquecen con la información que cita en el documento de Análisis de la Práctica [AP_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 565-569]:

[...] aunque en las hojas de trabajo no se pide directamente y en la planificación no se describen, se realizan planteamientos acorde a los razonamientos contruidos durante la actividad, los cuales se tratan de complejizar, con la firme intencionalidad didáctica de confirmar que los alumnos están entendiendo lo que se está abordando.

En el fragmento anterior, Daniela expone que los dos ejemplos (*si yo tuviera aquí [...] doce niños, ¿cuántos pasteles necesito? y, si tuviera cuarenta niños*) que trabajó con los alumnos no estaban planificados, pero que sí están relacionados con la subtask 1 y, además, trata de complejizar para identificar los alumnos avanzan en la comprensión de la razón. Así, identificamos que:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce ejercicios para verificar los aprendizajes que van adquiriendo los alumnos sobre la representación numérica y verbal de la razón como una relación entre dos cantidades de números naturales en un contexto de partición de pasteles (*si yo tuviera aquí [...] doce niños, ¿cuántos pasteles necesito? y, si tuviera cuarenta niños*).

En el fragmento de la clase donde se aborda la última parte de la subtask 1, rescatamos como Daniela representa de manera verbal y escrita la razón como una relación entre dos cantidades en el pizarrón. En la Entrevista Semiestructurada 2 nos comenta por qué hace esto [ES2_Daniela_KMT_R_1. 546-552]:

Escribir en el pizarrón para que los niños vayan viendo esa relación: uno tantos, dos tantos y, tantos cuántos tendría [...] porque si les pregunto de manera oral, algunos niños me van a contestar y me van a entender, pero otros no. Escribo “uno para tantos” y luego “40”. Si le escribo primero uno para tantos y, luego les hago esa pregunta de más cantidades, por ejemplo, 40 para cuántos, es con el propósito de que establezcan que desde el principio está la relación y puedan encontrar la relación entre esos y así puedan sacar las otras.

En relación con la información expresada por Daniela en el fragmento anterior, identificamos que: *Daniela_KMT_R_1*. Conoce el pintarrón como un recurso que permite plasmar la representación textual de la razón como una relación entre cantidad de pasteles y cantidad de niños (1 pastel para 4 niños). En otro momento de la Entrevista Semiestructurada 2 preguntamos a Daniela por qué señala que algunos alumnos requieren de la representación textual/escrita la razón en el pintarrón [ES2_Daniela_KFLM_T_1. 546-552]:

Se debe a los estilos de aprendizaje, que unos son más visuales, otros son más auditivos, y otros aunque sean visuales, el decirlo, les va a ayudar a comprenderlo más y aunque sean auditivos, el verlo les va a ayudar también y lo esquematizan dentro de sus estructuras mentales; por eso, se atiende a los estilos de aprendizaje.

Como podemos observar, Daniela muestra conocimiento del empleo de algunos recursos como el pintarrón en función de los estilos de aprendizaje de los alumnos, en este caso, enfatiza en el visual. Sin embargo, más adelante en su entrevista expresa existe un estilo más, el kinestésico, el cual no favorece en la subtask 1 [ES2_Daniela_KFLM_T_1. 565-568]:

Si se tomara más en cuenta el kinestésico, sería tener material didáctico y trabajarlo en las mesas de los niños, es decir, además de verlos con números y de manera auditiva-verbal, también lo manejarían ellos; eso sería atender a los diferentes estilos.

En el fragmento anterior, Daniela menciona que no tomó en cuenta el estilo de aprendizaje kinestésico al no recurrir al empleo de diferente material didáctico. Así identificamos que:

Daniela_KFLM_T_1. Conoce la representación textual y verbal de la razón a través del pintarrón favorece su aprendizaje en los alumnos cuyos estilos de aprendizaje son auditivos y visuales.

Por último, en el documento de Análisis de la Práctica, Daniela señala el papel que desempeña la tabla en la subtask 1 donde aborda la razón [AP_Daniela_KMT_R_2. 552-557]:

[...] se toma como elemento importante el uso de la tabla, en la que los alumnos visualizarán de manera concreta la relación entre las cantidades. La característica que los alumnos comienza a conocer acerca de la razón es la manera en la que ésta se puede expresar, es decir, como se puede leer la comparación entre cantidades que la razón permite hacer, al leer las frases: “1 pastel para 4 niños... 2 pasteles para 8 niños” [...]

A partir del fragmento anterior identificamos que:

Daniela_KMT_R_2. Conoce el uso de la tabla en la subtarea 1 para que los alumnos puedan visualizar las relaciones/comparaciones entre las cantidades de pasteles y de niños como una forma de expresar una razón, así como su lectura: “1 pastel para 4 niños”, por citar un ejemplo.

En términos generales, en la subtarea 1 “Pastel partido”, destaca la evidencia de conocimiento de Daniela en relación con la razón como una relación entre dos cantidades que corresponden al número de niños en los que se reparte uno o dos pasteles (KoT_D). Además, Daniela favorece la representación verbal y textual de la razón de la forma: 1 pastel para 4 niños (KoT_R). A la par de los conocimientos anteriores, identificamos evidencias o indicios de conocimiento de otros subdominios que integran el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Enseguida avanzamos en la identificación del conocimiento matemático y didáctico de Daniela en la subtarea 2.

V.2.6. Subtarea 2 [Planificación_Daniela_3.2. 112-1363]. Conocimiento especializado de Daniela.

En la subtarea 2 Daniela aborda la razón (parte-parte) como una relación/comparación entre dos cantidades en el contexto de “estampas”: caritas y corazones. En este apartado retomamos la información que arroja la Planificación, las Entrevistas Semiestructuradas (1 y 2), la Videograbación de la clase y el documento de Análisis de la Práctica de Daniela para identificar el conocimiento matemático y didáctico que pone en juego en esta segunda subtarea que, al igual que la subtarea 1, aporta elementos para que los alumnos puedan resolver la tarea principal (problema central). En la Entrevista Semiestructurada 1 Daniela menciona que la subtarea 2 se realiza de manera grupal, entendiendo que al inicio van a dar lectura a las preguntas y los alumnos las contestan de manera individual para luego socializar y validar las respuestas obtenidas. De manera concreta, Daniela cita el propósito de esta subtarea [ES1_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 469-477]:

En el problema 2 “caritas y corazones” [...] lo que se quiere lograr es que los niños reconozcan este símbolo (señala :) para representar las razones [...] porque en fracciones ya sabemos que es la rayita aquí (señala 3/9), pero para representar la razón se utilizan estos dos puntitos (señala : en el pintarrón). Entonces se les pone una situación muy simple de caritas y corazoncitos, pero con el único objetivo de que identifiquen esto dos puntitos para representar las razones. Por eso se les pone un cuadrito de “para saber más...”

A partir del fragmento de entrevista anterior identificamos que:

Daniela_KoT_R_3. Conoce la representación numérica y verbal de la razón bajo la forma $a:b$.

Daniela_KPM_SL_1. Conoce el empleo de los dos puntos (:) que permiten expresar razones ($a:b$), así como la diagonal (/) que permite expresar fracciones (a/b).

Con el propósito de contextualizar el contenido de la subtarea 2, precisamos que está integrada por tres interrogantes y una indicación que toma como referente las respuestas que se dieron en las preguntas anteriores. En este sentido, avanzamos en la descripción de los procedimientos o formas que los alumnos pueden emplear para resolver la subtarea 2 desde la perspectiva de Daniela [ES1_Daniela_KFLM_IC_4. 479-489]:

[...] dice cuántos corazones hay en el rectángulo, los van a contar, van a empelar técnicas de conteo y en cuántas caritas, lo mismo. Enseguida dice: si los corazones se les repartirán el número total de caritas, cuántas caritas quedan en cada corazón; aquí pueden utilizar lo que es de manera gráfica, pongo mis cuatro corazones y mis ocho caritas y, primero de una en una se relacionan y así son dos caritas por cada corazón. Pero, considero que a lo mejor el procedimiento que van a utilizar es la operación convencional de la división, que sería de ocho entre los cuatro corazones les tocaría de a dos, pero, también como son niños de quinto pues lo van a hacer de manera mental, de manera mecánica, porque están muy relacionados con ese tipo de divisiones que son muy simples, de ocho entre cuatro dos [...]

En el fragmento anterior, Daniela expone los posibles procedimientos que los alumnos pueden emplear para dar respuesta a las preguntas 1, 2 y 3 de la subtarea 2, lo cual nos permite identificar que:

Daniela_KFLM_IC_4. Conoce que los alumnos van a emplear técnicas de conteo para identificar la cantidad de corazones que hay en el rectángulo (pregunta 1) y la cantidad de caritas (pregunta 2).

Daniela_KFLM_IC_5. Conoce que al tratar de repartir a los corazones el número total de caritas para luego identificar cuántas caritas le tocaría a cada uno, los alumnos van a recurrir a la representación figural acompañada de técnicas de conteo –correspondencia uno a uno- (relaciones entre cantidades de caritas y corazones), la operación convencional de la división (ocho entre cuatro) o el empleo del cálculo mental para realizar la operación anterior, ya que se manejan cantidades de una cifra.

En relación con la pregunta 4, Daniela expone que los alumnos van a emplear técnicas de conteo para identificar el total de caritas y de corazones que hay en el cuadro que acompaña esta actividad, lo cual, les permitirá contestar el planteamiento de la siguiente manera [ES1_Daniela_KMT_KFLM_IC_4. 492-499]:

[...] se agrega el cuadrito en blanco y luego dice corazones, cuántos corazones: cuatro; para que vayan poniendo cuatro corazones para cuántas caritas, para ocho caritas; ahí se hace la comparación de lo que es la razón, se hace el enunciado de cómo se lee la razón. [...] en la parte de abajo ya no sería poner un enunciado, sino por la simple representación (señala 1:3), se bajaría el 4, los dos puntos y 8; serían 4 para 8 [...]

En la última parte de la subtask 2, Daniela visualiza la razón como una comparación entre la cantidad de caritas (8) y la cantidad de corazones (4). Además, pretende que los alumnos identifiquen cómo se lee una razón (*cuatro corazones para ocho caritas*), es decir, que realicen la representación verbal de la razón y en un segundo momento la representen de manera numérica empleando los dos puntos (4:8). Así se avanza de la representación verbal de la razón a su representación numérica bajo la forma $a:b$; indicador de conocimiento que describimos en párrafos anteriores (KoT_R_3).

Daniela comenta que quizás a los alumnos les va a desconcertar el empleo de los dos puntos, por lo que agrega el recuadro “para saber más” donde expone “*se utiliza el símbolo de los dos puntos (:) para indicar una comparación entre dos cantidades*”. Sin embargo, en la Entrevista Semiestructurada 1 le preguntamos qué les diría a los alumnos cuando le cuestionen por qué esos dos puntos, a lo cual responde [ES1_Daniela_KSM_SL_1. 503-507]:

Por ejemplo, tomaría la fracción $\frac{1}{3}$ y les preguntaría, ¿cómo sabemos que esta es una fracción?, van a contestar porque tiene la rayita (señala /) y les voy a decir que así como nos sirve la rayita para representar lo que es la fracción, también para representar este tipo de comparaciones se utilizan estos dos puntitos, aunque todavía no lo voy a manejar como razón. Ahora los niños van a tomar como referencia lo que es el cuadrito.

En el fragmento anterior, Daniela se apoya en el conocimiento de la representación numérica de la fracción (a/b) que tienen los alumnos para que avancen en la comprensión de la representación numérica de la razón ($a:b$), aunque es preciso señalar que aquí no ha introducido el concepto de razón sino el de comparación, desde el cual se visualiza la razón (KoT_R). La representación verbal de la razón en función de la representación numérica $a:b$, permite identificar diferentes interpretaciones que se le pueden dar a partir de su planteamiento en la subtask 2 para que los alumnos puedan acceder a su expresión formal, por ejemplo: “uno dos puntos tres”. Así, en la Entrevista Semiestructurada 1 Daniela

comenta que para realizar la lectura de la expresión numérica 4:8 les va a decir que tomen como referencia el enunciado “*cuatro corazones para ocho caritas*” y le quiten las palabras corazones y caritas para expresar: cuatro para ocho. En este sentido, agrega que hasta el final de la clase llegarán a expresar de manera convencional 4 a 8 (KoT_R). En relación con algunas fortalezas y dificultades de los alumnos en la realización de la subtask 2, Daniela señala [ES1_Daniela_KFLM_FD_2. 525-528; 533-534]:

[...] quizá si surgiría la duda de por qué esos dos puntitos, porque sería nuevo para ellos y si sería nuevo porque en los libros para el alumno no viene manejado ese símbolo, casi se maneja hasta lo que es en el nivel secundaria.
 E: ¿Cuáles son las fortalezas de los niños al resolver el planteamiento dos?
 Daniela: Lo que es la operación de división [...]

En función de lo anterior identificamos que:

Daniela_KFLM_FD_2. Conoce que cuando los alumnos resuelven un problema que implica la representación verbal y numérica de la razón bajo la expresión $a:b$ pueden tener algunas dificultades asociadas al empleo de los dos puntos (:).

Daniela_KFLM_FD_3. Conoce la realización de la división (operación) como una de las fortalezas de los alumnos al resolver la subtask 2.

Durante la realización de la subtask 2, Daniela mostró evidencias e indicios de conocimiento matemático y didáctico en relación con la enseñanza de la razón. Enseguida presentamos algunos fragmentos de la clase [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 312-328]:

Aa: Caritas y corazones ¿Cuántos corazones hay en el rectángulo?
 Aos: Cuatro.
 Daniela: Muy bien y, ¿cuántas caritas?
 Ao: Lo doble, ocho.
 Daniela: A ver Erik, ¿qué sigue?
 Ao: Si a los corazones se les repartieron el número total de caritas, ¿Cuántas caritas les toca a cada corazón?
 Aos: Dos.
 Daniela: Muy bien pero, ¿por qué dos?
 Aos: Porque cuatro por dos son ocho.
 Ao: Porque un corazón tiene [...] son cuatro corazones y tenemos ocho caritas, les toca de dos caritas a un corazón.
 Ao: Son cuatro por dos ocho.
 Daniela: Muy bien. Entonces, ¿qué va en esa pregunta?
 Aos: Dos.
 Daniela: Si porque si se repartieran las caritas para los corazones [...] Ok dos para cada uno.

En el fragmento anterior, Daniela y los alumnos trabajan de manera grupal para dar respuestas a las preguntas 1, 2 y 3. Respecto a la pregunta 1 y 2, con ayuda de los alumnos identifican el total de cantidades que se van a comparar: cuatro corazones y ocho caritas. La pregunta 3 hace referencia a una división partitiva: “Si a los corazones se les repartieron el número total de caritas, ¿Cuántas caritas les toca a cada corazón?”; aquí participa un alumno externando que la respuesta correcta es dos, sin embargo, Daniela cuestiona a los alumnos del porqué de esa respuesta, emergen tres participaciones: “Porque cuatro por dos son ocho”, “Porque un corazón tiene [...] son cuatro corazones y tenemos ocho caritas, les toca de dos caritas a un corazón” y “Son cuatro por dos ocho”; la primera y la tercera intervención justifican la respuesta (2) con la multiplicación “cuatro por dos son ocho”, ésta última cantidad corresponde al total de caritas. En la segunda intervención un alumno señala la cantidad total de las imágenes que se comparan (cuatro corazones y ocho caritas) para luego emitir que le tocan dos caritas a un corazón. Así, Daniela valida las respuestas como correctas y vuelve a preguntar cuál es la respuesta correcta, los alumnos contestan que dos. Enseguida procede a señalar que si repartieran las caritas a los corazones, corresponden dos a cada uno. En este sentido, podemos definir el siguiente indicador de conocimiento:

Daniela_KPM_VD_1. Conoce la comparación de los diferentes procedimientos empleados por los alumnos para resolver una interrogante (¿Cuántas caritas le tocan a cada corazón?) de un problema sirve como medio para la validación de la resolución de una división partitiva, aunque enfatizan en el empleo de la multiplicación.

A continuación los diálogos que Daniela establece con los alumnos para dar respuesta al último planteamiento de la subtarea 2 [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 328-337]:

Daniela: [...] Ahora dice en el rectángulo [...] Deisy, ¿me ayudas?
Aa: En el rectángulo hay [...]
Aos: Cuatro corazones [...] para ocho caritas.
/Daniela anota estas cantidades en el pintarrón/
Ao: Ya le entendí [...] ocho caritas para cuatro corazones.
Daniela: Ocho caritas para cuatro corazones.
Ao: Así es.
Daniela: Aquí tengo cuatro corazones para ocho caritas, ahora ocho caritas para cuatro corazones.
Ao: Es al contrario [...]

En la situación anterior Daniela solicita a un alumno le apoye en la lectura de la última parte de la subtarea 2 “En el rectángulo hay [...]”. Enseguida los alumnos expresan “cuatro corazones para ocho

caritas”; cantidades que Daniela escribe en el pintarrón. De inmediato un alumno comprende la situación y expresa las cantidades que se comparan en orden inverso, lo cual es validado por Daniela al exponer “*aquí tengo cuatro corazones para ocho caritas*” y “*ocho caritas para cuatro corazones*”. En este sentido, identificamos que:

Daniela_KPM_SL_1.1. Conoce el papel de los símbolos en la expresión de una razón, en este caso de los dos puntos (:), bajo la forma $a:b$, cuya interpretación no se modifica (comparación entre cantidades), aunque las cantidades cambien de ubicación, siempre y cuando se mantenga la relación con su contexto inicial.

En la subtarea 2 se encuentra un cuadro denominado “para saber más”, Daniela pide se lea en forma grupal, situación que detona una serie de interrogantes, tal como se aprecia enseguida [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 339-345]:

Ao: Para saber más. Se utiliza el símbolo de los dos puntos para indicar una comparación entre dos cantidades.
 Daniela: ¿Para qué ocupamos ese símbolo de los dos puntos niños?
 Aa: Para indicar una comparación entre dos cantidades.
 Daniela: Una comparación entre dos cantidades. Cuando tenemos aquí cuatro corazones para ocho caritas, ¿estaremos comparando cantidades?
 Aos: Sí.

En esta parte del trabajo con la lectura de “para saber más”, se da a conocer el uso de los dos puntos (:) para establecer una comparación entre dos cantidades, lo cual es expresado por el alumno que lee y por una alumna cuando Daniela cuestiona a los alumnos sobre el empleo de los dos puntos; lo anterior, es trasladado por Daniela al contexto de las cantidades que se abordan en la subtarea 2 “*cuatro corazones para ocho caritas*”, desde donde les cuestiona si se están comparando cantidades, situación que en este momento es afirmada por los alumnos. Posterior al trabajo descrito, Daniela retoma la situación de la subtarea 1 “Pastel partido” para discutir con los alumnos si en ese contexto se establece una comparación entre cantidades, lo cual le demanda una serie de intervenciones con diferentes propósitos [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 346-379]:

Daniela: ¿Si estamos comparando cantidades, cuando decimos: Un pastel para cuántos niños?
Aos: Cuatro.
Daniela: ¿Estando comparando las cantidades?
Aos: No.
Daniela: ¿Por qué no? [...] ¿Hay una relación entre este número y este número?
/Daniela señala las cantidades de pastel y las cantidades de los niños/
Aos: Sí.
Daniela: ¿Si hay una relación? [...] ¿Por qué América?
Aa: Porque [...]
Daniela: A ver acuérdense del problema [...] Éste [...] ¿Qué representa? /señala el uno de la cantidad 1 para 4 que está en el pintarrón/
Aos: Un pastel, un entero [...]
Daniela: Y, ¿este?
Aos: Cuatro niños.
Daniela: ¿Estarán relacionadas estas cantidades?
Aos: Sí.
Daniela: Hay relación [...] cuando hay relación entre las cantidades, también se dice que hay una comparación [...] Entonces, ¿será correcto que yo ponga estos dos puntitos aquí?
/Daniela escribe el símbolo “:” en el pintarrón, entre el ocho y el cuatro/
Daniela: ¿Qué significan estos puntitos? A ver [...] levanten la mano.
Aos: Es una comparación.
Daniela: Es una comparación.
Aa: Que es igual.
Daniela: ¿Qué es igual? ¿Si será igual?
Aa: No, que es un sí, que es una comparación.
Daniela: Es una comparación.
Ao: Que es lo mismo [...]
Daniela: ¿Será los mismo? ¿El uno es lo mismo que el cuatro?
Aos: No.
Daniela: Porque hay una relación entre estos dos números /señala el 8 y el 4/ Entonces se llama comparación cuando los números están relacionados. Vuelvo a preguntar, ¿éste y éste estarán relacionados?
Aos: Sí.

En el fragmento anterior, Daniela intenta que los alumnos asocien que en la subtask 1 “Pastel partido” se establece una comparación entre cantidades (pasteles y niños). Cuando los alumnos no la asocian, recurre les pregunta si existe una relación entre la cantidad de pasteles y la cantidad de niños; aquí deja de emplear la palabra “comparación” para usar la de “relación”. Cuando los alumnos dicen que sí Daniela agrega “cuando hay relación entre las cantidades, también se dice que hay una comparación [...]” y, a la par, introduce el empleo de los dos puntos para el caso de las cantidades de la subtask 2, 8 y 4. Al parecer algunos alumnos lo han asimilado, sin embargo, una alumna le otorga a los dos puntos el significado igual, lo cual lleva a Daniela a preguntar a los alumnos si es lo mismo el uno que el cuatro (contexto de pasteles), la respuesta es negativa y le permite reafirmar que cuando existe una relación entre dos números se establece una comparación. De esta manera, Daniela evidencia otro conocimiento:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_2. Conoce ejemplos abordados anteriormente cuyo objetivo es la representación de aplicación del uso de símbolo de los dos puntos para indicar una comparación entre cantidades (1 pastel para 4 niños; 4:8).

El indicador de conocimiento anterior se enriquece con las intervenciones de Daniela al finalizar el trabajo con la subtaska 2 [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_2. 380-406]:

Daniela: Vamos al ejemplo de caritas y corazones, ¿cuántos corazones tenemos?
Aos: Cuatro.
Daniela: Y, ¿cuántas caritas?
Aos: Ocho /Daniela escribe en el pintarrón 4 y 8/
Daniela: Cuando yo tengo un corazón, ¿cuántas caritas van a ser? /Escribe en el pintarrón el 1/
Ao: Dos.
Daniela: ¿Cuántas Jesús?
Ao: Dos.
Daniela: Dos [...] ¿Por qué dos?
Ao: Porque son ocho caritas y ocho corazones.
Daniela: ¿Si le entendemos a Jesús?
Ao: No. Si multiplicamos cuatro caritas por dos corazones nos da ocho. Son dos caritas para un corazón /Daniela escribe en el pintarrón 1 y 2/
Daniela: ¿Depende del número de corazones para el número de caritas?
Aos: Sí.
Daniela: ¿Depende del número de un corazón para el numero de las caritas?
Aos: Sí.
Daniela: ¿Hay relación entre los números?
Aos: Sí.
Daniela: ¿Se está haciendo comparación?
Aos: Sí.
Daniela: Entonces, ¿es correcto poner los dos puntitos?
Aos: Sí.
Daniela: Muy bien [...] Ya entendimos porque por qué son los dos puntitos, ¿verdad? [...] /Daniela agrega dos puntos a las cantidades que están en el pintarrón: 4:8; 1:2/

En el fragmento anterior, Daniela retoma el contexto de la subtaska 2 “Caritas y corazones” para ejemplificar el empleo de los dos puntos en la comparación entre dos cantidades. Sin embargo, no sólo se queda con las cantidades brindadas “4 y 8”, sino que cuestiona cuál es la cantidad de caritas que corresponde a un corazón. Así obtiene dos, ya que un alumno menciona que al multiplicar cuatro caritas por dos da ocho, así “*son dos caritas para un corazón*”. Al finalizar, Daniela cuestiona a los alumnos si hay una relación entre las cantidades anteriores, si existe una comparación y si es correcto usar los dos puntos; los alumnos responden de manera afirmativa, situación que la lleva a emplear los dos puntos en 4:8 y 1:2.

En la Entrevista Semiestructurada 2, Daniela menciona que al revisar que las razones se explican como una relación entre cantidades, decidió enseñar la razón a los alumnos partiendo de cómo se lee y después cómo se representa [ES2_Daniela_KoT_R_3. 646-648]:

Por eso, en el planteamiento uno, les pongo un pastel para cuatro niños, sólo la lectura y en el planteamiento dos agregué la lectura y junto con esto el símbolo de los dos puntos.

Daniela plantea que en el caso de la suma, se parte de agregar, poner o juntar para identificar el total de una colección de objetos, por ejemplo, piedras y, posteriormente, se les da a conocer el símbolo formal de la suma (+). De ahí que, como lo expresa en el fragmento de entrevista, en la subtarea 1 decidió favorecer la lectura de la razón (un pastel para cuatro niños) y en la subtarea 2 su lectura y representación numérica en función de la forma $a: b$ (KoT_R). Enseguida presentamos la tercera y última subtarea que Daniela definió como necesaria para que los alumnos construyeran los conocimientos que les permitieran resolver la tarea principal (problema central).

V.2.7. Subtarea 3 [Planificación_Daniela_3.3. 137-171]. Conocimiento especializado de Daniela.

La tercera subtarea que Daniela diseña y aplica se denomina “Tiras de papel”. En ésta Daniela pretende que los alumnos establezcan relaciones entre la fracción y la razón a partir de un mismo contexto y que avancen en su representación numérica y verbal, según corresponda: a/b y $a:b$ (KoT_R).

Al inicio de la subtarea se encuentra una tira dividida en nueve partes, tres están sombreadas; a partir de esto se agregan tres preguntas: *¿qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros?*, *¿cuántas tiras de papel hay?* y *¿cuántos cuadritos oscuros hay en la tira de papel?*, así como un enunciado en el que se pide completar ciertos cuadritos (3) en función de la cantidad de tiras (1). En la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela agrega información sobre la conceptualización de la fracción y la razón en el contexto de la subtarea 3. Respecto a la fracción Daniela plantea que [ES1_Daniela_KoT_R_4. 256-271]:

[...] cuando es una fracción, sería de manera gráfica (dibuja un rectángulo dividido en nueve partes y sombrea tres) [...] ya dijimos que en una tira de papel hay tres cuadritos, pero qué espacio del total de esa tira de papel ocupan esos tres cuadritos oscuros, aquí es cuando se saca si son nueve partes el entero va a ser nueve novenos (escribe $9/9$) y como son tres novenos, tres de ellos están ocupados por los cuadritos oscuros, entonces serían tres de los nueve (escribe $3/9$) y si lo simplificamos quedaría un tercio (escribe $1/3$); un tercio de esta tira ocupan estos tres cuadritos (señala en el rectángulo). Es como otra manera de representar lo que es la razón. La razón es la comparación entre las dos cantidades (señala $1:3$); esta es la diferencia, por ejemplo, cuántos cuadros sombreados le corresponden a cada tira (señala tres rectángulos dibujados) y, la fracción, me va a estar representando el espacio que se ocupa en función del entero. Aquí hay que tener mucho cuidado cuando se está dando ese tema a los niños porque como manejan los mismos números 1-1 3-3 (señala $1:3$ y $1/3$) puede haber confusiones qué es una razón y qué es una fracción. Por eso, en el planteamiento tres, se buscó que primero empezaran de uno (señala $1/3$) y vean la manera en que se puede pasar a otro (señala $1:3$) y que se puede representar lo mismo pero se lee o se interpreta de otra manera.

En el fragmento anterior, Daniela expresa algunos registros de representación de la fracción y la razón. De manera concreta identificamos que:

Daniela_KoT_R_4. Conoce la representación figural de la fracción como parte-todo en contextos continuos a través del empleo de un rectángulo, el cual está dividido en nueve partes y tres de ellas están sombreadas.

Daniela_KoT_R_5. Conoce la representación numérica de la fracción (parte-todo): $9/9$ y $3/9$; ésta última atiende a la cantidad de partes que están sombreados del total de la tira (rectángulo).

Daniela_KoT_P_1. Conoce la fracción $3/9$ se puede simplificar y obtiene $1/3$, cuya interpretación atiende a señalar “*un tercio de esta tira ocupan estos tres cuadritos*”.

Después, relaciona la fracción $1/3$ como otra manera de representar la razón, entendiendo que ésta hace referencia a una comparación entre dos cantidades, donde destaca $1:3$. Así identifica una diferencia entre fracción y razón; la primera atiende a representar un espacio ocupado en un función de un entero, en este caso, $1/3$ de cuadros están sombreados, mientras que la razón ($1:3$) la asocia con la cantidad de tiras que hay (1) y los cuadros que están sombreados (3); lo anterior la lleva a mencionar que pueden existir confusiones en los alumnos porque en razón y fracción se están manejando cantidades iguales (1 y 3) que pueden representar lo mismo, pero su lectura o interpretación es diferente, ya que en la subtarea 3 buscó que los alumnos iniciaran con la representación numérica de la fracción $1/3$ para pasar a la representación numérica de una razón $1:3$. Sin embargo, en el inicio de la subtarea 3, emerge la

fracción como parte-todo, lo cual en situaciones posteriores puede generar confusiones en el papel que desempeña el denominador (9), hasta el grado de omitirlo y señalar sólo el número de tiras y las partes sombreadas sin importar el número de partes en que está dividido el todo, en este caso, cada tira (rectángulo). Así, identificamos que Daniela posee algunas confusiones en la representación numérica y verbal de la fracción y la razón cuando en función de un mismo contexto (tira de papel) recurre a las anteriores: $1/3$ y $1:3$. En el fragmento siguiente, Daniela establece algunas relaciones entre la fracción y la razón. Más adelante, profundizamos en el caso de la razón [ES1_Daniela_KoT_D_2. 207-217]:

[...] en el último planteamiento “Tiras de papel”, se explica está una tira de papel dividida en nueve cuadritos y tres cuadritos están oscuros. Aquí se hace la comparación de que en una tira de papel hay tres cuadritos oscuros (escribe: $1:3$), esa sería la razón. Entonces si yo tengo dos tiras de papel, por lo tanto, van a ser seis cuadritos oscuros (escribe: $2:6$) porque en cada tira de papel hay tres. Realizo la comparación de esto (señala $1:3$) y ya en fracción lo que se menciona es cuánto ocupan estos tres cuadritos dentro de la tira de papel, por ejemplo, sería 9 (escribe: $9/9$) y están ocupados lo que son tres cuadritos. Si le quitamos aquí lo que son los tres oscuros quedan $6/9$ (lo escribe) y más $3/9$ (lo escribe). Si simplificamos $3/9$ sería $1/3$ (lo escribe), un tercio ocupa [...] de esa tira de papel (señala el 1 de $1:3$) un tercio está ocupado por esos tres cuadritos que hay en cada tira de papel.

La información que ofrece Daniela al inicio del cuadro anterior, expresa la representación verbal de la fracción $3/9$ en la subtarea 3. Enseguida establece la representación numérica de la razón ($1:3$) al hablar de una comparación, misma que interpreta como “*en una tira de papel hay tres cuadritos oscuros*”. De ahí que define en dos tiras van a ser seis cuadritos oscuros ($2:6$). Las confusiones que Daniela expresa al conceptualizar la fracción en el inicio de esta subtarea 3, se hacen evidentes cuando conceptualiza la razón en este contexto. En la última parte del fragmento, Daniela señala nuevamente la representación numérica de la fracción $1/3$ para establecer algunas semejanzas con la razón ($1:3$). Sin embargo, la fracción $1/3$ es obtenida a partir de la simplificación de $3/9$ que corresponde a la representación figural de la fracción (parte-todo) de la subtarea 3. En este caso, cuando Daniela procede a la simplificación de fracciones ($3/9-1/3$) para establecer relaciones entre fracción y razón ($1/3$; $1:3$), el registro de la representación verbal que realiza es correcto, mientras que el registro de representación verbal de la razón es confuso si toma como referente una parte y el todo; la composición de éste último no está definida. De acuerdo con lo anterior, alguna información que arroja Daniela en la Planificación y en la Entrevista Semiestructurada 1, nos permite identificar que:

Daniela_KFLM_IC_6. Conoce que puede ser que los alumnos expresen la fracción figural de la subtarea 3 en una representación numérica no simplificada: $3/9$, por lo que los inducirá para que lo realicen, ya que en razón la fracción se traduce de manera simplificada para que exista correspondencia

entre las cantidades de ambas representaciones numéricas ($1/3$ y $1:3$). En la subtarea 3, Daniela establece relaciones entre la representación figural, numérica y verbal de la fracción (parte-todo) con la representación numérica y verbal de la razón bajo la forma $a:b$, aunque al delimitar ésta última la lleva a establecer relaciones con otros temas, tal como se aprecia en el siguiente fragmento de la Entrevista Semiestructurada 1[ES1_Daniela_KSM_T_1. 220-233]:

[...] sería una razón porque aquí tengo una tira de papel y está dividida en nueve partes (dibuja un rectángulo y lo divide en novenos, pero solo marca tres). Es una razón porque si yo pongo otra tira de papel (la dibuja dividida en nueve partes y sólo sombrea tres) y luego pongo otra (dibuja otra tira de papel con las mismas divisiones) [...] Es una razón porque en cada tira de papel cuántos cuadritos va a haber oscuros: tres, en razón de uno son tres. Entonces está razón (señala $1:3$) me va a ayudar para obtener las otras cantidades. Por ejemplo, por eso al inicio le decía que este tema se relaciona también con lo que es la proporcionalidad, porque la razón dentro de la proporcionalidad se ve como la constante, en este caso, estos tres cuadritos son (señala los nueve cuadritos oscuros en los tres rectángulos) la constante de proporcionalidad que aquí se traduce como razón. Por eso, si tenemos tres tiras de papel van a ser 9 cuadritos (escribe $3:9$) y se van a comparar las cantidades en razón de qué, de uno a tres (señala $1:3$) y ésta razón ($1:3$) me permite sacar otras cantidades, por ejemplo, si es de 4 tiras de papel a 12 (escribe $4:12$) en razón de qué [...] de este primero (señala $1:3$).

Como se puede observar, la expresión de la razón emerge a partir de la representación figural de la fracción en un contexto continuo (parte-todo); situación que guía a Daniela a establecer que en una tira de papel hay tres cuadritos oscuros ($1:3$) y deja de lado el total de partes en que se encuentra dividido el todo. Así, define otras cantidades: $3:9$ y $4:12$. Con esto, asocia el estudio de la razón con la proporcionalidad, la razón se define como la constante de proporcionalidad. Así, Daniela elabora una tabla de proporcionalidad directa en el pintarrón:

1	3
3	9
4	12

La explicación que da, toma como referente el papel que desempeña el valor unitario para obtener los valores de las últimas dos filas, es decir, la cantidad de cuadros sombreados en una tira de papel (1 y 3); dichas cantidades también las asocia a un contexto de cajas y chocolates “*en una caja hay tres chocolates*”, datos que pueden llevar a obtener cuántos chocolates hay en tres cajas, por citar un ejemplo. En este sentido, identificamos que:

Daniela_KSM_T_1. Conoce que la razón se puede expresar como el valor unitario o la constante de proporcionalidad.

Después de que Daniela expresa cómo visualiza el concepto de fracción y razón en la subtarea 3, señala cuáles son los posibles procedimientos que los alumnos empleen para resolver los cuestionamientos [ES1_Daniela_KFLM_IC_7. 536-550]:

E: Del planteamiento 3, ¿cuáles son los procedimientos y estrategias que los alumnos emplearían para resolver la primera pregunta “observa la siguiente tira de papel, ¿qué fracción de la tira de papel ocupan los cuadritos oscuros?” ¿Qué respuesta darían los niños?

Daniela: Contarían el total de cuadritos que serían nueve y como dice qué fracción, entonces van a representarlo y como están acostumbrados que son 3 y son 9. Entonces dirán son tres novenos ($3/9$) [...]

E: Y luego dice, ¿cuántas tiras de papel hay? Aquí, ¿qué cree que le contestarán los alumnos?

Daniela: Puede que contesten que hay nueve porque son los nueve cuadritos, pero desde la primera indicación dice “observa la siguiente tira de papel”, es decir, que nada más hay una. Y luego dice cuántos cuadritos oscuros hay en la tira de papel; aquí pueden contar cada uno de los cuadritos y señalar que son tres y, si se relacionan esas dos cantidades, si en la primera respuesta dieron $3/9$ van a poder llegar a la manera simplificada que son $1/3$.

A partir de lo anterior, identificamos:

Daniela_KFLM_IC_7. Conoce que los alumnos pueden emplear técnicas de conteo para identificar el total de cuadritos de la tira que está presente (9) y la cantidad de cuadritos que esta oscura (3), lo cual van a representar con $3/9$.

Daniela_KFLM_IC_8. Conoce que algunas de las indicaciones que se plantean en la subtarea 3 (*observa la siguiente tira de papel*), pueden ayudar a los alumnos a identificar que existe una tira de papel, aunque puede ser algunos alumnos contesten que 9 por los cuadros en que está dividida la tira.

Daniela_KFLM_IC_9. Conoce que los alumnos pueden recurrir a los procedimientos que realizaron en subtareas anteriores para resolver los planteamientos de la subtarea 3, por ejemplo, en el último enunciado que van a completar “En ___ tira hay ___ cuadritos oscuros”, pueden escribir de inmediato “en una tira hay tres cuadritos oscuros” porque es algo que realizaron en la subtarea 2. Enseguida sólo bajarán el número 1 y el número 3 en los cuadros que corresponde.

Daniela gestiona la resolución de la subtaska 3 “Tiras de papel”, bajo la misma dinámica que las subtaskas 1 y 2, es decir, con apoyo de los alumnos da lectura a algunas de las interrogantes y en forma grupal van contestando cada una de ellas. Enseguida presentamos las interacciones que dieron entre Daniela y los alumnos durante la subtaska 3 [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3.3. 412-438]:

Aa: Observa la siguiente tira de papel, ¿qué fracción de la tira de papel ocupa los cuadritos coloreados?
 Aos: Un tercio.
 Aos: Tres novenos; un tercio.
 Ao: Porque están tres cuadritos pintados de negro y son nueve cuadritos en total.
 Daniela: Muy bien, esos son tres novenos, ¿nada más lo puedo poner como tres novenos?
 Aos: No, un tercio /Escribe en el pintarrón $\frac{3}{9}$ y $\frac{1}{3}$ /
 Daniela: ¿Es correcto? /Señala $\frac{3}{9}$ y $\frac{1}{3}$ /
 Aos: Sí.
 Daniela: Dice, ¿cuántas tiras de papel hay?
 Aos: Tres.
 Daniela: A ver, analicen bien la pregunta.
 Aa: Una.
 Aos: Hay una tira.
 Daniela: ¿Cuántos cuadritos oscuros hay en la tira de papel?
 Aos: Tres.
 Daniela: Muy bien. En el siguiente enunciado dice [...] está un cuadrito en blanco, ¿cuántas tiras tenemos?
 Aos: Una.
 Daniela: En una tira [...]
 Aa: Hay tres cuadritos oscuros.
 Daniela: Hay tres cuadritos oscuros. ¿Sí? ¿Estamos de acuerdo? En una tira hay tres cuadritos oscuros. En la parte de abajo [...] A ver estos dos puntitos dijimos que eran para hacer comparaciones [...] Si en una tira de papel hay tres cuadritos oscuros, ¿Si servirán estos puntitos? /La maestra escribe en el pintarrón $1:3$ /
 Aos: Si [...]
 Daniela: Muy bien [...] Entonces es lo que vamos a poner en la parte de abajo.

Los diálogos que se establecen entre Daniela y los alumnos al responder la primera pregunta de la subtaska 3, la llevan a representar de manera numérica dos fracciones equivalentes: $\frac{3}{9}$ y $\frac{1}{3}$ que inicialmente fueron expresadas de manera verbal por los alumnos (KoT_R) y las respuestas que brindan a las preguntas 2 y 3, permiten a Daniela avanzar en la resolución de la subtaska 3, pero sobre todo, permiten que tengan los elementos para completar la expresión verbal y numérica de la razón “*En una tira hay tres cuadritos oscuros*” $1:3$, donde, como mencionamos en párrafos anteriores, se deja de lado el total de partes en que está dividido el todo. En el documento de Análisis de la Práctica, Daniela expone el papel que como docente desempeña en el fragmento de Videograbación anterior [AP_Daniela_KoT_D_2. 615-617]:

[...] Así mismo la guía que como docente se realiza permite que se analicen todas las opciones, como comprender la presencia de fracciones que son equivalentes, que funcionan para representar lo mismo.

Así identificamos que:

Daniela_KoT_D_2. Conoce las fracciones equivalentes como fracciones que representan lo mismo.

En términos generales, Daniela pretende que los alumnos aborden la razón y fracción en la subtarea 3, donde la razón emerge en función de la fracción en un contexto continuo (parte-todo) y donde la simplificación de fracciones le permite expresar con dos cantidades iguales su representación numérica: $\frac{1}{3}$ y $1:3$. En ésta última expresión Daniela trata de indicar que hay una tira de papel y tres cuadritos oscuros, aunque como aparece en el contexto de fracción como parte-todo, puede que en otras situaciones genere confusiones en los alumnos respecto al papel que desempeña el denominador. En el apartado de la subtarea 3, ubicamos el siguiente cuestionamiento que Daniela agregó en su Planificación, posterior a las interrogantes y enunciados de subtarea 3 [P_Daniela_KoT_D_3. 152-156]:

Contesta el siguiente cuestionamiento:

Es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción.

A) FRACCIÓN B) SUMA C) RAZÓN

En función del cuestionamiento anterior y con información que Daniela brinda en la Entrevista Semiestructurada 1 identificamos que:

Daniela_KoT_D_3. Conoce la razón como la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción.

En relación con los posibles procedimientos o estrategias que los alumnos empleen para dar respuesta al cuestionamiento anterior Daniela señala [ES1_Daniela_KFLM_IC_10. 583-588]:

E: ¿Qué cree que subrayen los niños?

Daniela: Fracción no, porque es lo que ya se está descartando en el planteamiento de la pregunta, fracción no puede ser, suma tampoco porque no se estuvieron haciendo sumas. Entonces el único término que les queda es razón y quizá no lo sacan porque ya lo conocen, sino por lógica que es la única que les queda. Yo lo veo como una manera de introducir un término nuevo a lo que es lenguaje de las matemáticas.

En términos concretos, destacamos que:

Daniela_KFLM_IC_10. Conoce que cuando los alumnos se inician en el estudio de un concepto matemático nuevo pueden identificar su definición al descartar opciones en función de la información que se presenta en el cuestionamiento (fracciones) y algunos conocimientos que poseen (sumas).

Enseguida presentamos lo que sucedió en el salón de clases cuando Daniela y los alumnos abordaron el cuestionamiento anterior [V_Daniela_KoT_D_3. 440-487]:

Ao: Contesta el siguiente cuestionamiento, es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción.
 Daniela: ¿Si entienden la pregunta?
 Aos: Razón.
 Daniela: Es la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción [...] a) Fracción b) Suma o c) Razón
 Aos: Razón.
 Daniela: Ahorita van a ver por qué la razón. Bien, nos vamos a un ejemplo de los pasteles. Un pastel es para ¿Cuántos niños?
 Aos: Cuatro.
 Daniela: Para cuatro niños, dos para [...]
 Aos: Para ocho.
 /Daniela está escribiendo las cantidades en el pintarrón: 1:4; 2:8; 3:12; 4:16/
 Daniela: Tres para doce [...]
 Aa: Cuatro para dieciséis.
 Daniela: A ver, ¿quién me quiere venir a encerrar una razón?
 Aa: Yo.
 Daniela: La razón [...] ¿Quién dice yo? A ver América
 Daniela: De estas tres /señala las cantidades que anteriormente escribió en el pintarrón/, ¿cuál sería la razón?
 /América encierra la primera “1:4”/
 Daniela: ¿Quién más? A ver pásale [...]
 /Pasa otro niño y encierra la tercera “3:12”/
 Daniela: ¿Quién más?
 Aos: Yo.
 /Otro alumno encierra la segunda “2:8”/
 Aa: Yo maestra.
 /La alumna los encierra todos/
 Daniela: ¿Listo? A ver, ¿quién cree que está bien?
 Ao: Ernesto.
 Ao: El de Dianey.
 Daniela: ¿Por qué el de Dianey?
 Ao: Porque todos están bien.
 Ao: Es lo doble [...]
 Daniela: Es lo doble.
 Ao: En todos hay comparación [...]
 Ao: Porque esta es la doble y la triple, pero toda la comparación es esto.
 Daniela: Muy bien. ¿Es una qué?

Aos: Es una comparación.
 /Daniela señala las cantidades que están anotadas en el pintarrón: 1:4; 2:8; 3:12; 4:16; mientras pregunta: /
 Daniela: ¿Estoy comparando éste con éste? /Señala cantidades en el pintarrón/
 Aos: Sí.
 Daniela: ¿Tienen relación éste y éste? /Señala las cantidades que están en el pintarrón/
 Aos: Sí.
 Daniela: ¿Éste y éste? /Señala las cantidades que están en el pintarrón/
 Aos: Sí.
 Aa: Porque todos son comparaciones, lo mismo que dije hace rato, por eso todos están bien.

En el fragmento anterior, identificamos que Daniela introduce el concepto de razón como una comparación entre cantidades que se puede representar mediante una fracción y emplea el contexto de la subtask 1 “Pastel partido” para plantear algunos ejemplos de razones que permitan a los niños avanzar en su representación numérica en función de la expresión $a:b$. Así, Daniela representa en el pintarrón expresiones (1:4, 2:8, 3:12 y 4:16) que acompaña con preguntas respecto de si son razones, si están comparando cantidades y si existe una relación entre las anteriores. Todas las respuestas de los alumnos dicen que son razones porque se están comparando cantidades. Por lo tanto, agregamos que:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. Conoce ejemplos que han sido abordados por los alumnos en actividades anteriores y permiten trabajar la definición de razón como una comparación entre cantidades bajo la forma $a:b$ (1 pastel para 4 niños; 1:4).

En la subtask 3, Daniela incluye en su Planificación una tabla que denominó “Registremos los resultados” [P_Daniela_KoT_R_ 157-160]:

REGISTREMOS LOS RESULTADOS		
PLANTEAMIENTOS	_____	FRACCIÓN
Pastel partido		
Caritas y corazones		
Tiras de papel		

En la primera columna de la tabla anterior Daniela agrega el nombre de las tres subtasks, la segunda columna se encuentra vacía y en la tercera columna agrega la palabra “fracción”. Durante la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela expone el propósito de esta tabla [ES1_Daniela_KoT_R_6. 593-597]:

“Registremos los resultados” es para que ahora sí establezcan cómo se pueden representar de diferentes maneras las cantidades en lo que es la fracción y la razón. Por ejemplo, en la fracción, en el primer planteamiento del pastel quedaría un cuarto (escribe $\frac{1}{4}$) y en razón sería de 1 a 4 (escribe 1:4). Ahí es en el momento que les digo que se puede leer de uno a cuatro, lo cual van a representar con números y los puntitos.

Como se puede apreciar, Daniela esperaba que los alumnos representaran de manera numérica la razón y la fracción correspondiente a cada uno de los planteamientos que diseñó (subtareas 1, 2 y 3). En relación con algunas posibles fortalezas y/o dificultades de que enfrenten los alumnos al contestar la tabla señala [ES1_Daniela_KFLM_FD_4. 606-607]:

Primero van a llenar lo que es la fracción porque en razón a lo mejor si van a tener un poquito de dificultad porque apenas lo estamos viendo [...]

A partir de esto identificamos que:

Daniela_KFLM_FD_4. Conoce que los alumnos pueden tener algunas dificultades en la representación numérica de la razón porque se han iniciado en su estudio. De ahí que contesten primero lo que corresponde a la representación numérica de la fracción y después la representación numérica de la razón.

Con el propósito de que los niños se inicien en la representación numérica de la razón y la fracción, desde la subarea 1 Daniela pretende explicarles [ES1_Daniela_KoT_R_6. 599-604; 610-611]:

Lo de fracción ya lo tienen y lo de razón sólo sería indicarles que se fijen en la respuesta que dieron al planteamiento uno, porque ahí también se manejan las dos cantidades y que un pastel es para cuatro niños y les voy a decir “fijense bien cómo pusimos la razón: un pastel es para cuatro niños esa es la razón; ahora a cada niño cuánto les toca del pastel: $\frac{1}{4}$, esa es la fracción, la fracción indica cuánto les toca de pastel y la razón nos dice cuántos pasteles para cuántos niños”. [...]

la de los pasteles sería un pastel para cuatro niños (1:4) y la fracción sería $\frac{1}{4}$.

A partir del fragmento anterior, identificamos que:

Daniela_KoT_R_6. Conoce la representación numérica y verbal de la fracción y la razón en un problema que involucra la partición de pasteles ($\frac{1}{4}$, un cuarto de pastel le toca a cada niño; 1:4, 1 pastel para 4 niños, 1 a 4).

Respecto a la subtarea 2 “Caritas y corazones”, Daniela señala que tuvieron oportunidad de expresar la razón de manera numérica, es decir, de usar los dos puntos: 4:8 (cuatro corazones para ocho caritas), pero que para el caso de la fracción puede ser necesario plantear algunas situaciones como la siguiente [ES1_Daniela_KoT_R_7. 611-624]:

Entonces les voy a preguntar a los niños muy bien, ahora cuánto sería en fracción (señala 4:8), yo sé que para cuatro corazones hay ocho caritas, pero en fracción sería que los niños lograrán identificar éste como el numerador (señala el 1 de la razón 1:4 y lo compara con $\frac{1}{4}$) y éste como el denominador (señala el 4). Al establecer esa relación pueden sacar $\frac{4}{8}$ de 4:8. Ahora aquí viene la importancia de que los niños establezcan la simplificación, pueden dejar la fracción así (señala $\frac{4}{8}$), pero si se simplifica quedaría $\frac{1}{2}$, una mitad de un corazón para cada carita y, de manera gráfica (dibuja cuatro corazones y ocho caritas), serían un corazón para dos caritas (divide el corazón en dos partes y cada una la relaciona con una carita y escribe 1:2) [...] y entonces le quedaría un medio para éste y un medio para éste (señala la figura del corazón y las caritas). Aunque veo más viable que lo mencionen de manera no simplificada para que no se pierda de vista que son cuatro para ocho (señala 4:8) y luego un medio mejor lo dejen como $\frac{4}{8}$. Sólo voy a pedir que lo simplifiquen en caso de que tengan una duda sobre qué representa $\frac{4}{8}$ [...]

En el fragmento de entrevista anterior, identificamos que Daniela pretende que los alumnos establezcan una relación inicial entre la razón y la fracción en un contexto de estampas a partir del empleo de cantidades iguales, por ejemplo en el caso de “Caritas y corazones”, que definan la representación numérica de la razón como 4:8 y la representación numérica de la fracción como $\frac{4}{8}$, aunque menciona que ésta última se puede simplificar y obtener $\frac{1}{2}$. Así, identificamos que:

Daniela_KoT_R_7. Conoce la representación verbal, numérica y figural de la fracción y la razón en un contexto de estampas ($\frac{1}{2}$, un medio de un corazón le corresponde a cada carita; 1:2, un corazón para dos caritas).

A continuación presentamos lo que sucede en la clase cuando con ayuda del grupo Daniela procede a completar la tabla “Registremos los resultados” [V_Daniela_KoT_R_ 489-508]:

Daniela: [...] nos vamos al cuadrito, a la tablita que tienen en su hoja. Dice planteamientos, aquí dice fracción, ¿aquí qué creen que va? /señala la segunda columna de la tabla que lleva como título “registremos los resultados”/
Ao: La razón
Daniela: ¿Una qué? /Daniela dibuja en el pintarrón una tabla igual a la que tienen en su hoja/
Aa: Comparación [...]
Daniela: Razón o comparación [...] /Y lo anota en el pintarrón en la tabla que previamente elaboró/
Daniela: Fíjense bien cómo se escribe razón [...] ¿Si?
Daniela: En el pastel partido. ¿Cuál sería la razón?
Aa: Uno dos puntos, cuatro y [...] /La maestra escribe en la tabla 1:4/
Daniela: A ver uno, dos puntos y cuatro. Entonces, ¿si entendemos porque los dos puntos? Es como si dijéramos un pastel para [...]
Aos: Cuatro [...] cuatro niños.
Daniela: En fracción, ¿cómo quedaría?
Aos: Un cuarto.
Daniela: A ver, ¿por qué un cuarto?
Ao: Porque es un pastel para cuatro niños, es la cuarta parte de un entero [...]
Daniela: Muy bien, le toca un cuarto a cada niño.

En este fragmento Daniela evidencia conocimiento sobre la representación numérica de la razón en el contexto de la subtarea 1 “Pastel partido”, la cual expresa como 1:4 y con ello favorece la representación verbal de la misma al interpretarla como “un pastel para cuatro niños”. De igual manera, evidencia conocimiento de la representación numérica y verbal de la fracción $\frac{1}{4}$ a la que se refiere como la parte de pastel que le toca a cada niño (KoT_R).

En la representación numérica de la razón en la subtarea 2 “Caritas y corazones”, se presentan algunas situaciones donde Daniela muestra indicios de conocimiento de otro subdominio del MTSK [V_Daniela_KPM_SL_1.1. 511-524]:

Daniela: Ahora vamos por las caritas. ¿Cuál sería la razón de las caritas y corazones?
 /Una alumna escribe en el pintarrón 2: 1/
 Daniela: ¿Por qué pusiste dos a uno?
 Aa: Porque son dos caritas para un corazón.
 Daniela: Porque son dos caritas para un corazón. Muy bien y, ¿si lo ponemos al revés?
 /La alumna lo borra/
 Daniela: Así déjalo, colocas una aquí y otra aquí [...]
 /La alumna escribe: 2:1; 1:2/
 Daniela: A ver niños, ¿está bien la respuesta?
 Aos: Sí.
 Daniela: Dos caritas para un corazón, y también podemos decir que un corazón para [...]. ¿Cuántas caritas?
 Aos: Para dos.
 Daniela: Para dos. Muy bien.

En el fragmento de registro anterior observamos, a pesar de que en la subtarea “Caritas y corazones” se trabajaron las cantidades 4 y 8, al completar la tabla una alumna escribe “2:1”, lo cual lee “dos caritas para un corazón”. Ante esto, Daniela solicita a la alumna que lo ponga al revés, de tal manera que ahora tienen: 2:1 y 1:2. Así, Daniela expresa la representación verbal de ambas razones “dos caritas para un corazón” y “un corazón para dos caritas”. En este sentido, podemos decir que Daniela muestra indicio de conocimiento sobre el hecho de que el valor de dos cantidades no se modifica al cambiarlas de lugar, siempre que se mantengan los dos puntos (:) que indican una comparación y su relación con su contexto inicial (KPM_SL_1.1).

Enseguida presentamos lo que sucede en la clase cuando se favorece la representación numérica de la fracción en la subtarea 2 [V_Daniela_KoT_R_ 531-532; 540-552]:

Daniela: ¿Cuánto sería en fracción, en caritas y corazones?
 /La alumna escribe $\frac{1}{2}$ /
 Daniela: Muy bien [...]
 [...]
 Daniela: ¿Aquí qué me está representando un medio Jesús? /señala en caritas y corazones/
 Ao: Un entero repartido en dos [...]
 Daniela: Un entero repartido en dos, pero ¿por qué aquí en este, en el de caritas y corazones?
 Ao: Porque cada corazón tiene dos caritas.
 Daniela: Porque a cada corazón le corresponden dos caritas. A ver a una carita ¿Qué parte de corazón le toca?
 Aos: Un medio [...]
 Daniela: Muy bien. ¿Si entendemos aquí por qué es un medio? ¿Si chino, por qué es un medio aquí?
 Aa: Porque a cada corazón le toca dos caritas.
 Ao: Porque uno es la mitad de dos y, como es la mitad de dos, es un medio.
 Daniela: Estamos diciendo que a la mitad de un corazón le toca una carita [...]

En la subtarea 2, en relación con la representación numérica de la fracción identificamos que se presenta algo similar en la subtarea 1. Cuando Daniela cuestiona sobre la fracción presente en “Caritas y corazones”, los alumnos parten de la representación numérica de la razón (1:2) y expresan $\frac{1}{2}$, es decir, retoman las mismas cantidades (1 y 2) (KoT_R). Enseguida Daniela pide a los alumnos que justifiquen la expresión $\frac{1}{2}$ en el contexto de caritas y corazones y contestan “*un entero repartido en dos*” y “*porque cada corazón tiene dos caritas*”; retoma la última participación para preguntarles ¿qué parte del corazón le toca a cada carita?, con el apoyo de un alumno enuncia “*la mitad de un corazón le toca a cada carita*”.

Durante la representación numérica de la razón y la fracción en la subtarea 3 “Tiras de papel” se presentaron las siguientes interacciones entre Daniela y los alumnos [V_Daniela_KoT_R_ 526-528; 533-539; 552-560]:

Daniela: Una tira de papel para [...] ¿Cuántos cuadritos oscuros?
Aa: Para tres.
/La alumna escribe 1:3/
[...]
Daniela: Pásale Monse, en tiras de papel, ¿cuánto quedaría en fracción?
/Pasa Monse y escribe 1/3/
Daniela: Muy bien.
Ao: Yo tengo otra en tiras de papel.
Daniela: A ver pásale José. ¿Quién más tiene otros resultados para la tablita?
/José pasa al pintarrón y anota 3:9 /
Daniela: Muy bien [...]
[...]
Daniela: [...] Ok. Ahora para la tira de papel, ¿qué fracción dijimos?
Ao: Un tercio porque es una tira y estamos agarrando tres.
Daniela: En el problema “tiras de papel” ocupamos una tira de papel para tres cuadritos oscuros, ahora esos cuadritos oscuros están ocupando un tercio en la tira de papel, ¿sí?
Aa: En las tiras de papel como son [...] es una tira y son nueve, lo dividimos en nueve y agarramos tres, y por eso son tres novenos.
Ao: O un tercio [...]
Daniela: Son equivalentes [...]

La primera intervención de Daniela hace énfasis en la representación verbal de la razón “*una tira de papel para [...]*”, que es completada por una alumna “*tres*” y enseguida se representa de manera numérica 1:3. Aquí es conveniente mencionar que la representación numérica y verbal de la razón en la subtarea 3 “Tiras de papel” emerge de la fracción como parte-todo: $\frac{1}{3}$; fracción equivalente de $\frac{3}{9}$, cuya representación figural se encuentra al inicio de dicha subtarea.

Como podemos observar, la relación que Daniela establece entre la representación numérica de la fracción y la razón a partir del empleo de cantidades iguales (1 y 3), propicia que en el llenado de la tabla “registremos los resultados” uno de los alumnos interprete la fracción *“un tercio porque es una tira y estamos agarrando tres”*; esta situación comentábamos podía suceder, es decir, que algunos alumnos dejaran de lado el papel del “todo” en la representación figural de la fracción tres novenos ($3/9$). Ante esto, Daniela agrega *“En el problema ‘tiras de papel’ ocupamos una tira de papel para tres cuadritos oscuros, ahora esos cuadritos oscuros están ocupando un tercio en la tira de papel”*; al parecer la primera parte de su participación atiende a la representación verbal de la razón, la cual había trabajado antes, mientras que la segunda, hace referencia a la representación verbal de la fracción. Las particiones de los alumnos expresan la representación verbal de las fracciones tres novenos y un tercio que son identificadas por Daniela como fracciones equivalentes.

En términos generales, las interacciones que se establecieron entre Daniela y los alumnos del grupo en torno a la tabla “Registremos los resultados” evidenciaron el conocimiento de Daniela respecto a la representación verbal, numérica y figural de la fracción en contextos continuos y discretos así como el conocimiento de la representación verbal y numérica de la razón como parte-parte en la subtarea. En lo que respecta a la subtarea 3, Daniela evidencia conocimiento de fracciones equivalentes ($3/9$; $1/3$), lo que le permite definir una representación verbal y numérica de la razón a partir de la fracción como parte-todo, sin embargo, la interpretación que le otorga, en algunos casos provoca confusiones en los alumnos respecto al papel que desempeña el “todo” (KoT_R). En el documento de Análisis de la Práctica, Daniela muestra indicios de conocimiento de algunas fases de la teoría de las situaciones didácticas que se presentaron durante el trabajo con las anteriores [AP_Daniela_KMT_T_1. 658-666]:

Es imprescindible reconocer que en cada una de los planteamientos que se resolvieron, aunque muy sencillos y breves, se utilizaron las fases que componen la situación didáctica, debido que en la parte en la que los alumnos resolvían los problemas primeramente de manera individual, se daba una fase de acción, después una formulación, consecuentemente una validación y con las mismas aportaciones de los alumnos se realizó la institucionalización. Aunque no se puede señalar puntalmente que se trató de una situación didáctica en todo su esplendor ya que no representaron mucha dificultad para los alumnos. Sin embargo, se logró el objetivo que se tenía para abordar cada una de estas actividades, y es que los alumnos comprendieron lo que es una razón.

Como se puede apreciar en el fragmento anterior, al explicar la dinámica bajo la cual se resolvieron las tres subtarear, Daniela evidencia conocimiento de la fase de acción, pues el apartado de la tarea principal, las Entrevistas Semiestructuradas 1 y 2, la Videograbación de la clase y el documento de

Análisis de la Práctica aportaron información al respecto y, en este momento, se evidencia de manera sintética. Es por ello que identificamos que:

Daniela_KMT_T_1. Conoce la fase de formulación, validación e institucionalización de las situaciones didácticas que se favorecieron en el trabajo con cada subtarea.

Por otra parte, identificamos evidencias de conocimiento de Daniela en relación con el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, pues en la Entrevista Semiestructurada 2 señala [ES2_Daniela_KMT_R_2.1. 786-794]:

[...] las tablas son una herramienta gráfica, que nos permite establecer una relación entre el número que está en una columna con el número que está en otra columna, entonces la razón es una relación y, el empleo de tablas, por ejemplo, un pastel para cuantos niños y se está estableciendo una relación. Al final en el planteamiento 3 dice “registremos los resultados”, que vean que la razón y la fracción también establecen una relación que no se deslindan. Entonces si hubiera puesto primero fracciones y luego razones en la tabla, hubiera sido difícil que los niños establecieran que entre uno a cuatro se relacionaban con un cuarto y, también, para que entendieran la diferencia entre el significado de una razón y de una fracción, aunque llevara las mismas cantidades.

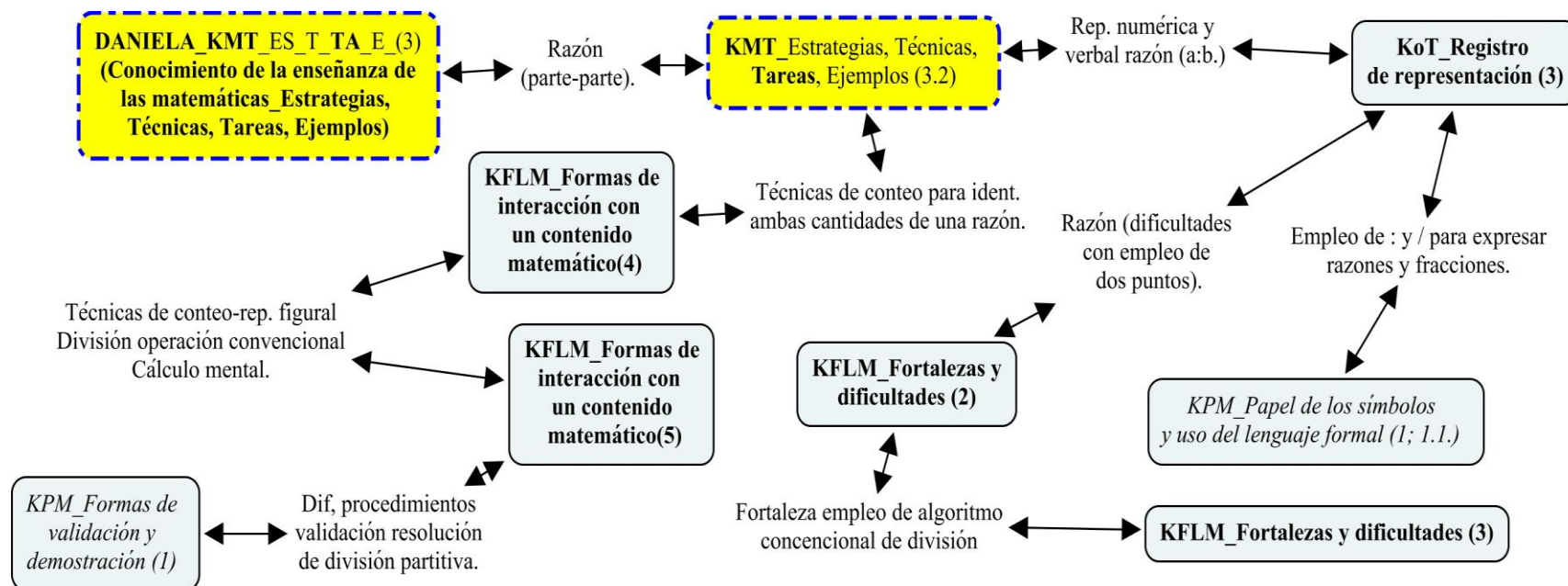
A partir del fragmento de entrevista anterior identificamos que:

Daniela_KMT_R_2.1. Conoce que las tablas son un recurso que favorece la representación verbal (subtarea 1) y numérica de la razón y la fracción (subtarea 3).

Daniela_KFLM_FD_5. Conoce que la representación verbal y numérica de razones en la subtarea 3 (registremos los resultados), favorece que los alumnos representen de manera verbal y numérica fracciones cuando ambas emplean las mismas cantidades.

Con los indicadores de conocimiento anteriores, concluimos la identificación de evidencias e indicios de conocimiento matemático y didáctico de Daniela en las subtareas 1, 2 y 3 que favorecerían en los alumnos la construcción de conocimiento para resolver la tarea principal, misma que se concluye en el siguiente apartado y permite continuar con la identificación y caracterización del conocimiento especializado de Daniela cuando enseña la razón en su doble manifestación. Enseguida presentamos un resumen del conocimiento especializado de Daniela durante el diseño y ejecución de las subtareas 1, 2 y 3.

V.2.7.2. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas para resolver la tarea principal. Subtarea 3.2.





V.2.7.4. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Subtareas para resolver la tarea principal.

En los siguientes apartados identificamos el conocimiento matemático y didáctico de Daniela cuando enseña la noción de razón en su doble manifestación en función de las subtareas 1, 2 y 3; las cuales favorecen en los alumnos la construcción de conocimientos para resolver el problema de la tarea principal.

En la subtarea 1, Daniela evidencia que conoce un problema donde se expresa la fracción (parte-todo) y la razón (parte-parte) de manera verbal y textual, profundiza en ésta última como la comparación/relación entre dos números naturales a partir de un contexto real (partición de pastel entre diferente cantidad de niños) (KMT_ES_T_TA_E_3.1). Aquí, identificamos que Daniela conoce la representación figural, numérica y verbal de la fracción como parte-todo cuando hace referencia a un cuarto, cantidad que le corresponde a cada niño al repartir un pastel entre cuatro niños (**KoT_R_1**), así como la representación verbal y numérica de la razón al expresar “*1 pastel para 4 niños*” y señalar 1:4 (**KoT_R_2**); lo anterior permite identificar que conoce la razón como una relación entre dos cantidades de números naturales (1 pastel para 4 niños) (**KoT_D_1**).

En relación con el conocimiento que Daniela tiene sobre las formas de interacción de los alumnos con la razón y la fracción en la subtarea 1, destaca que conoce que los alumnos pueden recurrir a la representación figural de la fracción (parte-todo) en contextos continuos para resolver una situación de partición (pasteles) al tomar como referente las imágenes que se proporcionan en la subtarea 1: círculos (**KFLM_IC_1**); conoce también que los alumnos pueden recurrir a la multiplicación (maneja cantidades mayores a las iniciales) o la representación figural de la fracción (parte-todo) en contextos continuos para resolver situaciones que implican la expresión de la razón como una relación entre cantidades de números naturales (pasteles y niños) (**KFLM_IC_2**) y, conoce que plantear una suma de fracciones de manera verbal cuya constante es un $\frac{1}{4}$ (parte de pastel que le toca a un alumno), contribuye a que los alumnos encuentren la relación entre la cantidad de niños y la cantidad de pasteles cuando ambas aumentan, pero la cantidad que le corresponde a cada niño es la misma ($\frac{1}{4}$) (**KFLM_IC_3**).

En relación con los conceptos matemáticos que se trabajan en la subtarea 1, Daniela conoce que desde tercer año los alumnos abordan la representación figural de fracciones como parte-todo en contextos continuos (partición de pasteles) (**KMLS_TAP_1**). De ahí que una de sus fortalezas puede estar ligada a

que en quinto grado los alumnos pueden representar de manera gráfica (figural) la partición de un pastel (parte-todo contextos continuos) (**KFLM_FD_1**).

Durante la ejecución de la subtarea 1, identificamos que Daniela conoce ejemplos/ejercicios para verificar los aprendizajes que van adquiriendo los alumnos sobre la representación numérica y verbal de la razón como una relación entre dos cantidades de números naturales en un contexto de partición de pasteles (*si yo tuviera aquí [...] doce niños, ¿cuántos pasteles necesito? y, si tuviera cuarenta niños*) (**KMT_ES_T_TA_E_1**). Además, recurre al pintarrón como un recurso que permite plasmar la representación textual/escrita de la razón como una relación entre cantidad de pasteles y cantidad de niños (1 pastel para 4 niños) (**KMT_R_1**); las representaciones anteriores a través del pintarrón favorece el aprendizaje en los alumnos cuyos estilos de aprendizaje son auditivos y visuales (**KFLM_T_1**). Por último, en la subtarea 1, identificamos que Daniela conoce el uso de la tabla para que los alumnos puedan visualizar las relaciones/comparaciones entre las cantidades de pasteles y de niños como una forma de expresar una razón, así como su lectura: “1 pastel para 4 niños”, por citar un ejemplo (**KMT_R_2**).

En la subtarea 2, Daniela evidencia conocimiento de un problema para expresar la razón (parte-parte) de manera verbal y de forma numérica bajo la expresión $a:b$, a partir de un contexto de estampas (caritas y corazones) (**KMT_ES_T_TA_E_3. 2**). Por lo cual, identificamos que conoce la representación numérica y verbal de la razón bajo la forma $a:b$ (**KoT_R_3**), así como el empleo de los dos puntos (:) para expresar razones ($a:b$), al igual que la diagonal (/) permite expresar fracciones (a/b) (**KPM_SL_1**), donde, el papel de los símbolos en la expresión de una razón, en este caso de los dos puntos (:), bajo la forma $a:b$, no modifica su interpretación (comparación entre cantidades), aunque las cantidades cambien de ubicación, siempre y cuando se mantenga la relación con su contexto inicial (**KPM_SL_1.1**).

En la subtarea 2, Daniela solicita los alumnos determinen la cantidad de caritas y corazones que hay en un rectángulo para que expresen la relación entre ambas cantidades a través de una razón verbal y numérica. En este sentido, Daniela señala que los alumnos van a emplear técnicas de conteo para identificar la cantidad de corazones que hay en el rectángulo (pregunta 1) y la cantidad de caritas (pregunta 2) (**KFLM_IC_4**). Además, conoce que al tratar de repartir a los corazones en el número total de caritas los alumnos pueden identificar cuántas caritas le tocaría a cada uno y van a recurrir a la representación figural acompañada de técnicas de conteo –correspondencia uno a uno– (relaciones entre cantidades de caritas y corazones), a la operación convencional de la división (ocho entre cuatro)

o al cálculo mental para realizar la operación anterior, ya que se manejan cantidades de una cifra (**KFLM_IC_5**).

Daniela señala que una de las fortalezas que pueden tener los alumnos al resolver esta subtarea radica en la realización de la división (operación) (**KFLM_FD_3**). Pero, una de las dificultades se puede relacionar con el empleo de los dos puntos para representar una razón bajo la expresión $a:b$ (**KFLM_FD_2**). Durante la ejecución de la subtarea 2, Daniela conoce que la comparación de los diferentes procedimientos empleados por los alumnos para resolver una interrogante (*¿Cuántas caritas le tocan a cada corazón?*) de un problema sirve como medio para la validación de la resolución de una división partitiva, aunque enfatizan en el empleo de la multiplicación (**KPM_VD**). En este contexto, Daniela evidencia conocimiento de algunos ejemplos abordados anteriormente cuyo objetivo es la representación de aplicación del uso de símbolo de los dos puntos para indicar una comparación entre cantidades (1 pastel para 4 niños; 4:8) (**KMT_ES_T_TA_E_2**).

En la subtarea 3, Daniela evidencia conocimiento de un problema para expresar la representación numérica de la fracción como parte-todo (a/b) y a través de la simplificación de fracciones acceder a la expresión de la razón (parte-todo) de manera verbal y numérica ($a:b$) (**KMT_ES_T_TA_E_3.3**). A partir de esta subtarea identificamos que conoce la representación figural de la fracción como parte-todo en contextos continuos a través del empleo de un rectángulo, el cual está dividido en nueve partes y tres de ellas están sombreadas (**KoT_R_4**). Además, conoce la representación numérica de la fracción (parte-todo): $9/9$ y $3/9$; ésta última atiende a la cantidad de partes que están sombreados del total de la tira de papel (rectángulo) (**KoT_R_5**). En función de lo anterior, Daniela conoce que la fracción $3/9$ se puede simplificar y obtener $1/3$, cuya interpretación atiende a señalar “*un tercio de esta tira ocupan estos tres cuadritos*” (**KoT_P_1**).

En relación con las formas de interacción de los alumnos con la fracción y la razón en la subtarea 3, Daniela conoce que tal vez los alumnos expresen la fracción figural de la subtarea 3 en una representación numérica no simplificada: $3/9$, por lo que puede inducirlos para que lo realicen, ya que la fracción se traduce de manera simplificada para que exista correspondencia entre las cantidades de ambas representaciones numéricas ($1/3$ y $1:3$) (**KFLM_IC_6**); conoce que los alumnos pueden emplear técnicas de conteo para identificar el total de cuadritos de la tira que está presente (9) y la cantidad de cuadritos que esta oscura (3), lo cual van a representar con $3/9$ (**KFLM_IC_8**) y, conoce que los alumnos pueden recurrir a los procedimientos que realizaron en subtareas anteriores para resolver los planteamientos de la subtarea 3, por ejemplo, en el último enunciado que van a completar “*En ___ tira*

hay ____ *cuadritos oscuros*”, pueden escribir de inmediato “*en una tira hay tres cuadritos oscuros*” porque es algo que realizaron en la subtarea 2. Enseguida sólo bajarán el número 1 y el número 3 en los cuadros que corresponde (**KFLM_IC_9**).

El escenario de la subtarea 3, permite identificar que Daniela conoce que la razón se puede expresar como el valor unitario o la constante de proporcionalidad (**KSM_T_1**). Además, evidencia conocimiento de las fracciones equivalentes como las fracciones que representan lo mismo (**KoT_D_2**).

En la subtarea 3, agregamos dos actividades que Daniela plantea con el propósito de que los alumnos identifiquen el concepto de razón y la representación numérica de la razón y la fracción a partir de las cantidades que se manejan en el contexto de la subtarea 1 (partición de pastel), subtarea 2 (estampas de caritas y corazones) y la subtarea 3 (tira de papel dividida en nueve partes). Así, identificamos que Daniela conoce la razón como la comparación entre cantidades y también se puede representar mediante una fracción (**KoT_D_3**); enunciado que plantea para completarse por los alumnos, es decir, sin la palabra razón. También conoce que cuando los alumnos se inician en el estudio de un concepto matemático nuevo pueden identificar su definición al descartar opciones en función de la información que se presenta en el cuestionamiento (fracciones) y algunos conocimientos que poseen (sumas) (**KFLM_IC_10**).

En relación con el llenado de la tabla donde Daniela solicita los alumnos agreguen la representación numérica de la razón y la fracción de cada uno de los tres planteamientos, la informante conoce que los alumnos pueden tener algunas dificultades en la representación numérica de la razón porque se han iniciado en su estudio. De ahí que contesten primero lo que corresponde a la representación numérica de la fracción y después la representación numérica de la razón (**KFLM_FD_4**). A partir de estas situaciones identificamos que Daniela conoce la representación numérica y verbal de la fracción y la razón en un problema que involucra la partición de pasteles ($1/4$, un cuarto de pastel le toca a cada niño; $1:4$, 1 pastel para 4 niños, 1 a 4) (**KoT_R_6**) y la representación verbal, numérica y figural de la fracción y la razón en un contexto de estampas ($1/2$, un medio de un corazón le corresponde a cada carita; $1:2$, un corazón para dos caritas) (**KoT_R_7**).

En términos generales, Daniela menciona que con cada una de las tres subtareas, favoreció la fase de formulación, validación e institucionalización de la Teoría de las Situaciones Didácticas (**KMT_T_1**). Además, las tablas empleadas en la subtarea 1 y 3 se convierten en un recurso que favorece la representación verbal (subtarea 1) y numérica de la razón y la fracción (subtarea 3), donde, conoce la

representación verbal y numérica de razones en la subtarea 3 (registremos los resultados), favorece enseguida los alumnos representen de manera verbal y numérica fracciones cuando ambas emplean las mismas cantidades (*KFLM_FD_5*).

**V.2.8. Tarea principal (Segunda parte) [Planificación_Daniela_3.4. 172-176].
Conocimiento especializado de Daniela.**

La identificación del conocimiento matemático y didáctico de Daniela en el diseño y aplicación de la tarea principal para abordar la noción de razón en su doble manifestación la hemos dividido en primera y segunda parte; ésta última es posterior al trabajo realizado con la subtarea 1, 2 y 3. Así, en este espacio, presentamos lo que desde la Planificación de Daniela se ubica como cierre [P_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 172-176]:

Cierre

- Pediré a los alumnos que retomen el problema inicial y solicitaré que analicen nuevamente sus respuestas y procedimientos.
- Se pasará a validar los resultados (*Ahora los alumnos cuentan con los elementos para resolver eficazmente el problema*).

El cierre constituye el último apartado de la planificación. En éste, Daniela pide a los alumnos retomen la tarea principal (problema principal) para que analicen las respuestas y los procedimientos a cada interrogante. Además, propicia que los alumnos validen los resultados una vez que han resuelto las tres subtarear que, desde la perspectiva de Daniela les han brindado elementos para resolver el problema de manera eficaz.

En el documento de Análisis de la Práctica, Daniela confirma que después de que los alumnos abordaron las tres subtarear, retoman la tarea principal (problema principal), apoyados en las fases de formulación y validación de la TSD, cuyo papel lo visualiza de la siguiente manera [AP_Daniela_KMT_T_1.4.-1.5. 678-683]:

[...] tanto la formulación como la de validación son procesos que se articulan para que los alumnos compartan y comprendan los procedimientos que realizaron y el porqué de sus respuestas, pero a la vez es fundamental su desarrollo para que como docente se reconozca de qué manera los alumnos están construyendo el conocimiento y la forma en la que interpretan el problema y le dan solución, para guiarlos a la respuesta correcta, y procedimientos adecuados.

En el fragmento anterior, identificamos que Daniela destaca la formulación y validación como procesos que permiten a los alumnos explicar y justificar los procedimientos empleados en la resolución de la tarea principal; dicha información permitirá al docente orientarlos a los procedimientos y respuestas esperadas. En otro apartado del documento de Análisis de la Práctica, Daniela evidencia conocimiento de las fases/situaciones de formulación y validación desde la perspectiva de Brousseau (2007) [AP_Daniela_KMT_T_1.4.-1.5. 104-108; 109-112]:

[...] **situación de formulación**, definida por el momento en el que los alumnos un vez que han desarrollado sus estrategias, las recapitulan pero ahora expresadas en un lenguaje oral, es decir, los procedimientos que los alumnos elaboraron son explicados. Es una información que se da de un alumno que es emisor a otro que funge el papel de receptor.

En consecuencia, viene otra fase denominada como **situación de validación**, parte en la que una vez que ya se dio a conocer los procedimientos a través del mensaje emitido mediante la formulación, el receptor lo analiza y reconoce para aceptarlo o rechazarlo, ofreciendo posibilidades de que se realicen correcciones en los procedimientos o resultados.

Las referencias que rescata Daniela en relación con la situación de formulación y validación definen el papel que desempeñan los alumnos en la resolución de un problema, en este caso, la tarea principal. Así, identificamos que:

Daniela_KMT_T_1.4. Conoce en la situación de formulación que un alumno expresa de manera oral los procedimientos realizados a otro, lo cual los convierte en emisor y receptor respectivamente.

Daniela_KMT_T_1.5. Conoce que la situación de validación es consecuencia de la situación de formulación. Así, en la validación el receptor acepta o rechaza los procedimientos externados, aunque también puede aportar algunas sugerencias para que se corrija, en caso de ser necesario. En la Entrevista Semiestructurada 1, Daniela menciona el propósito del cierre de su Planificación [ES1_Daniela_KMT_T_1.6. 631-637]:

En el cierre se le va a dar un poco de más enfoque a lo que es la última pregunta del problema central, por ejemplo, cuál es la razón de la cantidad de cajas con respecto a la cantidad de lechugas.

E: ¿Y por qué retomar en el cierre la actividad inicial?

Daniela: Porque considero que con estos tres planteamientos los niños ya tienen más elementos para poder resolverlo y, lo pongo hasta el cierre, para poder dar la institucionalización de la razón.

A partir de lo anterior, destacamos que Daniela pretende institucionalizar la razón en el cierre de la clase, por lo cual se apoya en la última pregunta de la tarea principal. Enseguida menciona [ES1_Daniela_KMT_T_1.6. 649-658]:

E: En términos generales, si va a institucionalizar, qué les va a decir respecto de qué es la razón.

Daniela: La razón, les voy a decir que es la comparación de dos cantidades, de dos números, pues ellos previamente lo vieron en lo que estaba en el cuestionamiento y en el recuadrito que se les hizo. Es la comparación entre estas dos cantidades y es lo que me dice cuánto corresponde para cada elemento, por ejemplo, cuántas lechugas le corresponden a una sola caja y me permite comparar que una caja es para dieciséis lechugas, dos es para treinta y dos y, así sucesivamente; además, que esa razón también representa lo que es el espacio que ocupa la lechuga dentro de esa caja, un dieciseisavo [...] se utilizan los mismos términos numéricos [...]

En función de lo anterior identificamos que:

Daniela_KoT_R_2. Conoce la representación verbal de la razón y la fracción en contexto de cajas y lechugas a través del empleo de las mismas cantidades (una caja para dieciséis lechugas; un dieciseisavo).

En el documento de Análisis de la Práctica, Daniela define la fase/situación de institucionalización como aquella que permite consolidar los conocimientos que estuvieron en interacción en las fases de acción, formulación y validación. Además, señala [AP_Daniela_KMT_T_1.6. 115-118]:

[...] resume la acción que el alumno mantuvo con el medio, se basa en las formulaciones y validaciones de los alumnos para llevarlos hacia la asimilación del conocimiento convencional o la estructuración de algoritmos. Es expuesto y explicado meramente a cargo del profesor.

En el fragmento anterior, Daniela otorga a la fase de institucionalización al momento para presentar el conocimiento convencional o formal de la clase, apoyado en las formulaciones y validaciones de los alumnos previamente realizadas. En este sentido, definimos el siguiente indicador conocimiento de las teorías de enseñanza:

Daniela_KMT_T_1.6. Conoce la situación de institucionalización como un momento de cierre de la clase para expresar la representación numérica y verbal de la razón y la fracción en el contexto de la tarea principal (cajas y lechugas).

Debido a que en la institucionalización Daniela pretende dar a conocer la representación numérica y verbal de la razón y la fracción a partir de las aportaciones de los alumnos, en la Entrevista Semiestructurada 1 le preguntamos cuáles serían las posibles reflexiones a las que pudieran llegar los

alumnos en la última pregunta de la tarea principal: “¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas?”, a lo cual contestó [ES1_Daniela_KMT_IE_1. 644-648]:

Pueden llegar a la reflexión de encontrar el valor unitario, de una caja es para dieciséis lechugas, de una a dieciséis, o si no de dos a lo que son treinta y dos lechugas, que es lo que se pregunta en el segundo cuestionamiento y pueden llegar a ese tipo de reflexiones. Pueden decir “maestra entonces es como poner la cantidad de lechugas que hay por cada caja y lo que representa la fracción es como un dieciseisavo”.

A partir del fragmento de entrevista anterior, identificamos:

Daniela_KFLM_IE_1. Conoce que los alumnos pueden identificar el valor unitario en el contexto de cajas y lechugas para avanzar en la representación verbal de la razón de “una caja es para dieciséis lechugas” a “una a dieciséis”, cuya expresión corresponde a la representación numérica de la forma $a:b$. Así, al final, expresan la representación verbal de la razón y la fracción.

Este apartado que corresponde a la segunda parte de la tarea principal, se caracteriza por la identificación de algunos conocimientos matemáticos y didácticos que Daniela evidencia o muestra indicios al retomar al final de clase, la hoja de trabajo 1 donde se encuentra la tarea principal (problema principal). En párrafos anteriores, identificamos que Daniela evidencia conocimiento de las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización como elementos de la TSD (KMT_T).

Enseguida presentamos las interacciones que se suscitan en el aula de clase después de que los alumnos vuelven a contestar la hoja de trabajo 1 de manera individual, luego de resolver las tres subtareas. El orden de los fragmentos que se muestran atiende a las cuatro preguntas de la hoja de trabajo 1. A continuación presentamos lo que sucede cuando Daniela pide a una alumna dé lectura a la primera pregunta para socializar los procedimientos y respuestas brindados por los alumnos [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 587-614]:

Daniela: Vamos a leer la primera pregunta para contestarla, para revisar si estaban bien o si estaban mal. Areli, me ayudas con la primera pregunta del problema.
Aa: ¿Cuántas cajas se ocuparon para empacar 112 lechugas?
Aos: Siete.
Aa: Siete cajas.
Daniela: Siete cajas. ¿Cómo le hiciste para saber que son siete cajas?
Ao: Dieciséis por siete.
Daniela: Dieciséis por siete. Pero, ¿cómo le hiciste para obtener ese dieciséis?
Aa: Yo dividí 64 entre 4 y me salieron 16, y luego dividí 112 entre 16 y me salieron 7.
Daniela: ¿Quién tiene otro procedimiento diferente?
Aa: Dividí 64 entre 4 y me dio 16 y, las 112 lechugas las dividí entre 16 para sacar cuántas cajas se ocupaban.
Ao: Yo primero multipliqué 16 por 5, y como vi que no llegó, lo multipliqué por 6 y luego por 7.
Ao: Yo dividí 64 entre 4 y me dio 16 y el resultado, lo multipliqué por 8 y no más le bajé 16, y estaba seguro y le puse siete [...]
Daniela: ¿Te dio los 112?
Ao: Sí.
Daniela: ¿Si te dio los 112 cuando le restaste los 16?
Ao: Sí.
Daniela: Entonces, ¿cuántas cajas se necesitan?
Aos: Siete.
Daniela: Para cuatro cajas, ¿cuántas lechugas niños?
Aa: 64.
/Daniela escribe en el pintarrón las cantidades señaladas por los alumnos/
Daniela: Y, ¿para 112 lechugas cuántas cajas?
Aos: Siete.
Daniela: Siete cajas. Muy bien [...]

En el fragmento de registro anterior, Daniela cuestiona a los alumnos sobre los diferentes procedimientos que emplearon para obtener el número “siete” que corresponde a las cajas que se ocupan para empacar 112 lechugas (primera pregunta). Ante esto, los algunos alumnos expresan diferentes procedimientos que los llevan a confirmar que la respuesta es “siete”, por ejemplo: “Yo dividí 64 entre 4 y me salieron 16, y luego dividí 112 entre 16 y me salieron 7”, “Dividí 64 entre 4 y me dio 16 y, las 112 lechugas las dividí entre 16 para sacar cuántas cajas se ocupaban”, “Yo primero multipliqué 16 por 5, y como vi que no llegó, lo multipliqué por 6 y luego por 7” y “Yo dividí 64 entre 4 y me dio 16 y el resultado, lo multipliqué por 8 y no más le bajé 16, y estaba seguro y le puse siete”; las primeras dos participaciones asocian sus procedimientos con la división, se puede decir que siguen los mismos pasos, sólo que en la segunda no se externa el número siete, la tercera participación relaciona su procedimiento con la multiplicación, mientras que la última retoma la división y la multiplicación. En vista de lo anterior, Daniela lleva a los alumnos a completar las expresiones: “para cuatro cajas se necesitan sesenta y cuatro lechugas” y “para ciento doce lechugas se necesitan siete cajas”.

En el documento de Análisis de la Práctica, Daniela relaciona los diálogos anteriores con la fase de formulación de la TSD [AP_Daniela_KMT_T_1.4. 684-693]:

[...] es el mejor ejemplo de estas fases de la clase en la que se puede observar cómo a partir de realizar preguntas a los alumnos se está generando la situación de formulación, la cual consiste, según Brousseau (2007) en la información que se generó con las interacciones de los alumnos con el medio, representa un conocimiento que se pretende en esta fase poner en juego, la “[...] capacidad del sujeto para retomarlo (*reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico*)” (Brousseau, 2007, pág. 25). En la formulación de esta información traducida en los procedimientos empleados para resolver los problemas, debe intervenir otro sujeto para que le sean comunicados los mensajes que intercambian los estudiantes, donde discuten y reestructuran las tácticas empleadas.

Como podemos observar, Daniela evidencia conocimiento de la situación de formulación como aquella que se presenta cuando los alumnos exponen de manera oral diferentes procedimientos para obtener la cantidad de cajas que se requieren para empacar ciento doce lechugas (KMT_T_1.4); indicador de conocimiento que habíamos descrito en el desarrollo de las subtarear, pero que Daniela hace explícito en el cierre de la Planificación donde se retoma la resolución de la tarea principal. Además, en este momento de la clase expresa se presenta la situación de validación [AP_Daniela_KMT_T_1.5. 714-726]:

Los alumnos demuestran una diversidad de procedimientos, los cuales conducen a la misma respuesta que para el planteamiento es correcta, factor determinante para que el grupo le otorgue validez, entonces es la parte donde entra en juego la situación de validación. En esta situación según su autor “*Los esquemas de la acción y de la formulación conllevan procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales, para asegurar la pertinencia, adecuación, adaptación o conveniencia de los conocimientos movilizados*” (Brousseau, 2007, pág. 26). El alumno que participaba como informante de los procedimientos, en esta fase se convierte en un *proponente* que expone la forma de su proceder y, por otra lado, el que antes era receptor de dicha información ahora es un oponente; ambos “*Cooperan en la búsqueda de la verdad, es decir, en vincular de forma segura un conocimiento a un campo de saberes ya establecidos, pero se enfrentan cuando hay dudas. Se ocupan juntos de las relaciones formuladas entre un medio y un conocimiento relativo a ese medio*” (Brousseau, 2007, pág. 27).

En este caso, Daniela hace referencia a la situación de validación cuando los alumnos con la diversidad de procedimientos que realizaron intentan demostrar que son válidos para responder a la pregunta 1 de la hoja de trabajo de la tarea principal: “¿Cuántas cajas se ocuparán para empacar 112 lechugas?”, pues en todos los procedimientos obtienen como resultado “siete”, es decir, las siete cajas que se requieren para empacar ciento doce cajas. En este sentido, los roles que desempeñan los alumnos

(proponente y oponente) coinciden en que la información que se brinda es la correcta. Por lo tanto, Daniela evidencia conocimiento de lo que implica la situación de validación en función de las interacciones que se desarrollan al final de la clase.

Durante la socialización de los procedimientos y respuestas obtenidos por los alumnos en la segunda pregunta de la tarea principal: “¿Cuántas cajas se ocuparán para 32 lechugas?”, Daniela desempeña el mismo papel que en la primera, es decir, cuestiona a los alumnos sobre la respuesta que brindan “dos”. De ahí que una alumna expresa recurre a la multiplicación (16×2) para obtener el total de lechugas: “32”; respuesta que Daniela pide sea expresada en el pintarrón de manera escrita. La tercera pregunta de la tarea principal: “¿Qué parte de la caja corresponde a una lechuga?” hace referencia a la fracción como parte-todo, veamos lo que detona cuando se trabaja se valida en forma grupal [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 621-634]:

Daniela: La tercera pregunta [...] A ver, me ayudas a leerla. /Indica a uno de los alumnos/
Ao: ¿Qué parte de la caja corresponde a una lechuga?
Ao: Dieciséis.
Ao: Un dieciseisavo.
Daniela: ¿Por qué es un dieciseisavo? ¿Quién me quiere decir?
Ao: Porque son dieciséis lechugas [...]
Ao: Y es una caja.
Daniela: ¿Cuánto le toca a cada lechuga?
Aos: Un dieciseisavo.
Daniela: ¿Y si yo tuviera seis lechugas?
Ao: Un sexto.
Daniela: Entonces, ¿qué parte de la caja le corresponde a una lechuga en la hoja de trabajo?
Aos: Un dieciseisavo.

En el fragmento de registro anterior, Daniela retoma la segunda aportación de un alumno: “Un dieciseisavo” como la parte de la caja que le corresponde a una lechuga y, además solicita se justifique. Así, algunos alumnos exponen que son dieciséis lechugas y una caja. En este momento, identificamos que:

Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce que se puede recurrir a otros ejemplos (“¿Y si yo tuviera seis lechugas?”) para que los alumnos confirmen la representación verbal de una fracción como parte-todo (“un sexto”).

Posterior al planteamiento de la tercera pregunta y antes de socializar las respuestas de la cuarta pregunta, Daniela agrega algunos otros ejemplos de fracciones. Enseguida agregamos el fragmento de registro que se relaciona con lo expuesto [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_1. 635-653]:

Daniela: Muy bien. Y si le pongo $\frac{2}{32}$, ¿estará bien? /escribe la fracción/
 Ao: No, sí [...]
 Aa: $\frac{4}{64}$ podemos poner.
 Daniela: Muy bien. /Pasa a un alumno al pintarrón y escribe $\frac{7}{112}$ / ¿Estará bien?
 Aos: No, sí [...]
 Daniela: ¿7 entre 7?
 Aos: Uno.
 Daniela: ¿112 entre 7?
 Aos: 16
 /Daniela escribe en el pintarrón $\frac{1}{16}$ /
 Daniela: ¿También la podemos representar?
 Aos: Sí.
 Daniela: Ahora $\frac{4}{64}$ /escribe la fracción/; 4 entre 4 [...]
 Aos: Uno.
 Daniela: ¿64 entre 4?
 Aos: Dieciséis.
 /Daniela escribe $\frac{1}{16}$ /
 Daniela: ¿Se puede o no se puede?
 Aos: ¡Sí!

En el fragmento anterior, la primera intervención de Daniela: “*Y si le pongo $\frac{2}{32}$, ¿estará bien?*”, guía a algunos alumnos a representar de manera numérica dos fracciones: $\frac{4}{64}$ y $\frac{7}{112}$; en función de las anteriores, Daniela procede a demostrar el procedimiento que permite establecer que ambas son fracciones equivalentes a $\frac{1}{16}$:

Daniela_KoT_P_1. Conoce que una fracción equivalente se obtiene al dividir cada término de la fracción (numerador y denominador) entre el valor del numerador ($\frac{7}{112}=\frac{1}{16}$; $\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$).

Durante la socialización de las respuestas a la última pregunta, sucede algo semejante a la tercera pregunta, sin embargo, en este caso, la cuarta pregunta: “*¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas?*”, deja abierta la cantidad de respuestas que se puedan brindar [V_Daniela_KMT_ES_T_TA_E_3. 654-700]:

Daniela: Vamos a la última pregunta, ¿cuál es la razón entre la cantidad de cajas y las lechugas?
Ao: ¡Yo! Una para dieciséis.
/Se escuchan varios alumnos/
Daniela: Pasen a escribirme una razón.
/Daniela le entrega un marcador a un alumno. El alumno que pasa primero escribe 1:16.
Enseguida pasan varios alumnos y escriben en el pintarrón 3:48; 2:32; 4:64; 7:112/
Daniela: ¿Quién quiere pasar a escribir otra razón?
Aa: Yo tengo otra maestra.
/Daniela le entrega el marcador para que pase. La alumna escribe 8:120. Se acercan varios
alumnos y pasan a escribir diferentes cantidades, entre ellas 10:160/
Daniela: Vamos a revisar. Aquí anotan dos a treinta y dos, ¿si será una razón? /Señala la
cantidad en el pintarrón/
Aos: Sí.
Daniela: Palomita. Ahora siete a ciento doce, ¿si es una razón? /Señala la cantidad en el
pintarrón/
Aos: Sí.
Daniela: cuatro a sesenta y cuatro, ¿es una razón? /Señala la cantidad en el pintarrón/
Aos: Sí.
Daniela: ¿Tres a cuarenta y ocho? /Señala la cantidad en el pintarrón/
Aos: Son como las tablas.
Daniela: De ocho a ciento veinte, ¿corresponde?
Aos: No, está mal.
Daniela: ¿Por qué?
Aa: Porque en cuatro son sesenta y cuatro y, multiplicado por dos son ciento veintiocho.
Daniela: Ok. Ésta no sería. /Tacha 8:120/
Daniela: Aquí tenemos diez a ciento sesenta [...]
Aos: Sí, no [...]
Daniela: Sí yo tengo diez cajas, ¿cuántas lechugas puedo empacar en esas cajas?
Aos: Ciento sesenta.
Daniela: ¿Por qué?
Ao: Porque son diez veces dieciséis.
Daniela: Sí.
Aa: Yo tengo otra [...] /La alumna escribe en el pintarrón 5:80/
Daniela: ¿Cinco si corresponde a ochenta?
Aos: Sí.
Daniela: Muy bien.
A. Aos: Yo tengo otra razón [...]
Daniela: A ver niños, ¿este problema se les pareció difícil?
Aos: ¡No!
Daniela: ¿Al principio cómo se les hizo?
Aos: ¡Difícil!
Daniela: ¿Ahora?
Aos: ¡Fácil!
Daniela: ¿Desde un principio sabían cómo poner la razón?
Aos: No, no [...]
Daniela: Entonces al final ya no tuvieron dificultades [...]

En el fragmento anterior, que corresponde a la cuarta pregunta de la tarea principal, los alumnos deben expresar la razón entre la cantidad de cajas y la cantidad de lechugas y, en las intervenciones Daniela se evidencia algunos conocimientos matemáticos expuestos en otros momentos de la clase. En la

primera intervención, Daniela lee la cuarta pregunta y solicita a los alumnos representen algunas razones que den respuesta a la pregunta. Así, los alumnos que pasan al pintarrón representan de manera numérica razones en función de la expresión $a:b$: 1:16, 3:48, 2:32, 7:112, 8:120 y 10:160.

Posteriormente, Daniela recurre a la representación verbal de las razones para su revisión: *“Aquí anotan dos a treinta y dos, ¿sí será una razón?”*, los alumnos contestan que sí. De esta manera sigue con la revisión, pero cuando llega a la representación numérica de la razón 8:120, expresa: *“De ocho a ciento veinte, ¿corresponde?”*, algunos alumnos contestan que no, *“Porque en cuatro son sesenta y cuatro y, multiplicado por dos son ciento veintiocho”*. Enseguida Daniela tacha 8:120. Cuando Daniela revisa con el grupo si la razón 10:160 es correcta obtiene como respuesta: *“Sí, no [...]”*; situación que la lleva a contextualizar las cantidades que se manejan: *“Sí yo tengo diez cajas, ¿cuántas lechugas puedo empacar en esas cajas?”*. Enseguida un alumno expresa que son ciento sesenta y a partir de esto un alumno justifica la respuesta: *“porque son diez veces dieciséis”*. Posteriormente varios alumnos quieren pasar a representar otras razones pero Daniela da por concluida la clase y los cuestiona ¿cómo les pareció el problema (tarea principal) al inicio de la clase? contestan: *“¡Difícil!”* y agrega, cómo les pareció ahora (al final), la respuesta es *“¡Fácil!”*. Por último, Daniela pregunta que si desde un principio sabían representar la razón y ellos responden que no.

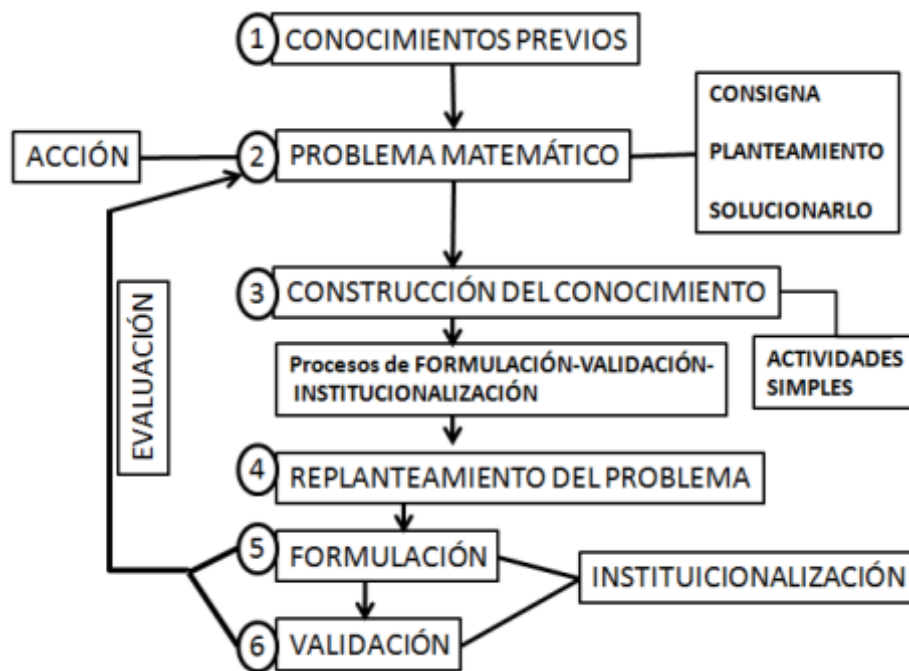
Al iniciar la segunda parte del análisis del conocimiento matemático y didáctico de Daniela en la tarea principal, es decir, cuando se retoma en el cierre de la clase, Daniela visualiza de manera explícita la situación de formulación, validación e institucionalización como elementos de la TSD que le permiten abordar la enseñanza de la razón en su doble manifestación bajo su representación numérica y verbal (KMT_T). En la Entrevista Semiestructurada 2, Daniela señala cuál fue papel en la institucionalización en la clase [ES2_Daniela_KMT_T_1.6. 836-843]:

En la institucionalización fue validar los resultados de los alumnos, ya no me enfoqué tanto en explicarlo desde un principio, porque la institucionalización se dio desde el momento en que los niños estaban comprendiendo el concepto de razón. Entonces, al momento en que se estaba institucionalizando, no se dejaba de cuestionar al alumno, por ejemplo, “a ver aquí qué pusimos”, “por qué”; en la institucionalización no les decía “es esto y esto”, es decir, cómo son las cosas, sino que los mismos alumnos ayudan al maestro a institucionalizar y no tanto que lo ayude, sino que eso le sirve al maestro como estrategia para lo que él había mencionado antes que era la evaluación de la clase.

En función de la información anterior, identificamos que:

Daniela_KMT_T_1.6.1. Conoce que los alumnos pueden ser partícipes de la institucionalización en una clase a partir de las interrogantes que el docente emite. En este caso, las respuestas que dan los alumnos le permiten institucionalizar el concepto de razón, su representación numérica y verbal y la fracción; aspectos que no se dieron a conocer de manera formal en la parte inicial de la tarea principal.

Antes de concluir con este apartado, destacamos algunos conocimientos que Daniela evidencia en relación con las características de aprendizaje de las matemáticas. Así, en el documento de Análisis de la Práctica Daniela menciona que la TSD y la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel le permitieron planificar la clase y llegar al diseño de una estrategia de aprendizaje para abordar la enseñanza de la razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, lo cual acompaña del siguiente esquema [AP_Daniela_KFLM_T_1. 132-143]:



Además, agrega lo siguiente [AP_Daniela_KFLM_T_1. 147-162]:

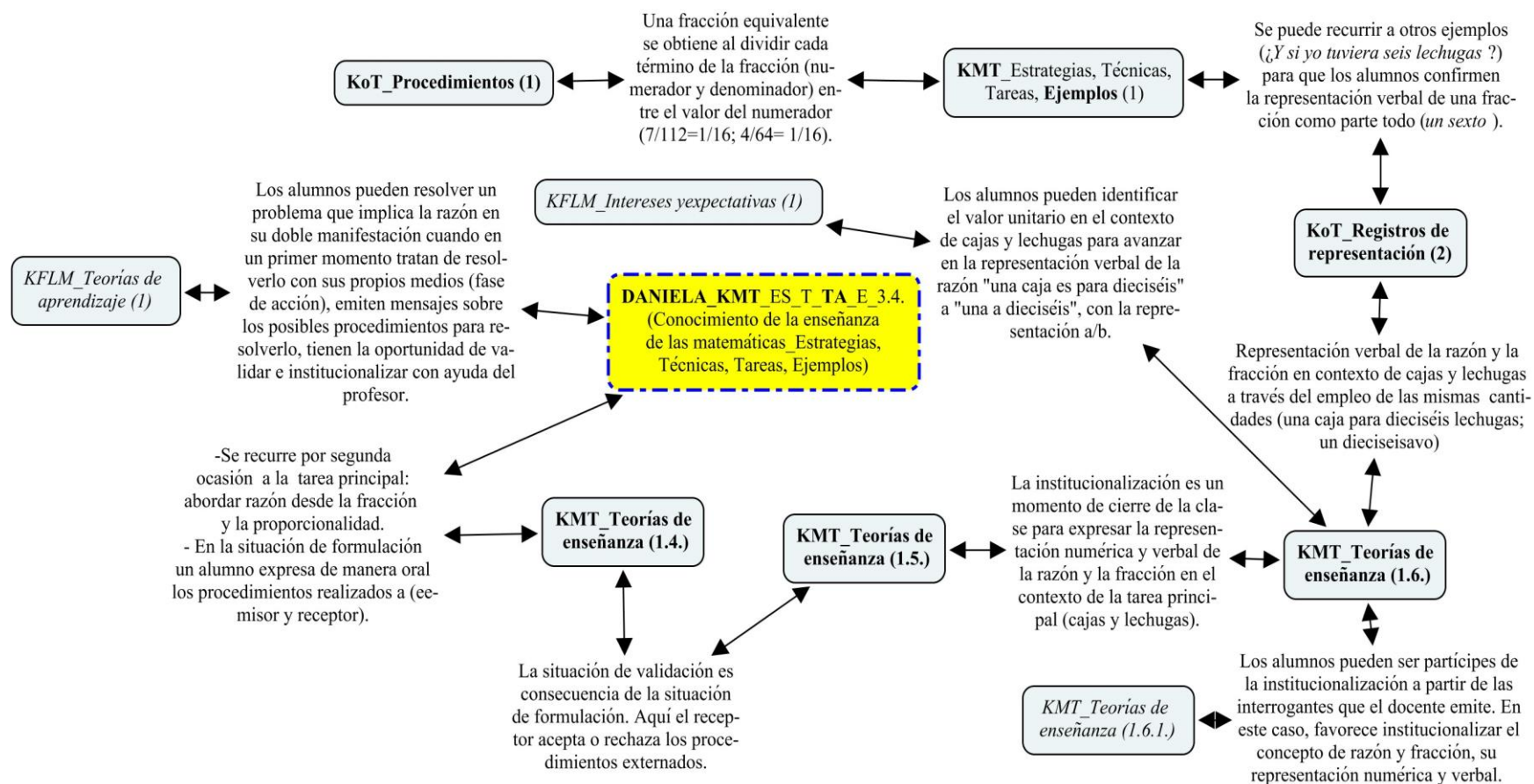
La planificación de la clase indica que se comenzará por averiguar los conocimientos previos, a partir de estos se planteará el problema eje de la situación didáctica, dentro de la cual se dará la consigna. Los alumnos conocerán el problema y lo solucionarán con sus propias herramientas, por lo que se refiere en esta parte a la fase de acción. Posteriormente, se rompe con el esquema de las situaciones didácticas que plantea Brousseau, para dar paso a una serie de “Actividades”, en las cuales la intención es llevar a cabo la construcción de los conocimientos, es decir, dotar a los alumnos de las herramientas que no tienen para que enseguida sean capaces de solucionar la situación problemática que se le había planteado antes; este proceso se realizará utilizando la formulaciones de los alumnos, sus validaciones y como es en acompañamiento del profesor, también se utilizará la institucionalización. Todos los elementos anteriores están mezclados. Después se realiza el replanteamiento del problema inicial, para que con los conocimientos que ya construyeron los alumnos, formulen sus procedimientos, los presenten y se emitan validaciones, ayudando al mismo tiempo a institucionalización por parte del maestro; actividad misma que permite al docente evaluar el aprendizaje de los alumnos al observar si son capaces de comprender y resolver el problema sin dificultad.

En el fragmento anterior, Daniela recurre a las situaciones de la TSD (acción, formulación, validación e institucionalización) de Brousseau para identificar diferentes interacciones que se establecen entre maestro y alumnos durante la clase con el propósito de resolver el problema de la tarea principal. Por lo cual, identificamos que:

Daniela_KFLM_T_1. Conoce que los alumnos pueden resolver un problema que implica la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad cuando, en un primer momento, tratan de resolverlo con sus propias herramientas (fase de acción), emiten mensajes sobre los posibles procedimientos para resolverlo, tienen la oportunidad de validarlos e institucionalizarlos con el acompañamiento del profesor.

Con el indicador de conocimiento anterior concluimos la identificación y caracterización del conocimiento especializado de Daniela en la segunda parte (cierre de la clase) de la tarea principal. En el siguiente apartado realizamos un resumen del conocimiento matemático y didáctico de Daniela a través de la relaciones que se establecen entre los diferentes dominios y subdominios del MTSK.

V.2.8.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Tarea principal (segunda parte).



V.2.8.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Tarea principal (segunda parte).

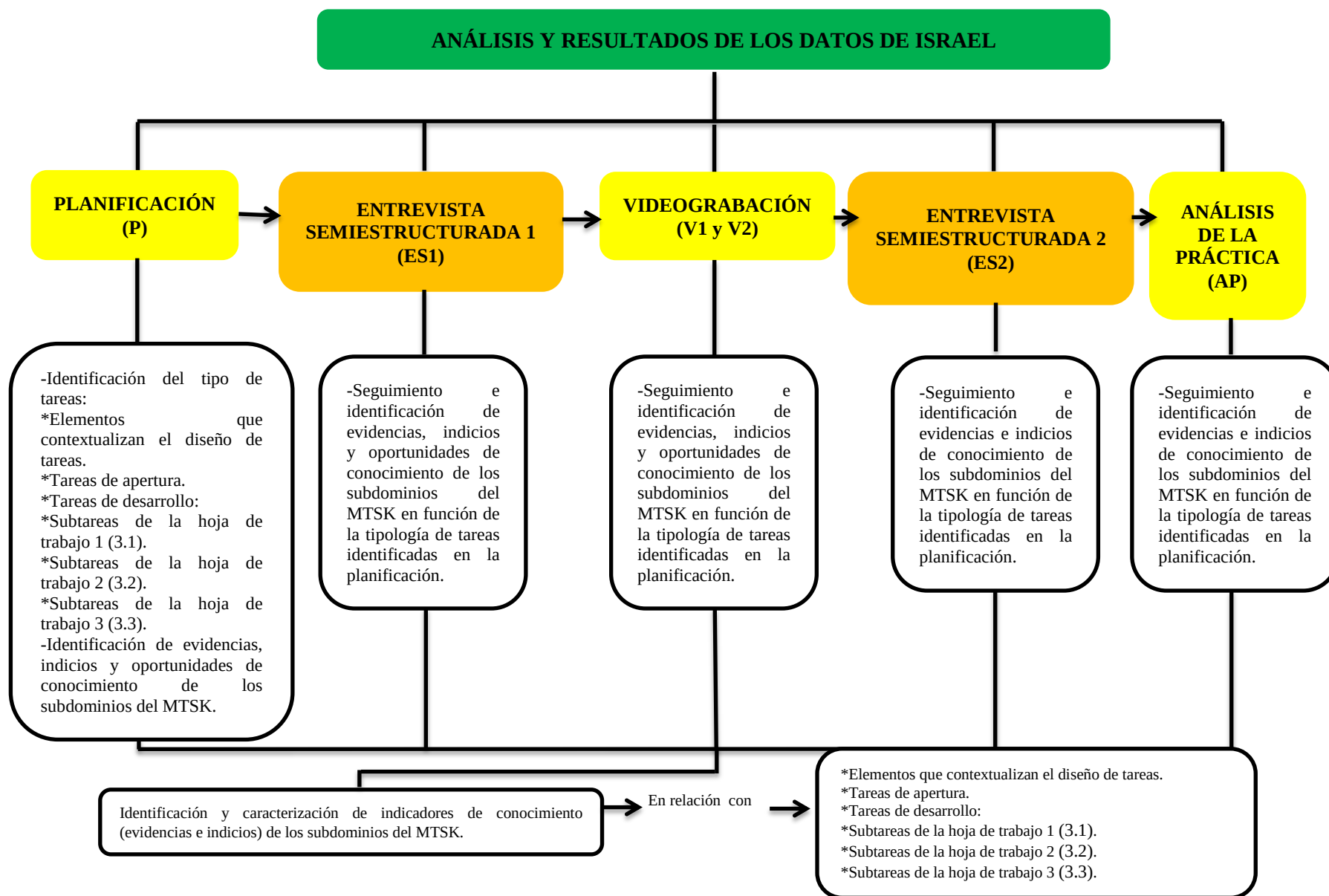
En este apartado presentamos algunos conocimientos matemáticos y didácticos que Daniela pone en juego cuando vuelve a plantear las preguntas de la tarea principal en el cierre de la clase. Los datos que recuperamos en la Planificación, Entrevistas Semiestructuradas (1 y 2), la Videograbación de la clase y el documento de Análisis de la Práctica nos permiten identificar evidencias de conocimientos de algunas fases o situaciones de la Teoría de las Situaciones Didácticas: conoce que en la situación de formulación un alumno expresa de manera oral los procedimientos realizados a otro, lo cual lo convierte en emisor y receptor respectivamente (**KMT_T_1.4**); conoce la situación de validación es consecuencia de la situación de formulación. Así, en la validación el receptor acepta o rechaza los procedimientos externados, aunque también puede aportar algunas sugerencias para que se corrija, en caso de ser necesario (**KMT_T_1.5**). Por último, conoce la situación de institucionalización como un momento de cierre de la clase para expresar la representación numérica y verbal de la razón y la fracción en el contexto de la tarea principal (cajas y lechugas) (**KMT_T_1.6**), donde los alumnos pueden ser partícipes de la institucionalización en una clase a partir de las interrogantes que el docente emite. En este caso, las respuestas que dan los alumnos a las preguntas que realiza la maestra le permiten institucionalizar el concepto de razón, su representación numérica y verbal de la razón y la fracción; aspectos que no se dieron a conocer de manera formal en la parte inicial de la tarea principal (**KMT_T_1.6.1**).

A partir del escenario anterior, identificamos que Daniela conoce la representación verbal de la razón y la fracción en contexto de cajas y lechugas a través del empleo de las mismas cantidades (una caja para dieciséis lechugas; un dieciseisavo) (**KoT_R_2**). Además, conoce que los alumnos pueden identificar el valor unitario en el contexto de cajas y lechugas para avanzar en la representación verbal de la razón de “una caja es para dieciséis lechugas” a “una a dieciséis”, cuya expresión corresponde a la representación numérica de la forma $a:b$. Así, al final, expresan la representación verbal de la razón y la fracción (**KFLM_IE_1**).

Durante la resolución de la tarea principal por segunda ocasión, Daniela conoce que se puede recurrir a otros ejemplos (“¿Y si yo tuviera seis lechugas?”) para que los alumnos confirmen la representación verbal de una fracción como parte-todo (“un sexto”) (**KMT_ES_T_TA_E_1**). En este contexto de la clase, Daniela conoce que una fracción equivalente se obtiene al dividir cada término de la fracción (numerador y denominador) entre el valor del numerador ($7/112=1/16$; $4/64=1/16$) (**KoT_P_1**).

Al final de la clase, identificamos que Daniela conoce que los alumnos pueden resolver un problema que implica la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad cuando, en un primer momento, tratan de resolverlo con sus propias herramientas (fase de acción), emiten mensajes sobre los posibles procedimientos para resolverlo, tienen la oportunidad de validarlos e institucionalizarlos con el acompañamiento del profesor (**KFLM_T_1**).

Figura 17. Instrumentos de recuperación de la información de Israel



V.3. Análisis de conocimiento especializado de Israel

El conocimiento matemático y didáctico evidenciado por el profesor en formación inicial Israel respecto con la noción de razón, lo organizamos en función del orden cronológico de las tareas que incluye en su Planificación (P). Así, planteamos tres apartados principales: elementos que contextualizan el diseño de tareas; tareas de apertura y; tareas del desarrollo de la planificación.

En su planificación, Israel inicia con la presentación de algunos elementos que contextualizan el diseño de tareas [P_Israel_1. 1-12]; entre ellos destacamos conocimientos matemáticos y didácticos ligados a la noción de razón en su doble manifestación. Cabe hacer mención que en este apartado aparece con mayor frecuencia el *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) así como sus relaciones con otros conocimientos del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Durante las tareas de tareas de apertura [P_Israel_2. 13-66], identificamos y caracterizamos el conocimiento especializado de Israel en relación con la razón a partir de una tarea que diseña y constituye como la detonante para mostrar los conocimientos que poseen los alumnos respecto con la noción de razón. En este sentido, iniciamos con la caracterización del *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) de Israel para luego establecer sus relaciones con otros tipos de conocimientos.

En la planificación de Israel encontramos diferentes tareas ubicadas en la parte “desarrollo”, que identificamos como tareas del desarrollo [P_Israel_3. 67-272] a las que denominamos subtareas [P_Israel_3.1. 74-157; P_Israel_3.2. 158-216; P_Israel_3.3. 217-272]; cada una atiende a diferentes objetivos de aprendizaje. En términos generales, el conocimiento especializado evidenciado por Israel respecto de la noción de la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad emerge del análisis de las tareas de apertura y del desarrollo; para dar cuenta de estos conocimientos, en los siguientes apartados incorporamos al análisis fragmentos de Entrevistas Semiestructuradas (ES1 y ES2), de Videgrabaciones (V1 y V2) y del documento de Análisis de la Práctica (AP) que obtuvimos en el desarrollo de esta investigación.

V.3.1. Conocimiento especializado de Israel en función de los elementos que contextualizan el diseño de tareas [Planificación_Israel_1. 1-11]

Israel, igual que Daniela, integra en la primera parte de su planificación algunos elementos que contextualizan el diseño de tareas: aprendizaje esperado, eje, competencias, entre otros; éstos, se convirtieron en oportunidades de investigación que en este caso, de acuerdo con la información que recuperamos de Israel en los diferentes instrumentos (ES1_Israel, V_Israel, ES2_Israel y AP_Israel), podemos denominar indicios y, en situaciones concretas, evidencias del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) que el informante pone en juego al enseñar la noción de razón. Enseguida presentamos los elementos que Israel incluye en su planificación y se convierten en oportunidades de investigación de su conocimiento [P_Israel_1. 1-12]:

Asignatura: Matemáticas.

Tema: La razón como fracción.

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Propósito:

Identificar el papel de la noción de razón en las matemáticas y su vínculo con la noción de fracción.

Aprendizaje esperado:

- Usa fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.

- Validar procedimientos y resultados.

- Comunicar información matemática.

En el fragmento anterior, Israel cita seis indicadores que pretende desarrollar: asignatura, tema, eje temático, propósito, aprendizaje esperado y competencias. Enseguida presentamos algunas evidencias de conocimiento de los últimos cuatro indicadores, comenzamos por lo que se refiere al tema “la razón como fracción”. En su documento de Análisis de la Práctica (AP), Israel destaca algunas consideraciones previas para trabajar dicho tema que son indicios de conocimiento de la definición de razón como un significado de la fracción [AP_Israel_KoT_D_1 115-123]:

Consideraciones previas respecto al tema “Razón como fracción”

El docente dentro de su práctica desempeña un papel de investigador, pues constantemente está en busca de información para poder desarrollar y llevar a cabo lo mejor posible su labor dentro del aula y, eventualmente mejorarla y transformarla. Con base en lo anterior, para la planificación de las actividades fue menester investigar en diferentes fuentes de consulta, documentos, artículos y actividades; todas referentes al tema de “La razón como significado de la fracción” que, en primera instancia, ayudaran a comprender el tema y posteriormente a desarrollar un plan de clase con actividades específicas que atendieran a un aprendizaje esperado.

En el fragmento anterior, Israel menciona la importancia de documentarse sobre lo que a la razón se refiere como un significado de la fracción para poder desarrollar su planificación, sin embargo, no observamos que agregue información concreta sobre la definición de la razón como significado de la fracción (KoT_D). Por lo anterior, sólo identificamos indicios de conocimiento que nos indican que:

Israel_KoT_D_1. Conoce la razón como un significado de la fracción.

Enseguida, en otros de los instrumentos continuamos con la búsqueda de evidencias de conocimiento respecto a esta temática. En el documento de Análisis de la Práctica encontramos un fragmento sobre el dominio del *Conocimiento matemático*, en especial sobre el *Conocimiento de la estructura matemática* (KSM), en lo que se refiere a las conexiones auxiliares entre la razón como significado de la fracción y la razón desde la perspectiva de la proporcionalidad [AP_Israel_KSM_A_1 124-144]:

[...] Ramírez y Block (2008), en su artículo La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares plantean una serie de ideas, las cuales se tomaron como base para la planeación y desarrollo de las actividades, entre ellas se rescatan que:
La relación entre las nociones de razón y fracción en las matemáticas escolares es sutil, versátil y también confusa: las razones se suelen definir como fracciones, lo que lleva a preguntar, por ejemplo, ¿para qué queremos las razones si ya tenemos las fracciones?, ¿qué se gana con decir m es a n en lugar de m/n ? o, recíprocamente, ¿qué aporta saber que a la razón " m es a n " corresponde el número m/n ? (Ramírez y Block, 2008)
La opinión anterior conlleva a reflexionar el uso y la función de la razón si ya se tiene la fracción, para ello, argumentan que en el campo de la investigación, "la noción de razón ha sido objeto de estudio independientemente de su vinculación con la fracción: en el contexto de la proporcionalidad, como relación que se expresa mediante dos cantidades (n a m ; n de m , n por cada m , etc.)" (Ramírez y Block, 2008). Un punto importante de su investigación es que menciona que las razones desempeñan un papel implícito como *precursoras* de las fracciones. En todos los casos, el interés de la noción de razón para el aprendizaje de las matemáticas parece ocurrir, sobre todo, antes de que ésta se exprese con una fracción o bien independientemente de la fracción. Considerando lo anterior, se planteó una serie de actividades que en primera instancia ayudarán a identificar la diferencia de razón y fracción y a la vez su vinculación.

En el fragmento anterior, Israel se apoya en Ramírez y Block (2008) para argumentar que algunas relaciones que se establecen entre la razón y la fracción desde su definición (las razones se definen como fracciones) y representación (m es a n en lugar de m/n) pueden ser confusas. Además, plantea que la noción de razón se ha estudiado desde el contexto de la proporcionalidad. De ahí que el estudio de la noción de razón puede emerger en el marco de las fracciones o la proporcionalidad. Así, Israel asume que en la Planificación se incluyen diferentes actividades que contribuyen a identificar la diferencia entre la razón y la fracción y, a la vez, su vinculación. A partir de esto, identificamos como evidencia de conocimiento el siguiente indicador:

Israel_KSM_A_1. Conoce que el estudio de la noción de razón se puede abordar en el contexto de las fracciones y la proporcionalidad.

El propósito y el aprendizaje esperado constituyen dos indicadores que el informante Israel destaca en el inicio de su Planificación; el primero busca identificar el papel de la noción de razón en las matemáticas y su vínculo con la noción de fracción, mientras que el segundo, enfatiza en el uso de fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales. Pero, ¿por qué citar propósito y aprendizaje esperado?, ¿cuál es la finalidad de cada uno? En el documento del Análisis de la Práctica, Israel muestra indicios de conocimiento de las diferencias entre dichos conceptos [AP_Israel_KMLS_EA_1 169-174]:

Otro elemento a considerar es el propósito del contenido temático, el cual guarda una estrecha relación con el aprendizaje esperado, ya que según la definición del primero es que tiene como intención orientar los aprendizajes a partir de la especificación de las metas que se quiere llegar con las actividades encaminadas a lograr éstos. La única diferencia es que los aprendizajes esperados son a corto plazo (hablando de tiempo) y los propósitos se logran a largo plazo.

De acuerdo con la información proporcionada por Israel, en la educación primaria, a largo plazo se busca que el alumno comprenda la noción de razón y su vínculo con la noción de fracción, pero a corto plazo se espera que avance en el uso de fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales, y esto último se favorece en la planificación que diseñó. En las Entrevistas Semiestructuradas, las Videograbaciones de clases y el documento de Análisis de la Práctica encontramos evidencias de conocimiento del aprendizaje esperado, aunque el propósito se queda en indicios. Por lo tanto, en este momento identificamos como indicador de conocimiento que:

Israel_KMLS_EA_1. Conoce el propósito orienta el aprendizaje esperado, es decir, a largo plazo se plantea que el alumno comprenda la noción de razón en las matemáticas y su vínculo con la noción de fracción, pero a corto plazo se espera que avance en el uso de fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales.

En relación con el aprendizaje esperado, en los siguientes párrafos presentamos información que contribuye a la conformación de evidencias de conocimiento de Israel. En la Entrevista Semiestructurada 1 Israel comenta que el aprendizaje esperado de su planificación se traduce en [ES1_Israel_KMLS_NCP_1. 16-18]:

El aprendizaje esperado es que los niños expresen por medio de razón o cociente una comparación de dos cantidades, ese sería más que nada el aprendizaje esperado y el saber en juego.

En la descripción del aprendizaje esperado en la ES1, Israel retoma el concepto de cociente que mencionó en la planificación, sin embargo lo asocia a una expresión que se liga con la razón para establecer una comparación de dos cantidades. Con el propósito de argumentar por qué este conocimiento de Israel lo ubicamos en el *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), incluimos un fragmento del documento de Análisis de la Práctica de Israel [AP_Israel_KMLS_NCP_1 400-406]:

El aprendizaje esperado giraba en torno a que el niño identifique y exprese por medio de la razón o cociente una comparación entre dos cantidades. Al respecto, el Plan de Estudios 2011 (2011) menciona que “los aprendizajes esperados son indicadores de logro, que en términos de la temporalidad establecida en los programas de estudio, definen lo que se espera de cada alumno en términos de saber, saber hacer y saber ser” (pág. 33). Dicho lo anterior, se puede referir que al término de las actividades el aprendizaje esperado señalado anteriormente debió de haberse cumplido.

En el fragmento anterior, Israel retoma palabras del aprendizaje esperado que expresó en la Planificación y agrega otras: razón, comparación y cantidades. Argumenta que el indicador “aprendizaje esperado” atiende a situaciones que se plantean desde el Plan de estudios 2011 que rige la educación primaria, además lo identifica como indicador de logro en relación con lo que establecen los programas de estudio, en este caso de educación primaria, contexto en que se trabaja.

Durante la Entrevista Semiestructurada 1, obtenemos información que contribuye a la identificación de una evidencia de conocimiento en relación con el aprendizaje esperado “el niño identifique y exprese por medio de la razón o cociente una comparación entre dos cantidades”, a partir de la información que incluyen algunos materiales de apoyo como el libro de matemáticas del alumno [ES1_Israel_KMLS_NCP_1 19-30]:

E: ¿Existe una relación entre ese aprendizaje esperado y el estudio de las fracciones en la escuela primaria?

Israel: Si existe una relación porque en el libro de matemáticas de quinto grado estuve analizando estas partes y mencionaba que los niños expresen por medio de razones, le añadí lo que fue también por medio de un cociente una relación que hay entre dos cantidades. Por eso, creo que existe esta relación de este aprendizaje esperado con lo que plantean los libros y programas.

E: ¿Y de dónde rescató o cómo llegó a tomar la decisión de agregarle esto de cociente?

Israel: De cociente, agregué esto porque analizando ese libro da una pequeña definición de lo que es una fracción, de lo que es una razón y menciona que una razón es el cociente entre dos cantidades. Por eso lo quise añadir porque se puede expresar una razón por medio de una fracción o también por medio de un cociente.

Como podemos apreciar, Israel al tratar de justificar la relación del aprendizaje esperado con su estudio de las fracciones en la escuela primaria, expone información que viene en el libro de matemáticas de quinto grado respecto al estudio de la razón como cociente que expresa una relación que hay entre dos cantidades. Concluye, una razón se puede expresar por medio de una fracción o un cociente. A partir de estas aportaciones, observamos que Israel asocia el estudio de la razón con el contexto de fracciones y de la proporcionalidad (cociente); situación que manifiesta de manera directa en otra parte de la entrevista cuando le cuestionamos cuál es el libro en el que encontró la idea de cociente [ES1_Israel_KMLS_NCP_1 31-36]:

Israel: Es el libro de matemáticas del ciclo escolar 2012-2013 porque si ahora vemos los libros de texto de desafíos matemáticos no lo podemos encontrar en quinto año, podemos ver esta actividad más en sexto grado, pero en los libros anteriores, casi al final viene esta actividad, aunque lo trabaja más como razón por proporcionalidad, no tanto como comparar cantidad sino una razón como proporcionalidad.

Israel comenta que el estudio de la razón como cociente que se desarrolla en el contexto de la proporcionalidad se aborda de manera directa en las últimas lecciones del libro de matemáticas de quinto grado del ciclo escolar 2012-2013. A partir de esto, identificamos como evidencia de conocimiento que:

Israel_KMLS_NCP_1. Conoce como aprendizaje esperado que los alumnos identifiquen y expresen por medio de la razón o cociente una comparación entre dos cantidades.

Con base en lo que Israel había expuesto, tratamos que nos brindara más información sobre la definición de razón desde la proporcionalidad, ante lo cual expone [ES1_Israel_KMLS_TAP_1 37-60]:

E: ¿Qué entendemos por una razón como proporcionalidad?

Israel: Como proporcionalidad [...] aquí necesitaría poner un ejemplo, entiendo que una razón como proporcionalidad es sacar lo unitario. Por ejemplo estuve analizando lo que fue esta actividad en el libro de matemáticas de quinto año y la plantea como lo clásico de las ofertas, por ejemplo, si compramos ocho lápices nos regalan dos, son dos de regalo (escribe en el pintarrón 8 lápices 2 de regalo). Entonces menciona que los niños aquí, por ejemplo, hagan una pequeña tablita de tres entradas (realiza la tabla en el pintarrón); aquí podemos poner la cantidad de lápices (primera columna), aquí podemos poner los de regalo (segunda columna) y aquí la razón (tercera columna). La cantidad inicial ocho lápices nos regalan. Entonces la razón sería dos de regalo por ocho lápices (escribe 8 debajo de cantidad, 2 debajo de regalo y $2/8$ debajo de razón). Ahora vamos por más que sería lo doble, por dieciséis nos regalarían cuatro, por veinticuatro nos regalarían seis y así sucesivamente, por ejemplo, aquí se les deja a los niños algunas incógnitas (agrega 16; 24; ? y 4; 6; ?) y se les dan algunos resultados y eso trata básicamente la razón por proporcionalidad (escribe $4/16$; $6/24$) es encontrar el valor unitario. Por ejemplo, si compras ocho lápices te regalan [...], pues por cada cuatro lápices que compras te regalan uno; ese sería el valor unitario. A partir de éste podemos obtener los demás resultados. Ahora para dieciséis sería encontrar (señala $1/4$), cuánto por cuatro me da dieciséis, sería cuatro; es establecer como proporcionalidad. Aquí tenemos que en todos los casos nos va a dar un cuatro y éste sería el valor unitario y nos sirve para no hacer una lista y encontrar el valor para cuarenta. Así, multiplicamos, por ejemplo, si por cada cuatro lápices me regalan uno, busco un número que multiplicado por cuatro me dé cuarenta y ese número va a ser la cantidad de lápices de regalo y, básicamente, lo que trata esta actividad de matemáticas es ver lo que es la razón por proporcionalidad.

En el fragmento anterior se aprecia que Israel intenta ejemplificar lo que entiende por razón como proporcionalidad, al menos, en siete momentos: 1.-Asocia la razón con el valor unitario; 2.-Ubica en el libro de matemáticas situaciones de ofertas donde se aborda el estudio de la razón (compras tantos lápices y te regalan tantos); 3.-Elabora una tabla con tres columnas donde ubica en primer lugar la cantidad de lápices que se compran, enseguida la cantidad de lápices que regalan y, al final, la razón que solicita se represente en fracción; 4.-Ejemplifica los primeros datos de la tabla (compras 8 lápices, te regalan 2 y la razón es $2/8$); 5.-Plantea otras situaciones donde espera los alumnos identifiquen la razón entre las cantidades que se proporcionan y se expresen con una fracción; 6.-Determina el valor unitario en el contexto anterior y 7.-Identifica que al multiplicar el valor unitario por cualquier cantidad de lápices que desee comprar podrá identificar la cantidad de lápices que se otorgan de regalo. A partir de esto, podemos decir que Israel muestra evidencia del siguiente indicador de conocimiento:

Israel_KMLS_TAP_1. Conoce que el estudio de la noción de razón puede llevar al estudio del valor unitario en el contexto de la proporcionalidad.

A pesar de que en la pregunta anterior pretendíamos que Israel nos brindara información sobre la definición de razón, observamos que busca ejemplificarla, pero no definirla. Por ello le cuestionamos si el valor unitario tiene relación con la razón, a lo cual responde [ES1_Israel_KoT_D_2 62-77]:

Israel: Una razón podemos decir que es la comparación de dos cantidades, por ejemplo, aquí estamos mencionando una cantidad que es los lápices de regalo y, otra cantidad, sería los lápices que yo compré. Aquí la comparación es que por cada cuatro lápices que yo compro obtengo un lápiz de regalo y eso sería una razón, una comparación entre dos cantidades. La razón la podemos trabajar de diferentes formas, después lo vamos a ver en la actividad, por ejemplo, comparar estas dos cantidades o comparar otras que son distintas, por ejemplo, podemos comparar ésta (señala en el pintarrón) con otra información que les pueda dar a los niños, quizá ésta sería una actividad muy favorable para comenzar a trabajar con los niños la razón, pero aquí se trabaja la proporcionalidad, no se trabaja tanto de comparar, por ejemplo de comparar de que [...] si se llega a que por cuatro lápices que tenga me regalan uno, pero más que nada se trata de encontrar ese valor unitario para obtener los demás datos; eso se hace en proporcionalidad, por eso mencionaba el libro que esta razón que se trabaja es por proporcionalidad y también en lo que estuve investigando cuando estaba haciendo mi actividad era que al trabajar los niños la razón, estamos ayudando a adquirir otros conceptos como la proporcionalidad, la probabilidad y también favorecemos otras nociones de fracción.

Como se puede apreciar, Israel manifiesta evidencias, indicios y oportunidades de investigación que se hacen presentes cuando señala que al abordar la razón se puede trabajar el concepto de probabilidad (KSM_A); los indicios de conocimiento aparecen cuando expresa que la razón se puede trabajar desde la proporcionalidad y las fracciones (KSM_A) y las evidencias de conocimiento aparecen cuando define la razón, tal como expresamos en el siguiente indicador, entonces:

Israel_KoT_D_2. Conoce que la razón se puede definir como una comparación entre dos cantidades que pueden ser iguales o distintas.

En la Entrevista Semiestructurada 1 (ES1) Israel mencionó que la planificación surgía en el contexto de las fracciones, pero sólo pretendía abordar la razón, durante la Entrevista Semiestructurada 2 (ES2), Israel aclara qué lo llevó a definir razón y fracción [ES2_Israel_KoT_D_3_4 71-79]:

Israel: Una razón es la relación entre dos números o dos cantidades que dijimos está representada por el cociente y el cociente es la división. Investigando un poco y profundizando decía que a veces la razón es como precursora a la fracción y lo veo en el sentido de que dice “la razón no se expresa siempre como una fracción, sino como [...] en un medio, puede ser uno de dos o uno a dos”. Por lo tanto, identifico que no se ve la razón tanto como fracción, pero si es como un antecedente, precursora para llegar a la fracción. En este sentido, hay diferentes formas de expresar la razón. En la parte final de mi clase, me adentré más en lo que es la fracción. La fracción la veo como el cociente entre dos cantidades con sus partes, que es el numerador y el denominador.

A partir del fragmento anterior, Israel enriquece la definición de razón y conceptualiza la fracción por lo que podemos decir que:

Israel_KoT_D_3. Conoce que la razón se puede definir como una relación entre dos números o dos cantidades que pueden estar representadas por el cociente.

Israel vierte una serie de reflexiones respecto al papel que desempeña la razón como precursora de las fracciones. De ahí que no siempre al abordar la razón se puede llegar al estudio de la fracción. Por lo tanto, comenta que en la primera parte de su planificación trabaja la razón como una relación entre dos números y hasta el final de la clase aborda la fracción:

Israel_KoT_D_4. Conoce que la fracción se puede definir como el cociente entre dos cantidades cuyas partes identifica como numerador y denominador.

Como logramos observar en párrafos anteriores, la descripción del aprendizaje esperado en la Planificación de Israel lo lleva a establecer diferentes conceptualizaciones sobre razón, valor unitario y fracción, lo cual, le permite definir algunos límites respecto con su estudio en la educación primaria al responder a algunas preguntas que le planteamos [ES1_Israel_KMLS_TAP_2 89-101]:

E: ¿Cuáles significados de la fracción cree que se abordan en los grados anteriores a quinto?

Israel: Casi siempre la fracción como razón la encontramos en las definiciones, casi al final, por ejemplo, en lo que me estuve informando para realizar la actividad buscaba el concepto de fracción y las partes porque de repente pudiéramos entender que el concepto de fracción [...] perdón, igual es una fracción porque a veces lo queremos ver de forma holística o íntegra, cuando nosotros desconocemos que la podemos ver desde diferentes puntos conceptuales, por ejemplo, está la fracción como parte-todo, la fracción como cociente, la fracción por proporción, la fracción como medida y casi siempre encontramos que esta definición de fracción como razón se encuentra en el penúltimo lugar y, al último, se encuentra la fracción por proporción [...] y vemos, por ejemplo, los niños lo que han trabajado antes de la fracción como razón son las conceptualizaciones de fracción como parte-todo, cociente y medida.

Cuando cuestionamos a Israel sobre los significados de la fracción que se abordan en grados anteriores a quinto grado, la respuesta muestra indicios de conocimiento de los diferentes significados de la fracción: parte-todo, cociente, medida, proporción y razón (KoT_F); además, expresa que el significado parte-todo, cociente y medida se aborda en los grados anteriores, mientras que el significado razón en grados superiores (KMLS_TAP); lo anterior nos lleva a definir los siguientes indicios de conocimiento:

Israel_KoT_F_1. Conoce que el estudio de las fracciones se asocia a diferentes significados: parte-todo, cociente, medida, proporción y razón.

Israel_KMLS_TAP_2. Conoce los significados de la fracción parte-todo, cociente y medida se aborda en los grados anteriores a quinto y el significado razón en grados superiores.

Con el propósito de obtener evidencias de conocimiento de los diferentes significados de la fracción, durante la ES2 le cuestionamos sobre esto [ES2_Israel_KoT_F_2 96-111]:

Israel: Por ejemplo, ver la fracción como parte-todo, ver ciertas cantidades como parte-todo, por ejemplo, si tengo ocho sándwich y quiero repartir la mitad sería no ver la fracción de un medio de un sándwich, sino ver esos ocho como mi entero y esto es difícil de concebir, por ejemplo, cantidades como 520 eso sería mi todo, es difícil hacer esa reflexión porque a veces los niños se enfocan a que un entero es un círculo relleno, pero no pueden ver que otras cantidades pueden ser mi cien por ciento, pueden ser mi entero y, a partir de esas cantidades, voy a hacer las reparticiones.

E: Usted plantea dos situaciones muy importantes: hablar del todo desde un círculo y de cantidades, por ejemplo, quinientos veinte. Además, señala que los alumnos tienen más dificultades cuando ven el todo en cantidades, ¿a qué cree se debe?

Israel: Me parece se debe a que en ocasiones no alcanzamos a llevar a los niños a la reflexión de que otras cantidades pueden formar mi entero, porque las fracciones en círculos si las pueden representar bien, pero cuando les pongo otras cantidades de que tengo, por ejemplo, una cantidad como treinta y dos y quiero repartir de ahí solamente un cuarto, entonces para los niños es un poco difícil representar un cuarto de treinta y dos, no encuentran una relación de ver al treinta y dos como un entero, como un todo.

Las respuestas nos proporcionan evidencias de conocimiento sobre las diferentes situaciones donde se puede trabajar el significado parte-todo: cuando se trata de representar “x” fracción de un entero-todo al tomar como referente una figura geométrica (círculo) o cierta cantidad de objetos (520-cantidades; 8 sándwich); lo anterior nos lleva a plantear el siguiente indicador:

Israel_KoT_F_2. Conoce que el significado parte-todo de la fracción se puede trabajar en contextos continuos y discretos.

Cuando le preguntamos cuándo cree que se aborda la fracción como medida en la escuela primaria, nuevamente la información que brinda gira en relación con las situaciones en las que se puede trabajar [ES2_Israel_KoT_F_3 113-116]:

Israel: Me parece los niños las pueden ver al manejar algunas longitudes, por ejemplo, en una recta numérica que tiene diez centímetros representa un cuarto o algunas magnitudes, por ejemplo de litro, un cuarto de litro, medio litro; aquí se puede ver la fracción como medida.

En términos generales, Israel expresa situaciones concretas en las que se puede recurrir al significado medida, por ejemplo, al ubicar cierta fracción en una recta numérica o al hablar del litro como unidad de medida que permite solicitar un cuarto de litro y medio litro. Por lo anterior, identificamos como indicador de conocimiento:

Israel_KoT_F_3. Conoce que el significado medida de la fracción se puede trabajar al ubicar diferentes longitudes en una recta numérica, así como al emplear el litro como unidad de referencia para medir cuartos y medios del mismo.

Hasta este momento, identificamos Israel expresa conocimientos del significado parte-todo y el significado medida a través de diferentes situaciones donde se ponen en juego; caso contrario cuando expresa la fracción como cociente y la fracción mixta [ES2_Israel_KoT_D_5_6 117-124]:

Israel: La fracción como cociente se entiende como la división, una fracción que implica un cociente es una división [...]

E: Usted señala en sexto grado los niños trabajan la fracción mixta, ¿qué es una fracción mixta?

Israel: Es una fracción donde maneja un entero y lo acompaña una fracción con numerador y denominador, por ejemplo diez cuartos, es igual a dos enteros dos cuartos; esa sería la fracción mixta.

En el caso de la fracción mixta y la fracción como cociente, Israel evidencia conocimientos más cercanos a su definición en lugar del tipo de situaciones donde abordan. De ahí que expresemos los siguientes indicadores de conocimiento:

Israel_KoT_D_5. Conoce que la fracción como cociente se define como una división.

Israel_KoT_D_6. Conoce que la fracción mixta está integrada por un entero y una fracción.

Respecto a este último indicador de conocimiento, identificamos que Israel muestra indicios de conocimiento de equivalencia de fracciones a través de una representación verbal:

Israel_KoT_R_1. Conoce que la fracción equivalente de diez cuartos se puede expresar con una fracción mixta cuyo registro verbal es dos enteros dos cuartos.

En su planificación, Israel rescata un concepto más que contextualiza el diseño de tareas, nos referimos al eje temático que, desde el programa de estudios 2011 de educación primaria, se plantea como un

indicador que organiza los temas y contenidos de matemáticas. Como podemos apreciar en la planificación, Israel expresa que trabaja el eje temático *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, sin embargo, durante la Entrevista Semiestructurada 2, cuando le solicitamos justifique el trabajo de la razón como significado de la fracción desde este eje nos comenta [ES2_Israel_KMLS_EA_3 9-15]:

Israel: En función de lo que señala quiero complementar esa respuesta porque se abordan dos ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico y, un poco, manejo de la información. En el sentido y pensamiento algebraico considero situaciones o planteamientos con números naturales, reales, racionales [...] se trabaja más ese aspecto. En el uso y manejo de la información, las actividades que se desarrollaron se enfocaron en este campo porque vemos algunas tablas, gráficas y, con base en ello, se responde cierta información. Por lo tanto, revisamos estos dos ejes.

En el fragmento anterior, Israel evidencia conocimientos de dos ejes que favorece en su planificación y las clases que dio al trabajar la razón como significado de la fracción en un grupo de quinto grado: sentido numérico y pensamiento algebraico y, manejo de la información; el primero lo asocia con el estudio de los números racionales y el segundo, con la lectura de tablas y gráficas para brindar información concreta. La información obtenida la sintetizamos en el siguiente indicador de conocimiento:

Israel_KMLS_EA_3. Conoce que al trabajar la razón como significado de la razón favorece el trabajo con el eje temático sentido numérico y pensamiento algebraico, así como manejo de la información.

Durante la Entrevista Semiestructurada 2, Israel profundiza en la relación que existe en el estudio de la razón como significado de la fracción desde el eje sentido numérico y pensamiento algebraico, situación que expresa así [ES2_Israel_KMLS_EA_3 16-23]:

E: En el de sentido numérico y pensamiento algebraico por qué dice que se hace uso de los números naturales, reales [...] ¿Cuáles son los números naturales? ¿Qué recuerda? [...]

Israel: Eso lo vimos en primer semestre [...] Los números naturales son del uno en adelante, sin ver números negativos [...] los números reales son todos los números que existen. Como estamos hablando de fracciones se ven los números racionales que son algunos que tienen partes fraccionales. Entonces considero que el sentido numérico y pensamiento algebraico trata de revisar estos tipos de números y hace uso de algunas operaciones básicas, en este caso, la división y la multiplicación.

En el fragmento de la Entrevista Semiestructurada 2, Israel evidencia conocimientos de que el eje sentido numérico y pensamiento algebraico, además de incorporar el estudio de los números racionales entre ellos las fracciones, incluye el estudio de operaciones básicas, como la división y la multiplicación.

Después de exponer algunos conocimientos que Israel evidencia en relación con los ejes temáticos que se abordan desde su Planificación y en sus clases, pasamos a expresar algunos de sus conocimientos en relación con las competencias que favorece; último elemento que contextualiza el diseño de tareas de Israel en su Planificación, en las entrevistas y en el documento de Análisis de la Práctica [AP_Israel_KMLS_EA_4 396-399]:

Las competencias que se favorecen son las siguientes:

- Resolución de problemas de forma autónoma.
- Validación y argumentación de sus procedimientos.
- Comunicar información matemática.

Las tres competencias anteriores se convirtieron en oportunidades para investigar respecto al conocimiento que Israel tiene de las mismas. Enseguida presentamos algunos fragmentos de entrevista [ES2_Israel_KMLS_EA_4_5_6 24-35]:

E: En la entrevista pasada comentábamos cuáles eran las competencias matemáticas que se favorecían en su planificación y usted nos comentó: resolución de problemas de manera autónoma, validar y argumentar resultados y, comunicar información matemática. En este sentido, nos pudiera ampliar en qué consiste o cómo se favorecían cada una de las competencias citadas.

Israel: Resolver problemas de manera autónoma consiste en que los alumnos trabajen [...] en la clase estuvieron organizados en equipos, fue de una forma colaborativa, pero dentro de estos equipos no se debe delegar la responsabilidad en unos cuantos. Por eso, una de las competencias fue el trabajar de manera autónoma para resolver las actividades, que cada niño se haga responsable de su propio trabajo y de su propio proceso de aprendizaje, es decir, ser autónomo, de ser protagonista dentro de ese equipo, de tomar ciertas decisiones, de opinar y entre todos argumentar [...] por ejemplo, el que decide o propone argumentar por qué plantea cierta situación, es como hacerse parte y tomar esa responsabilidad en el equipo.

En el fragmento de la entrevista anterior, Israel expresa la importancia de que los alumnos favorezcan la resolución de problemas de manera autónoma, aunque trabajen en equipo, deben ser protagonistas al realizar las actividades que se les deleguen, sin embargo, no detalla la importancia de la diversidad de procedimientos que pueden encontrar para cierto de problemas a partir de esa autonomía que pueden ejercer. Así plasmamos como indicador de conocimiento:

Israel_KMLS_EA_4. Conoce que resolver problemas de manera autónoma es una competencia de las matemáticas cuyo propósito es que los alumnos se conviertan en los protagonistas de la resolución de las actividades que se les presentan.

Durante la Entrevista Semiestructurada 2, además de exponer algunos conocimientos que posee sobre las competencias validar procedimientos y resultados y, comunicar información matemática, Israel trata de relacionarlas con algunas situaciones que desarrolló en sus clases [ES2_Israel_KMLS_EA_5_6 38-58]:

Validar y argumentar resultados es una parte y se complementa con la competencia de comunicar información matemática porque quizá los alumnos cuando validan y argumentan sus resultados o sus procedimientos la favorecen [...] es la forma en que ellos dan cierto sustento porque obtienen cierto resultado, porque emplean determinado procedimiento. Entonces es importante que no sólo ellos se queden con cómo lo hicieron, sino que lo compartan y que argumenten, validen y sea la forma en que se haga el trabajo, quizá para otro alumno puede ser significativo la forma en la que lo resolvió y lo apropie también ese procedimiento o amplíe más sus aprendizajes en la forma en cómo se pueden resolver ciertos problemas.

E: De acuerdo a lo que plantea, ¿en qué consiste la argumentación?

Israel: Argumentar consiste en mostrar evidencias, algún hecho, plasmarlo y justificar [...] por ejemplo, por qué me dio cierto resultado y decir lo que hice primero y después; esto es una forma en la que está argumentando y se hace con la finalidad de convencer, por eso tiene que dar como explicaciones, la causa que lo llevó a este procedimiento.

E: ¿Esto se favoreció en su clase?

Israel: Sí se favoreció porque los niños al final de contestar sus hojas de trabajo, pasaban al pizarrón y argumentaban la forma en que hacían su procedimiento, cómo llegaron a su resultado y, los demás, validaban [...] validar es como decir si sí o no, como la aprobación. Por lo tanto, durante las actividades si se favoreció esa competencia. Puede que existan algunos momentos donde los alumnos se detengan y reflexionen si su procedimiento fue el adecuado.

En el fragmento anterior, Israel plantea que la validación de procedimientos y resultados puede favorecerse otra competencia como comunicar información matemática; que compartan y argumenten los procedimientos que los llevan a obtener un resultado para descartar los adecuados y de esta manera contribuir al aprendizaje de los alumnos. En términos concretos, Israel muestra como indicador de conocimiento:

Israel_KMLS_EA_5. Conoce que validar procedimientos y resultados es una competencia de las matemáticas que favorece que los alumnos expresen y argumenten los procedimientos que emplean para resolver problemas, así como determinen si son correctos o incorrectos.

Por último, en este apartado de los elementos que contextualizan el diseño de tareas, en relación con las competencias matemáticas que se favorecen, Israel evidencia algunos conocimientos de la competencia comunicar información matemática [ES2_Israel_KMLS_EA_5 59-69]:

E: ¿En qué consiste la competencia de comunicar información matemática?

Israel: Considero que esa competencia consiste en dar a conocer resultados, planteamientos y estrategias para resolver ciertos problemas, es decir, dar a conocer información matemática con la que lo resolvieron. Me parece tiene el propósito de revisar los diferentes procedimientos con los que puedo resolver un problema.

E: Nos puede proporcionar un ejemplo de información matemática a partir de lo que trabajó.

Israel: Un ejemplo puede ser en un problema, la información matemática serían los conceptos o las ideas que se requieren en el área de las matemáticas como un lenguaje matemático, por ejemplo, de sustracción, cociente, razón; estamos usando ese lenguaje matemático. Dar a conocer información matemática es información referente al tema.

A partir del fragmento anterior, identificamos que, mediante la competencia comunicar información matemática Israel pretende que sus alumnos se apropien de conceptos matemáticas, en este caso de la razón, lo que nos lleva a definir el siguiente indicador de conocimiento:

Israel_KMLS_EA_6. Conoce que comunicar información matemática es una competencia de las matemáticas que favorece que los alumnos expresen las estrategias y los procedimientos que emplean para resolver problemas en función de un lenguaje (conceptos) propio de las matemáticas.

Durante la Entrevista Semiestructurada 1, Israel relaciona el desarrollo de las competencias matemáticas con el enfoque de las matemáticas cuando le preguntamos sobre la presencia de éste último en su planificación [ES1_Israel_KMLS_EA_7 1192-1207]:

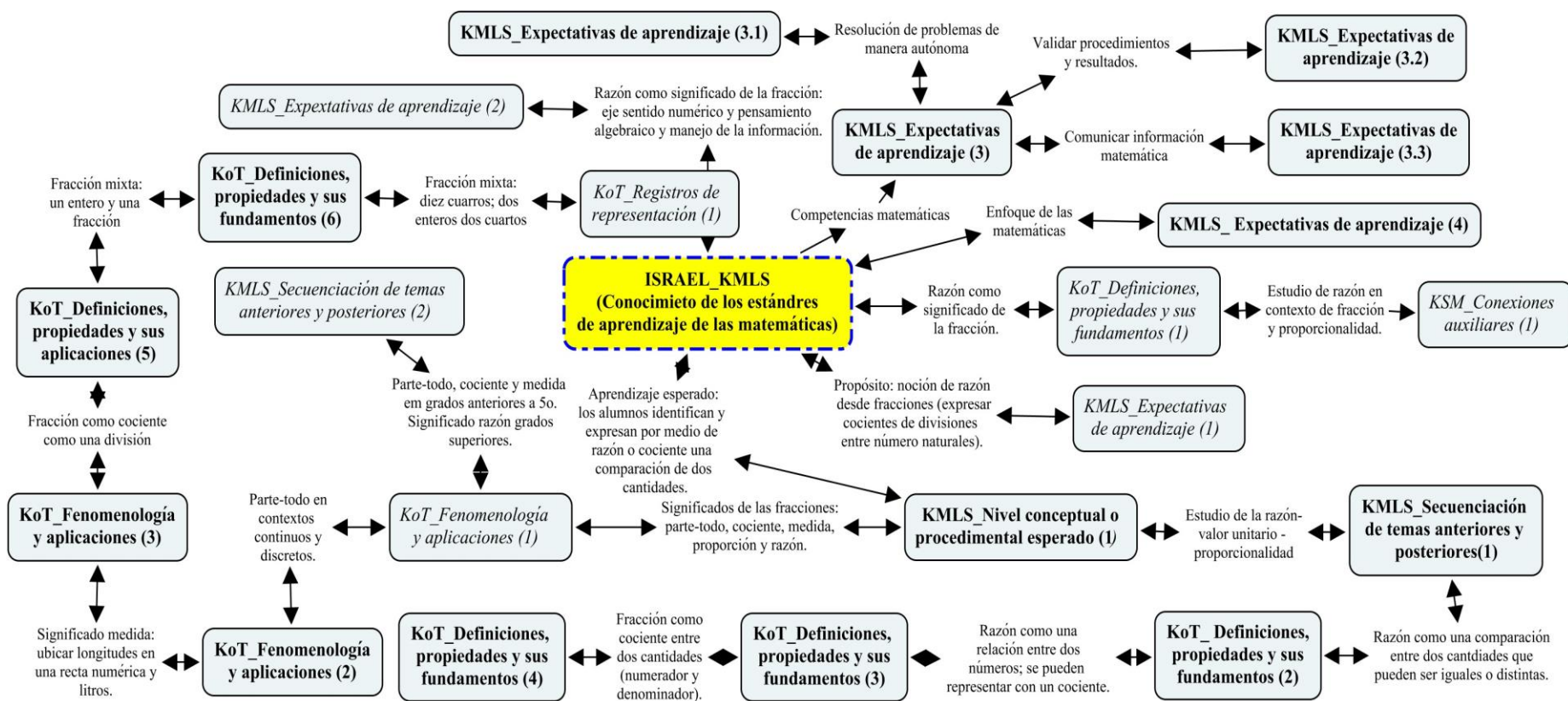
Israel: El enfoque de las matemáticas, según el programa de estudio de quinto año 2011, menciona que es una secuencia de situaciones problemáticas. Entonces dice que estas situaciones problemáticas deben invitar a los alumnos a un gusto por las matemáticas, que sean actividades novedosas, actividades que llamen la atención, que inviten a los alumnos a reflexionar sobre sus procesos, que encuentren diferentes caminos para llegar al mismo resultado, diferentes procedimientos y también que formulen argumentos que los ayuden a validar sus procedimientos, sus resultados [...] entonces creo que el enfoque se hace presente porque es una actividad novedosa, creo que les puede llamar la atención, hay diferentes formas de llegar a un mismo resultado. También porque invitamos a los alumnos a que hagan una reflexión del análisis de esos resultados que como mencionamos, pocas veces se ve, muchas veces el profesor solamente revisa para ver si estás bien, aunque cada compañero tenga algo diferente vale lo mismo [...] va muy relacionado el enfoque con las competencias matemáticas a desarrollar en los niños porque espero que aprendan a escuchar y ser escuchados, que ellos mismos formulen, emitan un mensaje y den argumentos, que ellos estén seguros y convencidos de lo que están diciendo y cómo lo hicieron, por lo cual creo, que el enfoque se hace presente en las actividades.

En este fragmento Israel expone los conocimientos que posee sobre el enfoque de las matemáticas que aparece en el programa de estudio 2011 de quinto grado. Lo traduce en una secuencia de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los llevan a emplear diferentes procedimientos para resolverlas. Es en este contexto donde aparecen algunas de las competencias matemáticas al compartir y argumentar sus procedimientos. A partir de esta información, definimos el siguiente indicador de conocimiento:

Israel_KMLS_EA_7. Conoce que una secuencia de situaciones problemáticas es parte del enfoque de las matemáticas.

Como podemos apreciar en cada uno de los párrafos anteriores, el enfoque de las matemáticas, las competencias matemáticas, los ejes temáticos, el aprendizaje esperado, el propósito y el tema, elementos que se abordan en la primera parte de la planificación de Israel, se contextualizan el diseño de tareas para abordar la razón y su principal referente es el conocimiento que tiene sobre el trabajo en matemáticas desde las orientaciones del plan de estudios, los programas de estudios y los libros de texto del alumno. De ahí que en su mayoría existan evidencias del *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), sin dejar de lado la presencia de otros tipos de conocimientos. Con el propósito de brindar un panorama general de las evidencias e indicios de conocimientos matemáticos y didácticos de Israel, a continuación presentamos una figura donde sintetizamos dichas evidencias e indicios en relación con los diferentes dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). Cabe hacer mención seguido de la figura agregamos un resumen que describe dichas relaciones.

V.3.1.1. Figura de relaciones de conocimiento entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK.
Elementos que contextualizan el diseño de tareas.



V.3.1.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Elementos que contextualizan el diseño de tareas.

La asignatura, tema, eje temático, propósito, aprendizaje esperado y competencias que se favorecen, todos elementos de la planificación, se convierten en oportunidades para investigar el conocimiento que posee Israel en relación con el Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) cuando enseña la noción de razón. Conforme avanzamos en la recuperación de información de los diferentes instrumentos que aplicamos en esta investigación, encontramos indicios y evidencias de conocimiento matemático y didáctico de Israel, así como nuevas oportunidades para investigar. Enseguida presentamos los indicios y evidencias de su conocimiento especializado.

En la Planificación, Israel define el tema de sus clases como “La razón como fracción” y, en el documento de Análisis de la Práctica agrega algunas consideraciones respecto al tema “Razón como fracción”; lo anterior nos permite identificar indicios de conocimiento de la razón como un significado de la fracción (*KoT_D_1*). Además, plantea algunas reflexiones donde considera que el estudio de la noción de razón se puede abordar en el contexto de las fracciones y la proporcionalidad (*KSM_A_1*).

De acuerdo con la información que proporciona Israel, el propósito y el aprendizaje esperado de la planificación se encuentran relacionados; el primero orienta al segundo, es decir, a largo plazo se plantea que el alumno identifique el papel de la noción de razón en las matemáticas y su vínculo con la noción de fracción, pero a corto plazo se espera que avance en el uso de fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales (*KMLS_EA_1*). A pesar de que en la Planificación define un aprendizaje esperado, en la Entrevista Semiestructurada 1 cita un aprendizaje esperado y agrega información. Así, espera que en este grado y durante el desarrollo de sus clases los alumnos identifiquen y expresen por medio de la razón o cociente una comparación entre dos cantidades (*KMLS_NCP_1*).

Una vez que Israel señala que espera que los alumnos recurran a la razón o cociente para expresar una comparación entre dos cantidades, en la Entrevista Semiestructurada 1 se aprecia que conoce que el estudio de la noción de razón puede llevar al valor unitario en el contexto de la proporcionalidad (*KMLS_TAP_1*). Además, manifiesta conocer que la razón se puede definir como una comparación entre dos cantidades que pueden ser iguales o distintas (*KoT_D_2*), lo cual enriquece cuando expresa que se puede visualizar como una relación entre dos números o dos cantidades que pueden ser representadas por el cociente (*KoT_D_3*).

Respecto a la fracción, Israel la refiere como cociente entre dos cantidades e identifica al numerador y denominador (**KoT_D_4**). Con esto, Israel manifiesta indicios de conocimiento de los diferentes significados de la fracción: parte-todo, cociente, medida, proporción y razón (**KoT_F_1**). También ubica parte-todo, medida y cociente como significados que se abordan en grados anteriores a quinto, mientras que el significado razón ubica en grados superiores (**KMLS_TAP_2**). En este caso Israel evidencia conocimiento de dos significados de la fracción: parte-todo y medida; el primero lo asocia con el trabajo en contextos continuos y discretos (**KoT_F_2**), mientras que el segundo, cuando se ubican diferentes longitudes en una recta numérica, así como al emplear el litro como unidad de referencia para medir cuartos y medios del mismo (**KoT_F_3**). Por otra parte, Israel señala que la fracción como cociente se define como una división (**KoT_D_5**) y la fracción mixta está integrada por un entero y una fracción (**KoT_D_6**); lo anterior, nos lleva a identificar como indicio de conocimiento de Israel, que la fracción equivalente de diez cuartos se puede expresar con una fracción mixta cuyo registro verbal es dos enteros dos cuartos (**KoT_R_1**).

Las diferentes tareas que Israel diseña para trabajar la razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, en un grupo de quinto grado, lo llevan a señalar favorece el trabajo con el eje temático sentido numérico y pensamiento algebraico, así como manejo de la información (**KMLS_EA_3**).

En parte de la Planificación donde vienen los elementos que contextualizan el diseño de tareas, Israel hace referencia a las competencias matemáticas que favorece y que se convierten en evidencias de conocimiento en la Entrevista Semiestructurada 2, lo cual nos permite identificar que: conoce que resolver problemas de manera autónoma es una competencia de las matemáticas cuyo propósito es que los alumnos se conviertan en protagonistas de la resolución de las actividades que se les presentan (**KMLS_EA_4**), también conoce que validar procedimientos y resultados es una competencia de las matemáticas que favorece que los alumnos expresen y argumenten los procedimientos que emplean para resolver problemas, así como determinen si son correctos o incorrectos (**KMLS_EA_5**) y conoce que comunicar información matemática es una competencia de las matemáticas que favorece que los alumnos expresen las estrategias y los procedimientos que emplean para resolver problemas en función de un lenguaje (conceptos) propio de las matemáticas (**KMLS_EA_6**).

Por último, en la Entrevista Semiestructurada 1, Israel evidencia conocimiento del enfoque de las matemáticas; elemento que es definido desde los programas de estudio de matemáticas (**KMLS**), sobre

ese respecto señala que el enfoque orienta a desarrollar las clases a través de una secuencia de situaciones problemáticas (**KMLS_EA_7**).

En los *elementos que contextualizan el diseño de tareas*, Israel muestra conocimiento principalmente de los temas matemáticos (KoT), de manera específica sobre la definición de razón y fracción (KoT_D), de los diferentes significados de la fracción (KoT_F) y del registro de representación verbal de fracciones equivalentes cuando se manejan fracciones mixtas (KoT_R). También se evidencia su conocimiento sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), especialmente el conocimiento que se espera los niños adquieran en quinto grado: la razón en como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad (KMLS_NCP). Además evidencia conocimiento del propósito, tema (razón como fracción), ejes temáticos (sentido numérico y manejo de la información) y competencias matemáticas (resolver problemas de manera autónoma, validar y argumentar procedimientos y, comunicar información matemática) que se espera los niños y las niñas adquieran en la educación primaria (KMLS_EA). Por otra parte, es importante el conocimiento que Israel muestra sobre los significados de la fracción que los alumnos abordan antes y después de quinto grado (KMLS_TAP). Finalmente, aunque en menor medida aparecen evidencias de conocimiento de las conexiones que se establecen a partir de la noción de razón entre fracción y proporcionalidad (KSM_A).

V.3.2. Tareas de apertura [Planificación_Israel_2. 13-66]. Conocimiento especializado de Israel.

En este apartado, avanzamos en la identificación y caracterización de los conocimientos matemáticos y didácticos de Israel en las tareas de apertura cuya caracterización atiende a la perspectiva de Mason & Johnston-Wilder (2006), quienes destacan que estas tareas se realizan cuando se comienza el estudio de una lección.

Esta referencia también la tomamos en el caso de Daniela; además, observamos en las planificaciones de ambos (Daniela e Israel) que se definen algunas tareas de apertura, motivo por el cual retomamos las aportaciones de los autores citados. Enseguida presentamos el fragmento de planificación de Israel donde plantea las tareas de apertura [P_Israel_2. 13-66]:

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Preparación del medio

Valoración de conocimientos previos:

-Leer un cuento a los alumnos titulado “La gran fiesta”

Había una vez en un lugar muy muy lejano una ciudad donde reinaba la justicia, no había criminal que se le escapara al gran guardián del planeta.... ¿Saben quién es?... así es, se trata del Capitán de las tres “R” (Recicla, Reúsa y Reduce), él junto con su pandilla de guardianes defienden la limpieza del planeta y pelean en contra de la contaminación y de cualquiera que se atreva a tirar basura y a desperdiciar los recursos que la naturaleza nos da.

Un día el Alcalde de Ciudad “limpieza” organizó una fiesta para el capitán “R” por su gran trabajo y por mantener la ciudad fuera de basura y de los desperdicios. Toda la ciudad estaba invitada a este gran evento, en especial los niños, ya que querían celebrar juntos con su gran súper héroe. Después de la fiesta habría un baile en el que tocarían “Los 5 de Zacatecas”; el Alcalde de la ciudad prometió a todos sus invitados un gran festín en donde habría ricos antojitos y de postres pasteles de todos los sabores. También prometió traer toda una feria con juegos y puestos para que todos se divirtieran.

El Alcalde al quererse lucir para festejar a lo grande al Capitán “R”, no se dio cuenta que había gastado mucho dinero en contratar al grupo, en el mobiliario, en la feria y en la comida, así que tendría que economizar en los postres, ya que no los había comprado todavía y no le podía quedar mal al pueblo porque se los había prometido, así que tuvo que ir a preguntar los precios a las pastelerías del pueblo para ver en dónde le convenía comprarlos.

El Alcalde es algo distraído con las cuentas y no se le dan mucho las matemáticas, así que ahora te toca a ti ayudarlo a decidir en dónde le conviene hacer la compra de los pasteles.

Se les presentará a los alumnos a través de una proyección las dos ofertas de las dos pastelerías, se aclarará que el pastel es del mismo tamaño en los dos establecimientos. La pregunta central será, ¿en cuál de las dos pastelerías le conviene hacer la compra?

Se abrirá un espacio para la argumentación de la pregunta.

En este primer momento se trabajará de forma individual, utilizando solamente lápiz y papel.



Organización del grupo:
 Enseguida se saldrá un momento a fuera del salón para realizar una dinámica titulada “El trenecito”, ésta permitirá formar 5 equipos (el número de equipos puede variar según el número de los estudiantes).
 Materiales:
 Hoja de trabajo.

En el fragmento anterior que corresponde a las tareas de apertura (**KMT_ES_T_TA_E**), se hacen presentes diferentes indicadores: situación didáctica, preparación del medio, valoración de conocimientos, organización del grupo y materiales; éstos giran en torno al diseño de tareas para comparar razones, donde cada razón está expresada con dos números naturales. En este primer momento, identificamos el siguiente indicador de conocimiento:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce el diseño de tareas de apertura para trabajar la comparación de razones.

A continuación presentamos algunos fragmentos de las Entrevistas Semiestructuradas (1 y 2), de la Videograbaciones de clases (1 y 2) y del documento de Análisis de la Práctica donde identificamos evidencias de conocimiento matemático y didáctico en el diseño de tareas de apertura. Comenzaremos por señalar las reflexiones que Israel plasma en el documento de Análisis de la Práctica en relación con este segundo apartado de la planificación [AP_Israel_KMT_T_1. 58-71]:

En cuanto al plan de clase que se desarrolló estuvo basado en la Teoría de situaciones didácticas propuesta por Guy Brousseau, en la cual se menciona que una situación didáctica es una situación o problema elegido por el docente, la cual lo involucra a él mismo en un juego con el sistema de interacciones del alumno y con su medio, es decir, una situación construida con la finalidad de hacer adquirir a los alumnos un saber ya determinado. Brousseau la definía de esta manera:

Es un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (Citado en Gálvez, 1994)

Una situación didáctica, por lo regular, comienza con la preparación del medio, ya que éste me permite preparar la actividad a realizar, se pueden hacer cuestionamientos para conocer los conocimientos previos de los alumnos [...]

En este fragmento del documento de análisis de la práctica, Israel evidencia conocimiento de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) como teoría de enseñanza que le permite plantear un problema a partir de algunas interacciones con el medio. En este fragmento destaca que una situación didáctica puede comenzar con la preparación del medio, donde se emiten algunas interrogantes para rescatar los conocimientos previos de los alumnos. A partir de lo anterior identificamos:

Israel_KMT_T_1. Conoce la Teoría de las Situaciones Didácticas como teoría de enseñanza que permite enseñar el significado razón en su doble manifestación.

Además, durante la Entrevista Semiestructurada 2 Israel muestra evidencias de conocimiento de la TSD, así como su relación con otros conceptos que menciona en su planificación, tal como se aprecia enseguida [ES2_Israel_KMT_T_2. 173-187]:

E: En su situación didáctica viene en un primer apartado “preparación del medio”, el cual tiene organizado en tres partes. Nos gustaría que nos explique cuál es el papel del medio en la situación didáctica [...]

Israel: El medio es ese escenario de aprendizaje, es decir, el canal en el que se va a dar. Es importante esa preparación del medio, aunque otros lo manejan como una contextualización, que es como adentrar al niño en el conflicto cognitivo que se va a dar.

E: En su planificación, usted dice que en la preparación del medio hay tres elementos: el rescate de conocimientos previos, el material que se necesita y la organización del grupo. Entonces, ¿en qué consiste el rescate de conocimientos previos?

Israel: El rescate de conocimientos previos sirve al maestro para identificar lo que los niños ya conocen, ver cuáles son esos conocimientos antecesores que serán la pauta hacia los nuevos aprendizajes, en este caso, la razón como significado de la fracción; son los conocimientos previos y sirve para darse cuenta si, por ejemplo, los niños saben hacer una división [...] Es lo previo, lo que los niños ya conocen o los conocimientos que hasta el momento poseen.

Como podemos apreciar, nociones como situación didáctica, preparación del medio, conocimientos previos, organización del grupo y materiales; presentes en la planificación de Israel, se convirtieron en oportunidades para recuperar evidencias de sus conocimientos matemático y didáctico. En el fragmento de entrevista hay información proporcionada por Israel respecto al medio como escenario del aprendizaje, la preparación del medio que incluye tres elementos (rescate de conocimientos previos, material y organización del grupo) y, casi al final, identificamos que Israel expresa que el aprendizaje esperado que sirve como referente para el rescate de conocimientos previos es la fracción como significado de la razón. Así, destacamos que:

Israel_ KMT_T_2. Conoce a la preparación del medio (rescate de conocimientos previos, organización del grupo y materiales) como un elemento de la Teoría de las Situaciones Didácticas que permite enseñar el significado razón en su doble manifestación. Enseguida, en función de la descripción de los propósitos de las diferentes partes de la planificación, mostramos evidencias de conocimiento de Israel sobre la situación didáctica y las tareas de apertura, [AP_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 190-194]:

La fase inicial marca el comienzo del proceso formativo que se estará desarrollando. En esta fase se debe de dar tiempo suficiente, ya que sustenta el punto de partida para los siguientes momentos. Las actividades de apertura son aquellas en las que es posible identificar y recuperar las experiencias, los saberes, las preconcepciones y los conocimientos previos de los alumnos [...]

En el fragmento anterior se aprecia que Israel asocia la parte inicial de la clase con las actividades de apertura cuyo propósito es rescatar los conocimientos previos de los alumnos, situación que permite establecer relaciones con algunos de los elementos que describe en la situación didáctica, de manera concreta con la preparación del medio donde el rescate de conocimientos previos juega un papel esencial para el desarrollo de la clase. Más adelante constatamos lo expuesto [AP_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1_2. 237-259]:

La fase de apertura o preparación del medio debe tener de forma implícita algunos elementos como la contextualización, la recuperación de conocimientos previos y el planteamiento de problemas. La contextualización la encontramos en la presentación del cuento, generando las condiciones para que se dé el tema integrador. Se seleccionó el cuento como un recurso para contextualizar y presentar a los alumnos la situación que posteriormente estarán resolviendo, ya que éste apoya a la enseñanza favoreciendo y estimulando el aprendizaje. Se consideró conveniente iniciar la actividad comenzando con el relato, ya que el cuento puede desempeñar un papel formativo del cual se pueden realizar una serie de actividades después de haberlo leído, tales como:

Preguntar: La reflexión acerca de la narración permite que los niños aprendan a preguntar.

Escuchar: Es necesario que los niños, mientras están escuchando un cuento, les enseñemos a moderar sus impulsos por hacer otra cosa y también aprendan a escuchar.

Comentar: Al momento de escuchar el cuento aprendan a hablar y respetar la palabras de otros cuando hablan.

Inventar: Se puede permitir que los niños den rienda suelta a su imaginación e inventar su propio cuento o bien decidir diferentes finales para uno mismo o bien para contar la historia con diversas variantes. (Ortiz, 2002, pp. 105-107).

Utilizar el cuento como punto de partida de la actividad permitirá posteriormente crear diferentes suposiciones de situaciones problemáticas que los alumnos tendrán que resolver, de igual forma se podrán replantear estas situaciones; algo fundamental es que el trabajo girará en torno a un mismo tema o cometido integrador.

En el fragmento anterior, Israel evidencia conocimiento de los propósitos de las tareas de apertura y preparación del medio, es decir, de la contextualización, el rescate de conocimientos previos y el planteamiento de problemas. Es en este contexto donde Israel emplea el cuento como una estrategia didáctica que le permitirá cumplir sus propósitos al preguntar, escuchar, comentar e inventar con base en el contenido del mismo, ya que el cuento gira en torno a una situación donde está en juego un contenido matemático: comparar razones. Enseguida presentamos un fragmento del documento de Análisis de la Práctica donde Israel evidencia lo que mencionamos [AP_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 260-279]:

Como segundo punto dentro de la fase de apertura es la recuperación de conocimientos previos y se ve presente dentro de la planeación en forma de una situación de ofertas, en donde los alumnos tendrán que observar en cuál es la que mejor conviene hacer la compra; es pertinente tomar en cuenta los conocimientos previos, ya que no es posible asimilar toda la información que nos rodea, sino sólo aquella que es significativa a la estructura cognitiva que poseen.

Otro punto importante a considerar dentro de la fase de preparación del medio es la forma en la que se estará organizando al grupo y los materiales a trabajar, que en este caso se estará desarrollando una dinámica y se trabajará con equipos de 5 integrantes, dependiendo el tamaño del grupo, para la actividad a desarrollar solamente se necesitarán hojas de trabajo proporcionadas por el maestro.

Como último punto tenemos el planteamiento del problema, el cual aparece de forma implícita en la consigna. Es importante considerar que las situaciones planeadas deben exponer situaciones de la vida cotidiana que permiten a los estudiantes, identificar aquellos elementos que conocen, estableciendo relaciones entre éstos y otras áreas del conocimiento a fin de modificar, reestructurar o resignificar aquellos conceptos o ideas que forman parte de su bagaje cultural, en este caso, aunque las actividades no se realizaron de situaciones reales concretas si se presentan situaciones que los niños han vivido o que al menos tienen noción de ellas, como lo es el caso de la feria, la cual se plantea en un inicio en el cuento.

Como se puede apreciar, la comparación de razones emerge en el contexto de dos pastelerías que tienen algunas ofertas, la idea es identificar en cuál de las dos conviene hacer la compra para la fiesta. Además, Israel comenta que aunque no se parte de situaciones reales, en el cuento trata de establecer relaciones con algunas situaciones vividas por los alumnos. Por último, mencionamos la importancia que para Israel tiene plantear la organización del grupo desde el inicio de la clase que, en este caso, alude al trabajo en equipo. A partir de lo que hemos expuesto en este apartado relativo a las tareas de apertura, a continuación enunciamos los indicadores de conocimiento evidenciados por Israel:

Israel_ KMT_ES_T_TA_E_2. Conoce las tareas de apertura como preparación del medio que permiten contextualizar, recuperar conocimientos previos y plantear problemas en relación con la comparación de razones.

Israel_ KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce el cuento como una estrategia didáctica donde se puede preguntar, escuchar, comentar e inventar para contextualizar problemas donde se aborda la noción de razón en su doble manifestación.

Israel_ KMT_ES_T_TA_E_2.1. Conoce tareas de apertura que permiten rescatar los conocimientos previos de los alumnos en relación con la comparación de razones.

Después de que Israel evidencia algunos conocimientos didácticos sobre la noción de razón en su doble manifestación, le solicitamos nos comentara cuáles procedimientos podían poner en juego los alumnos al resolver el problema de los pasteles; ante esto, nos externó lo siguiente [ES1_Israel_KMT_R_1. 162-174]:

Israel: Antes quiero partir con esta actividad porque a lo mejor esto es una pequeña forma de trabajar, no tanto la razón porque la tenemos que expresar como una fracción y sí se puede, pero quiero en este primer momento trabajar simplemente la comparación, por ejemplo, en los libros de quinto año plantea de una manera sencilla, pero muy significativa, que es mediante las ofertas, como el caso de los lápices que por tantos lápices te regalamos estos. Aquí menciona que tenemos dos pastelerías: la pastelería suspiros y la casa de los pasteles (escribe los nombres en el pintarrón). Se les va a hablar a los niños que en la casa de los suspiros hay una oferta, por cada tres pasteles que compran solamente pagas dos (escribe 3×2). A lo mejor, en este momento estamos hablando de nociones de fracción, que por cada dos pasteles que compres te regalamos uno. Les voy a mencionar a los niños que los pasteles van a ser del mismo tamaño. En la casa de los suspiros el pastel costaba 180 pesos, pero en la casa de los pasteles uno cuesta 150 pesos (escribe ambas cantidades en el pintarrón) [...]

En la primera parte del fragmento anterior Israel plantea que pretende trabajar la razón como comparación y no expresada en fracción, por ello retoma algunos problemas que se abordan en el libro de quinto grado de educación primaria. Así, identificamos que:

Israel_KMT_R_1. Conoce que el libro de texto de quinto grado de matemáticas proporciona algunas actividades donde se trabaja la razón como comparación, lo cual le permite diseñar una tarea de apertura.

Después de evidenciar el conocimiento de algunas actividades que se plantean en el libro de texto y su influencia en el diseño de sus tareas, avanzamos en la identificación de los posibles procedimientos que cree los niños pueden emplear para resolver la tarea propuesta [ES1_Israel_KFLM_IC_1. 174-194]:

Se les puede cuestionar a los niños por qué creen que este cuesta más caro o más barato. Aquí sería hacer esa aclaración de que los pasteles son iguales para que no crean que éste cuesta más porque está más grande y este porque está más chiquito cueste menos o porque sabe más rico [...] Luego les pregunto, ¿dónde conviene hacer la compra? Considero se van a basar en esta oferta (señala la de los suspiros 3x2), van a decir pues donde conviene hacer la compra si él quiere comprar, por ejemplo, tres pasteles; quizá los niños van a realizar una operación, van a decir aquí si compraría tres donde cada uno cuesta ciento cincuenta [...] aquí tenemos lo que estamos mencionando un valor unitario, que sería que un pastel cuesta ciento cincuenta y, por ejemplo, ahora aquí sería cuánto van a costar tres pasteles (escribe 3). Los niños pueden hacer una multiplicación y decir que tres pasteles costarían cuatrocientos (escribe 450). En los suspiros, según la oferta compraría tres, pero solamente pagaría dos y, cuánto pagaría aquí, pues sería multiplicando 180×2 que sería aquí 360 (lo escribe en el pintarrón). Otra forma que creo los niños pudieran hacer en esta parte sería multiplicando 180 por tres que serían 540 y restándole 180, porque sería por ejemplo compró tres pasteles de $180 \times 3 = 540$ (lo escribe en el pintarrón) y le resto uno porque nada más pagaría dos y me daría ese resultado (señala 360). Si compramos tres dónde conviene hacer la compra, espero los niños digan en la pastelería suspiros; esta es una forma de estar comparando precios, por ejemplo, en éste me sale más barato (señala 360), cuánto, pues noventa pesos. Muy bien, pero ahora si sólo quiero comprar uno, entonces dónde le costaría más comprar. Aquí vemos que dependiendo de la cantidad que se quieran comprar pueden tener diferentes opciones de donde se puede hacer la compra.

En el fragmento anterior Israel expone que es necesario definir que el tamaño de los pasteles de ambas pastelerías es igual. Señala que si van a comprar tres pasteles en cada pastelería, los alumnos deben identificar el precio de un pastel para posteriormente multiplicar por tres, aunque en el caso de la pastelería “suspiros” debido a su oferta de tres por dos, quizá pueden restar un pastel para obtener el pago final o multiplicar por dos. Además, cree los alumnos pueden expresar la diferencia entre el pago de una y otra pastelería. En términos generales identificamos que:

Israel_KFLM_IC_1. Conoce que, a partir del valor unitario (multiplicar 3 por 150). los alumnos pueden recurrir a la multiplicación para sacar el pago que deben realizar por la compra de tres pasteles. En el caso de la pastelería “suspiros” existen dos procedimientos que pueden usar: multiplicar el valor unitario por dos (180 por 2) o multiplicarlo por tres y restar uno (180 por 3 menos). Esto nos permite decir que:

Israel_KFLM_IC_1.1. Conoce que los alumnos pueden obtener la diferencia de lo que pagan en ambas pastelerías ya que en el fragmento anterior Israel expresa que la pastelería que seleccionen los alumnos depende de la cantidad de pasteles que deseen comprar. Más adelante pretendemos nos brinde información al respecto [ES1_Israel_KFLM_IC_2. 195-208]:

E: En la pregunta que hace dice de manera específica el número de pasteles [...]
Israel: No, porque en un momento espero que los niños resuelvan primero esto (señala lo que está en el pintarrón) y me imagino [...], será porque se van a enfocar mucho a la oferta (señala los suspiros 3x2). Después les planteo [...] voy a revisar qué tan conveniente es decirles dónde le conviene más si son tres; primero quiero dejarlo a ver si los niños se enfocan en esto, porque me imagino que eso va a pasar, se van a enfocar primero en la oferta, más que en el valor unitario. Después si quieren comprar uno, dónde le conviene comprar y si quisiera comprar más de tres dónde le conviene hacer esta compra.
E: De acuerdo a los procedimientos que cree van a realizar los niños, por cuál pastelería se van a inclinar, cuál cree es la respuesta que le van a dar.
Israel: Como dijimos se invita a toda la población y no sólo ocupamos un pastel, ocupamos más pasteles, la respuesta que creo los niños van a poner es de la pastelería suspiros.
E: ¿Cuál es la respuesta correcta?
Israel: Suspiros.

Israel señala que no definirá la cantidad de pasteles que van a comprar pues la situación que plantea, señala que está invitada toda la población, es decir, asistirán muchas personas, por lo que espera que los alumnos identifiquen este tipo de situaciones para llevarlos a esa reflexión. Así, identificamos:

Israel_KFLM_IC_2. Conoce que los alumnos pueden identificar la pastelería que se puede seleccionar en función de la cantidad de pasteles que deseen comprar (1, 3 o más).

Finalmente identificamos de manera concreta los procedimientos que Israel cree los alumnos pueden emplear para dar respuesta a la pregunta de la tarea de apertura [ES1_Israel_KoT_P_1. 209-213]:

E: ¿Cuál sería el procedimiento que señalaría como el correcto para que los niños definan cuál pastelería les conviene más?
PFI: Aquí estamos hablando de dos formas de llegar a los resultados [...] la forma convencional en que espero que lo resuelvan sería multiplicando ($180 \times 2 = 360$; $150 \times 3 = 450$; $180 \times 3 = 540 - 180 = 360$).

De acuerdo con la información proporcionada por Israel identificamos:

Israel_KoT_P_1. Conoce que los alumnos emplean la multiplicación para identificar en cuál pastelería conviene realizar la compra: $180 \times 2 = 360$; $150 \times 3 = 450$; $180 \times 3 = 540 - 180 = 360$.

La Planificación, las Entrevistas Semiestructuradas y el documento de Análisis de la Práctica nos permitieron identificar evidencias e indicios de conocimiento de Israel en relación con el conocimiento matemático y didáctico, en mayor medida de éste último. Enseguida presentamos fragmentos de la Videograbación de la clase 1 donde confirmamos algunos conocimientos de Israel y encontramos nuevas evidencias que nos permiten delimitarlos [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1.1. 1-35]:

Israel: El día de hoy vamos a estar trabajando una clase de matemáticas. Para comenzar la actividad les voy a leer un pequeño cuento, este cuento se llama “La gran fiesta” /Israel lo escribe en el pizarrón/ ¿Cómo se llama?
Aos: La gran fiesta
Israel: Bien, ¿de qué se imaginan que va a tratar? Levante la mano quien me quiera decir
Aa: Pues de una fiesta.
Ao: De que [...] van a hacer una fiesta con muchos invitados.
Ao: Una fiesta muy grande.
Israel: ¿Alguien más?
Ao: Una fiesta con globos.
Ao: Una fiesta muy importante.
Israel: Muy bien. Vamos a comenzar y pongan mucha atención, dijimos que el título de este cuento es “la gran fiesta” y dice así [...] “Había una vez en un reino muy muy lejano una ciudad donde reinaba la justicia, no había criminal que se le escapara al gran guardián del planeta [...]” ¿Saben quién es el capitán guardián? Se trata del capitán de las tres “erre”. ¿Si se acuerdan del capitán de las tres “erre”?
Aos: No
/Israel escribe en el pintarrón: “3 R”/
Israel: En ciencias naturales lo vieron, ¿se acuerdan?
A. Aos: No
Israel: La primera es reciclar /escribe en el pintarrón reciclar/ Las tres erre son para cuidar las cosas que tenemos; la primera es reciclar, reusar y reducir /Escribe en el pintarrón reusar y reducir. Los alumnos leen lo que Israel escribe en el pintarrón. Israel continúa con la lectura del cuento/ Dice “él junto con su pandilla de guardianes defienden la limpieza del planeta y pelean en contra de la contaminación y de cualquiera que se atreva a tirar basura y a desperdiciar los recursos que la naturaleza nos da. Un día el alcalde de Cuidad “limpieza” organizó una fiesta para el capitán “R” por su gran trabajo y por mantener la cuidad fuera de basura y de los desperdicios”. Entonces, ¿para quién iba a ser la fiesta?
Ao: Para el capitán R.
Israel: ¿Cómo se llama ese capitán?
Ao: Capitán tres erre.
Israel: Enseguida el cuento dice: “Toda la cuidad estaba invitada a este gran evento, en especial los niños ya que querían celebrar juntos con su gran súper héroe. Después de la fiesta habría un baile en el que tocarían “Los 5 de Zacatecas””; ¿quieren ir?
Aos: Sí.

En el fragmento anterior Israel emplea el cuento como estrategia didáctica para plantear la tarea de apertura y durante la clase emite algunas preguntas con diferentes propósitos:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_1.1. Conoce que el cuento como estrategia didáctica para trabajar una tarea de apertura incluye preguntas al inicio, en el desarrollo y al concluir la lectura del mismo. Así, las preguntas iniciales se relacionan con la aplicación de algunas estrategias de lectura como el muestro y la predicción, durante la lectura emite preguntas que pretenden rescatar los conocimientos que abordaron en otras asignaturas, así como preguntas literales sobre el contenido. Al final de la lectura, agrega preguntas que atienden a aspectos criterios. Con el inicio del cuento en la tarea de apertura, Israel plantea el contexto para el planteamiento del problema; situación que presenta como escenario para que evidencie nuevos conocimientos didácticos [V1_Israel_KMT_R_2. 36-62]:

Israel: “El Alcalde de la ciudad prometió a todos sus invitados un gran festín en donde habría ricos antojitos y de postres habría pasteles de todos los sabores, también prometió traer toda una feria con juegos y puestos para que todos se divirtieran. El Alcalde al quererse lucir para festejar a lo grande al Capitán “R” no se dio cuenta que había gastado mucho dinero en contratar al grupo, en el mobiliario, en la feria y en la comida, así que tendría que economizar en los postres [...]” ¿Qué iba a haber de postres?

Aos: Pasteles.

Israel: Entonces se dio cuenta que había gastado mucho y le quedaba poquito dinero, así que tuvo que ir a preguntar los precios a las pastelerías del pueblo para ver en dónde le convenía comprarlos, pero, ¿qué creen?

Aa: ¿Qué?

Israel: Que este presidente es un poquito distraído con las cuentas, /mientras Israel habla toma un papel bond/ entonces no se le dan mucho las matemáticas, pero yo sé que a ustedes sí, ¿verdad?

Aos: Sí.

Israel: Entonces dijimos que él fue a varias pastelerías para ver dónde le convenía hacer la compra, miren /Borra el pizarrón/ ahorita les voy a presentar a cuáles pastelerías fue y les voy a entregar esta hojita en blanco /Un alumno ayuda a entregar las hojas en blanco/

Israel: ¿Qué vamos a hacer?

/Israel pega el papel bond en el pizarrón mientras el alumno reparte las hojas de trabajo/

Israel: Muy bien, entonces dijimos que el Alcalde había visitado varias pastelerías. A ver mijo, ¿me dices el nombre de una pastelería?

Ao: Pastelería Lupita.

Israel: A ver aquí están en frente mira /Señala al pizarrón/ una era [...] ¿Cómo se llamaba?

Ao: Pastelería suspiros.

Israel: ¿Y cuál otra?

Aos: La casa de los pasteles.

En el planteamiento del problema anterior Israel destaca la necesidad que tiene el Alcalde de comprar los postres de la gran fiesta en dos pastelerías; cada una con sus respectivos precios que presenta en una lámina que pega en el pintarrón [ES2_Israel_KMT_R_2. 217-236]:

E: Comenta que después del cuento les puso una lámina para las dos pastelerías suspiros y la casa de los pasteles, por qué presentarlo en una lámina, si lo pudo haber hecho de forma oral [...]

Israel: Al hacerlo en una lámina [...] ese es un material un poco más visual, donde lo pueden ver representado. En este momento, los niños están en una etapa de operaciones concretas porque ocupan, incluso hasta los 11 años, resolver problemas con representaciones de dibujos. Si se los hubiera puesto oral muchos niños no alcanzaban a hacer esas reflexiones cognitivas. Al hacerlo en forma visual ellos están viendo la oferta, los pasteles, se hace un poco más llamativo [...]

E: En diferentes momentos usted se apoya en el empleo de estas láminas, ¿a qué atiende el manejo de estos materiales?

Israel: Lo utilizo en diferentes momentos porque las láminas me sirvieron como mi material didáctico y adecuado para trabajar este tipo de situaciones, lo cual, me favoreció que los niños lo pudieran observar de forma general y algunos en sus hojas de trabajo. Por lo tanto, me parece es parte importante este material didáctico para que sea más visual, que lo puedan ver [...]

E: ¿Qué pasa si no hay información visual?

Israel: Me parece que quizá los niños no alcanzarían a hacer esa reflexión cognitiva de lo que les estoy hablando, así al hablar de un pastel ellos están viendo [...] por ejemplo, si es de dardos ellos los están observando [...]

A partir de lo anterior, Israel evidencia conocimiento del empleo de la lámina como un recurso, es decir:

Israel_KMT_R_2. Conoce que al contener información visual sobre algunos datos de un problema, una lámina se puede emplear como un recurso y/o material didáctico que contribuye a la reflexión cognitiva de los niños.

Después de que Israel pega la lámina en el pintarrón, solicita a los alumnos que resuelvan la tarea de manera individual, tal como observamos [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 63-95]:

Israel: Muy bien, miren aquí en su hojita me van a poner en cuál pastelería creen que le conviene más al Alcance hacer la compra, por eso dice ¿en dónde los compro? ¿En dónde va a comprar el Alcalde?

Ao: En la casa de los pasteles.

Israel: A ver, ustedes aquí en su hojita escriban en cuál pastelería creen que le sale más barato compara al alcalde. Fíjense lo que dice aquí, ¿cuánto cuesta un pastel en la pastelería suspiros?

Aos: \$180

Israel: ¿Y en la casa de los pasteles?

Aos: \$150

Israel: Pero aquí ven esto /señala en la lámina del pintarrón/ ¿Qué dice aquí?

Aa: 3x2

Israel: Dice que hay una oferta, ¿qué significa 3x2?

Ao: Que compras dos y que te regalan uno.

Israel: Que compra 3 y paga solamente cuántos [...]

Aos: Dos.

Israel: Entonces, escriban aquí en su hojita en cuál pastelería creen que le conviene al alcalde comprar los pasteles.

/Los alumnos contestan el problema, Israel pasa entre las mesas/

Israel: ¿Tienen alguna duda niños?

Aos: No.

Aas: Ya terminamos.

Israel: ¿Si pusieron por qué 3x2? /Israel se acerca con algunos alumnos/ ¿Si hicieron las cuentas y todo? ¿Qué tal si salen más caros? /Algunos alumnos continúan trabajando/

Pero no nada más le pongan el nombre de la pastelería. También póngale el por qué, ¿por qué le conviene hacer la compra en esa pastelería?

Israel: Quien haya terminado levanta la mano /Israel se acerca con una niña/ Pero aquí, ¿por qué?

Aa: Porque es más barato

Israel: ¿Y estás segura que es más barato?

Aa: Sí

Israel: ¿Sí? Bueno ahorita vamos a revisar.

Ao: Ya terminé.

En el fragmento anterior, identificamos que Israel cuestiona los niños sobre la información que se maneja en el problema para posteriormente solicitar que contesten de manera individual la actividad. En términos generales:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. Conoce que previo al trabajo individual donde se resuelven tareas sobre la comparación de razones es conveniente que los niños identifiquen los datos del problema, además de que traten de dar respuestas a preguntas abiertas y cerradas sobre el mismo. Enseguida presentamos un fragmento de Entrevista Semiestructurada donde Israel expone el papel del trabajo en equipo en la tarea de apertura [ES2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 237-245]:

E: En la entrevista pasada usted nos explicó cómo esperaba que los niños resolvieran esta actividad de rescate de conocimientos previos, pero aquí existe algo muy interesante, primero les plantea la actividad de manera individual. Pega la lámina en el pintarrón, pero les entrega a los alumnos unas hojas para que lo resuelvan y posteriormente lo trabajan de manera grupal, ¿por qué trabajarlo de manera individual?

Israel: Aquí me interesaba tener el conocimiento que ellos poseían sobre situaciones de ofertas, la promoción de tres por dos [...] quería ver la forma en que cada uno asimilaba el problema. Por lo tanto, considero que el rescate de conocimientos previos debe ser individual, no tanto en equipo.

Israel expresa la importancia del trabajo individual al inicio de la resolución de un problema, como en este caso la comparación de razones, radica en que los alumnos plasman los conocimientos que tienen al respecto. A continuación presentamos las interacciones que se establecen entre maestro y alumnos cuando se valida la resolución de las tareas de apertura [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 96-123]:

Israel: Ahorita que terminaron todos, levanten su mano quiénes dicen que en la casa de los pasteles sale más barato hacer la compra /Israel comienza a contar/ Entonces tenemos que aquí son 10, y de este lado, en la pastelería suspiros quién dice, 1,2, 3, 4,5 [...] 16. Vamos a ver quién tienen la razón, ¿quién quiere a pasar a explicar por qué?

Ao: Yo /El alumno pasa al frente/

Israel: Dile a tus compañeros en cuál pastelería crees tú que sale más barato hacer la compra.

Ao: Ésta /Señala la pastelería suspiros/

Israel: ¿Por qué?

Ao: Porque da el 3x2 y si le suman los 30 de cada uno se regala en 130

Israel: ¿Cuánto costaría cada pastel?

Ao: En 180

Israel: ¿Y si compra los tres?

Ao: En 180

Israel: ¿En 180?

Ao: Sí.

/Se escuchan murmullos diciendo que no/

Israel: Vamos a ver, él dice que en esta pastelería, pero quién dijo que en la casa de los pasteles, a ver ven mijo, ¿por qué crees que le sale más barato hacer la compra?

/El alumno pasa al pintarrón/

Israel: Nos va a convencer a los demás, a tus compañeritos. ¿Por qué a la casa de los pasteles?

Ao: Porque aquí tiene 180 /Señala la pastelería suspiros/ y acá 150 /Señala la casa de los pasteles/

Israel: ¿Y ahí 150?

Ao: Sí.

Israel: Entonces, ¿dónde dices que sale más barato?

Ao: Aquí /señala la casa de los pasteles/

Como observamos en este fragmento, en un primer momento Israel cuestiona a los alumnos sobre las posibles respuestas y su justificación. Así, definimos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. Conoce al inicio de la validación de los procedimientos empleados por los alumnos para resolver un problema de comparación de razones es conveniente identificar las posibles respuestas que dieron al problema, así como su justificación, sin que exista una intervención directa del docente.

Desde el fragmento anterior, destacamos Israel cuestiona sobre las posibles respuestas de los alumnos al problema de comparación de razones, sin definir la cantidad exacta que se va a comprar. En otros fragmentos plantea la existencia de la misma cantidad de pasteles que se quiere comprar: tres. Revisemos [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_4. 136-163]:

Israel: 360, y si comprara la misma cantidad en las dos pastelerías, supongamos que aquí está comprando tres pasteles ¿y va a pagar?
Aa: 360
Israel: Y si comprara la misma cantidad de tres pasteles en la casa de los pasteles, ¿cuánto pagaría?
Aos: 450
Israel: 450 ¿seguros?
Aos: Sí /la alumna escribe en el pintarrón $150+150+150=450$ /
Israel: Entonces, ¿en dónde le convienen comprar los pasteles?
Aos: En la pastelería suspiros
Israel: Dicen que en la casa de los pasteles si compro tres, ¿cuánto pagaría?
Aos: 450
Israel: ¿Por cuántos pasteles?
Aos: Por tres
Israel: Y si compro tres en la pastelería suspiros, ¿cuánto pagaría?
Aos: 360
Israel: Entonces si compra la misma cantidad de pasteles en la dos tiendas ¿Cuánto se estaría ahorrando? ¿A ver quién quiere pasar? A ver pasa /señala una alumna/
Ao: 140
Mo ¿140? Vamos a ver cuánto se ahorraría
/La alumna pasa al pizarrón y realiza una resta de $450-360=90$ /
Israel: ¿Cuándo?
Aa: 90
Israel: Entonces dijimos que se ahorraría ¿Cuánto?
Aos: 90
Israel: Noventa. Entonces, ¿en cuál pastelería le convendría hacer la compra?, porque dijimos que iba a haber muchos invitados
Aos: En la pastelería suspiros.

En el fragmento anterior, Israel interviene de manera directa en las justificaciones que brindan los alumnos en función de las respuestas que dieron al problema. Por lo tanto:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_4. Conoce el planteamiento de algunas variables en las tareas, por ejemplo, definir la cantidad de pasteles que se desean comprar contribuye a que los niños identifiquen cuándo una respuesta puede ser correcta y cuándo al aplicarla a otras situaciones puede ser incorrecta. El indicador de este conocimiento se enriquece con otro fragmento de Videograbación de Israel [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_4. 164-168]:

Israel: Y si nada más quisiera comprar un pastel, supongamos que nada más quiere uno para él, ¿en dónde le conviene hacer esa compra?
Aos: En la casa de los pasteles.
Israel: Y si quiere hacer una compra de más de tres, ¿en dónde le convendría?
Aos: En la pastelería suspiros.

Las respuestas que proporcionan los alumnos a Israel en el fragmento anterior, dan cuenta de que una respuesta correcta no siempre es la misma en diferentes situaciones. Con este concluimos con la identificación de evidencias e indicios de conocimiento matemático y didáctica de Israel en el diseño y ejecución de tareas de apertura. En los siguientes apartados sintetizamos los indicadores de conocimiento de Israel a través de una figura seguida de su descripción.

V.3.2.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Tareas de apertura.

El apartado “Tareas de apertura el conocimiento de Israel se convierte en oportunidades de investigación del *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) y algunas posibles relaciones con otros conocimientos del dominio matemático y didáctico del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en este caso, en formación inicial de primaria: Israel.

Al inicio del apartado identificamos que Israel conoce el diseño de tareas de apertura para trabajar la comparación de razones (**KMT_ES_T_TA_E_1**) en un grupo de quinto grado de educación primaria. Al avanzar en la recuperación de información de las Entrevistas Semiestructuradas, Videograbaciones y del documento de Análisis de la Práctica, Israel evidencia conocimiento de la Teoría de las Situaciones Didácticas como teoría de enseñanza que permite enseñar el significado razón en su doble manifestación (**KMT_T_1**). Además, conoce la preparación del medio (rescate de conocimientos previos, organización del grupo y materiales) como un elemento de la Teoría de las Situaciones Didácticas que permite enseñar la noción de razón (**KMT_T_2**).

En la tarea de apertura diseñada por Israel identificamos que conoce el cuento como una estrategia didáctica donde se puede preguntar, escuchar, comentar e inventar para contextualizar el planteamiento de problemas (**KMT_ES_T_TA_E_1**). De manera concreta, conoce que el cuento es una estrategia didáctica que permite trabajar una tarea de apertura. Así, las preguntas iniciales se relacionan con la aplicación de algunas estrategias de lectura como el muestro y la predicción, durante la lectura emite preguntas que pretenden rescatar los conocimientos que abordaron en otras asignaturas, así como preguntas literales sobre el contenido. Al final de la lectura, se pueden agregar preguntas que atienden a aspectos criterios (KMT_ES_T_TA_E_1.1.). De igual manera, reconoce que puede incorporar problemas sugeridos en el libro de texto del alumno de matemáticas de quinto grado y que se puede cambiar el contexto de las situaciones que se plantean (**KMT_R_1**).

Respecto a los procedimientos que pueden emplear los alumnos para resolver la tarea de apertura, Israel conoce que pueden recurrir a la multiplicación para sacar el pago que deben realizar por la compra de tres pasteles, a partir del valor unitario (multiplicar 3 por 150 que es igual a 450). En el caso de la pastelería “suspiros” que tiene la oferta “te llevas 3 y pagas 2”, existen dos procedimientos que pueden usar: multiplicar el valor unitario por dos (180 por 2 que es igual a 360) o multiplicarlo por tres y restar uno (180 por 3 que es igual a 540 y restarle 180 para que obtenga 360) (**KFLM_IC_1**). Además, conoce que los alumnos pueden obtener la diferencia de lo que pagan en las dos pastelerías

(*KFLM_IC_1.1.*), sin dejar de lado que los niños pueden identificar la pastelería que se puede seleccionar como respuesta correcta. De manera concreta, Israel conoce que los alumnos pueden emplear la multiplicación para identificar en cuál pastelería conviene realizar la compra: $180 \times 2 = 360$; $150 \times 3 = 450$; $180 \times 3 = 540 - 180 = 360$ (**KoT_P_1**).

Durante la ejecución de las tareas de apertura, Israel identifica se puede apoyar en materiales como una lámina, pues al contener información visual sobre algunos datos del problema (tarea de apertura) se puede emplear como recurso y/o material didáctico que contribuye a la reflexión cognitiva de los niños (**KMT_R_2**). ¿Qué sigue después de la presentación de la tarea de apertura en la clase? Israel plantea como estrategia la resolución individual del problema, pero previo a ello, pide a los niños que identifiquen los datos del problema y que traten de dar respuestas a preguntas abiertas y cerradas sobre el mismo (**KMT_ES_T_TA_E_2**). Enseguida cree necesario conocer que al inicio de la validación de los procedimientos empleados por los alumnos es conveniente identificar las posibles respuestas que dieron al problema así como su justificación sin que exista una intervención directa del docente (**KMT_ES_T_TA_E_3**). Por otra parte, destaca la importancia de conocer el planteamiento de algunas variables en las tareas, por ejemplo, definir la cantidad de pasteles que se desean comprar, contribuye a que los niños identifiquen cuándo una respuesta puede ser correcta y cuándo, al aplicarla a otras situaciones puede ser incorrecta (**KMT_ES_T_TA_E_4**).

V.3.3. Tareas del desarrollo de la Planificación

En los siguientes apartados presentamos las tareas de desarrollo de Israel: subtareas 3.1, 3.2 y 3.3, mismas que se encuentran en su Planificación a través de diferentes hojas de trabajo.

V.3.4. Subtareas 3.1. Conocimiento especializado de Israel.

En la Planificación de Israel destaca un apartado denominado “Desarrollo”; en éste presenta algunas subtareas con diferentes objetivos de aprendizaje en relación con la enseñanza de la noción de razón, enseguida presentamos la primera parte de este apartado [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. 67-76]:

DESARROLLO

Consigna:

Organizados en equipos, resuelvan los problemas que parecen en la hoja de trabajo 1. Tienen 20 minutos para realizar la actividad y se podrá hacer uso de la calculadora.

Devolución de la consigna:

Preguntar a un alumno sobre qué es lo que van a realizar, con el propósito de que no existan dudas con base en la consigna.

Hoja de trabajo 1

1. Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas sin realizar operaciones. Justifiquen sus respuestas.

En el fragmento anterior, Israel integra indicadores como desarrollo, consigna, devolución de la consigna e indicaciones correspondientes a la hoja de trabajo 1; conceptos que se convirtieron en oportunidades para investigar su conocimiento especializado. Enseguida presentamos un fragmento del documento de Análisis de la Práctica donde identifica el desarrollo como el segundo momento de la planificación [AP_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1.1. 280-282; 358-365]:

En un segundo momento de la situación didáctica encontramos tres actividades, las cuales introducen nuevos conocimientos científico-técnicos para relacionarlos con los identificados y recuperados en las actividades de apertura [...]

La fase de desarrollo es la más larga de la situación, en ella se desarrollan actividades para el aprendizaje y para la evaluación que van ayudando a la construcción del aprendizaje. En este momento de la situación didáctica, hay que prever estrategias que faciliten un aprendizaje con sentido (actividad de interrogación y aplicación, etc.), que fomenten el desarrollo de la capacidad de autonomía (actividades de decisión y auto regularización), la interrelación social (grupos cooperativos de trabajo y contratos colectivos entre otros) y la inserción social crítica como: actividades de análisis y juicio crítico.

Como se puede apreciar, existe relación entre las tareas de apertura y las tareas de desarrollo; éstas últimas retoman lo que se rescató en las primeras y propician que el alumno avance en la adquisición de conocimientos. En las tareas de desarrollo Israel ubica tres subtareas principales, en las que identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce las tareas de desarrollo como aquellas que introducen conocimientos científicos-técnicos a través de actividades de aprendizaje y evaluación que favorecen la construcción del mismo.

Israel_KMT_ES_T_TA_E_1.1. Conoce que en las tareas de desarrollo se debe prever el trabajo de actividades de interrogación, aplicación, decisión, autorregulación, trabajo en equipo, análisis y juicio crítico.

La consigna es el segundo concepto que Israel destaca al inicio de las tareas de desarrollo. Al respecto, durante la Entrevista Semiestructurada 1, expresa [ES1_ Israel_KMT_T_1. 225-245]:

E: Pasamos a otra parte de su situación didáctica, nos dijo que no es un plan de clase cualquiera, es una situación didáctica [...] existe un apartado donde viene una consigna, ¿qué entendemos por consigna?, ¿por qué plantear consigna?

Israel: Una consigna son las indicaciones que se le dan a los alumnos sobre lo que van a resolver, lleva ciertos indicadores; el primer indicador, tiene que ser clara y objetiva porque de aquí parte lo que los niños van a trabajar, por ejemplo, van a hacer esto [...] no debe haber dudas en una parte de la consigna, algo que los confunda, por lo cual debe de ser clara sobre lo que los niños van a realizar. Dentro de la consigna va el tiempo y algunas restricciones, por ejemplo, tienen de media hora a cuarenta minutos para realizar la actividad. ¿Por qué es importante definir el tiempo? Por lo general, cuando a los niños los reunimos en equipo, tienen muchos temas para socializar y el darles un límite de tiempo es como estarlos apresurando un poquito para tenerlos más concentrados en el trabajo y, ¿por qué las restricciones? porque es como en todo, hay ciertas reglas, se les puede decir a los niños que en los equipos no pueden estar platicando con otros equipos, nadie debe de estar parado, se puede o no se puede usar calculadora, entre otro tipo de restricciones; todo eso encierra el concepto de consigna, que básicamente son las indicaciones que el maestro da a los alumnos.

E: En esta situación didáctica, ¿cuál es la consigna que usted pretende dar en este momento?

Israel: La consigna que pretendo dar en este momento es organizar a los niños en equipos y resolver los siguientes problemas sin realizar operaciones y que justifiquen su respuesta.

A partir del fragmento de entrevista anterior, identificamos que:

Israel_KMT_T_1. Conoce la consigna como las indicaciones que se dan a los alumnos en función de las actividades que van a realizar, las cuales deben ser claras, objetivas, definen el tiempo y algunas otras restricciones, por ejemplo, lo que se puede usar o no se puede usar. Israel evidencia conocimiento de lo que implica una consigna en la clase de matemáticas donde favorece la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación y, además, la acompaña de una consigna que pretende dar en su clase. Durante la Entrevista Semiestructurada 2, Israel amplía algunos conocimientos que posee en relación con las características de la consigna [ES2_ Israel_KMT_T_1. 246-263]:

E: En la planificación y la entrevista pasada usted hace uso de otros conceptos como la consigna. Señala que en la primera consigna se hacen ciertas restricciones y nos proporciona algunos ejemplos. En este caso, nos gustaría profundizar en qué es una restricción.

Israel: Una restricción es como un límite, qué es lo que puedo o no puedo hacer. En este caso, me parece que es importante dejar claras las reglas del juego en cuanto al tiempo, lo que tienen permitido hacer dentro del equipo y lo que no se puede hacer fuera que, en este caso, no pararse a platicar con otros equipos para ver el proceso interno del mismo equipo.

E: Respecto al uso de la calculadora aquí se especifica [...]

Israel: Sí, por ejemplo, qué materiales puedo utilizar y cuáles no; es parte de la restricción.

E: ¿Por qué permitirles usar la calculadora?

Israel: Me parece importante lo del uso de la calculadora hasta cierto punto, por ejemplo, en los primeros grados de educación primaria no sería algo adecuado, debido a que se hace sin calculadora para ver las operaciones que realizan, ver la forma en que resuelven operaciones. En cambio, en quinto grado, consideré que era adecuado utilizar calculadora debido a las cantidades que se utilizaban y eso facilitaría hacer el trabajo un poco más ágil porque eran varias actividades, no lo consideré negativo debido a que los niños ya conocen la forma en cómo se resuelve una operación [...]

En este fragmento, Israel enfatiza en las restricciones como una característica de la consigna que define lo que se puede hacer y lo que no. Así, se manifiestan algunos conocimientos sobre el uso de la calculadora en el grupo de quinto grado, es decir:

Israel_KMT_R_1. Conoce que el uso de la calculadora está ligado al grado en que se encuentran los alumnos en la educación primaria; en los primeros grados se debe limitar su uso, mientras que en quinto se puede aprovechar para optimizar el tiempo de las actividades, pues conocen cómo se resuelve una operación.

Un elemento más que aparece en el apartado de las tareas de desarrollo es la devolución de la consigna. Durante la Entrevista Semiestructurada 1 Israel señala [ES1_ Israel_KMT_T_2. 246-259]:

E: Enseguida hay otro concepto que es devolución de la consigna, ¿qué se entiende por devolución de la consigna?

Israel: Este concepto lo trabajo como una estrategia porque como mencionaba, la consigna tiene que ser clara, pero la mayoría de las veces hay niños que no la llegan a procesar, por ejemplo, se les dice van a resolver esta hoja de trabajo, pero con esa frase pueden existir algunas dudas en los alumnos y se queden callados, aunque nunca falta el alumno que está distraído y que no escuchó. Entonces se hace esta devolución de la consigna, por ejemplo, a alguien que esté distraído y le digo explícame lo que vamos a hacer e igual puede explicarlo y me quedo más seguro de que si entendieron lo que les dije y entendieron la actividad, así como los demás. En términos generales, la devolución de la consigna ayuda a que el docente vea si los niños comprendieron lo que les quiso dar a entender porque a veces puede que esté muy subjetivo o muy abstracto lo que uno les plantea. Así, permite ver si captaron la idea de lo que van a hacer y cómo lo van a resolver; lo anterior, evita estar uno por uno dándoles las indicaciones.

En el fragmento descrito, Israel se refiere a la devolución de la consigna como una estrategia que emplea el maestro para identificar si el alumno comprendió en qué consiste la actividad. En la Entrevista Semiestructurada 2, Israel evidencia conocimiento de la devolución de la consigna y su relación con la Teoría de las Situaciones Didácticas [ES2_ Israel_KMT_T_2. 264-286]:

E: Después de eso usted habla de una devolución de la consigna, ¿cómo definiría usted la devolución de la consigna?

Israel: La devolución de la consigna consiste en devolver el planteamiento que se hizo. La consigna es como mi situación, el conflicto, el problema o lo que se va a resolver. Entonces el devolverlo es porque a veces quedan muchas dudas y quizá los niños no están concentrados en lo que va a decir el profesor o por lo mismo, de que son tímidos y quedó alguna duda en cuanto al trabajo y no se animan a decir. Por lo tanto, la devolución de la consigna es como una estrategia para que el maestro se dé cuenta si quedó claro lo que se va a realizar, la indicación de la actividad que se va a realizar y aclarar dudas si hubiera.

E: ¿Qué pasa si no se aclara?

Israel: Aun así devolviendo la consigna quedan dudas, pero si no se aclara la consigna quedan más [...]

E: Esto de consigna, devolución de la consigna, de dónde viene porque lo plantea en su planificación.

Israel: Lo manejé porque Brousseau maneja la consigna. La devolución de la consigna la identifiqué a partir del trabajo con mis compañeros del grupo, al ver los elementos que contemplaban en sus planificaciones y cuando vi que algunos incluyen en una situación didáctica devolución de la consigna fue un elemento que decidí retomar. Creo que lo importante de estas situaciones es que no son algo herméticas, sino que da la oportunidad para que amplíes [...]

En este fragmento anterior, Israel enriquece los conocimientos que posee sobre la devolución de la consigna, de manera concreta identificamos que:

Israel_KMT_T_2. Conoce que la consigna plantea el problema a resolver. De ahí que concibe la devolución de la consigna como un elemento de la Teoría de las Situaciones Didácticas que se convierte en una estrategia para identificar si los alumnos comprendieron las indicaciones de las actividades que van a realizar.

En el último apartado del fragmento de la planificación, que corresponde a las tareas de desarrollo, Israel expone: la realización de la hoja de trabajo 1 se dará a partir de la resolución de algunos problemas en equipo. Al respecto, durante la Entrevista Semiestructurada 1, Israel asocia la situación anterior con otro momento de la clase [ES1_ Israel_KMT_T_3. 260-268]:

E: Enseguida viene otro apartado que denomina fase de acción dentro de su situación didáctica, ¿cuál es el propósito de esta fase de acción?

Israel: Esta fase de acción es como su nombre lo dice [...] donde los alumnos empiezan a hacer conjeturas mentales empiezan a trabajar, crear analogías. Aquí ponemos en acción todo lo que los alumnos quizá saben, es decir, un conocimiento lo ponemos en marcha a trabajar; todos los momentos son importantes, todos llevan su esencia, pero la fase de acción me imagino es de las más importantes porque es donde se realiza todo el trabajo, aquí es donde los alumnos empiezan a realizar sus hojas de trabajo, a resolver con sus propias formas de trabajo, sus operaciones y se queda en sus procedimientos.

En este fragmento, Israel asocia la resolución de las hojas de trabajo con un momento de la fase de acción en el que los alumnos ponen en juego sus conocimientos para resolver las actividades que se proponen; lo cual se convierte en un indicio de conocimiento de Israel sobre la fase de acción. Además, identificamos que ocupan un lugar esencial “las hojas de trabajo” ya que en la Entrevista Semiestructurada 2 señala [ES2_ Israel_KMT_R_2. 337-347]:

E: Después de esto usted plantea que va a abordar tres hojas de trabajo, ¿cuál es el papel de las hojas de trabajo?

Israel: Es un material impreso, aunque pudimos hacer que escribieran cada uno de los planteamientos, pero el uso de las hojas de trabajo, además de ahorrar tiempo, contenía algunos ejemplos donde se relacionaba con lo que decíamos del lenguaje icónico que ayudaba a hacer esto un poco más visual.

E: En las hojas de trabajo vemos tablas, recuadros [...] ¿cuál fue el papel que desempeñaron esas tablas y esos recuadros?

Israel: Estas tablas permitieron que los niños vieran representado el problema y que se pudieran apoyar para realizar algunos procedimientos o algunas anotaciones. Respecto a los cuadros me parece que es una forma de organizar la información.

Por lo anterior identificamos que:

Israel_KMT_R_2. Conoce que las hojas de trabajo son un material impreso que incluye planteamientos a través de un lenguaje icónico, se apoya en tablas que representan la información de los problemas y cuadros que permiten organizar la información.

En términos generales, Israel destaca en la fase de acción el inicio en la resolución de las hojas de trabajo, lo cual describe un poco más en la Entrevista Semiestructurada 2 [ES2_ Israel_KMT_T_3. 285-303]:

E: En la fase de acción usted comenta que es donde les va a decir que contesten la hoja de trabajo uno, que aquí los niños van a empezar a realizar conjeturas mentales, analogías, ¿por qué decir eso?

Israel: Lo pongo porque en la fase de acción es la parte en el trabajo, las comparaciones y las analogías [...] es lo que me parece los niños hicieron dentro de sus equipos, de argumentar el procedimiento, hacer analogías, comentarios de comparaciones, validar y argumentar dentro del mismo. Entonces me parece que como es la fase de acción, es la fase donde ellos están respondiendo, hacen este tipo de conjeturas mentales y ponen en juego los saberes que tienen.

E: Mencione una analogía que cree pudieron haber hecho en la hoja de trabajo uno en la fase de acción.

Israel: En la actividad de los pasteles pienso que la analogía que pudieron haber realizado sería también la de las ofertas, algo que ya habían visto o algo relacionado quizás en su vida cotidiana [...]

E: ¿Y en el caso de conjeturas mentales? [...]

Israel: Es como ese pensamiento que los niños ya traen [...] ese aprendizaje [...] la conjetura mental es como la representación que los niños hacen del problema, pero de manera mental, algo cognitivo [...] es la forma en que ellos abstraen el problema y lo visualizan internamente.

En el fragmento anterior, Israel evidencia conocimiento de la fase de acción como aquella en la que los alumnos comienzan a resolver las hojas de trabajo, donde realizan conjeturas mentales y analogías. Respecto a las analogías, las identifica como aquellas que permiten a los alumnos asociar la situación de los pasteles con las ofertas. En relación con las conjeturas mentales se refiere a las diferentes formas de representación de un problema.

En la Entrevista Semiestructurada 2, Israel destaca el papel que desempeña el profesor durante la fase de acción, tal como expresamos enseguida [ES2_ Israel_KMT_T_3. 304-315]:

E: Después de esto, en la fase de acción usted señala que el maestro sólo interviene para solucionar dudas y lo hace a través de devoluciones. Entonces, ¿cómo tendrían que ser esas devoluciones?
Israel: Esas devoluciones tendrían que ser en forma de pregunta, incluso es algo que estaba leyendo el otro día [...] del uso de la mayéutica, que es como dar nacimiento a la respuesta, dice que la respuesta está en cada uno de nosotros, que no es simplemente llevarla a flote, a la luz [...] entonces esa forma de devolución es devolver en forma de pregunta “¿cómo lo vas hacer?” para que el niño vaya dando esa respuesta o al menos orientar a la respuesta [...] como una especie de orientación. Por lo tanto, creo que no deben de ser preguntas cerradas porque al responder es un “sí o no” [...] y, quizá es lo que los niños esperan, saber si están bien, esa aprobación, por lo cual, creo deben ser preguntas abiertas y, a la vez, ambiguas y generales, no dar la respuesta.

Aquí, Israel señala el papel del maestro en la fase de acción se traduce en realizar devoluciones, las cuales asocia con emitir preguntas abiertas para que al alumno acepte la responsabilidad de resolver las situaciones que se le plantean. Además, ubica las interacciones entre maestro y alumno en un tipo de situación [ES2_ Israel_KMT_T_3. 324-336]:

E: Enseguida usted planteaba que hacer este tipo de devoluciones en la fase de acción, ayuda para poner a los niños en situación adidáctica. Recuerda qué implica una situación adidáctica.
Israel: Brousseau señala que una situación adidáctica es la situación donde no interviene el maestro, sino que se delega la responsabilidad al mismo niño, y a la mejor puede que sea algo erróneo, pero dice del error se aprende.
E: Entonces dentro de la situación didáctica usted busca que existan algunos momentos de situación adidáctica para que el niño sea el protagonista. En términos generales, ¿cuál es el papel del maestro en la fase de acción?
Israel: En la fase de acción el papel del maestro es orientar o al menos ser guía para algunos niños, porque existen algunos que si se meten en su papel de resolver el conflicto ellos solos, pero hay otros que ocupan un poco más de orientación. Por lo tanto, pienso que en la fase de acción el papel del maestro es de orientar.

Como podemos apreciar en el fragmento anterior, Israel evidencia conocimiento de una situación adidáctica como aquella que se puede favorecer en la fase de acción cuando el maestro realiza devoluciones con el propósito de orientar la resolución de las actividades. Para avanzar con la presentación de evidencias de conocimiento de Israel en relación con la fase de acción, rescatamos un fragmento del documento de Análisis de la Práctica [AP_ Israel_KMT_T_3. 78-81]:

Fase de acción: Constituye el proceso por el cual el alumno va a aprender por el método de resolución de problema. El alumno debe actuar sobre un medio (material o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícito, donde los alumnos comienzan a realizar la actividad.

Aquí, de manera concreta Israel evidencia conocimiento de que en la fase de acción el papel del alumno es resolver un problema al interactuar con un medio donde pondrá en juego sus conocimientos, es decir, se inicia en la resolución de una o algunas actividades (tareas) que se proponen, como el caso de las que incluye en la hoja de trabajo 1, entonces:

Israel_KMT_T_3. Conoce que la fase de acción emerge en el contexto de la Teoría de las Situaciones Didácticas cuando los alumnos comienzan a resolver los problemas que se les plantean a partir de sus conocimientos previos, mismos que les permiten realizar analogías o conjeturas mentales. Así, el papel del maestro consiste en realizar devoluciones a través de preguntas que orientan al alumno para que se haga responsable de las tareas que se le proponen; lo anterior, los ubica en una situación adidáctica. Enseguida presentamos las tareas sobre la noción de razón incluidas en la hoja de trabajo que fueron propuestas por Israel [P_ Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1. 74-136]

Figura 18. Subtareas 3.1. (Primera parte)

1. Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas sin realizar operaciones. Justifiquen sus respuestas.

En la mesa A se reparte un pastel entre 5 invitados, en la mesa B se reparten 2 pasteles entre 7 invitados ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado?

¿Por qué?

Carlos y sus amigos fueron a saludar al Capitán "R" y él los invitó a un puesto de la feria que había contratado el Alcalde, encontraron dos puestos de "truenas globos" con diferentes promociones, en el puesto de Don Benjamín tiene que tronar 6 globos con 8 dardos para ganarse un regalo, en el puesto de Don Octavio tiene que tronar 7 globos con 10 dardos para ganarse el regalo. ¿En cuál de los dos puestos le conviene jugar para llevarse un regalo?

Justifiquen su respuesta

Carlos quiso participar en el puesto de Don Benjamín. La tabla de abajo muestra los registros de tiros que hizo Carlos en 3 rondas.

Juego 1								
Juego 2								
Juego 3								



Globos tronados



Tiros fallidos

¿Creen que en algún juego ganó un premio?

Figura 19. Subtareas 3.1. (Segunda parte)

Carlos quiso participar en el puesto de Don Benjamín. La tabla de abajo muestra los registros de tiros que hizo Carlos en 3 rondas.

Juego 1								
Juego 2								
Juego 3								



Globos tronados



Tiros fallidos

¿Creen que en algún juego ganó un premio?

Piensa cómo comparar los resultados y discute tus ideas con tus compañeros.



Puedo comparar el número de tiros en los que tronó un globo en cada juego



¿Será suficiente? El número de globos que tronó en cada juego es diferente

Haz un registro de el número de tiros en los que tronó el globo y el número de lanzamientos.

	Juego 1	Juego 2	Juego 3
Globos tronados			
Número de lanzamientos			

Expresa como fracciones los datos de la tabla anterior, usa el número de globos tronados como numerador y el número del total de lanzamientos como denominador.

Juego 1

Juego 2

Juego 3

Ahora convierte las fracciones anteriores en números decimales.

Juego 1

Juego 2

Juego 3

En la hoja de trabajo 1 (subtareas 3.1.), Israel incluye diferentes subtareas (3.1.1., 3.1.2. y 3.1.3.), que más adelante nos permitirán identificar y caracterizar de mejor manera el conocimiento matemático y didáctico de Israel en el contexto del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. A continuación presentamos el apartado de la fase de acción que Israel incluye en su Planificación [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1. 137-145]:

Fase de acción:

- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 1, los alumnos comienzan a realizar conjeturas mentales, pensando en cuáles promociones serán las idóneas según la pregunta planteada. Cada equipo debe hacerse cargo del problema planteado haciendo sus propias analogías y asimilando la actividad de acuerdo a lo que ya conoce y a lo que se realizó en la valoración de conocimientos previos.
- El maestro sólo interviene para solucionar dudas en algún aspecto, pero lo hace mediante devoluciones para poner al alumno en situación a-didáctica.
- En esta misma fase se contestarán las preguntas que se incluyeron en la hoja de trabajo 1.

En este fragmento, Israel evidencia conocimiento de la fase de acción, define el papel del maestro y del alumno así como su ubicación en una situación adidáctica. Enseguida presentamos cada una de las subtareas presentes en la hoja de trabajo 1, así como sus conocimientos sobre las posibles formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático (KFLM_IC). Comenzamos con la subtarea 3.1.1. Comparación de razones [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1.1. 75-81]:

En la mesa A se reparte un pastel entre 5 invitados, en la mesa B se reparten 2 pasteles entre 7 invitados, ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado?

¿Por qué?

En la subtarea 3.1.1., identificamos que Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1.1., conoce una tarea para establecer una comparación de razones parte-parte, es decir, pastel-invitados, en dos mesas: A y B; cuyo propósito es identificar en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado. Enseguida, Israel expresa cuáles son los posibles procedimientos que los alumnos pueden emplear para resolver esta subtarea [ES1_Israel_KFLM_IC_1. 269-284]:

E: Usted señala ahorita es donde los alumnos hacen sus hojas de trabajo. Vamos a empezar a trabajar con las actividades que vienen en la hoja de trabajo uno con el propósito de rescatar cada una de las actividades que se plantean para primero tratar de precisar cómo las pueden resolver los alumnos. Entonces comenzamos con el punto uno de esta hoja de trabajo donde dice “en la mesa A se reparte un pastel entre cinco invitados” y luego “en la mesa B se reparten dos pasteles entre siete invitados”; la pregunta es, ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado? Usted quiere que los niños contesten esa pregunta y agreguen ¿por qué?; poniéndonos en el lugar del alumno, cuando lean ellos este cuestionamiento, ¿cuál cree que es el procedimiento que van a emplear para dar respuesta a la pregunta?

Israel: La intención y bien lo señala la consigna es que en este primer momento ellos no realicen ninguna operación, sino simplemente vean una comparación sin conocer bien su resultado, por ejemplo, en un primer momento que se reparte un pastel (escribe $1/5$), a lo mejor los niños van a ver así de que un pastel para cinco personas (dibuja un círculo) y, aquí, por ejemplo, no estarían realizando ninguna operación, sólo la partición (divide el círculo en cinco partes iguales), no lo podemos considerar como una operación y, la otra nos dice que son dos pasteles para siete personas (dibuja dos círculos en el pintarrón).

En la subtarea 3.1.1., donde se comparan razones (parte-parte), identificamos que:

Israel_KFLM_IC_1. Conoce que los alumnos pueden recurrir a procedimientos ligados con la representación de la fracción como parte-todo en contextos continuos para representar la cantidad de pastel que le corresponde a cada persona en la mesa A y en la mesa B. Cuando Israel expresa los posibles procedimientos que los alumnos pueden emplear para resolver la subtarea 3.1.1. que implica la comparación de razones, evidencia conocimiento de algunas dificultades que pueden tener los alumnos [ES1_ Israel_KFLM_FD_1. 285-298]:

E: Espera que los niños pueden dividir los pasteles, pero no hacer ninguna operación, ¿cree usted que los niños van a hacer eso que usted está haciendo ahorita?

Israel: Sí, donde creo que van a tener más problema es en esta parte (señala los dos pasteles), pueden decir, ¿cómo voy a dividir dos pasteles entre siete personas? es donde los niños quizá no lo van a poder expresar en forma gráfica, pero sí creo que lo puedan expresar en una forma mental, ya después lo vamos a resolver con operación.

E: En forma mental, ¿qué cree ellos pensarían?

Israel: Por ejemplo, a lo mejor podemos juntar estos dos pasteles en un pastel más grande, pero se batallaría porque quizá no tenemos cuánto pesa cada uno o una cierta medida de referencia de cada pastel. Entonces aquí no creo que los puedan juntar en un pastel más grande y dividirlo entre siete porque lo podemos desconocer un poquito, pero, por ejemplo, los niños mentalmente pueden hacer lo siguiente: si dos pasteles le tocan a siete personas, entonces un pastel para cuántas personas estaría. Aquí podemos decir que para tres punto cinco (escribe 3.5), aunque sería relativo porque no le podemos dar a media persona.

En el fragmento anterior, identificamos que **Israel_KFLM_FD_1.**, conoce que los alumnos pueden tener dificultades para representar de manera figural (fracción parte-todo en contextos continuos) la situación de la mesa B: 2 pasteles se reparten entre 7 invitados, ya que aumenta la cantidad de pasteles (2) y el número de invitados (7), además, el primero es número par y el segundo no, lo cual les plantea dificultades al dividir, pues obtienen 3.5 personas. También, **Israel_KFLM_FD_1.1.**, conoce una posible representación gráfica de los pasteles de la mesa B implicaría que los alumnos conocieran el tamaño y peso de los dos pasteles para juntarlos y dividirlo entre los siete invitados; dicha información no se tiene. Enseguida Israel externa la posible respuesta que van a brindar los alumnos, después de haber enfrentado las dificultades anteriores [ES1_ Israel_KFLM_IC_2. 299-316]:

E: ¿Cuál cree que sería la respuesta de los niños?

Israel: La respuesta de los niños es que en la mesa B les toca más pastel.

E: ¿Espera que los niños pongan esa respuesta?

Israel: Sí, aunque también me imagino también van a existir otros que digan aquí (señala $1/5$ y el círculo dividido en cinco partes iguales). Entonces aquí es donde quiero después exista una confrontación.

E: Respecto a los que digan que es la mesa B, ¿cómo cree que ellos van a justificar su respuesta?

Israel: Pueden decir porque en la mesa B les tocan dos pasteles a siete personas. En este caso, lo que creo que van a hacer los niños es como le mencionaba, un pastel le tocaría a tres punto cinco personas o podemos ir por el lado contrario, por ejemplo, tenemos dos resultados, a lo mejor (agrega $2/7$) los niños van a decir en este porque es un pastel y son menos personas (encierra $1/5$) que en este (señala $2/7$) y otros quizá van a decir son más pasteles y son menos personas. Entonces quizá los niños pueden hacer una comparación del doble de ésta (señala $1/5$), si un pastel le toca a cinco personas, dos pasteles a cuántas personas le tocaría (escribe $2/10$); veremos que aquí es la misma cantidad de pasteles (señala $2/7$), pero en éste son menos personas; son algunas consideraciones que creo los niños pueden hacer porque estuvimos, ahora sí que trabajando, si fuera en uno, dos y tres.

Como observamos en el fragmento anterior, Israel evidencia conocimiento de las diferentes respuestas que pueden emplear los alumnos para justificar que en la mesa B toca mayor cantidad de pastel a los invitados, aunque cita que algunos alumnos pueden hacer referencia a la mesa A. De ahí que identificamos que:

Israel_KFLM_IC_2. Conoce que los alumnos pueden identificar cuándo una cantidad es más grande (fracción de pastel) en función del valor del numerador (1 y 2) o el denominador (5 y 7). Así, algunos alumnos se pueden orientar por el denominador menor para decir que son menos personas y les toca mayor cantidad de pastel ($1/5$) y otros quizá pueden decir hay más pasteles ($2/7$). Como podemos observar, el valor de las cantidades que se manejan en cada mesa (A y B) juega un papel fundamental en las justificaciones de los alumnos. Sin embargo:

Israel_KFLM_IC_3. Conoce que algunos alumnos pueden duplicar la cantidad de pasteles y personas de la mesa A para tener la misma cantidad de pastel en la mesa A y B: $2/10$ y $2/7$. De ahí que señalen en la mesa B les toca mayor cantidad de pastel porque sólo se van a repartir dos pasteles entre siete personas y no entre diez.

Posteriormente tratamos de indagar sobre los conocimientos de Israel en relación con las posibles fortalezas que pueden tener los alumnos al resolver el tipo de tareas anteriores [ES1_Israel_KFLM_FD_2. 324-333]:

E: En relación con esto, ¿cuáles fortalezas o habilidades pudieran tener los niños?
Israel: Se les facilitaría en ésta, partir (señala el círculo de $\frac{1}{5}$); esto porque desde muy temprana edad acostumbramos a los niños a trabajar las fracciones de un entero que se parte, que está dividido en partes iguales. Entonces esa es una habilidad que los niños ya tienen de un entero o una unidad partirla, dividirla en partes iguales; otra habilidad que espero de ellos sería, por ejemplo, no irnos a simplificar fracciones, sino a lo doble, si fueran tres o si fueran cuatro; esas creo que son habilidades que los niños han estado trabajando o algunas fortalezas que creo tienen, así como el empleo de su imaginación, por ejemplo [...] como mencionaba una de las competencias y el enfoque es que los niños aprendan a resolver problemas de diferente forma [...]

En función de lo que expresa Israel en el fragmento anterior, identificamos que:

Israel_KMT_FD_2. Conoce que una fortaleza de los alumnos para resolver una tarea de comparación de razones (parte-parte), es la representación de fracciones como parte-todo en contextos continuos.

Israel_KMT_FD_3. Conoce que una fortaleza de algunos alumnos para resolver una tarea de comparación de razones (parte-parte), es la obtención de fracciones equivalentes asociadas a algunas relaciones de proporcionalidad directa.

Israel_KMT_FD_4. Conoce que los alumnos pueden recurrir al empleo de diferentes procedimientos para resolver un problema, en este caso de comparación de razones (parte-parte).

A continuación presentamos el fragmento de planificación que corresponde a la subtarea 3.1.2. [82-90]
Comparación de razones:

Carlos y sus amigos fueron a saludar al Capitán “R” y él los invitó a un puesto de la feria que había contratado el Alcalde. Encontraron dos puestos de “truenas globos” con diferentes promociones. En el puesto de Don Benjamín tiene que tronar 6 globos con 8 dardos para ganarse un regalo, en el puesto de Don Octavio tiene que tronar 7 globos con 10 dardos para ganarse el regalo. ¿En cuál de los dos puestos le conviene jugar para llevarse un regalo?

Justifiquen su respuesta

En la subtarea anterior, Israel continúa con el trabajo de comparación de razones, en este caso, el contexto del problema tiene que ver con dos puestos de una feria (Don Benjamín y Don Octavio) y el propósito es determinar en cuál de los dos puestos le conviene jugar para llevarse un regalo si se sabe que en el primer puesto debes tronar 6 globos con 8 dardos y en el segundo 7 globos con 10 dardos. En la Entrevista Semiestructurada 1, cuestionamos a Israel sobre los posibles procedimientos que pueden emplear los alumnos para resolver esta tarea [ES1_ Israel_KFLM_IC_4. 348-363]:

Israel: Lo que pueden hacer los niños [...] quizá estaríamos trabajando también un poquito de probabilidad en relación con los globos que se truenan y el regalo [...] Bueno, aquí lo que tratamos de ver es que, es igual, lo podemos trabajar mediante las ofertas, en este caso, es una promoción, dice que hay dos puestos iguales, los puestos son los mismos de truenan globos, pero hay una ligera diferencia, por ejemplo, aquí ya no estamos comparando por cada ocho tiros de dan seis, aquí estamos trabajando la razón mediante dos actividades (señala 6 y 8; 7 y 10); es donde mencionaba que a veces la razón la podemos trabajar mediante esto, que sería el valor o una comparación entre dos cantidades; igual se trabaja la simple comparación, pero aquí vamos un poquito más complejo hacia ese contraste. Entonces, por ejemplo, aquí creo tratamos que los niños vean un primer concepto de razón que sería la razón como [...] bueno, uno de los conceptos que encontré decía que es el cociente de dos cantidades y el cociente lo entiendo como el resultado en forma de número o en decimal. Entonces qué es lo que pretendo aquí, en cuál hay más probabilidad, pues a lo mejor aquí espero que los niños hagan es lo resuelvan mediante una división o mediante un cociente (escribe $6/8$ y $7/10$); para esto, en las siguientes actividades lo vamos a ver punto por punto.

En un primer momento, en esta subtarea 3.1.2. trabaja la razón, la comparación de razones como en el caso de la subtarea 3.1.1., pero en un contexto de puestos de globos; sin embargo, Israel señala que no se trabaja la razón sólo como comparación de cantidades, sino que la asocia con el cociente de dos cantidades que se puede traducir en un número entero o decimal. Por lo tanto:

Israel_KFLM_IC_4. Conoce que los alumnos pueden determinar en cuál puesto hay mayor probabilidad de ganar utilizando la división de $6/8$ y $7/10$. Por otra parte, Israel expresa que los alumnos pueden emplear otros procedimientos en función del valor de las cantidades que se manejan en la subtarea [ES1_ Israel_KFLM_IC_5. 363-367]:

Aquí vemos que por cada ocho tiros deben de tronarse seis globos, quiere decir que se le pueden escapar dos, puede fallar dos, pero aquí los niños van a decir que a lo mejor este está bien (señala 6 y 8) porque son sólo ocho tiros, puedes fallar dos y son menos tiros, luego van a decir no, pero en este puedes fallar tres, pero lo que vemos también es que son más dardos.

Como podemos observar en el fragmento anterior, **Israel_KFLM_IC_5.**, conoce que algunos alumnos pueden elegir el puesto de Don Benjamín porque tiene cantidades menores, aunque otros alumnos pueden mencionar que les conviene el puesto de Don Octavio porque tienen más oportunidad de fallar (3) y se les otorgan más dardos (10). A pesar de que Israel expresa que los alumnos pueden recurrir al valor de las cantidades para definir en cuál puesto les conviene jugar, manifiesta que espera que los alumnos empleen lo siguiente [ES1_ Israel_KFLM_IC_4.1. 367-376]:

Básicamente espero que los niños comparen lo que es su cociente, por ejemplo, que vean al dividir esto (señala $7/10$) tiene lo que es punto siete (lo escribe .7) y aquí es donde va a estar lo interesante, el dividir este (señala $6/8$) es punto setenta y cinco (lo escribe en el pintarrón .75). Aquí dijimos al observar estas dos cantidades (señala .70 y .75) nos tenemos que fijar en cuál es mayor, a lo mejor la probabilidad de que se gane ese premio, por ejemplo, aquí la probabilidad de que se gane este premio puede ser [...] quizá podemos entrar un poquito a lo que es el porcentaje a un setenta y cinco por ciento (escribe en el pintarrón 75%) y, en el otro, la probabilidad es de un setenta por ciento (escribe 70%). Entonces, en cuál de los dos le conviene jugar, en cuál tiene mayor posibilidad de ganar y sería en el puesto de Don Benjamín.

Con base en este fragmento, podemos decir que: **Israel_KFLM_IC_4.1.**, conoce que al realizar la división indicada de $7/10$, los alumnos van a obtener .7 y al dividir $6/8$.75, lo cual les permitirá identificar la cantidad mayor para asociarla con la probabilidad que se ganen ese premio. También *Israel_KoT_R_1.*, conoce los cocientes obtenidos al realizar la división indicada de $6/8$ y $7/10$ se pueden expresar en porcentajes: 75% y 70%. Así, pueden seleccionar el puesto de Don Benjamín.

Durante la Entrevista Semiestructurada 2 preguntamos a Israel por qué señala que la tarea 3.1.2. se puede relacionar con la probabilidad y el porcentaje [ES2_ Israel_KSM_C_1. 407-425]:

E: La actividad de trueno globos, dice se puede relacionar con la probabilidad porque pueden tirar ocho dardos y tronar seis globos o lanzar diez dardos y tronar siete globos para obtener un regalo; lo anterior, para el caso de los dos puestos de Don Octavio y Don Benjamín. Usted señala que dos octavos es igual a punto setenta y cinco, que es el setenta y cinco por ciento; siete décimos es igual a punto siete, que es el setenta por ciento. Por lo tanto, señalaba que este tema se puede relacionar con la probabilidad y los porcentajes. Además de esto que nos había comentado, ¿por qué cree la actividad se relaciona con la probabilidad?

Israel: Considero que se puede relacionar con la probabilidad debido a que nos maneja estas cantidades: “son ocho dardos y debes de tronar seis globos y en el otro puesto son diez dardos y debes de tronar siete globos para tener un regalo”. Entonces aquí a simple vista se puede manejar ese concepto de probabilidad, de donde es más probable que la persona que vaya a jugar en estos puestos obtenga un regalo.

E: Respecto a la relación con el porcentaje qué nos puede comentar.

Israel: En el porcentaje decimos que vemos en números ese por ciento de dónde es más probable que gane. En el caso de Don Benjamín el setenta y cinco por ciento representa lo que puede acertar, en el otro es un setenta por ciento, si nos vamos por los porcentajes, en el primer puesto es mayor un cinco por ciento, por lo tanto, es más probable que tenga un premio en el primer puesto.

En función de lo anterior podemos decir que *Israel_KSM_C_1.*, conoce que durante la resolución de tareas de comparación de razones, los alumnos pueden recurrir a la probabilidad al comparar en cuál puesto es más probable obtengan un regalo. Además, el porcentaje puede ser una forma para representar el cociente de las divisiones indicadas que realizaron en función de cada puesto, lo que les permitirá determinar en el puesto de Don Benjamín existen mayores posibilidades de obtener un premio. En otro fragmento de la Entrevista Smiestructurada 1, Israel comenta que los alumnos pueden recurrir a otro procedimiento para obtener en cuál puesto les conviene jugar, sin embargo, cree se pueden encontrar con algunas dificultades [ES1_ Israel_KFLM_FD_5. 377-384]:

E: ¿Cree que los niños van a elegir el puesto de don Benjamín?

Israel: Me imagino que aquí va a existir esa confusión, quizá de que aquí son más (señala 7/10), pero también te dan más libertad para que falles, y pueden decir en el otro, aquí son menos que este (señala 6/8), pero tienes menos tiros que fallar. Entonces quiero que comparen estas cantidades, a lo mejor aquí va a estar un poquito más sencillo (señala 7/10); si nos metemos al valor unitario, de que por cada cuatro tiros pueden tronar tres (escribe $\frac{3}{4}$) o tienen un margen de error para fallar y, sin embargo, ésta (señala 7/10) no la podemos hacer más pequeña.

Como podemos observar, Israel evidencia conocimiento de la representación de razones en fracciones: 6/8 y 7/10; cree que los alumnos pueden emplear la simplificación de fracciones en ambas cantidades para determinar con facilidad, en cuál puesto les conviene jugar para obtener un premio; sin embargo, *Israel_KFLM_FD_5.*, conoce que los alumnos pueden tener algunas dificultades al simplificar las

fracciones $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{10}$, que se puede lograr en la primera ($\frac{3}{4}$), pero en la segunda no. Cabe hacer mención que al conocimiento que Israel evidencia de la simplificación de fracciones le antecede la noción de buscar el valor unitario, aunque dados los valores de las razones no se puede llegar al mismo. Enseguida presentamos los conocimientos de Israel respecto de las justificaciones de los alumnos para elegir en cual puesto conviene jugar [ES1_ Israel_KFLM_IC_6. 377-384]:

E: ¿Cómo van a justificar su respuesta los elijan el puesto de Octavio?
 Israel: En ese momento no creo que los niños lo resuelvan en forma de operación, sino más de comparación, a lo mejor lo van a escribir es que son más tiros y puedes fallar tres [...] porque también se les va a indicar cuántos puedes fallar y cuántos tienes que anotar. Entonces puede que los niños al argumentar su respuesta señalen que en el puesto de Don Octavio porque puedes fallar más veces que en el de Benjamín.
 E: Los que elijan Benjamín qué escribirían para justificar su respuesta.
 Israel: Los niños van a escribir este que son menos dardos que en este (señala $\frac{7}{10}$), por ejemplo, son menos dardos que con Octavio y, por lo tanto, tiene más probabilidad de ganar, por lo mismo de que son menos cantidad, posteriormente trabajando la siguiente actividad se dará pauta a trabajar esto.

En función de lo anterior, observamos que **Israel_KFLM_IC_6.**, conoce que los alumnos justificarán sus respuestas a través de la comparación de las razones; en el caso del puesto de Don Octavio pueden ganar porque pueden fallar más, mientras que en el puesto de Don Benjamín argumentarán que son menos dardos y tienen mayor probabilidad de ganar más premios. A partir del contexto de la subtask anterior, Israel desprende otra subtask donde continúa con la comparación de razones 3.1.3. [91-103]:

Carlos quiso participar en el puesto de Don Benjamín. La tabla de abajo muestra los registros de tiros que hizo Carlos en 3 rondas.

Juego 1								
Juego 2								
Juego 3								



Globos tronados



Tiros fallidos

¿Creen que en algún juego ganó un premio?

En ésta, es evidente que **Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1.3.**, conoce una tarea para trabajar la comparación de razones en contextos parte-todo. En la subtarea 3.1.3. Israel retoma el puesto de Don Benjamín para plantear globos tronados y fallidos en tres juegos, la interrogante que agrega consiste en que los alumnos identifiquen si en algún juego ganó un premio. Durante la Entrevista Semiestructurada 2 preguntamos a Israel a qué se debe la elección del caso de Don Benjamín en la tarea anterior [ES2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. 450-454]:

E: En la siguiente actividad de la hoja de trabajo uno, usted retoma el caso de Don Benjamín donde señala que el total de lanzamientos son ocho, ¿a qué se debe esa decisión?

Israel: Tomé el caso de Don Benjamín porque anteriormente iba a hacer el puesto en el que vamos a tener mayor porcentaje para obtener un premio, es decir, iba a ser el correcto, por lo cual, lo quise retomar porque quizá en este tenemos más probabilidad.

La subtarea 3.1.3. comparación de razones (parte-todo) de la hoja de trabajo 1 se ubica en el contexto del puesto de Don Benjamín; donde, según Israel es el puesto hay mayor probabilidad de obtener un premio. Enseguida presentamos los posibles procedimientos que Israel menciona los alumnos pueden emplear para dar respuesta a la pregunta [ES1_Israel_KFLM_IC_7. 409-428]:

E: Después de esto viene “Carlos quiso participar en el puesto de Don Benjamín la tabla de abajo muestra los registros de tiros que hizo Carlos en tres rondas”, está la tablita. La pregunta, ¿cree que en algún juego ganó un premio? Para contestar nuevamente esta pregunta que harían los niños.

Israel: Primero tratamos que realicen una lectura de la información que nos proporciona la tabla y trabajamos el manejo de la información. Lo primero que los niños observarían es de cuál puesto estamos hablando, ¿de Benjamín o de Octavio? Sería en el de Don Benjamín (escribe Benjamín) y aquí dice que te da ocho dardos (escribe 8 dardos) y con estos ocho dardos tienes que tronar un mínimo de seis globos [...] Aparecen algunas acotaciones o simbologías, que las rueditas son los globos tronados y las equis los tiros fallados. Entonces él tiene tres rondas: juego uno, juego dos y juegos tres (escribe juego 1, juego 2 y juego 3). En el juego uno espero observen, que hagan esa comparación, cuántos de los dardos que tiró tronaron un globo y, por ejemplo, aquí van a contar uno, dos, tres, cuatro, cinco, son cinco (escribe 5-8), a lo mejor no lo van a hacer así simplemente los cinco. En el segundo, uno, dos, tres, cuatro de los seis globos que debería de tronar (escribe 4) y, en el último, son uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (escribe 6); quiero que al tratar de trabajar esta información los niños vean si cumple el propósito para ganarse el premio, que es tronar un mínimo de seis globos. ¿Creen que en algún momento los tres juegos si ganó? Espero que los niños mencionen que en el juego tres porque como sí tronó los seis globos y era lo que se debería de tronar, si ganó el premio.

De acuerdo con la información que proporciona Israel, el planteamiento de cada tarea determina las interacciones que el alumno establece con el objeto de conocimiento. De ahí que identificamos que:

Israel_KFLM_IC_7. Conoce que los alumnos se pueden iniciar en la lectura de la información que se presenta en el tabla a través de la simbología que se muestra sobre los globos tronados y tiros fallidos. Así, los alumnos identifican que en el puesto de Don Benjamín por cada ocho dardos que tires debes tronar seis globos para obtener un premio.

Israel_KFLM_IC_7.1. Conoce que los alumnos contarán los globos tronados y fallidos en cada uno de los tres juegos para compararlos e identificar dónde Carlos tronó seis globos y se ganó un premio: juego tres. Durante la Entrevista Semiestructurada 2 Israel expresa la relación de la subtaska anterior con el eje manejo de la información [ES2_ Israel_KMLS_EA_1. 455-463]:

E: En la entrevista pasada, usted señala que los alumnos realizarán la lectura de información que proporciona la tabla que acompaña esta actividad y agrega que, por lo tanto, cree esta actividad se relaciona con otro eje que es el tratamiento de la información. Al inicio de la entrevista nos había explicado algo de esta relación, ahora qué nos pudiera comentar, cómo se justifica esta relación con el eje de tratamiento de la información.

Israel: El eje tratamiento de la información nos habla de lo que son tablas y gráficas, es quizá a partir de la observación y el análisis de las tablas hacer una serie de cuestionamientos de información que podamos extraer de esto, es decir, para nosotros dar respuesta a ciertos planteamientos.

A partir de esto identificamos que **Israel_KMLS_EA_1.**, conoce que la lectura de tablas y gráficas permite recuperar la información y dar respuesta a diferentes planteamientos relativos al manejo de la información incluido en el programa de matemáticas de educación primaria. En el diseño de la subtaska 3.1.3. encontramos tres tipos de subtaskas: a, b y c; donde Israel continúa el trabajo con las razones en contextos de parte-todo, pero agrega algunas variables. A continuación presentamos la primera parte de la subtaska 3.1.3. a) [104-118]:

Piensa cómo comparar los resultados y discute tus ideas con tus compañeros.



Puedo comparar el número de tiros en los que tronó un globo en cada juego



¿Será suficiente?
El número de globos que tronó en cada juego es diferente

Haz un registro de el número de tiros en los que tronó el globo y el número de lanzamientos.

	Juego 1	Juego 2	Juego 3
Globos tronados			
Número de lanzamientos			

A partir de los diálogos de una conversación entre un niño y una niña, Israel inicia a los alumnos en la comparación de los globos tronados y el número de lanzamientos en los tres juegos realizados en el puesto de Don Benjamín; datos que registran en una tabla. Para obtener más información, durante la Entrevista Semiestructurada 1 preguntamos a Israel cuál es el propósito de dicha conversación, a lo cual expresa [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. 442-457]:

Israel: Muy bien, un niño dice “puedo comparar el número de tiros que tronó en cada juego”. Por ejemplo, el número de tiros que tronó habíamos dicho eran cinco, cuatro y seis (escribe en el pintarrón 5, 4 y 6), pero, ¿cuál es el propósito de la conversación de la muchacha? Bueno aquí tronamos cinco globos, aquí cuatro y aquí seis (señala las cantidades en el pintarrón), la muchacha le dice: ¿ya con eso es suficiente? Le quiere decir como que todavía le falta algo, le dice “el número de globos que tronó en cada juego es diferente”, por ejemplo, dijimos que cuatro es diferente a cinco y a seis y que sólo en uno de los juegos había ganado [...] Con esto a qué voy, que solamente con expresar el número de los globos que tronó no basta. Entonces, ¿de qué otra forma lo podemos hacer? Para esto es a lo que vamos a llamar como un número de referencia a lo que vamos a tener, ¿cuál es ahora si el número de referencia? Como lo habíamos mencionado es los globos tronados con el número total de lanzamientos o de dardos (lo escribe en el pintarrón) que complementa ahora si esta información, por ejemplo, tronó cinco globos, ¿de cuántos lanzamientos?, pues de ocho; tronó cuatro globos, ¿de cuántos lanzamientos?, de los mismos, igual tronó seis globos, ¿de cuántos lanzamientos?, de los mismos (escribe 8). Entonces aquí es a lo mejor donde vamos a entrar más a lo que es la razón a comparar estas cantidades.

En el fragmento de entrevista anterior, identificamos que **Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1.3 a).**, conoce tareas para trabajar la comparación de razones (parte-todo) a través de su presentación en una tabla. Además, **Israel_KMT_ES_T_TA_E_1.**, conoce que una conversación entre los niños es una estrategia para que los alumnos avancen en la identificación del número de referencia en el puesto de Don

Benjamín, es decir, el total de lanzamientos en cada juego. Así, avanzan en la comparación de razones en contextos de parte-todo. Durante la Entrevista Semiestructurada 2, preguntamos a Israel sobre la elección de la conversación de los alumnos en la subtask anterior [ES2_ Israel_KMT_R_3. 472-474]:

E: Los globos donde están las conversaciones, ¿usted los diseñó o de dónde los retomó?

Israel: Tomé como referente el contenido de los libros japoneses que vimos en la normal, de aquí extraje las figuras, pero sólo cambié algo de los diálogos.

En el fragmento anterior, Israel comenta que retoma esas figuras del contenido de libros japoneses porque conocía al respecto sobre estos materiales [ES2_ Israel_KMT_R_3.131-136]:

E: En términos generales, ¿qué contienen estos libros japoneses y qué tomó?

Israel: Estos libros tienen mucho lenguaje visual, es decir, tienen más cosas atractivas, incluso hay diálogos entre niños donde explican procedimientos. Me parece que la forma en que vienen organizadas las actividades es una forma un poco más atractiva, parte de un planteamiento y enseguida permite que tú compruebes si es verdad lo que estás argumentando en la parte de arriba [...] como una comprobación.

Así, observamos que **Israel_KMT_R_3.**, conoce algunos libros japoneses como materiales de apoyo en el diseño de tareas para la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

En la subtask 3.1.3. a) Israel acompaña la conversación de los alumnos con una tabla, por ello le cuestionamos sobre la indicación que se encuentra en la tabla [ES1_Israel_KMT_R_4. 458-464]:

E: En la tabla dice haz un registro del número de tiros en los que tronó el globo y el número de lanzamientos [...]

Israel: Aquí la intención es que los alumnos reflexionen, en este caso que (señala lo que está escrito en el pintarrón), no solamente con escribir los números de globos tronados es suficiente, sino que tenemos también que especificar el número de lanzamientos. De todos modos está la conversación para que discutan, pero con la tabla se les hace una forma más sencilla de lo que les hacía falta.

En este fragmento Israel evidencia conocimiento de que la tabla empleada permite que los alumnos visualicen y representen la razón en un contexto de parte-todo: número de globos tronados y número de lanzamientos.

Durante la Entrevista Semiestructurada 2 Israel agrega evidencias de conocimiento del uso de la tabla en esta subtaska [ES2_Israel_ KMT_R_4. 475-485]:

E: Enseguida viene una tabla que tiene relación con la tabla que trabaja en la página anterior, donde viene cada uno de los lanzamientos realizados en el puesto de Don Benjamín, así como el total de globos tronados. ¿Cuál es la función de esta segunda tabla que se relaciona con el puesto de Don Benjamín?

Israel: En la siguiente tabla lo que queremos es llegar a una forma de representar esta información, porque viene para cada juego el número de globos tronados y el número de lanzamientos que se realizaron; esto para llegar a representar una fracción, quizá aquí faltó un poco analizar lo que es la razón. La razón se vio de forma más verbal, pero igual, por ejemplo, en la primera que eran cinco de ocho, a partir de ocho lanzamientos tronaron cinco globos. Por lo tanto, el propósito de esta tabla es que hicieran el conteo de lanzamientos de dardos y los globos tronados en cada juego.

Con base en lo anterior, observamos que:

Israel_KMT_R_4. Conoce la tabla como un recurso para iniciar a los alumnos en la representación numérica de comparaciones de razones (parte-todo) que, posteriormente los puede llevar a representar una fracción.

Israel_KoT_R_2. Conoce la representación verbal de la razón (parte-todo): cinco de ocho.

La información que Israel presenta en la subtaska 3.1.3 a) tiene como propósito los alumnos se inicien en la representación numérica de razones (parte-todo). En la subtaska 3.1.3. b) avanza en su representación numérica a través de otras expresiones [P_KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. b) 119-128]:

Expresa como fracciones los datos de la tabla anterior, usa el número de globos tronados como numerador y el número del total de lanzamientos como denominador.

Juego 1	Juego 2	Juego 3

En el fragmento de la subtarea 3.1.3. b), Israel propicia que los alumnos representen cada juego con una fracción donde asocian el número de globos tronados con el numerador y el total de lanzamientos con el denominador, para ello se apoya en una serie de cuadros. Durante la Entrevista Semiestructurada 2 preguntamos a Israel sobre la función de la tarea anterior [ES2_ KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. b) 486-497]:

E: Después usted señala que les va a pedir a los niños representen en fracciones el contenido de la tabla anterior, es decir, que pongan el número de globos tronados como el numerador y el denominador es el total de lanzamientos, ¿por qué realizar esta aclaración a los niños si sólo les pudo haber planteado “ubica las cantidades en los siguientes recuadros”?

Israel: Por ejemplo, el número de lanzamientos corresponde al denominador, debido a que es el total de [...] en este caso, nuestro total de las oportunidades para lanzar que serían ocho y, los globos tronados el numerador, sería la cantidad de globos que se pudieran tronar, aunque bien pudieran haber sido ocho, pero en este caso, no fueron; lo anterior lo hago con la intención de plantearlo en una fracción. Si lo vemos desde una fracción el denominador corresponde al total de partes en que está dividida esa pieza y el numerador corresponde a las partes que estoy tomando.

Por lo anterior, definimos que, Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. b) Conoce tareas para representar razones en contextos de parte-todo en fracciones.

Israel_KoT_R_3. Conoce las razones (parte-todo) se pueden representar en fracciones, donde el numerador corresponde a la parte que se toma (globos tronados) y el denominador al total de lanzamientos. Durante la Entrevista Semiestructurada 1, Israel evidencia conocimientos de lo anterior [ES1_ Israel_KFLM_FD_6. 473-482]:

E: Enseguida dice “expresa con fracciones los datos de la tabla anterior, usa el número de globos tronados como numerador y el número del total de lanzamientos como denominador”, ¿por qué hacer esta aclaración?

Israel: Porque quizá van a existir niños que al decir “expresa lo siguiente como una fracción”, puede ser que digan “pues el ocho son ocho lanzamientos pero tronó cinco (escribe $8/5$)” a lo mejor puede ser que los niños digan “es lo mismo que decir son cinco lanzamientos y tronó ocho (escribe $5/8$)”; por eso, se hace esa aclaración de que el número de globos tronados vaya en el numerador y el total de lanzamientos en el denominador para que en la siguiente actividad no exista ningún inconveniente en hacerlo de forma de cociente.

En el fragmento anterior, identificamos que:

Israel_KFLM_FD_6. Conoce las posibles dificultades de los alumnos respecto a la ubicación y el significado del numerador y denominador en una fracción ya que podrían colocar el numerador en lugar del denominador y viceversa y, asociar la parte con el todo y viceversa.

Israel_KFLM_FD_6.1. Conoce la ubicación correcta del numerador y denominador en una fracción disminuye las dificultades de los alumnos al representarla en forma de cociente.

El contexto de la subtarea 3.1.3 b) propicia Israel evidencie conocimientos de la fracción, tal como expresamos en el siguiente fragmento de entrevista [ES1_ Israel_KoT_D_1. 483-496]:

E: Usted aquí señala “expresa con fracciones”, ¿es lo mismo una fracción que una razón? o ¿qué entendemos por fracción?

Israel: Una fracción lo entiendo como un número que se expresa de la forma siguiente a sobre b (escribe en el pintarrón a/b), pero hay algunas condiciones, por ejemplo, para que sea una fracción a y b tienen que ser números enteros y b tiene que ser diferente de cero (escribe en el pintarrón a y $b=\text{enteros}$ y $b \neq 0$); esto se entiende de forma que una unidad o un entero lo partimos en partes, está dividido en partes iguales y se expresa como (encierra la b de a/b) una unidad, estamos hablando de unidades, de enteros, un entero o una unidad se expresa así de forma de un entero. Entonces significaría una parte, que sería lo que se toma de ese entero, la parte que se toma, por ejemplo, así (escribe $2/4$). Así, entiendo una fracción que se entiende como donde a y b son dos números enteros y b es diferente de cero. También se entiende como el resultado de dividir una unidad en partes iguales, por ejemplo, cuatro y después tomar de esa unidad una parte, por ejemplo, aquí dos (encierra el 2 de $2/4$); aquí a la a la podemos llamar numerador y a b denominador.

A partir del fragmento anterior, identificamos el siguiente indicador de conocimiento de Israel:

Israel_KoT_D_1. Conoce la fracción como un número que se expresa: a/b , donde a y b son números enteros y b es diferente de cero en contextos parte-todo; donde a representa el numerador, es decir, las partes que se toman de la unidad y b representa el denominador, es decir, el total de partes iguales en que se divide la unidad.

En el contexto de las subtareas 3.1.3. b), durante la Entrevista Semiestructurada 1, preguntamos a Israel sobre las posibles relaciones que se pueden dar entre razón y fracción, a lo cual expresa [ES1_Israel_KoT_F_1. 497-513]:

E: ¿Qué podemos decir sobre el concepto de razón son iguales o son diferentes?

Israel: Sí son diferentes porque [...] a lo mejor una está vinculada con la otra, las dos están relacionadas, pero considero que no son lo mismo [...] quizá este concepto de fracción es un poco complejo y se puede entender de muchas formas debido a sus múltiples campos en los que se puede ver o mediante la utilización que se le dé. Lo que entiendo por una razón sería como una comparación de dos cantidades (escribe $\frac{2}{4}$) [...] implícitas, lo que es la razón y la fracción, pero depende del modo en lo que se trabaje, por ejemplo, aquí pongo un medio (escribe $\frac{1}{2}$), si viéramos esta fracción como una razón diríamos que de cada dos lo que sea tomamos sólo uno (señala 1 de $\frac{1}{2}$), si lo viéramos como una razón como una comparación de que por cada dos tomamos uno, igual, por ejemplo aquí, que de cada ocho lanzamientos tiró uno.

E: ¿Cuál concepto estaríamos trabajando?

Israel: Como razón una comparación entre dos y uno (señala $\frac{1}{2}$), por ejemplo, aquí compró dos y se llevó uno, igual aquí, que lanzó ocho y tronó cinco. Al trabajar esta fracción como medida también cambia su concepto porque puede decir medio kilo, medio litro o medio de otras cosas (escribe $\frac{1}{2}$ l). Entonces no siempre una fracción la podemos ver como una razón.

Como se puede apreciar Israel expresa que pueden existir relaciones entre la razón y la fracción, pero no son iguales, porque la segunda adquiere diferentes significados en función del contexto donde se usen: comparación (razón), medida (litros, kilos, etc.) y parte-todo. De manera concreta, enseguida observamos que:

Israel_KoT_F_1. Conoce que la fracción puede adquirir diferentes significados: parte-todo, medida y razón; ésta última la asocia con la comparación entre dos cantidades.

Como última subtarea de la hoja de trabajo 1, Israel plantea lo siguiente [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. c) 129-136]:

Ahora convierte las fracciones anteriores en números decimales.



Juego 1



Juego 2



Juego 3

En esta subtarea 3.1.3. c) Israel retoma el contexto de las subtareas 3.1.1. a) y 3.1.2. b) y pide “ahora convierte las fracciones anteriores en números decimales”. Durante la Entrevista Semiestructurada1 expresa a qué atiende esta indicación [ES1_Israel_ KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. c) 514-520]:

E: Por último, en la hoja de trabajo uno dice “ahora convierte las fracciones anteriores a número decimal”. ¿Por qué pide que las conviertan en números decimales?

Israel: Porque aquí espero trabajar la razón como como cociente y un cociente lo entiendo como el resultado por la acción de dividir. Entonces al llegar a este cociente vemos que en la primera, por ejemplo, fueron cero punto trescientos setenta y cinco (escribe 0.375), en la otra fueron cero punto cinco (escribe 0.5) y en la última cero punto setenta y cinco (escribe 0.75); éstas son las respuestas correctas.

A partir de lo anterior, identificamos Israel evidencia conocimiento sobre:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. c) Conoce tareas para representar razones (parte-todo) en cociente (números decimales).

Israel_KoT_D_2. Conoce la razón como un cociente; el resultado de la acción de dividir.

Entre las posibles dificultades que los alumnos puedan tener al resolver la tarea anterior, Israel comenta [ES1_ Israel_KFLM_FD_7. 524-529]:

[...] a veces , puede que existan confusiones cuando estemos analizando que punto setenta y cinco (escribe 0.75) vale más que punto cinco (escribe 0.5); quizá son los obstáculos a los que se van a enfrentar los niños, pero otras dificultades no creo, porque ellos han trabajado en cuánto es un medio, pues uno entre dos (escribe $\frac{1}{2}$). En este caso, sería cuánto es la acción de dividir cuatro entre ocho; aquí básicamente es que los niños dividan el numerador entre el denominador.

Con base en el fragmento anterior, identificamos que:

Israel_KFLM_FD_7. Conoce los alumnos pueden tener dificultades al identificar una cantidad mayor cuando se trabaja con números decimales.

Israel_KoT_P_1. Conoce que el cociente de una fracción es el resultado de dividir el numerador entre el denominador.

- **Conocimiento especializado del informante Israel durante la ejecución de las subtareas 3.1.**

En los apartados anteriores, destacamos evidencias de conocimiento de Israel en relación con algunas tareas para la enseñanza de la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción, en algunas relaciones de proporcionalidad (KMT_ES_T_TA_E), así como los conocimientos que tiene de los posibles procedimientos que los alumnos pueden emplear para resolverlas (KFLM_IC). En este apartado, nos centramos en el conocimiento especializado durante la ejecución de las subtareas 3.1. En el siguiente fragmento de clase, presentamos las interacciones que se establecen entre Israel y los alumnos cuando se inician en la resolución de las subtareas 3.1. [V1_Israel_KMT_T_3. 169-190]:

Israel: El día de hoy vamos a estar trabajando en equipos [...]
 /Israel entrega papelitos de colores a los alumnos, con base en cada color los alumnos se organizan en equipos, moviendo el mobiliario/
 Israel: Vamos a contestar estas hojitas, todos juntos como equipo, así como están, van a poder hacer uso de calculadora; si realizan una operación en su calculadora, al reverso de la hoja anotan si van a multiplicar, a dividir a sumar, quiero que anoten la operación no le hace que la hagan en calculadora, pero quiero que todos la anoten. ¿Qué no se puede hacer? Miren, no quiero que se copien entre otros equipos, para eso no tienen que pararse y no tienen que estar platicando con otros equipos. Tienen veinte minutos para contestar la hoja. Equipo verde, ¿qué vamos a hacer?
 Aa: Vamos a contestar la hoja y luego atrás de la hoja vamos a poner la operación, si vamos a multiplicar, a dividir [...]
 Israel: Así es con la calculadora. A ver, ¿qué no podemos hacer?
 Ao: Copiar
 Israel: ¿Con quién?
 Ao: Con los otros equipos.
 Israel: Con los otros equipos. Equipo naranja, ¿cuánto tienen para contestarlo?
 Aos: Veinte minutos.
 Israel: Veinte minutos. Entonces ya podemos comenzar.
 /Israel entrega la hoja de trabajo a los integrantes de los diferentes equipos/
 /Los equipos comienzan a leer las interrogantes y a contestarlas, mientras tanto el maestro entrega una calculadora a cada equipo/

En la primera parte del fragmento [169-177], Israel emite la consigna (KMT_T_1.), las condiciones en las que se va a realizar y algunas restricciones. Enseguida, realiza algunas preguntas sobre lo que van a realizar, qué está permitido y qué no está permitido (KMT_T_2.). En este momento de la clase identificamos que profesor y alumnos se ubican en la fase de acción (KMT_T_3.) Enseguida agregamos diferentes fragmentos de clase que corresponden a la resolución de las subtareas de la hoja de trabajo 1; la presentación de los fragmentos atiende al orden en que se dieron en la clase así como a los propósitos que los caracterizan. A continuación presentamos un fragmento que corresponde a la subtarea 3.1.1. [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 191-227]:

/Israel monitorea los equipos y se acerca aquellos que levantan la mano y observa tienen dudas para resolver las actividades/
Israel: Traten de leer bien antes de preguntar. Pueden preguntarse entre los compañeros del mismo equipo.
Israel: A ver mijo, lee el problema /Israel se acerca a un equipo/
Ao: En la mesa A se reparten un pastel entre 5 invitados y en la mesa B se reparten 2 pasteles entre 7 invitados, ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado?
A. Aos: En la A [...] en la B [...] /Los alumnos están resolviendo las actividades en cada equipo.
A. Aos dibujan círculos para los pasteles/
Israel: A ver, ¿entonces cuántos pasteles se van a repartir en la mesa A?
Ao: Uno.
Israel: ¿Entre cuántos invitados?
Ao: Entre cinco.
Israel: A ver lee [...]
Ao: En la mesa B se reparten 2 pasteles entre 7 invitados.
Israel: Entonces, ¿en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado?
Ao: En la B [...]
Israel: Dijimos que esta es la mesa A, ¿cuántos pasteles?
Ao: Uno.
Israel: ¿Para cuántas personas?
Ao: Cinco.
Israel: En la mesa B, ¿cuántos pasteles?
Ao: Dos.
Israel: ¿Para cuántas personas?
Ao: Siete.
Israel: Entonces platiquen entre ustedes, ¿en cuál mesa [...] qué?
Ao: En cuál mesa le toca más pastel a cada invitado.
Israel: Ustedes ya leyeron el problema, saben que en la mesa A les toca [...] ¿De cuántos pasteles?
Ao: Un pastel.
Israel: ¿Para cuántos invitados?
Ao: Para cinco.
Israel: Entonces comenten aquí entre ustedes, en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado [...] si ustedes fueran los invitados, qué tendrían que hacer para saber a cuál mesa se van a ir, ¿no quieren más pastel?
Aos: Sí
Israel: Entonces, vamos a ver en cuál mesa le toca más pastel para poder ir a sentarse.

Cuando los alumnos se inician en la resolución de la subtaska 3.1.1. comparación de razones (parte-
parte), identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. Conoce que solicitar a algún alumno la lectura del problema planteado, permite identificar los datos y la pregunta a responder lo que permite que avancen en la resolución de las tareas.

En la subtarea 3.1.3 a) donde se comparan razones en contextos parte-todo, cuando Israel se acerca a algunos de los equipos recurre a algunas acciones de la estrategia anterior [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 228-245]:

/Israel se retira del equipo y se acerca a los otros equipos/ En su segunda hojita les aparece esto: haz un registro del número de tiros que tronó el globo y de lanzamientos. A ver, ¿qué tienen primero?, ¿qué dice aquí?, ¿globo qué? [...] /Israel señala la información de la hoja/
Aos: Tronados.
/Israel escribe en el pintarrón globos tronados/
Israel: ¿Y abajo qué dice?
Aos: Número de lanzamientos.
Israel: El número de lanzamientos.
/Israel escribe en el pintarrón número de lanzamientos/
Israel: Fíjense, esto es una tablita, aquí arriba, ¿qué dice? /señala la hoja 2/
Aos: Juego uno.
Israel: ¿Acá dice?
Aos: Juego dos.
Israel: ¿Y aquí?
Aos: Juego tres.
Israel: Aunque no se vea muy bien aquí es una tablita, no se ven las rayitas, pero ustedes las pueden dibujar y después realizan lo que se indica. Sólo era esa aclaración, ya pueden continuar /Israel dibuja la tabla en el pintarrón/. Si tienen alguna duda, levanten la mano.

En el fragmento anterior, identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. Conoce que el docente puede leer la indicación de la subtarea y después cuestionar a los alumnos sobre la información que se maneja.

Israel_KMT_R_5. Conoce que el pintarrón es un apoyo para plasmar información que se presenta en las subtareas, en este caso, una tabla.

En la Videograbación 1, cuando los alumnos se inician en la resolución de las subtareas de la hoja 3.1. existen diferentes fragmentos donde Israel solicita que algunos alumnos den lectura al planteamiento, que identifiquen los datos y que comiencen a resolverlo.

En algunos casos, destacamos el conocimiento que Israel pone en juego a partir de las participaciones de los niños, tal como lo expresamos en resolución de la subtarea 3.1.3. c) [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. 272-278]:

Israel: ¿Qué vamos a hacer?
Ao: A convertir éstas en números decimales /señala algunas fracciones/.
Israel: ¿Saben cómo? /Los alumnos no contestan/ Por ejemplo, cuando representan ustedes esta cantidad, por ejemplo la más común /escribe 0.5 en el pintarrón/, ¿qué número es?
Aos: Cero punto cinco.
Israel: ¿Este es un número qué?
Aos: Decimal.

En un primer momento identificamos, *Israel_KMT_ES_T_TA_E_1*. Conoce los alumnos pueden identificar un número decimal a partir de su representación numérica. Más adelante, Israel realiza otras acciones para ejemplificar a los alumnos cómo se pueden convertir fracciones a números decimales; sólo que parte del número decimal 0.5 [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 279-303]:

Israel: ¿Ustedes creen que este lo podemos representar como una fracción?
A. Aos: Sí.
Israel: ¿Cuál sería?
/Los alumnos no responden/
Israel: Me dicen ustedes que es un número decimal, ¿creen que lo podemos representar como una fracción?
Ao: Sí.
Israel: ¿Cuál sería su fracción?
/Los alumnos no responden/
Israel: A ver, el punto cinco me indica que es [...] ¿qué?
Ao: Decimal.
/Israel dibuja una barra y la divide en diez partes iguales/
Israel: Entonces dijimos que esto vale, ¿cuánto?
Ao: Punto cinco [...]
Israel: Un entero sería uno, entonces cada partecita, vamos a suponer que vale, ¿cuánto?, ¿punto qué? /Lo escribe en la hoja/
Aos: Punto uno.
/Enumeran la barra escribiendo 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0/
Israel: Entonces aquí nos está diciendo que [...] ¿Cuánto dijimos?
Aos: Punto cinco.
Israel: A ver y si lo coloreamos, ¿hasta dónde sería el punto cinco? /Una alumna pasa y colorea/ Y el punto, ¿a qué les suena? Si esto sería un entero, ¿qué sería?
Aa: Cinco décimos.
Israel: Podría ser porque [...] a ver me dijiste que podía ser cinco décimos, a ver escribemelo /La alumna escribe la fracción 5/10 en la hoja/

A partir del fragmento anterior identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. Conoce que plantear la representación gráfica (contextos continuos) del número decimal 0.5 contribuye a que los alumnos identifiquen algunas relaciones entre un número decimal y una fracción de la forma a/b .

En otro fragmento de la transcripción de la Videograbación 1, Israel interviene para que los alumnos identifiquen cómo pueden convertir una fracción a un número decimal [V1_Israel_KoT_P_2. 304-321]:

Israel: Entonces dijimos que eran cinco de cuántos.
Aos: De diez.
Israel: También que sería [...] ¿cinco qué viene siendo de diez?
Aa: La mitad.
Israel: ¿Y ustedes cómo representan una mitad?
Ao: Como un medio.
Israel: ¿Qué pasa si dividimos el uno entre dos? Tienen la calculadora, ¿cuánto da?
Aos: Cero punto cinco /Un alumno realiza la división en la calculadora/.
Israel: ¿Qué pasa si dividimos el cinco entre diez?
Ao: Un entero.
Israel: ¿Un entero? A ver, ¿cuánto da?
Aa: Punto cinco.
Israel: Entonces nos da lo [...]
Aos: Mismo.
Israel: ¿Qué dividimos?
Ao: Cinco entre diez.
Israel: Para que nos diera [...]
Aos: Números decimales.

Una vez que Israel trabaja con los alumnos la fracción $\frac{5}{10}$, los guía a obtener una fracción equivalente: un medio. Así, avanzan en la identificación de un procedimiento para convertir fracciones a números decimales:

Israel_KoT_P_2. Conoce convertir una fracción de la forma $\frac{a}{b}$ a un número decimal implica dividir el numerador entre el denominador.

Cuando Israel pasa por los diferentes equipos observa que algunos alumnos tienen dificultades en la subtarea, por ello retoma como ejemplo la representación gráfica y numérica del número decimal 0.5, sin embargo, en un equipo surgen diferentes aportaciones; situación que propicia Israel recurra a un contraejemplo [V1_Israel_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 357-393]:

Israel: ¿Cómo lo podemos representar?
 Ao: Cinco quintos [...] No [...] ¿cómo era?
 Aa: Diez quintos.
 Aa: No, son cinco décimos.
 Israel: ¿Cuántos pedazos eran?
 Aos: Diez.
 Israel: ¿Cuántos tenemos?
 Ao: Cinco.
 Israel: Pongan cinco décimos y pongan diez quintos /Los alumnos escriben en la hoja 5/10 y 10/5/ ¿Cómo le podemos hacer para que nos dé números decimales?, ¿qué pasa si dividimos unos entre dos?, ¿cuánto nos daría? Usen su calculadora.
 Aos: Cero punto cinco.
 Israel: Entonces dijimos que un medio es qué [...] si tienes esto completo /señala el rectángulo/ Un medio, ¿qué es?
 Aos: La mitad.
 Israel: Entonces dice que un medio es también [...]
 Aos: Cero punto cinco.
 Israel: ¿Qué pasa si le sumamos otro cero punto cinco?
 Aa: Nos da un entero.
 Israel: ¿Qué pasa si dividimos el cinco entre diez?
 Aos: Es cero punto cinco.
 Israel: Nos da cero punto cinco, quiere decir que nos va a dar también la mitad [...] Ahora, ¿qué pasa si dividimos diez entre cinco?
 Aos: Dos.
 Israel: Entonces de estas tres, ¿cuáles sí serían? /Los alumnos señalan 0.5/ Dijeron aquí son [...] /señala el rectángulo/
 Aos: Diez pedacitos.
 Israel: Y de esos agarramos [...]
 Aos: Cinco.
 Israel: ¿Qué hicimos para convertir este número en decimal?
 Aos: Dividimos.
 Israel: ¿Qué?
 Ao: Cinco entre diez.
 Israel: Para convertir los números de la tabla en números decimales, ¿qué creen que van a hacer?
 Ao: Dividir.
 Israel: Háganlo ustedes. /Los alumnos continúan trabajando en sus equipos/

En el fragmento anterior, Israel rescata las aportaciones de diferentes alumnos y representan de manera numérica $5/10$ y $10/5$ y se apoya de la fracción $\frac{1}{2}$. Enseguida les solicita conviertan $\frac{1}{2}$ a número decimal, obtienen 0.5.

A partir de este contexto, identificamos que **Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.**, conoce que tomar una fracción cotidiana ($1/2$) para ejemplificar la conversión a un número decimal (dividir el numerador entre el denominador), favorece, en otras cosas, que identifiquen las representaciones numéricas

correctas, en este caso, para un número decimal. En la planificación de clase, después de la fase de acción, Israel plantea otra fase denominada formulación-validación, cuya descripción agregamos enseguida [P_Israel_KMT_T_ 146-152]:

Fase de formulación-validación:

- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las preguntas planteadas y qué les permitió llegar a esos resultados. Los alumnos pueden pasar al frente para representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación de sus compañeros, para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que permitieron llegar a lo deseado.

En el fragmento anterior, Israel asocia la fase formulación-validación con la socialización de los diferentes procedimientos que usaron los equipos para resolver las subtarear 3.1. propuestas en la hoja de trabajo 1. Durante la Entrevista Semiestructurada 1, realizamos algunas preguntas con el propósito de obtener más información sobre esta fase que incluye en su planificación [ES1_Israel_KMT_T_4. 30-549]:

E: [...] Luego en su situación didáctica viene otro momento que se denomina fase de formulación-validación [...] qué se entiende por fase de formulación validación. Israel: Esta fase no la alcance a corregir porque me estuvieron llamando la atención en mis planeaciones de por qué las junto, me dijeron debo de expresarlas como momentos separados, no recuerdo en qué documento encontré las podemos juntar [...]Lo agregué aquí porque en este momento estas dos fases, estos dos momentos los veo muy estrechamente relacionados porque tanto un niño [...] lo veo como un circulito, por ejemplo, porque tanto un niño emite un mensaje como se valida o se rechaza y vuelve a ser lo mismo, por ejemplo, no se emiten primero todos los mensajes y de todos los resultados después se valida uno por uno, sino por ejemplo, quizá un equipo formula, dice su mensaje a sus demás compañeros; esta es la definición de formulación, que es emitir un mensaje a los demás compañeros o decir cómo lo resolvieron, a lo mejor dando argumentos, pero en la validación, te valido si acepto o no ese mensaje que tú me estás dando a entender. Entonces lo acepto o rechazo. Después de esto volvemos al planteamiento siguiente, otra vez la formulación y después se valida si se acepta se rechaza y después con el siguiente. Aquí quise hacer formulación-validación como que se formula y se valida, se vuelve a formular y se vuelve a validar.

En el fragmento anterior, Israel señala que la fase formulación-validación no es una, son dos fases que están relacionadas, sin embargo, cada una tiene diferente propósito. Así, asocia la fase de formulación con la formulación de mensajes de un equipo al resolver las tareas de la hoja de trabajo 1, mientras, durante la fase de validación se expresa si acepta o rechaza el mensaje que se brinda. Por lo tanto, en un primer momento, presentamos evidencias de conocimiento de Israel en relación con la fase de formulación [AP_ Israel_KMT_T_4. 82-87]:

Fase de formulación: La formulación de un conocimiento correspondería a la capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). Es donde un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base en el conocimiento contenido en el mensaje.

A partir de lo que expresa Israel en el fragmento anterior, observamos que **Israel_KMT_T_4.**, conoce la fase formulación como la situación o situaciones donde existe un emisor y receptor (alumno o grupo de alumnos); el primero debe formular un mensaje al segundo, quien se debe iniciar en la comprensión del mensaje y actuar con base en su contenido. En otro fragmento del documento de Análisis de la Práctica, encontramos evidencia de conocimiento de Israel sobre la fase de validación, misma que define con apoyo de algunos referentes teóricos [AP_Israel_KMT_T_5. 88-95]:

Fase de validación: En este nuevo tipo de situación, los alumnos organizan enunciados en demostraciones, construyen teorías - enunciados de referencia y aprenden a cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer sin ceder a argumentos retóricos, ni de autoridad. En ésta dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir, ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, o poner otras aserciones.

A partir de lo anterior, podemos observar qu **Israel_KMT_T_5.**, conoce la fase de validación como una situación donde existen diferentes grupos de alumnos; un grupo intenta convencer al resto de que los procedimientos empleados para resolver cierta tarea son los correctos, mientras que los otros grupos se ponen de acuerdo sobre la verdad o falsedad de los mismos. En la Entrevista Semiestructurada 2 preguntamos a Israel cuál es el propósito pasar a algunos alumnos en la fase formulación-validación [ES2_Israel_KMT_T_5. 509-523]:

E: [...] en la planificación, en la fase de formulación-validación usted plantea que va a pasar a algunos alumnos al pintarrón para [...]

Israel: Para validar.

E: ¿Por qué pasar a algunos alumnos al pintarrón cuando usted pudiera hacer esto, es decir, escribir los procedimientos, cuál es la función de esto?

Israel: La función es [...] bueno se pudo haber hecho que el maestro institucionalizara en ese momento con algún procedimiento, pero aquí es importante ver cuáles son las estrategias que los niños están utilizando para resolver los planteamientos y, quizá, encontrar alguna que para ellos se les pueda facilitar en ese momento; esa fue la intención, ver los procedimientos de algunos alumnos y las reacciones del resto de los niños hacia los procedimientos de sus compañeros. Por ejemplo, cuando ven un procedimiento más complejo ellos señalan que quizá lo resolvieron de una forma más sencilla o que también le llamábamos con el maestro Zúñiga más económica. En esta parte también se trata de argumentar, de convencer sobre los procedimientos que han empleado, el porqué de sus procedimientos y dar evidencia de que obtuve un resultado correcto.

En el fragmento de entrevista anterior, Israel afirma que durante la fase de validación no sólo se trata de convencer a otro u otros sobre los procedimientos correctos empleados para resolver una tarea, sino que se busca también encontrar el procedimiento más sencillo o económico. En los siguientes párrafos presentamos fragmentos que corresponden a la fase de validación desde la perspectiva de Israel [V1_Israel_KMT_T_5.1. 393-414]:

A ver, ¿ya terminaron? /Israel pregunta a los equipos/. En forma grupal vamos a ver cómo resolvieron las actividades de la hoja de trabajo 1. Equipo verde, ¿qué dice la primera pregunta?

Aa: En la mesa A se reparte un pastel entre cinco invitados, en la mesa B se reparten dos pasteles entre siete invitados. ¿En cuál mesa le tocó más pastel a cada invitado?

Israel: Ahorita sólo me van a decir, tenemos [...] ¿Cuántas mesas?

Aos: Dos.

Israel: La mesa [...]

Aos: A.

Israel: Y la mesa [...]

Aos: B.

Israel: A ver le voy a preguntar al equipo verde, ¿en cuál mesa creen que les tocó más pastel?

Aos: En la mesa B.

Israel: Equipo azul, ¿ustedes en cuál mesa creen?

Aos: En la B.

Israel: A ver el quipo Rojo [...]

Aos: En la mesa B.

Israel: ¿Ustedes equipo? /Israel señala a otro equipo/

Aos: En la A [...]

Israel: ¿Y ustedes equipo amarillo?

Aos: En la B.

En la primera parte de la fase de validación de las subtareas Israel pide a uno de los alumnos dé lectura a la primer tarea, enseguida cuestiona sobre los datos que se manejan en el planteamiento de la tarea y posteriormente cuestiona a los equipos sobre la posible respuesta de la misma. Por lo tanto, identificamos que:

Israel_KMT_T_5.1. Conoce que las primeras preguntas que el profesor realiza durante la fase de validación deben centrarse en la lectura del planteamiento de la tarea, la identificación de los datos que involucra y las posibles respuestas a la misma. También en la fase de validación encontramos que Israel interviene con diferentes propósitos, en el siguiente fragmento damos cuenta de esto [V1_Israel_KMT_T_5.2. 415-425]:

Israel: Vamos a ver el equipo naranja, pasen ustedes y digan por qué pusieron que en la mesa A.
Aa: Es que nosotros lo hicimos porque decía que en la mesa A había nada más 5 y en la mesa B 7, y en la mesa A nada más le dieron un pastel, y en la B dos, entonces nosotros pensamos que en la A les dieron más, porque ahí había menos invitados.
Israel: ¿Si le entendieron?
Aos: Sí
Israel: Entonces, ellos dicen que en la mesa A, ¿por qué?
Aa: Porque había menos invitados.
Israel: Y en la mesa B, ¿por qué no?
Aa: Porque había más invitados.

Con base en este fragmento identificamos que **Israel_KMT_T_5.2.**, conoce que conforme avanza en la fase de validación debe cuestionar a los alumnos para que justifiquen y expongan las respuestas que dan a la tarea.

En el fragmento, la justificación que da el equipo naranja atiende a la cantidad de invitados que hay en cada mesa (A y B), es decir, asumen que la respuesta correcta es la mesa A porque hay menos invitados y se reparte un pastel entre menos personas, en esta situación el papel de Israel consiste en cuestionar. Durante la fase de validación, Israel propicia la participación de otros equipos que dieron respuestas diferentes a la misma tarea [V1_Israel_KMT_T_5.2. 427-453]:

Israel: Entonces el equipo amarillo, ustedes dijeron que la B, ¿por qué la B?
Ao: Yo digo que es en la B, porque en la B aunque son más invitados te dan más pasteles porque son dos, y en la mesa A es sólo uno. Porque si fuera en la mesa A serían cinco rebanadas /Realiza unos esquemas en el pizarrón/, pero si hubieran sido en la B, entonces hubieran sido 3 rebanadas grandes en un pastel /Dibuja dos círculos; uno dividido en cuatro partes iguales y otro en tres partes iguales. Enseguida señala el segundo círculo/
Israel: Entonces en uno les tocaría tres y en otro cuatro [...] /señala lo que está en el pizarrón/
Aa: Pero yo digo que no sería justo que a unos invitados les tocara más y a otros menos.
Israel: Pero estamos viendo que en la mesa B, ¿cuántos pasteles se van a repartir?
Aos: Dos.
Israel: ¿Para cuántas personas?
Aos: Para siete.
Israel: ¿Pero les tiene que tocar lo mismo?
Aos: Sí.
Israel: A unas les tocaría [...] ¿cuánto es aquí? /Señala el primer círculo/
Aos: Un cuarto.
Israel: ¿Y acá? /Señala el segundo círculo/
Aos: Un tercio.
Israel: Entonces, ¿les toca lo mismo?
Ao: No.
Israel: Pero, ¿por qué dices que en la mesa A no?
Ao: Porque en la mesa A, sólo se reparte un pastel.
Israel: ¿Entre cuántas?
Ao: Entre cinco.
Israel: ¿Y les tocaría ahí de menos?
Ao: Pero en la mesa B les tocaría más porque son 2 pasteles para 7 invitados.

En el fragmento anterior, identificamos que Israel propicia que otro equipo con diferente respuesta la justifique. Observamos los alumnos que se apoyan de representaciones gráficas para justificar su respuesta, sin embargo, al exponer los procedimientos apreciamos que dejan de lado algunas indicaciones como “les debe tocar la misma cantidad de pastel”; ante esto, Israel interviene a través de una serie de interrogantes para que los alumnos retomen las indicaciones iniciales. A pesar de estas intervenciones, los alumnos del equipo amarillo asumen que la respuesta correcta es la mesa B porque se reparten dos pasteles, es decir, hay mayor cantidad que en la mesa A.

Dentro de la fase de validación, existen otros momentos donde Israel solicita a otros equipos que obtuvieron las mismas respuestas a la pregunta (¿En cuál mesa les toca más pastel?) que expongan el procedimiento que siguieron para llegar a esa respuesta, tal como se observa enseguida [V1_ Israel_KMT_T_5.3. 454-482]:

Israel: Muchas gracias. Ahora vamos con el equipo verde.
/Pasa una alumna/
Israel: Vamos a ver diferentes formas de cómo lo resolvieron.
Aa: Yo digo que en la mesa B, porque en la mesa A no es la misma, porque cualquier pastel que está cuadrado, supongamos que el pastel esta así [...]
/Dibuja un pastel cuadrado en el pintarrón y lo divide en cinco partes/
Aa: Ya son las cinco.
Israel: ¿Cuánto le tocaría a cada invitado?
Aa: Un quinto.
Israel: Un quinto.
Aa: Un quinto para cada persona, entonces [...]
Israel: En la mesa B, ¿cuántos se van a repartir?
Aa: Dos.
/Dibuja dos pasteles y los divide en siete partes iguales cada uno de ellos/
Aa: Entonces a cada uno, como son 7 de cada pastel le tocó dos séptimos, es un pedazo de pastel de cada uno; aquí alcanzamos a repartir a todos los invitados de un pastel, entonces sobró un pastel, lo vamos a repartir también, serían dos séptimos por cada persona, y aquí de un quinto /señala el primer pastel de la mesa A/
Israel: A ver, ¿están todos de acuerdo?
Aos: Sí.
Israel: A ver, pero tú dices que aquí el pastel lo repartieron entre siete personas, pero entonces aquí [...] ¿El pastel sólo lo van a dividir entre siete personas?
Aa: Sí.
Israel: Pero, ¿sólo van a repartir un pastel?
Aa: Dos.
Israel: Los dos.
Aa: Por eso, sería un séptimo para cada persona de cada pastel que está en la mesa B y son dos.
Israel: Entonces decimos que a cada persona le tocan dos séptimos.

En este fragmento observamos que Israel cuestiona a los alumnos sobre cómo resolvieron la subtaska 3.1.1.; situación que propicia los alumnos se apoyen en representaciones de fracciones en contextos continuos (parte-todo) para identificar en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado. Así identificamos que:

Israel_KMT_T_5.3. Conoce durante la fase de validación debe solicitar y cuestionar a dos equipos que obtienen una misma respuesta a una tarea expongan el o los procedimientos empleados con precisión. Durante la validación de la subtaska 3.1.1., un equipo señala que multiplicaron las cantidades que se manejan en cada pastel para determinar en cuál les tocaba mayor cantidad (mesa B); ante esta situación observamos que Israel interviene con otro propósito [V1_Israel_KMT_T_5.4. 505-534]:

Ao: Y multiplicamos también este por este /señala en el pintarrón dos pasteles por siete/, ya dijimos cuál es donde les dan más pastel, y dijimos que era este /señala mesa B/.

Israel: A ver pero, ¿si tenían que hacer aquí una multiplicación?

Aa: División.

Israel: A ver, ¿qué hicieron equipo rojo?

Aos: División.

Israel: ¿Y cuánto dividieron?

Ao: Uno entre cinco.

Israel: ¿Y cuánto les dio? Si ocupas tus hojitas, te las puedes traer.
/El alumno va por ellas y escribe $1/5$ $2/7$ /

Ao: Punto dos.

Israel: A ver, ¿ya tienen todas calculadoras? ¿Cuánto les dio $1/5$?

Ao: Punto dos.

Israel: Ponle ahí, y aquí serían $2/7$. ¿Cuánto les dio?

Aos: Cero punto veintiocho.

Israel: ¿Cómo los escribirías? ¿Después de que dividieron qué hicieron? ¿Por qué dices que en la mesa B?

/El alumno escribe en el pintarrón 0.285/

Ao: Empezamos a justificar las respuestas para ver dónde les tocaba más, hicimos este procedimiento para ver cuál daba más.

Israel: ¿Cuál les daba más?

Ao: En la B.

Israel: ¿Por qué? ¿Cuánto les dio?

Ao: 0.285

Israel: ¿Y en el otro cuánto?

Ao: 0.2

Israel: También lo podemos poner como 0.20. Muy bien. Entonces ustedes están diciendo que 0.20 es menos que 0.28, ¿sí?

Ao: Sí.

Israel: Entonces ustedes dicen que en la mesa B.

En este fragmento identificamos que uno de los equipos emplea un algoritmo para identificar la mesa en la que toca más pastel a cada invitado, sin embargo, el algoritmo (multiplicación) no coincide con lo esperado por Israel, por ello observamos que interviene antes de que el equipo concluya para cuestionar al resto del grupo si debían multiplicar, algunos alumnos señalan que se debe dividir; situación que rescata Israel para enfatizar se apoyen en la calculadora para realizar la división indicada de $1/5$ y $2/7$. Así, identifican en la mesa B les toca mayor cantidad (0.285). Conforme Israel avanza en la fase de validación, al escuchar la diversidad de procedimientos empleados por los equipos, observamos que cambian los conocimientos que pone en juego en función de las situaciones que le plantean los alumnos, tal como apreciamos enseguida [V1_Israel_KMT_T_5.3. 534-554]:

Equipo azul, pásenle, ustedes dijeron también que en la mesa B ¿Por qué? Pásenle.
 /Pasa un alumno/
 Ao: En la mesa B dijimos porque [...]
 Ao: Aunque son más invitados, pero hay dos pasteles para repartirlos y como en la mesa A nada más hay un pastel les va a tocar de menos pastel y en la mesa B como son más invitados y más pasteles les tocaría de más.
 Israel: El equipo naranja dice lo contrario [...]
 Aa: Es que nosotros dijimos que porque ahí el pastel lo podemos partir en diez pedazos y así les tocaría de dos pedazos.
 Israel: ¿Pero no sería lo mismo hija? A ver, como aquí, ustedes dicen a lo que yo entendí, que tenemos un pastel, y ese pastel para 5 personas, entonces aquí lo vamos a dividir en 1,2 ,3 ,4 , pero tú dices que estas cinco, las podemos repartir en 10 pedazos ¿verdad?
 /Israel dibuja un pastel rectangular y lo dividí en diez partes/
 Israel: Y no sería lo mismo, ¿darles dos pedacitos que darle uno?
 Aa: Sería la misma cantidad.
 Israel: Sería la misma cantidad. Pero ustedes dicen que en la mesa A les tocaría más pastel porque es un pastel para cuántas personas [...]
 Ao: Cinco.
 Israel: Y el otro equipo dice que no.
 Ao: Aunque le dé dos pedazos de pastel es la misma cantidad.

En este fragmento identificamos que *Israel_KoT_R_4.*, Conoce la representación gráfica de fracciones (parte-todo) equivalentes en contextos continuos ($2/10$ y $1/5$). Antes de concluir con la validación de la subtarea 3.1.1. Israel plantea la siguiente situación en la clase [V1_ Israel_KMT_T_5.4. 570-582; 613-616]:

Israel: A ver dijimos que en la mesa A [...] y, esta es la mesa B /Las dibuja/. Pero en la fiesta había muchas mesas, puedo tener otra mesa A, y acá otra mesa B /Las dibuja/
 Israel: Vamos a igualar la misma cantidad de pasteles, ¿si hubiera dos papeles en la mesa A, cuántas personas habría?
 Aos: Diez.
 Israel: Dos pasteles para diez, entonces si juntamos estas mesas /señala las mesas A/ dijimos que tenemos 2 pasteles para [...]
 Aos: Diez personas.
 Israel: Y en la otra mesa tenemos dos pasteles, ¿para cuántas personas?
 Aos: Para siete.
 Israel: Entonces ahora sí, ¿en dónde les tocaría más pastel?
 Aos: En la B.
 Ao: En la A [...]
 Israel: ¿Cómo podemos saber en cuál les va a tocar más?
 Aa: Esta fácil, dos pasteles son para diez personas, entonces les tenemos que dar de un $1/5$ para cada persona, y en la B son dos pasteles para 7 personas, entonces ahí les tocaría de $2/7$, es más que lo otro.

Como podemos observar, Israel plantea que existen dos mesas A y dos mesas B, en el primer caso son mesas para diez personas y, en el segundo, mesas para siete personas. A partir de esto, cuestiona a los niños sobre dónde le puede tocar mayor cantidad de pastel a cada persona, situación que resuelve un alumno al señalar que en la mesa B porque le tocan $\frac{2}{7}$ a cada persona y en la mesa A $\frac{1}{5}$. Así identificamos que:

Israel_KMT_T_5.4. Conoce diferentes procedimientos que los alumnos pueden exponer durante la fase de validación, sin embargo, cuando alguno de ellos no se presenta, retoma las aportaciones de algún equipo para presentar uno de los procedimientos esperados (igualar cantidad de mesas). Durante la validación de la subtarea 3.1.2., comparación de razones (parte-todo) en el contexto de los puestos de globos (Don Benjamín y Don Octavio), identificamos que Israel confirma el conocimiento evidenciado en relación con el papel del profesor en este momento de la situación didáctica [V1_Israel_KMT_T_5.5. 632-659]:

Israel: A ver, vamos a pasar a lo siguiente, a ver equipo naranja lean lo que sigue [...]
Aa: A ver dice: “Carlos y sus amigos fueron a saludar al capitán R y él los invitó a un puesto en la feria que había contratado el alcalde, encontraron dos puestos de trueno globos con diferentes promociones, en el puesto de Don Benjamín tienen que tronar 6 globos con ocho dardos para ganarse un regalo, en el puesto de Don Octavio tienen que tronar 7 globos con 10 dardos para ganarse el regalo, ¿en cuál de los dos puestos le conviene jugar para ganarse un regalo?”
Israel: A ver dice: ¿en cuál de los dos puestos le conviene jugar para ganarse un premio?
/Algunos alumnos levantan la mano para participar/
Israel: Dijimos que hay dos puestos para tronar globos, uno sería el puesto [...] ¿de quién?
Aos: De Don Benjamín.
Israel: Y el otro puesto es de [...]
Aos: Don Octavio.
Israel: A ver, pero ¿hay una diferencia ahí?
Aos: Sí.
Mo. A ver pero, ¿cuál sería la diferencia equipo amarillo?
Ao: Que con Don Octavio dan un dardo más que con Don Benjamín.
Ao: ¡A qué no!
Israel: A ver, ¿cuántos dardos dan?
Ao: Con Don Benjamín [...]
Israel: ¿Dan qué?
Israel: A ver equipo rojo [...]
Ao: Dan ocho dardos y, con Don Octavio dan 10 dardos.
Israel: ¿Aquí cuántos dardos dan? /Señala una lámina pegada en el pizarrón/
Aos: Diez.
Israel: Diez dardos pero, ¿cuántos dardos tiene que tronar?
Aos: Seis, seis.
Aos: Siete, siete.

En este momento de validación, Israel emite preguntas para que algún alumno realice la lectura de la subtarea y la identificación de los datos. A lo anterior, le siguen otras preguntas que Israel realiza para que los alumnos de los diferentes equipos emitan la respuesta que creen es correcta. Enseguida destacamos algunos fragmentos de la transcripción de la clase de Israel cuando algunos equipos justifican sus respuestas al elegir el puesto de globos [V1_ Israel_KMT_T_5.5. 673-685]:

Israel: A ver ustedes por qué dicen que hay más posibilidades de [...] Su compañero les va a decir por qué en el puesto de Don Octavio tienen más oportunidad de ganar, ¿por qué?
Ao: Porque aquí hay 8 dardos para tronar 6 globos /anota los números en el pizarrón/ y acá vamos a tronar 7 globos con 10 dardos /anota los números en forma de fracción/ y si los contamos acá nos dan un dardo más /señala caso de Don Benjamín/, porque mire, acá tenemos que tronar 6 globos con 8 dardos y acá 7 globos con 10 dardos y yo los conté desde el 7 hasta el diez /anota un número 3/
Israel: ¿Este tres qué significa?
Ao: Que puede fallar tres.
Israel: Que puede fallar tres veces para ganarse el premio.
Ao: Y aquí contando del 6 hasta el 8, y aquí sólo nos dan dos, y acá /señala el puesto de Don Octavio/ es donde conviene jugar para tener más posibilidad de ganar, porque acá nos dan un dardo más que con Don Benjamín.

Como podemos observar, las preguntas que realiza Israel llevan a que el alumno exprese que conviene jugar en el puesto de Don Octavio, ya que puede fallar tres veces para ganarse el premio, y en el puesto de Don Benjamín puede fallar dos. En otro momento de la validación de la subtarea 3.1.2. Israel cuestiona un equipo que tiene una respuesta diferente [V1_ Israel_KMT_T_5.5. 707-718]:

Israel: Equipo verde, ustedes por qué dicen [...] es el único equipo que dice lo contrario, ¿por qué?
/Pasa una alumna al frente/
Aa: Nosotros decimos que aquí nos ahorramos un globo menos de tronar /señala el puesto de Don Benjamín/ y acá tenemos que tronar otro más /señala el puesto de Don Octavio/
Israel: Ustedes por qué dicen que se ahorran [...] de dónde sacan ese globo /señala el puesto de Don Benjamín/.
Aa: Aquí son 6 globos y acá son 7; entonces nosotros decimos para no tronar más mejor tronamos los 6 para no fallar el tiro, entonces aquí si nos dan más dardos /señala puesto de Don Octavio/ y acá nos dan menos /señala puesto de Don Benjamín/, pero de todos modos aquí nos dan uno menos para tronar y allá nos dan uno más para que si tiramos fallar. Aquí está más fácil /señala puesto de Don Benjamín/.

Durante la validación de la subtaska 3.1.2., Israel rescata las justificaciones de dos equipos que tienen respuesta diferente. En la Entrevista Semiestructurada 1 Israel señaló el puesto de Don Benjamín como correcto, sin embargo, durante la clase, después de escuchar las aportaciones de los diferentes equipos se presenta lo siguiente [V1_Israel_KMT_T_5.5. 719-745]:

Israel: Pero no crees que el globo que te ahorras acá /señala puesto de Don Benjamín/ se recupera acá /señala los tiros de más que ofrece el puesto de Don Octavio/ porque puedes fallar, ¿cuántas veces?
Aa: Tres.
Israel: ¿Y aquí?
Aa: Dos.
Israel: Entonces, ¿no crees que se recupere?
Aa: Sí.
Israel: Entonces, ¿cuál podría ser? ¿Aquí tenemos cuántos dardos? /señala el puesto de Don Benjamín/
Aa: Ocho dardos.
Israel: ¿Y cuántos globos hay?
Aa: Seis.
Israel: Entonces, ¿cuántas veces puede fallar?
Aa: Dos.
Israel: ¿Y aquí? /señala el puesto de Don Octavio/
Aa: Tres.
Israel: ¿Son cuántos globos?
Aa: Siete.
Israel: ¿Y cuántos dardos?
Aa: Diez.
Israel: ¿Y puedes fallar ahí cuántas veces?
Aa: Tres.
Israel: Entonces, ¿dónde tú crees que te dan más oportunidad de que sigas participando?
Aa: En el puesto de Don Octavio.
Israel: ¿Entonces si estamos todos de acuerdo?
Aos: Sí

En los diálogos anteriores, Israel conduce a los alumnos a elegir el puesto de Don Octavio. Aquí identificamos inestabilidad entre el conocimiento de Israel previo a la aplicación de la planificación y durante su ejecución. Durante la fase de validación de la subtaska 3.1.3 y 3.1.3 a), Israel da lectura a algunos planteamientos o solicita a algunos alumnos los lean, enseguida cuestiona sobre la información que manejan para posteriormente solicitar las respuestas que dieron así como su justificación. Aquí, destacamos que al final de la subtaska 3.1.3. a) Israel plantea otras preguntas que no están presentes [V1_Israel_KMT_T_5.5. 836-842]:

Israel: Entonces decimos que en todos los juego tiró [...] ¿Cuántos?
 Ao: Ocho veces.
 Israel: Pero, ¿tronó los mismos globos?
 Aos: No.
 Israel: No verdad, tronó, ¿qué?
 Aos: Diferente.
 Israel: Diferente verdad. Muy bien.

Por lo anterior identificamos que *Israel_KMT_T_5.5.*, conoce que durante la fase de validación se pueden agregar algunas preguntas que permiten comparar las respuestas que se dieron en la subtaska.

En la validación de la subtaska 3.1.3. b), donde Israel pide expresen en fracciones los globos tronados en cada juego (1, 2 y 3) evidencia conocimiento de diferentes registros de representación de la razón y la fracción [V1_ Israel_KoT_R_5. 842-860]:

Israel: Abajo dice: Expresa con fracciones los datos de la tabla anterior, dice usa el número de globos tronados como numerador y el número de lanzamientos como denominador, a ver, ¿cómo les quedó el juego 1?
 Aos: Cinco octavos.
 Israel: A ver, ¿cómo les quedó? /solicita a una alumna que pase a expresar el resultado, la alumna pasa y escribe en el pintarrón $5/8$ /
 Israel: Si quieres abajito de donde dice juego 1 /Le da la indicación a la alumna/ ¿Cómo le quedó? A ver pásale.
 /Otra alumna pasa y escribe $4/8$; de esta forma Emiliano también pasa y escribe $6/8$ /
 Israel: Entonces, ¿qué querrá decir cinco octavos /señala $5/8$?
 Aas: Ocho lanzamientos [...]
 Israel: Podemos decir que aquí, ¿cuántos globos tronó? /señala juego 1 en el pintarrón/
 Aos: Cinco.
 Israel: ¿De cuántos lanzamientos?
 Aos: De ocho.
 Israel: ¿Aquí cuántos globos tronó? /señala juego 2/
 Aos: Cuatro de ocho.
 Israel: Cuatro de ocho lanzamientos, y aquí, ¿cuántos globos tronó? /señala juego 3/
 Aos: Seis.

Con base en lo anterior identificamos que *Israel_KoT_R_5.*, conoce la representación numérica y verbal de la razón (parte-todo) en fracción ($5/8$; cinco globos tronados de ocho lanzamientos). Aunque identificamos que propicia algunas confusiones en los alumnos al pasar de la representación numérica y literal/verbal de la fracción que conocen ($5/8$; cinco octavos) a su representación en verbal en el contexto de las razones como parte-todo ($5/8$; cinco globos tronados de ocho lanzamientos). Al

finalizar la validación de la subtarea 3.1.3. b) Israel plantea algunas situaciones hipotéticas [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_4. 861-875]:

Israel: Si por ejemplo, les pusiera lo siguiente, que en el juego 4 /escribe en el pizarrón $3/8$ / si yo lo expresara así, ¿cuántos globos tronaría?
 Aa: Tres de ocho.
 Israel: Quiere decir que tronó, ¿cuántos globos?
 Aa: Tres de ocho.
 Israel: Tres de ocho. A ver y si en el juego 5 lo encuentran como por ejemplo /escribe en el pizarrón $2/8$ /, ¿qué quiere decir esto?
 Aa: Dos de ocho.
 Israel: Equipo amarillo [...]
 Aa: Dos de ocho.
 Israel: Que tronó [...]
 Aa: Dos globos.
 Israel: ¿De?
 Aa: Ocho.
 Israel: Muy bien [...]

A partir de las situaciones y preguntas que Israel realiza en el fragmento anterior identificamos que *Israel_KMT_ES_T_TA_E_4.*, conoce algunos ejercicios para que sean resueltos por los alumnos y les permitan poner en práctica sus conocimientos sobre la representación numérica y verbal de la razón contextos de parte-todo.

En la validación de la subtarea 3.1.3. c) Israel identifica algunas dificultades que pueden tener los alumnos al convertir las fracciones a números decimales [V1_Israel_KFLM_FD_8. 875-893]:

Israel: [...] Enseguida dice: Ahora convierte las fracciones anteriores en números decimales. En eso observé como que le batallaron un poquito porque todavía no habían visto los números decimales, pero ¿cómo le hicieron?, ¿quién me quiere decir? Vamos con este equipo /señala otro equipos/
 /Las alumnas escriben en el pintarrón /
 Israel: Todos los equipos ponemos atención, ¿cómo le hicieron?
 Aa: Nosotros le hicimos como aquí son $5/8$ [...] entonces como ya están dividimos quedó 5.8.
 Israel: Cinco punto ocho, en el juego 2. ¿Cómo les quedó? /señala otros alumnos/
 Aa: En el juego 2 dio 4.8
 Israel: 4.8. ¿Y en la otra?
 Aa: En la otra dio 6.8
 Israel: A ver, cómo lo hicieron los demás equipos. Dice el equipo verde que ellos le hicieron así, en el juego 1 le pusieron 5.8, acuérdense que el puto decimal es este [...] pero, ¿por qué ellos pusieron 5.8, de dónde sacaron el 5?
 Aa: De la fracción /señala $5/8$ /
 Israel: De la fracción [...] ellos como quien dice le quitaron la rayita y le pusieron el punto verdad, ¿alguien tiene otro resultado diferente?
 /Algunos alumnos levantan la mano/

En el fragmento anterior identificamos que **Israel_KFLM_FD_8.**, conoce que los alumnos pueden tener dificultades para convertir fracciones a números decimales y que un posible procedimiento es sustituir la diagonal por el punto (5/8-5.8). En la validación de la subtarea 3.1.3 b), evidencia algunas posibles dificultades de los alumnos y da muestra de otras situaciones donde formaliza el procedimiento a seguir [V1_Israel_KoT_P_3. 894-911]:

Israel: A ver pase el equipo rojo, ahorita los demás vean a ver si es lo mismo, los demás pongan atención, a ellos si alcancé a explicarles un poquito lo del punto decimal, los demás para que observen.
Aa: Dividimos $5 \div 8$ /señala el juego 1 en la tabla que está en el pintarrón/
Israel: $5 \div 8$, ¿cuánto les dio? Traes tus hojitas o en la calculadora.
/La alumna va por una calculadora y escribe el resultado en el pizarrón 0.625/
Israel: Equipo amarillo, ¿cuánto les dio a ustedes?
Aos: Igual.
Israel: ¿Y a ustedes?
Aos: Igual.
Israel: En la segunda, ¿qué les dio? /señala juego 2/
Ao: Cero punto cinco.
Israel: ¿A ustedes cuánto les dio? /señala otro equipo/
Aa: Cero punto cinco, nos dio igual.
Israel: Sí. En el tercer juego cuánto les dio.
Aa: 0.75
Israel: Muy bien, pero explícale al equipo verde, ¿qué dividiste? O ¿Cómo les dio esto?
Aa: Yo dividí $5 \div 8$ la fracción, acá $4 \div 8$ en el juego 2 y $6 \div 8$ en el juego 3.

En el fragmento anterior Israel se apoya en la aportación de uno de los equipos para identificar cómo se convierte cada fracción en número decimal es decir:.

Israel_KoT_P_3. Conoce que para convertir una fracción de la forma a/b a un número decimal se requiere dividir el numerador entre el denominador. Este conocimiento es evidenciado por Israel en otros fragmentos de transcripción de la videgrabación [V1_Israel_KoT_P_3. 932-949]:

Israel: Entonces, ¿cómo me salió este decimal?, ¿qué hice? Todos en su calculadora, si dividen $5 \div 10$, ¿cuánto les da?
Aa: 0.5
Israel: Muy bien, si dividen $1 \div 2$, ¿cuánto les da?
Aos: 0.5
Israel: Y si dividen $4 \div 8$, ¿cuánto les da?
Aos: 0.5
Israel: Entonces para obtener un decimal o números decimales o convertir una fracción en números, ¿qué debemos de hacer?
Ao: Multiplicar.
Israel: ¿Multiplicar?
Aos: Dividir.
Israel: Equipo naranja, si queremos convertir una fracción en número decimales, ¿qué debemos de hacer?
Aos: Dividir.
Israel: ¿Vamos a dividir lo de arriba o lo de abajo?
Ao: Lo de los dos lados.
Aa: Vamos a dividir $4 \div 8$

En el fragmento anterior, identificamos que Israel cuestiona a los alumnos sobre cómo se obtiene un número decimal y a la par, solicita realicen en su calculadora la división de $5 \div 10$ para que obtengan un número decimal; situación que realiza con otras fracciones para que confirmen que la división es el algoritmo adecuado en lugar de la multiplicación. Así, definimos que:

Israel_KMT_R_1.1. Conoce que la calculadora es un recurso que ayuda a convertir fracciones a números decimales.

En términos generales, los conocimientos didácticos que evidencia Israel en relación con la fase de formulación y validación permiten profundizar en su conocimiento especializado cuando enseña la noción de razón en su doble manifestación. Debido a que la Teoría de las Situaciones Didácticas se convierte en la teoría de enseñanza de referencia en la planificación y ejecución de las clases, antes de concluir con la identificación de su conocimiento especializado en las subtarefas 3.1. de la hoja de trabajo 1, presentamos un fragmento de su planificación donde hace referencia a una fase de institucionalización [P_Israel_KMT_T_6. 153-157]:

Fase de institucionalización:

Se dará una breve introducción a la razón de manera formal. Para ello, se les presentará a los alumnos la diapositiva 2, que muestra la relación que guarda el número de globos tronados con el número de dardos. Para una mejor comprensión en este primer momento, se presentará la diapositiva 3 como ejercicio de retroalimentación.

En este fragmento Israel asocia la fase de institucionalización con la presentación formal de la razón con apoyo de algunos recursos (diapositivas), donde rescata situaciones que se trabajaron en las subtareas 3.1.; además agrega un ejercicio de retroalimentación. Para obtener más información en relación con la fase de institucionalización en la Entrevista Semiestructurada 1 le preguntamos [ES1_Israel_KMT_T_6. 595-606]:

Israel: [...] viene una fase de institucionalización, nos puede comentar cuál es su propósito.

Israel: El propósito de esta fase de institucionalización es dar a conocer a los alumnos los saberes que estuvimos trabajando, darles conceptos, definiciones; contextualizar todo lo que estuvimos viendo de una forma más comprometida y más formal, por ejemplo, estuvimos viendo fracciones, partiendo, comparando. Por ejemplo, aquí comparamos globos tronados el números de lanzamientos /señala hoja de trabajo/; es como una síntesis y un resumen de todo lo trabajado, sería por parte del profesor. Esta fase es importante porque quizá los niños siempre esperan que el profesor sea el último que valide, esta institucionalización se me hace como una tipo validación del profesor, como que estuvimos haciendo esto, esto lo hicimos así [...], utilizamos este procedimiento como una validación más formal porque ahora sí es lo que los alumnos toman más en cuenta.

Como observamos, Israel agrega que la institucionalización es un momento de la clase donde el profesor expresa de manera formal a través de definiciones y conceptos los temas que se estuvieron trabajando, en este caso, menciona las fracciones. También relaciona la institucionalización con una validación formal a cargo del profesor. Sin embargo, durante esta entrevista le preguntamos a qué atiende que sea “una breve introducción a la razón”, a lo cual contesta [ES1_Israel_KMT_T_6. 607-611]:

E: Aquí usted dice que va a dar una breve introducción a la razón de manera formal y, para ello, presentará a los alumnos la diapositiva dos. Antes de que veamos la diapositiva dos, ¿por qué una breve introducción?, ¿por qué no toda?

Israel: Porque todavía faltan la hoja dos y tres, no podemos dar todo el concepto, aún queda un poquito de problematizar a los niños.

A partir de lo anterior, identificamos que Israel favorece la enseñanza de la razón a partir del diseño de tareas en tres hojas de trabajo, por el momento, pretende institucionalizar lo que corresponde a las subtareas de la hoja 1. Enseguida presentamos la Diapositiva 2 que Israel emplea en la fase de institucionalización:



En esta imagen observamos que Israel pretende institucionalizar la razón en contextos parte-todo al tomar como referente el puesto de Don Benjamín, es decir, rescata el número de dardos como el total y el número de globos tronados como la parte. Para enriquecer los conocimientos que Israel puede evidenciar a partir de la diapositiva anterior, recurrimos a indagar sobre esta situación en la Entrevista Semiestructurada 1 [ES1_Israel_KMT_T_6. 612-628]:

E: Respecto a la diapositiva dos, nos podría explicar cómo la va a trabajar con los alumnos, qué va a hacer, imaginémonos que está en el grupo, cómo la va a presentar.

Israel: Ya tenemos la proyección y para eso mencionamos que la razón como fracción, de lo que estuvimos viendo, puede comparar ciertas cantidades, por ejemplo, qué fue lo que estuvimos comparando o qué fue lo que estuvimos trabajando. En el segundo momento, espero que los niños mencionen lo que es la cantidad de los globos que tronaron y los lanzamientos mediante las actividades que estuvimos realizando. Entonces aquí se le expresa razón [...] en la presentación voy a decir razón entre el número de dardos y globos tronados (lo escribe en el pintarrón). Por ejemplo, la razón entre el número de dardos y los globos tronados es igual al número de globos tronados sobre lo que son el número de dardos (escribe No. Globos tronados/no. De dardos). Aquí, por ejemplo, dice número de dardos, tenemos una cantidad total que dijimos eran ocho y, del otro lado, tenemos los globos tronados, que dijimos que eran seis, aquí se muestra de forma icónica o ilustrativa el número de dardos y los números de globos que se tronaron y aquí se da una razón entre dardos y globos tronados. Mencionamos que la razón es igual al número de globos tronados, cuántos globos son, seis (escribe 6), cuántos dardos son, pues ocho (escribe 6/8) y si lo trabajamos como cociente la razón es de cero punto setenta y cinco (señala 0.75).

En fragmentos anteriores Israel señaló en la fase de institucionalización de las subtarear de la hoja 1, sólo daría una breve introducción al concepto de razón. De ahí que en la Entrevista Semiestructurada 1 lo cuestionamos sobre el límite de dicha institucionalización [ES1_Israel_KoT_R_6. 636-645]:

La información que nos brinda da cuenta de que se institucionaliza la razón como comparación de dos cantidades en contextos de parte-todo, pero nos brinda otra evidencia de conocimiento respecto a la lectura de la razón cuando se representa en fracción:

Israel_KoT_R_6. Conoce que cuando una razón se representa en fracción de la forma a/b su representación verbal atiende a enunciar el tipo de magnitudes que se están comparando: cuatro globos tronados de ocho lanzamientos, en lugar de cuatro octavos. A continuación presentamos la diapositiva 3 que acompaña la diapositiva 2 en la fase de la institucionalización:



La información que contiene la diapositiva 3 corresponde a los lanzamientos y globos tronados en el puesto de Don Octavio por José. De ahí que se pide exprese la relación entre los datos que se brindan a través de un número. En este primer momento, identificamos Israel plantea una actividad en la diapositiva 3, lo cual nos lleva a indagar en el propósito de su presentación [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_5. 647-663]:

Israel: Nos sirve para saber que nos vamos a quedar con el puesto de Don Octavio [...] Una vez que se explique a los alumnos cómo podemos representar esa razón, que dijimos será número de globos tronados sobre el número de total de lanzamientos, porque a lo mejor puede que existan niños que no captaron la idea central. Entonces se les pone otro pequeño planteamiento, dice “la tabla de abajo muestra el registro de los lanzamientos que realizó el amigo de Carlos ahora en el puesto de Don Octavio”. Aquí sería volver a analizar la información, es como una actividad, un problema extra como una forma más de consolidar. Si se les dice: la tabla de abajo tiene el registro de los lanzamientos que realizó José, el amigo de Carlos. En el puesto de Don Octavio para ganarse un premio tiene que tronar siete globos con diez dardos que le dan. Aquí tendríamos que analizar el puesto de Don Octavio donde para ganarse un premio tiene que tronar siete globos de diez lanzamientos que tiene. Enseguida se responde una tablita que son los globos tronados y abajo está el número de lanzamientos (escribe en el pintarrón), si nos fijamos en esta tablita fue lo que los niños estuvieron trabajando anteriormente, que era tratando información. Lo último dice “expresa la relación entre estos dos datos usando un número”, aquí espero que me den una fracción, mencionamos que la fracción es un número que se expresa en forma a sobre b (escribe a/b); esto se puede entender como número o quizá aquí le podemos poner como una fracción.

En función de lo expresado por Israel identificamos:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_5. Conoce un ejercicio que propicia los alumnos representen una razón a través de una fracción de la forma a/b .

En otro momento de la Entrevista Semiestructurada 1, Israel evidencia cuál es el propósito de que durante la institucionalización, los alumnos lleguen a expresar razones como fracciones [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_5. 664-680]:

E: ¿Usted quiere que se lo expresen como una fracción no como una razón?
Israel: Sí, porque estuvimos viendo que la razón, en este caso, la vamos a trabajar como una fracción, en los otros momentos si estuvimos trabajando un poquito la fracción como cociente, pero aquí si la vamos a trabajar más como una comparación entre dos números, que es lo que quiero los niños expresen, por ejemplo, en la diapositiva anterior que estuvimos viendo, era una pequeña institucionalización para expresar esa razón. Teníamos que poner el número de globos tronados y el número de lanzamientos o dardos. Espero aquí a los niños se les haya quedado esto (señala en el pintarrón No. Globos tronados/No. Dardos) que para expresarlo en una fracción o en una razón tienen que hacer en una forma de fracción. Así, espero los niños mencionen, cuántos lanzamientos tuvo, pues diez (escribe 10) y cuántos globos son los tronados uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, son seis (escribe 6) globos de diez lanzamientos, espero lo representen (escribe $6/10$) y mencionen qué quiere decir, por ejemplo, de diez lanzamientos falló cuatro, cuántos debería de tronar para ganarse el premio, pues siete; si tronó seis de los diez lanzamientos, ¿creen que haya ganado el premio? Que justifiquen su respuesta; algunos de los cuestionamientos que pueden realizarse en el camino. En fin, mediante este planteamiento espero que los niños hagan esto (señala $6/10$).

En el fragmento anterior, Israel señala que en la fase de institucionalización de la subtareas de la hoja de trabajo 1, pretende los alumnos identifiquen la razón como una comparación de cantidades (número de globos tronados y número de dardos) que se puede representar a través de una fracción. Para ello, toma como referente las situaciones planteadas en las diferentes subtareas.

De manera concreta, en la Entrevista Semiestructurada 2 Israel sintetiza lo anterior [ES2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_5. 567-572]:

E: Enseguida dice que va a usar la lámina tres como retroalimentación, ¿por qué agregar esta lámina?
Israel: Es lo que decíamos como que la razón es la precursora de la fracción. Entonces si hablamos que seis a ocho, pues aquí lo vemos seis de ocho y a lo mejor así damos pautas a representarlo con una fracción. Por lo tanto, si fue como retomar eso [...] que la razón nos ayuda o antecede a llegar a lo convencional que sería la fracción.

Como podemos observar, Israel establece algunas relaciones entre la razón y la fracción; en este momento, evidencia que la razón es precursora de la fracción. De ahí que inicia a trabajar la razón como una comparación entre dos cantidades para luego avanzar en su representación a través de una fracción de la forma a/b . Antes de avanzar con la presentación de los diálogos en el momento de la institucionalización, citamos información que proporciona Israel en relación con esta fase en el documento de Análisis de la Práctica [AP_Israel_KMT_T_6. 96-102]:

Fase de institucionalización: Es un asunto de orden metadidáctico, se configura a partir de procesos de reflexión que el docente hace sobre procesos generados por los estudiantes en torno a una búsqueda de conocimiento específico. La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización, y es única y exclusivamente por parte del profesor.

En el documento de Análisis de la Práctica, Israel refiere a algunos autores que abordan la Teoría de las Situaciones Didácticas donde destaca que en la fase de institucionalización maestro y alumnos realizan una búsqueda de un conocimiento específico, oficial y formal. Enseguida presentamos un fragmento donde se inicia la fase de institucionalización, de acuerdo al conocimiento evidenciado por Israel [V1_Israel_KMT_T_6.1. 952-979]:

Israel: Muy bien. Antes de terminar vamos a ver lo siguiente [...] /pega una lámina en el pintarrón/ vamos a ver qué relación hay entre el número de dardos con el número de lanzamientos [...] dice: si tomamos el número de dardos como el total, el número de globos ¿será qué?
Ao: Una parte de [...]
Israel: Serán solamente una parte de ese total; a eso le vamos a llamar una razón, que sería una comparación entre dos cantidades. Aquí yo tengo dos cantidades, por ejemplo, con Don Benjamín tenía, ¿qué? Tenía los dardos y, ¿qué más tenía?
Aos: Los globos.
Israel: Y los globos [...] dijimos que eran diferentes, había cierta diferencia. Vamos a ver, dice que la razón entre los globos tronados es igual, al número de qué [...]
Aa: Al número de globos tronados.
Israel: Al número de globos tronados entre [...]
Aos: Número de dardos.
Israel: Numero de dardos. Entonces, en el juego 1, equipo amarillo y equipo rojo, dice que la razón entre dardos y globos tronados es igual a número de qué [...]
Aa: Al número de globos tronados.
Israel: Al número de globos tronados, ésta es la parte, ¿qué? /señala en la lámina/
Aos: Del total.
Israel: Entre el número de dardos que sería el total. Dijimos que en el puesto de Don Benjamín, ¿cuál era el número de dardos?, ¿cuántos eran?
Aa: ¿De Don Benjamín?
Aa: Eran ocho dardos.
Israel: Aquí los tienen /señala en la lámina/ eran 1, 2,3...8, entonces el número de dardos va a ser mi cantidad qué [...]
Aos: Total.
Israel: Total, y el número de globos tronados va a ser [...]
Aos: Parte del total.

En función de lo anterior identificamos que **Israel_KMT_T_6.1.**, conoce que en la fase de institucionalización la comparación entre dos cantidades recibe el nombre de razón; lo anterior, se relaciona con las situaciones que se abordaron en clase: razón entre dardos y globos tronados es igual al número de globos tronados (parte del total) entre el número de dardos (cantidad total). Enseguida, en otro momento de la fase de institucionalización, Israel pone en juego otro tipo de conocimiento [V1_Israel_KMT_T_6.2. 980-1001]:

Israel: Parte de total, por ejemplo, en el juego 1, ¿cuántos globos tronó? Ahí los tienen.
Aos: Cinco.
Israel: Cinco, estamos diciendo que tronó, ¿cuántos?
Aos: Cinco.
Israel: Cinco de [...]
Aos: Ocho.
Israel: Cinco de ocho, en el juego 2, ¿cuántos tronó?
Aos: Cuatro.
Aos: Cuatro de ocho.
Israel: Entonces esta es la relación que existe entre el número de dardos y el número de globos, aquí yo estoy diciendo que tronó, ¿cuántos?
Aos: Cuatro.
Israel: Cuatro de [...]
Aos: De ocho.
Israel: Y en el juego 3, ¿cuántos globos tronó?
Aos: Seis.
Israel: Si lo pongo como seis octavos /escribe $\frac{6}{8}$ en el pintarrón/, ¿qué quiere decir?, ¿qué tronó qué?
Aos: Seis de ocho.
Israel: Que tronó seis globos de ocho. Entonces para finalizar, ¿si quedó claro lo que fue esta relación o esta razón? ¿Hasta aquí alguna duda?
/Los alumnos no contestan/

Al inicio de este fragmento, Israel enfatiza la relación que existe entre el número de globos tronados y el número de dardos en diferentes juegos; situaciones que más tarde lo llevan a otro escenario:

Israel_KMT_T_6.2. Conoce que durante la fase de institucionalización el profesor da a conocer la representación numérica y verbal de una razón a través de una fracción de la forma a/b .

Después de que Israel institucionaliza la representación de razones en fracciones con apoyo de la diapositivas/lámina 2, plantea las siguientes situaciones [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_5.1. 1002-1010]:

Israel: Por ejemplo, si tengo, en el juego 4 tronó 3 globos, ¿cómo lo puedo expresar con una fracción o con un número?
Aa: Con una fracción.
Israel: ¿Cómo sería? Si aquí tronó solamente 3 globos [...] /Los dibuja en la lámina/ A ver, equipo amarillo, si en el juego 4 tronó 3 globos, ¿cómo lo puedo expresar con una fracción?
Aos: Tres octavos.
Israel: ¿Dijimos que sería así? /escribe en el pintarrón $3/8$ / ¿Tronó cuántos?
Aa: Tres de ocho.
Israel: Tres de ocho [...]

En este fragmento identificamos que Israel_KMT_ES_T_TA_E_5.1., conoce que después de la institucionalización se pueden plantear otros ejercicios o situaciones verbales para que los alumnos representen razones a través de fracciones de la forma a/b . El indicador de conocimiento anterior, lo constatamos en el siguiente fragmento que corresponde a la última parte de la institucionalización [V1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_5.1. 1010-1044]:

Israel: [...] Vamos a ver si entendieron la idea, todos van a realizar lo siguiente [...] /pega una lámina en el pintarrón /, ¿qué dice aquí? [...] Dice, la tabla de abajo muestra el registro de los lanzamientos de José el amigo de Carlos, pero ahora, ¿en el puesto de quién?
Aos: De Don Octavio.
Israel: Dice, expresa la relación que existe entre estos dos datos, usando una fracción o un número, háganlo todos en la hojita de atrás, ¿cómo podrían expresar esto en una fracción o en un número?, ¿cómo le podrían hacer?
Aa: Contando los tiros.
/Los alumnos trabajan, mientras que Israel repite el planteamiento del problema/
Israel: A ver, ¿cuánto le salió a ustedes?
Aos: Cinco cuartos.
Israel: ¿A ustedes?
Aas: Seis décimos.
Israel: ¿A ustedes?
Aos: Cinco cuartos.
Israel: A ver equipo verde, ¿cuánto les salió?
Aos: Seis décimos.
Israel: Va a pasar este equipo a decirles por qué les dio eso [...]
Aa: Si contamos los globos que tronó son seis, y las veces que tiró son diez.
Israel: Aquí ya no están jugando con Don Benjamín, ahora están jugando con [...]
Aos: Don Octavio.
Israel: Y dijimos que con Don Octavio para ganar un premio tenía que tronar cuántos [...]
Ao: Siete.
Israel: ¿Siete de cuántos?
Aos: Siete de diez.

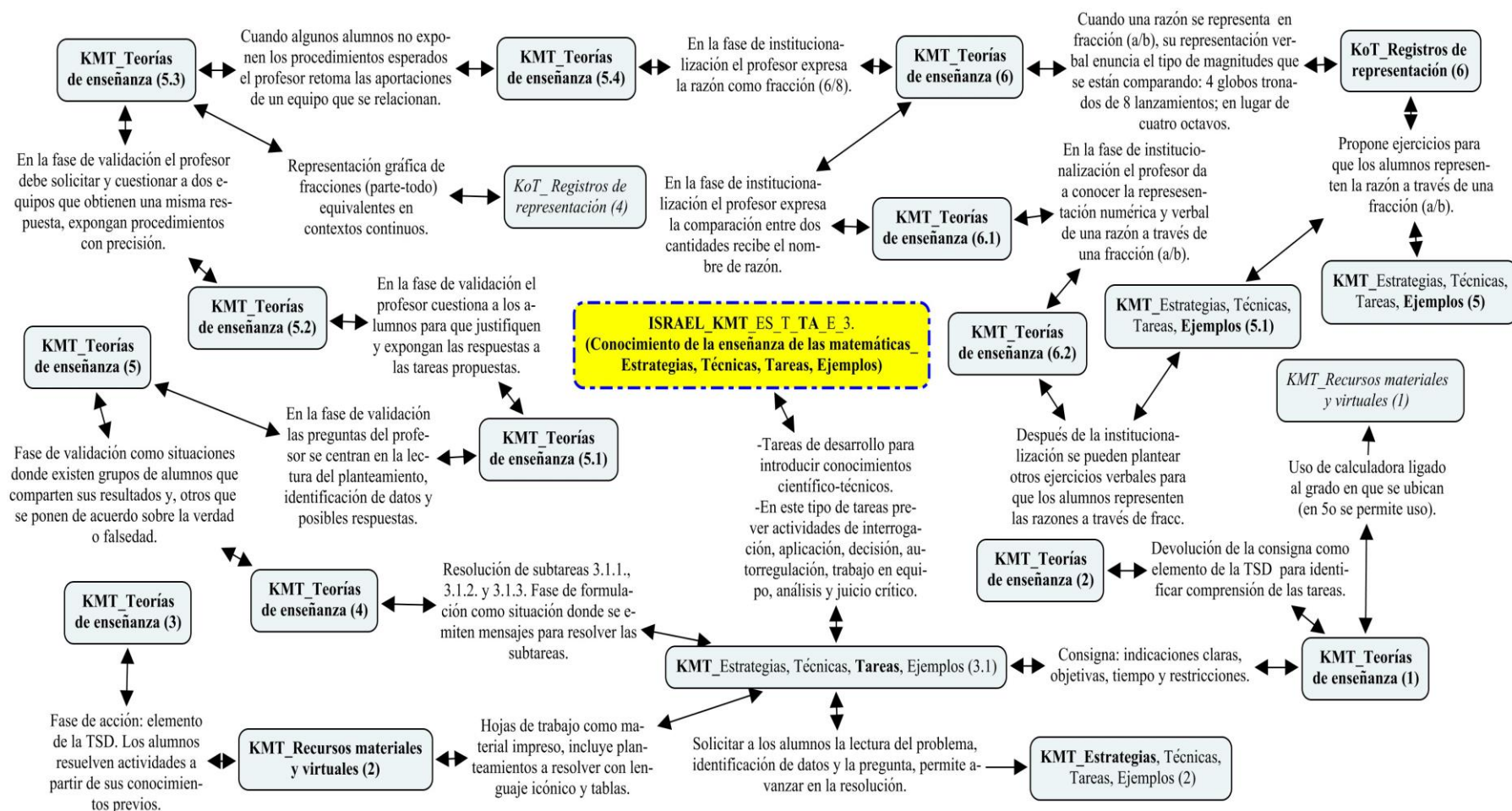
Israel: ¿Y cuántos tronó?
Aos: Seis.
Israel: ¿Y de cuántos?
Aos: De diez.
Israel: Entonces si expresamos esta relación con una fracción, ¿cómo quedaría?
Aos: Seis décimos.
Israel: Seis decimos qué quiere decir [...] ¿Cuánto?
Aos: Seis de ocho.
Israel: ¿Seis de ocho? [...] seis globos tronados de diez lanzamientos, de diez dardos [...]

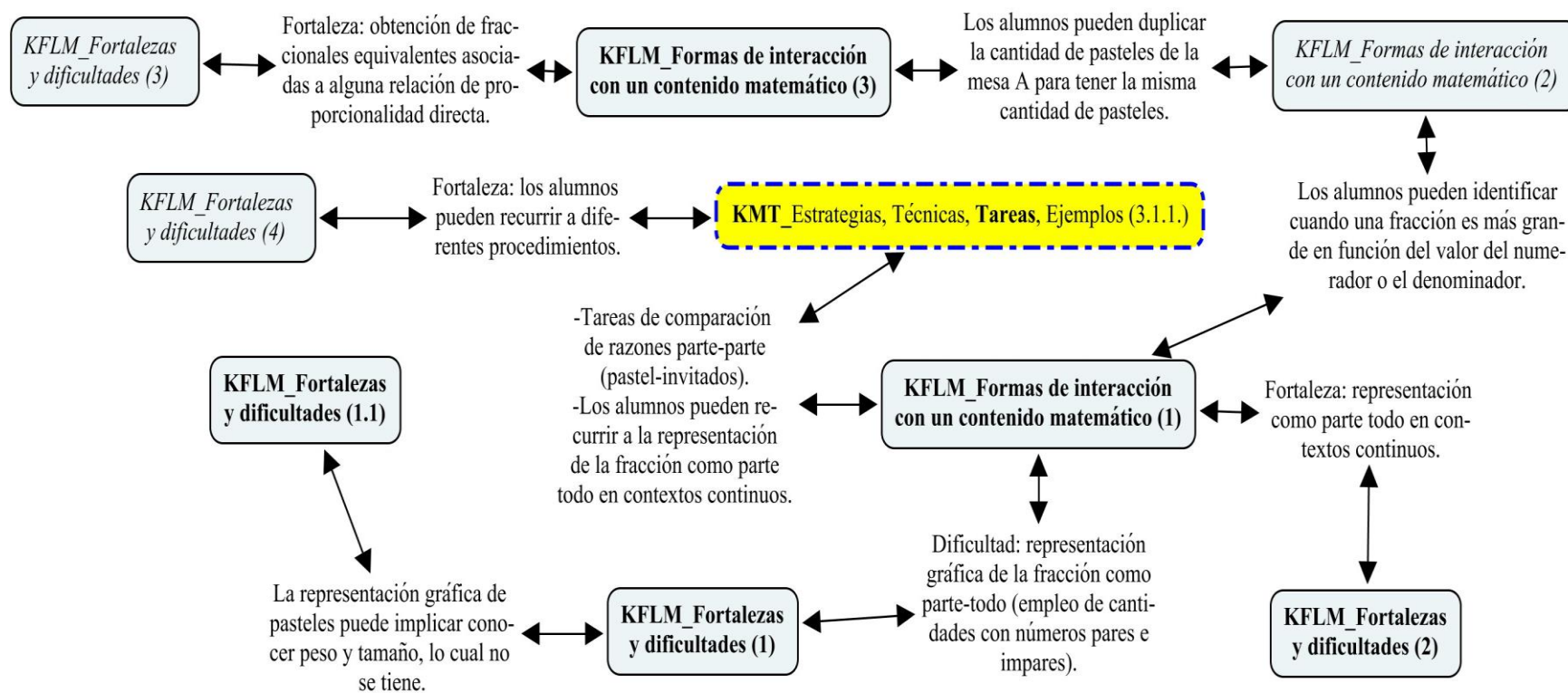
En el fragmento anterior Israel retoma el contexto del puesto de Don Octavio, da lectura a la información que proporciona la lámina para indicarles que deben expresar la relación que existe entre dos datos usando una fracción o un número. Así, introduce a los alumnos a la representación numérica y verbal de la razón (comparación entre dos cantidades) a través de una fracción de la forma a/b .

En los siguientes apartados agregamos algunas figuras que muestran las relaciones de conocimientos entre los diferentes dominios y subdominios del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), así como una descripción de las mismas.

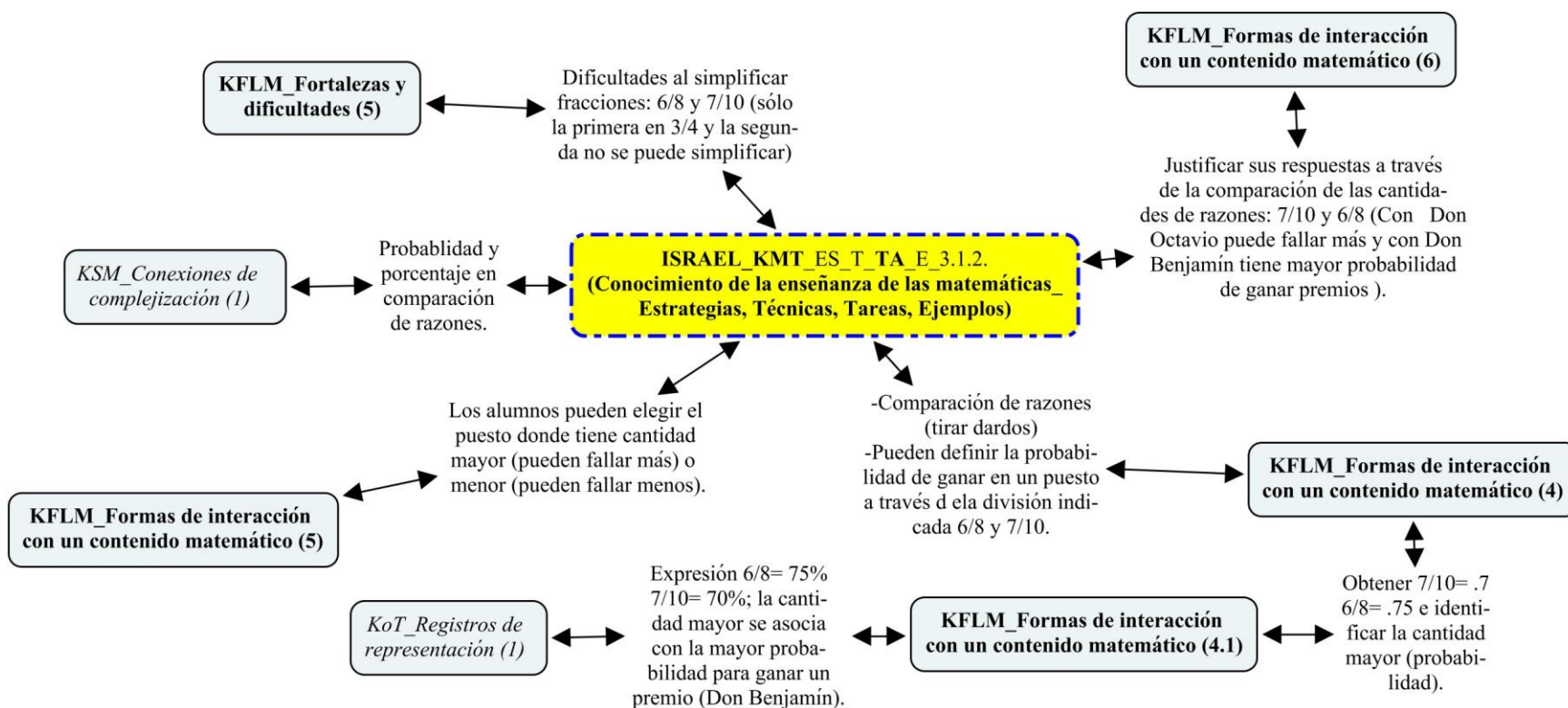
V.3.4.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Tareas del desarrollo 3.

Subtareas 3.1.

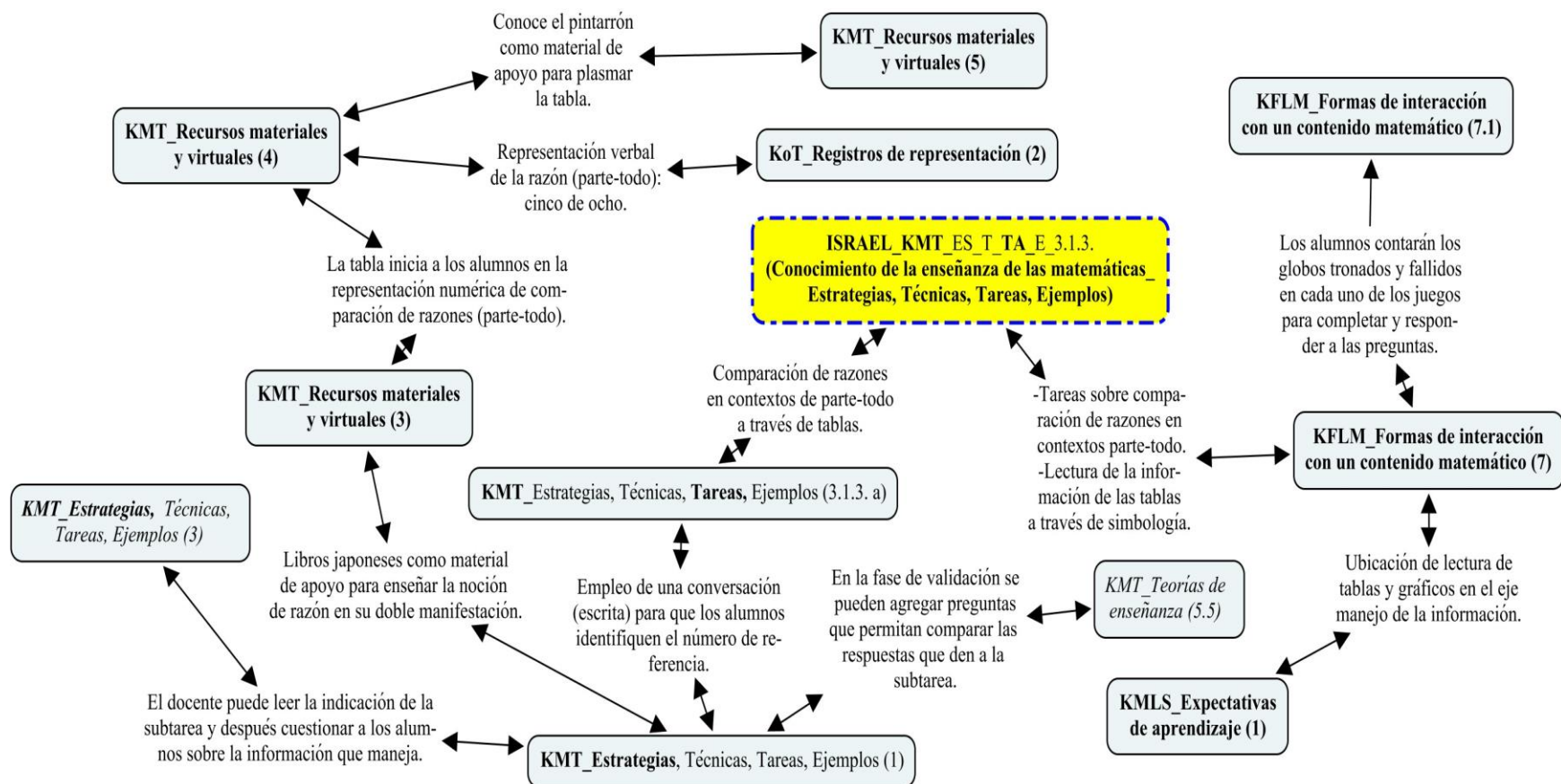


V.3.4.1. *Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.1.1.*

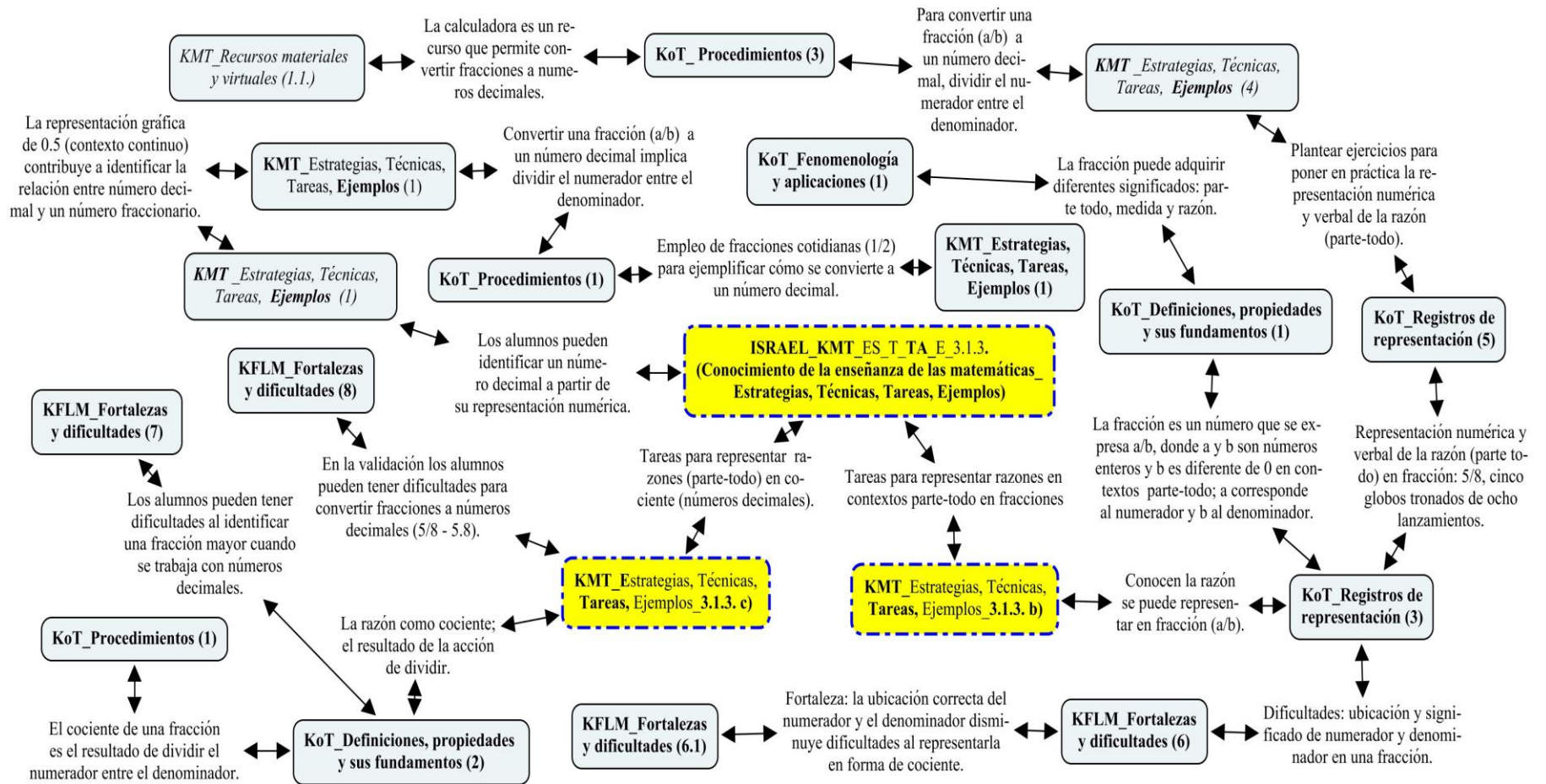
V.3.4.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.1.2.



V.3.4.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.1.3.



V.3.4.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.1.3.



V.3.4.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Subtareas 3.1.

En la Planificación de Israel encontramos un apartado denominado “Desarrollo” y al conjunto de tareas que ahí ubica las identificamos como tareas de desarrollo que favorecen la enseñanza de la noción de razón su doble manifestación. Los datos obtenidos en la Planificación, Entrevistas Semiestructuradas (1y 2) y el documento de Análisis de la práctica nos permiten identificar y caracterizar evidencias e indicios del conocimiento matemático y didáctico de Israel.

En el documento de Análisis de la Práctica, Israel destaca las tareas de desarrollo como un segundo momento de la situación didáctica donde se introducen nuevos conocimientos científicos-técnicos a través de actividades de aprendizaje y evaluación. (KMT_ES_T_TA_E_1). Además, señala que en este tipo de tareas se debe prever el trabajo de actividades de interrogación, aplicación, decisión, autorregulación, trabajo en equipo, análisis y juicio crítico (KMT_ES_T_TA_E_2). Seguido de esto, Israel evidencia conocimiento de la consigna como las indicaciones que se dan a los alumnos en función de las actividades que van a realizar, mismas que deben ser claras, objetivas, definir el tiempo y algunas restricciones (KMT_T_1). En su Planificación, Israel solicita a los alumnos, organizados en equipos que resuelvan algunas subtareas que aparecen en una hoja de trabajo (3.1.) donde favorece la comparación de razones (3.1.1.), la expresión de razones en fracciones (3.1.2.) y la conversión de fracciones en números decimales (3.1.3.); en las subtareas anteriores Israel señala a los alumnos que pueden usar la calculadora porque advierte que su uso está ligado al grado en que se ubican en la educación primaria: en los primeros grados se debe limitar su uso, mientras que en quinto se puede aprovechar para optimizar el tiempo de las actividades porque ya conocen cómo se resuelve una operación (KMT_R_1).

En las Entrevistas Semiestructuradas 1 y 2, Israel evidencia conocimiento de la devolución de la consigna como un elemento de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en ésta el profesor plantea el problema a resolver. De ahí que la devolución de la consigna se convierte en una estrategia que el maestro emplea para identificar si los alumnos comprendieron las indicaciones de las actividades que van a realizar (KMT_T_2).

Después de la devolución de la consigna, en la Planificación presenta las hojas de trabajo (material impreso que incluye planteamientos a través de un lenguaje icónico) y se apoya en tablas que representan la información de los problemas y cuadros que permiten organizar la información (KMT_R_2). Israel estructura la Planificación de las hojas de trabajo en función de cuatro fases o

situaciones de la Teoría de las Situaciones Didácticas: acción, formulación, validación e institucionalización. Respecto a la fase de acción, señala se presenta cuando los niños comienzan a resolver problemas a partir de sus conocimientos previos, que les permiten realizar analogías o conjeturas mentales. Por lo cual, el papel del maestro consiste en realizar devoluciones a través de preguntas que orientan al alumno para que se haga responsable de las tareas que se le proponen; lo anterior, lo ubica en una situación adidáctica (**KMT_T_3**).

En el inicio de la hoja de trabajo 3, identificamos que Israel conoce una tarea para establecer una comparación de razones parte-parte, es decir, pastel-invitados en dos mesas: A y B, cuyo propósito es definir en cuál mesa le toca más pastel a cada invitado (**KMT_ES_T_TA_E_3.1.1**). En relación con las formas de interacción de los alumnos con esta subtask, Israel conoce que los alumnos pueden recurrir a procedimientos ligados con la representación de la fracción como parte-todo en contextos continuos para representar la cantidad de pastel que le corresponde a cada persona en las mesas A y B (**KFLM_IC_1**). Por otra parte, conoce que los alumnos pueden identificar cuándo una cantidad es más grande (fracción de pastel) en función del valor del numerador (1 y 2) o el denominador (5 y 7) (**KFLM_IC_2**).

En la relación con las fortalezas y dificultades que los alumnos pueden tener al resolver la subtask 3.1.1., encontramos que Israel conoce que los alumnos pueden tener dificultades para representar de manera gráfica (fracción parte-todo en contextos continuos) la situación de la mesa B: 2 pasteles se reparten entre 7 invitados, ya que aumenta la cantidad de pasteles (2) y el número de invitados (7) (**KFLM_FD_1**); conoce una posible representación gráfica de los pasteles de la mesa B que implicaría que los alumnos conocieran el tamaño y peso de los dos pasteles para juntarlos y dividirlo entre los siete invitados; dicha información no se tiene (**KFLM_FD_1.1**); conoce una fortaleza de los alumnos para resolver una tarea de comparación de razones (parte-parte), es la representación de fracciones como parte-todo en contextos continuos (**KFLM_FD_2**); Conoce una fortaleza de algunos alumnos para resolver una tarea de comparación de razones (parte-parte), la obtención de fracciones equivalentes asociadas a algunas relaciones de proporcionalidad directa (**KFLM_FD_3**) y, conoce que los alumnos pueden recurrir al empleo de diferentes procedimientos para resolver un problema, en este caso de comparación de razones (parte-parte) (**KFLM_FD_4**).

En la subtask 3.1.2., Israel plantea un problema que implica la comparación de razones en el contexto de dos puestos de globos: “En el puesto de Don Benjamín tiene que tronar 6 globos con 8 dardos para ganarse un regalo, en el puesto de Don Octavio tiene que tronar 7 globos con 10 dardos para ganarse el

regalo. ¿En cuál de los dos puestos le conviene jugar para llevarse un regalo?”. En un primer momento, Israel menciona conoce que los alumnos pueden determinar en cuál puesto hay mayor probabilidad de ganar a través la división $6/8$ y $7/10$ (**KFLM_IC_4**). Además, conoce que al realizar la división indicada de $7/10$ los alumnos van a obtener $.7$ y al dividir $6/8$ $.75$, lo cual les permitirá identificar la cantidad mayor para asociarla con la probabilidad que se ganen ese premio (**KFLM_IC_4.1**). De ahí que los cocientes obtenidos al realizar la división indicada de $6/8$ y $1/10$ se pueden expresar en porcentajes: 75% y 70% . Así, pueden seleccionar el puesto de Don Benjamín (**KoT_R_1**). También, Israel conoce que algunos pueden elegir el puesto de Don Benjamín porque tiene cantidades menores, por lo tanto, pueden fallar menos; aunque otros alumnos pueden mencionar que les conviene el puesto de Don Octavio porque tienen más oportunidad de fallar (3) y se les otorgan más dardos (10) (**KFLM_IC_5**).

Hasta aquí identificamos que Israel conoce que durante la resolución de tareas de comparación de razones los alumnos pueden recurrir a la probabilidad al comparar en cuál puesto es más probable obtener un regalo. Además, el porcentaje puede ser una forma para representar el cociente de las divisiones indicadas que realizaron en función de cada puesto, lo que les permitirá determinar que en el puesto de Don Benjamín existen mayores posibilidades de obtener un premio (**KSM_C_1**). En esta subtarea Israel expresa que los alumnos pueden tener algunas dificultades al simplificar las fracciones $6/8$ y $7/10$ para identificar en cuál puesto conviene jugar, pues se puede lograr en la primera ($3/4$), pero en la segunda no (**KFLM_FD_5**). Al final, en la Entrevista Semiestructurada 1, Israel conoce que los alumnos justificarán sus respuestas a través de la comparación de las cantidades de las razones; en el caso del puesto de Don Octavio pueden ganar porque pueden fallar más, mientras que los que seleccionen el puesto de Don Benjamín argumentarán son menos dardos y tienen mayor probabilidad de ganar más premios (**KFLM_IC_6**).

En la subtarea 3.1.3., identificamos que Israel conoce una tarea para trabajar la comparación de razones en contextos de parte-todo (**KMT_ES_T_TA_E_3.1.3**). En esta subtarea, Israel recurre al contexto del puesto de Don Benjamín para que los alumnos identifiquen los globos tronados y los globos fallidos en tres juegos con el propósito de que señalen si en algún juego Carlos, quien jugó en este puesto, ganó algún premio. En relación con el conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con este tipo de subtareas, Israel conoce los alumnos se pueden iniciar en la lectura de la información que se presenta en la tabla a través de la simbología que se muestra sobre los globos tronados y tiros fallidos. Así, los alumnos identifican que se trata del puesto de Don Benjamín donde por cada ocho dardos debes tronar seis globos para obtener un premio (**KFLM_IC_7**). Además, conoce que los alumnos

contarán los globos tronados y fallidos en cada uno de los tres juegos para compararlos e identificar dónde Carlos tronó seis globos y se ganó un premio: juego tres (**KFLM_IC_7.1**); lo anterior evidencia que Israel conoce la lectura de tablas y gráficas para rescatar información que permite dar respuesta a diferentes planteamientos (**KMLS_EA_1**).

En las subtareas 3.1.3., se encuentran tres tipos de subtareas donde Israel continúa con la enseñanza de la razón en contextos parte-todo. En la subtarea 3.1.3. a) identificamos que conoce el empleo la conversación entre un niño y una niña como estrategia para que los alumnos avancen en la identificación del número de referencia en el puesto de Don Benjamín, es decir, el total de lanzamientos en cada juego (**KMT_ES_T_TA_E_1**). En este contexto, Israel evidencia conocimiento de algunos libros japoneses como materiales de apoyo en el diseño de tareas para la enseñanza de la noción de razón (**KMT_R_3**). Además, conoce las tablas como un recurso para iniciar a los alumnos en la representación numérica de comparaciones de razones (parte-todo) que, posteriormente los puede llevar a representar una fracción (**KMT_R_4**) y, conoce la representación verbal de la razón (parte-todo): cinco de ocho (**KoT_R_2**).

En la subtarea 3.1.1. a), Israel retoma el puesto de Don Benjamín donde Carlos realizó tres juegos. Así, evidencia conocimiento de una tarea para representar razones en contextos de parte-todo en fracciones (**KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. b**), donde el numerador corresponde a la parte que se toma (globos tronados) y el denominador al total de lanzamientos (**KoT_R_3**). Por lo cual, plantea algunos cuadros en blanco para que los alumnos ubiquen las cantidades de cada juego en el lugar que corresponde. Israel señala que entre las dificultades que los alumnos pueden tener al resolver la subtarea anterior se encuentra lo relacionado con la ubicación y significado del numerador y denominador en una fracción, es decir, coloquen el numerador en lugar del denominador y viceversa y, asocien la parte con el todo y viceversa (**KFLM_FD_6**). En esta subtarea, una fortaleza puede estar asociada a la ubicación correcta del numerador y denominador en una fracción, lo cual, disminuye las dificultades de los alumnos al representarla en forma de cociente (**KFLM_FD_6.1**).

El contexto de la subtarea 3.1.3. b) contribuye a que Israel evidencia conocimiento de la definición de fracción: conoce la fracción como un número que se expresa a/b , donde a y b son números enteros y b es diferente de cero en contextos parte-todo; donde a representa el numerador, es decir, las partes que se toman de la unidad y b representa el denominador, es decir, el total de partes iguales en que se divide la unidad (**KoT_D_1**). Además, conoce que la fracción puede adquirir diferentes significados: parte-todo, medida y razón; ésta última la asocia con la comparación entre dos cantidades (**KoT_F_1**).

En la subtarea 3.1.3. c), Israel conoce una tarea para representar razones (parte-todo) en cociente (números decimales) (KMT_ES_T_TA_E_3.1.3. c) y evidencia que conoce la razón como un cociente; el resultado de la acción de dividir (KoT_D_2.), es decir, conoce que el cociente de una fracción es el resultado de dividir el numerador entre el denominador (KoT_P_1). Una de las dificultades que pueden tener los alumnos, Israel señala, consiste en la identificación de una cantidad mayor cuando se trabaja con números decimales (KFLM_FD_7).

En las Entrevistas Semiestructuradas, Israel evidencia conocimiento de que cuando los alumnos se inician en la resolución de las subtareas de la hoja de trabajo 1, se encuentran en una fase de acción. En este momento de la clase, Israel evidencia conocimiento de las siguientes estrategias: conoce que solicitar a alguno o algunos alumnos la lectura del problema planteado, identificar los datos que maneja y la pregunta a responder permite avancen en la resolución de las tareas (KMT_ES_T_TA_E_2) y, conoce que el docente puede leer la indicación de la subtarea y después cuestionar a los alumnos sobre la información que se maneja (KMT_ES_T_TA_E_3). Durante la aplicación de las estrategias anteriores, Israel conoce que el pintarrón es un apoyo para plasmar información que se presenta en las subtareas, en este caso, una tabla (KMT_R_5).

A partir de las interacciones que se presentan entre Israel y los alumnos, se expresan evidencias e indicios de conocimiento en relación con algunos ejemplos que se pueden emplear, así como algunas de sus características, es decir, conoce que los alumnos pueden identificar un número decimal a partir de su representación numérica (KMT_ES_T_TA_E_1.), conoce que plantear como ejemplo la representación gráfica (contextos continuos) del número decimal 0.5 contribuye a que los alumnos identifiquen algunas relaciones entre un número decimal y una fracción de la forma a/b (KMT_ES_T_TA_E_2.) y, conoce que tomar como referente una fracción cotidiana de trabajo con los alumnos ($1/2$) para ejemplificar cómo se convierte a un número decimal (dividir el numerador entre el denominador) favorece que en otras situaciones identifiquen las representaciones numéricas correctas para un número decimal (KMT_ES_T_TA_E_3). En este contexto, Israel destaca que convertir una fracción de la forma a/b a un número decimal implica dividir el numerador entre el denominador (KoT_P_2).

En la Planificación, Israel presenta la fase de formulación-validación como conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas que orientan en la enseñanza de la noción de razón. Durante las Entrevistas Semiestructuradas (1 y 2), la Videograbación 1 y el documento de Análisis de la Práctica, Israel

evidencia conocimiento de la fase de formulación como la situación o situaciones donde existe un emisor (alumno o grupo de alumnos) y receptor (alumno o grupo de alumnos); el primero debe formular un mensaje al segundo, quien se debe iniciar en la comprensión del mensaje y actuar con base en su contenido (**KMT_T_4**). En relación con la fase de validación, conoce que se refiere a una situación donde existen diferentes grupos de alumnos; un grupo intenta convencer al resto de que los procedimientos empleados para resolver cierta tarea son los correctos, mientras que los otros grupos se ponen de acuerdo sobre la verdad o falsedad de los mismos (**KMT_T_5**).

Durante las interacciones que se presentan entre Israel y los alumnos en la fase de validación de la Videograbación 1; el primero muestra algunos conocimientos matemáticos y didácticos: conoce que las primeras preguntas que el profesor realiza durante la fase de validación se centran en la lectura del planteamiento de la tarea, la identificación de los datos que involucra y las posibles respuestas a la misma (**KMT_T_5.1**), conoce que conforme avanza en la fase de validación se cuestiona a los alumnos para que justifiquen y expongan las respuestas que dan a la tarea (**KMT_T_5.2**), conoce que durante la fase de validación debe solicitar y cuestionar a dos equipos que obtienen una misma respuesta a una tarea expongan los procedimientos empleados con precisión (**KMT_T_5.3**), conoce diferentes procedimientos que los alumnos pueden exponer durante la fase de validación, sin embargo, cuando alguno de ellos no es presentado, retoma las aportaciones de algún equipo para presentar uno de los procedimientos esperados (igualar cantidad de mesas) (**KMT_T_5.4**) y conoce que durante la fase de validación se pueden agregar algunas preguntas que permiten comparar las respuestas que se dieron en la subtarea (**KMT_T_5.5**).

En la fase de validación, Israel evidencia que conoce la representación gráfica de fracciones (parte-todo) equivalentes en continuos ($2/10$ y $1/5$) (**KoT_R_4**) y conoce la representación numérica y verbal de la razón (parte-todo) en fracción ($5/8$; cinco globos tronados de ocho lanzamientos) (**KoT_R_5**). Además, conoce algunos ejercicios que permitan a los alumnos poner en práctica sus conocimientos sobre la representación numérica y verbal de la razón contextos de parte-todo (**KMT_ES_T_TA_E_4**). En relación con alguna de las dificultades que los alumnos pueden tener, Israel manifiesta que pueden presentarse al convertir fracciones a números decimales, por lo cual, un posible procedimiento es sustituir la diagonal por el punto ($5/8-5.8$) (**KFLM_FD_8**). Así, conoce que para convertir una fracción de la forma a/b a un número decimal se requiere dividir el numerador entre el denominador (**KoT_P_3**). De ahí que conoce que la calculadora es un recurso que ayuda a convertir fracciones a números decimales (**KMT_R_1.1**).

Israel asocia la última parte de trabajo con las subtareas 3.1., en forma grupal, con la fase de institucionalización de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Así, conoce la fase de institucionalización como un momento de la clase donde el profesor se puede apoyar de algunos recursos para expresar la razón como fracción ya que permite comparar la cantidad de globos que tronaron (6) y el total de dardos (lanzamientos) (8): $6/8$ (**KMT_T_6**). De ahí que conoce que cuando una razón se representa como fracción de la forma a/b su representación verbal enuncia el tipo de magnitudes que se están comparando: cuatro globos tronados de ocho lanzamientos, en lugar de cuatro octavos (**KoT_R_6**). En este contexto, Israel conoce un ejercicio que propicia que los alumnos representen una razón a través de una fracción de la forma a/b . Más adelante, Israel evidencia que conoce que en la fase de institucionalización se expresa la comparación entre dos cantidades y recibe el nombre de razón (**KMT_T_6.1**). Además, conoce que durante la fase de institucionalización el profesor da a conocer la representación numérica y verbal de una razón a través de una fracción de la forma a/b (**KMT_T_6.2**). Por último, Israel conoce que después de la institucionalización se pueden plantear otros ejercicios o situaciones verbales para que los alumnos representen algunas razones a través de fracciones de la forma a/b (**KMT_ES_T_TA_E_5.1**).

V.3.5. Subtareas 3.2. Conocimiento especializado de Israel.

La Planificación de Israel incluye diferentes tareas para enseñar la noción de razón, en párrafos anteriores describimos indicadores del conocimiento especializado de Israel en relación con la enseñanza de la razón como una comparación de dos cantidades que se puede representar a través de una fracción de la forma a/b . En el presente apartado identificamos el conocimiento matemático y didáctico que Israel pone en juego en el diseño y ejecución de las subtareas 3.2. (hoja de trabajo 2). Con el propósito de avanzar en su delimitación, enseguida presentamos un fragmento de la Planificación donde Israel hace referencia a las subtareas 3.2. [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 158-163]:

Consigna 2

Una vez analizado lo anterior se les entregará una hoja de trabajo 2. Organizados en los mismos equipos resuelven los problemas que aparecen en sus hojas, menos la última actividad, ésta se separa del resto con una línea negra, no la contesten todavía, recuerden que no se puede estar platicando con otros equipos. Tienen 20 minutos para terminar, de igual manera, se podrá hacer uso de la calculadora.

El trabajo que Israel pretende desarrollen los niños lo ubica en un apartado denominado “consigna 2”. De manera general señala algunas condiciones en las que se va a dar la resolución de las subtareas propuestas: trabajo en equipo, no contestarán la última actividad, tienen 20 minutos y pueden usar calculadora. Durante la Entrevista Semiestructurada 1, preguntamos a Israel sobre la existencia de una consigna más, a lo cual responde [ES1_Israel_KMT_T_1. 686-691]:

E: Después de esto viene una consigna 2, ¿por qué viene otra consigna?

Israel: Los alumnos van a trabajar una actividad, pero en la clase debe existir una pausa para institucionalizar esos saberes, pero después va a ser necesario retomar la actividad. Por eso agregué una consigna dos y, por ejemplo, el maestro Maldonado nos dijo que la situación didáctica son fases, pero también nosotros tenemos la libertad de regresar a esas fases, de volver a poner consignas, que a lo mejor implícitamente lo tenemos en las clases.

Como podemos observar, el conocimiento que Israel posee sobre su teoría de enseñanza: TSD, permea la organización de las subtareas en su planificación ya que:

Israel_KMT_T_1. Conoce que al plantear diferentes de tareas en una planificación puede recurrir la cantidad de veces que crea conveniente a algunos conceptos de la TSD. Por ejemplo, consigna y fases.

Enseguida presentamos las subtarear 3.2. de la hoja de trabajo 2 [P_ Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 164-199]:

Figura 20. Subtarear 3.2.

Hoja de trabajo 2

Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la tienda "Fiesta Alegre" le rentaron una mesa "chica" para 130 personas y en la tienda "Todo para tu fiesta" le rentaron una mesa "grande" para 520 personas. Carlos y sus amigos registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.

Número de personas y asientos

	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?

Para saber que tan lleno se encuentra cada mesa, el grado de aglomeración se describe como un número que permite comparar el número de personas sentadas respecto al número de asientos.

Grado de aglomeración = $\frac{\text{Número de personas}}{\text{Número de asientos}}$

Cantidad que está siendo comparada Cantidad de referencia

Encuentra que tan cerca están de agotar su capacidad las mesas.

Mesa chica $117 \div 130 = \boxed{}$

Mesa grande $\boxed{} \div \boxed{} = \boxed{}$

Expresa el grado de aglomeración de la mesa grande coloreando el siguiente gráfico.

Número de asientos ocupados

Razón

Como podemos observar, está integrada por tres subtarear: 3.2.1., la renta de mobiliario para la fiesta que realizará el Alcalde, donde destaca la tienda "Fiesta Alegre" y "Todo para tu fiesta", así como la capacidad de asientos y el número de personas que se encuentran sentadas en cada una de ellas. De ahí que, en un primer momento, el propósito es identificar cuál mesa se encuentra más llena. En la subtarear 3.2.2. se pide a los alumnos determinen el grado de aglomeración en cada mesa, es decir, cuál mesa se encuentra más llena. Al final se pide a los alumnos identifiquen el grado de aglomeración de la mesa

grande en una recta numérica. En la Entrevista Semiestructurada 2 preguntamos a Israel en cuáles materiales se apoyó para diseñar sus actividades y menciona [AP_Israel_KMT_R_1. 143-150]:

Israel: [...] algunas ideas y situaciones en las que me basé fue la actividad de las mesas, donde se menciona había una mesa chica y una mesa grande, se decía la capacidad de cada una de ellas y la cantidad de personas sentadas con el propósito de identificar cuál de las dos mesas está más llena. Al final viene como esa comprobación donde decía que dibujara o sacaras el resultado de dividir y lo representaras en una gráfica y, se identificara, cuál mesa estaba menos llena y, se hiciera como una analogía a realizar lo mismo con la otra mesa y, se hiciera una comparación; eso lo tomé de los libros japoneses, el contexto lo cambié porque todo giraba en torno a una feria.

En este fragmento de entrevista identificamos que **Israel_KMT_R_1**. Conoce los libros japoneses que se revisan en la escuela normal proporcionan información sobre el tipo de tareas que se pueden diseñar para trabajar la razón como una comparación en contextos de parte-todo. Es importante mencionar Israel señala que en el diseño de sus actividades toma como referente las propuestas de los libros japoneses, pero realiza algunas modificaciones en función del contexto inicial de su planificación: una feria. Para identificar el conocimiento que Israel pretendía poner en juego en estas subtarear, a continuación presentamos un fragmento del documento de Análisis de la Práctica donde expresa [AP_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 423-434]:

La situación didáctica que se presentará en este escrito es la segunda actividad de tres planificadas para el tema “La fracción como razón”, en la cual se presenta a los alumnos una situación problemática en la que tendrán que comparar y discutir sobre cuál mesa se encuentra más llena. Para ello, se les presentan dos mesas, una grande y una chica, ambas con diferente número de personas sentadas, y diferente número de asientos disponibles, con base en los datos proporcionados los alumnos tendrán que comparar el grado de aglomeración. Brousseau (1986) define una situación didáctica con sus propias palabras como:
[...] el conjunto de relaciones establecidas explícitamente e/o implícitamente entre el alumno o grupos de alumnos, en un cierto medio –que corresponde instrumentos y objetos- y el profesor con el fin de hacer que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (citado en Centeno, 1997, p. 115).

A partir del fragmento anterior identificamos que Israel planificó las subtareas 3.2 en función de una situación didáctica, donde el saber que está en vías de construcción es “la fracción como razón” en el tema “el grado de aglomeración”. En el documento de Análisis de la Práctica, menciona posibles dificultades que pueden tener los alumnos al abordar temáticas como las descritas [AP_Israel_KFLM_FD_1. 444-457]:

Abordar estos conceptos (razón, fracción y grado de aglomeración), posiblemente no muy comunes para los niños, debe hacerse con cautela, en el sentido de no confundirlos y crear posibles obstáculos epistemológicos. Al respecto, Centeno (1997) dice que:
Se llaman obstáculos epistemológicos a estas concepciones que son constitutivas del conocimiento. Como tales dependen únicamente del concepto mismo, son inherentes a la noción a que se refieren y, por consiguiente, cualquiera que desee adquirir esa noción deberá superar esos obstáculos. No es posible prescindir de los obstáculos epistemológicos, puesto que superarlos forma parte del conocimiento (p. 145).
Claramente no se pretende que el niño memorice estos conceptos en la actividad, pero si se considera importante que al menos los conozcan y tengan por más mínimo que sea dominio de ellos. En esta actividad al tocar estos conceptos, los niños sí mostraron cierto grado de confusión respecto a qué hacen alusión exactamente, mi desafío fue encaminar hacia el entendimiento [...]

De manera general, identificamos que *Israel_KFLM_FD_1.*, conoce los obstáculos epistemológicos de razón, fracción y grado de aglomeración pueden suscitar confusiones en los alumnos durante la resolución de las subtareas. Después de que Israel presenta en su Planificación las subtareas de la hoja de trabajo 2, agrega una fase de acción [P_Israel_KMT_T_200-203]:

Fase de acción:

- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 2, los alumnos comienzan a realizar conjeturas mentales y se espera que el trabajo en equipo trate de brindar más ideas para resolver los problemas.

En este fragmento Israel destaca la fase de acción como el momento en que los niños resuelven las subtareas de la hoja 2; situación que retomamos en la Entrevista Semiestructurada 1 para que Israel mencione el propósito de las subtareas 3.2. [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2. 692-707]:

E: El propósito de esta consigna, según señala es que los niños resuelvan otra hoja de trabajo, es la número dos. En este sentido, la fase de acción vuelve a tener el mismo propósito que la anterior pero, ahora en función de la hoja de trabajo dos [...]

Israel: En las hojas anteriores me enfoqué más en trabajar la razón como comparación, aquí pretendo que la razón se trabaje en forma de cociente o los resultados de la acción de dividir. Por ejemplo, dice “van a rentar un mobiliario chico o de mesa chica y uno de mesa grande” cada mobiliario tiene [...] como dijimos que en la fiesta iba a asistir mucha gente le tuvieron que rentar de todo tipo de mesas y sillas. Entonces dijimos que en la mesa chica, hay una capacidad de ciento treinta asientos para que se sienten ciento treinta personas (escribe chica 130) y en la mesa grande hay una capacidad hasta para quinientos veinte personas (escribe mesa grande 520). Aquí espero los alumnos analicen un poquito lo que es el número de asientos ocupados y la capacidad total (escribe en el pintarrón no. De asientos ocupados y capacidad total).

A partir de lo anterior, identificamos que Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2., conoce tareas para trabajar la comparación de razones como cociente en contextos de parte-todo (ocupación-capacidad de dos mesas).

En lo que sigue siguientes párrafos identificamos los conocimientos que Israel tiene sobre los posibles procedimientos que los alumnos pueden emplear para resolver las subtarear 3.2. de la hoja de trabajo 2. [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2.1.165-176]

Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la tienda “Fiesta Alegre” le rentaron una mesa “chica” para 130 personas y en la tienda “Todo para tu fiesta” le rentaron una mesa “grande” para 520 personas. Carlos y sus amigos registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.

Número de personas y asientos

	Mesa “Chica”	Mesa “Grande”
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Cuál mesa se encuentra más llena?

En la subtaska 3.2.1. Israel retoma la situación inicial de su planificación “La gran fiesta”, pero hace referencia a dos tiendas de renta de mobiliario: “Fiesta alegre” y “Todo para tu fiesta” que acompaña con una tabla donde se muestra la cantidad de asientos que tiene cada mesa y el número de personas sentadas. En función de este contexto, cuestiona a los alumnos sobre la que mesa que se encuentra más

llena. Durante la Entrevista Semiestructurada 1 preguntamos a Israel sobre la posible respuesta que los alumnos darían a la interrogante de la tarea anterior, menciona [ES1_Israel_KFLM_IC_1. 708-726]:

E: Si el propósito es que los alumnos contesten cuál mesa se encuentra más llena, ¿qué van a decir los niños?

Israel: Creo que los niños van a decir que la mesa que se encuentra más llena es la mesa grande, aunque no se les plantea que resuelvan con una operación, división o suma, simplemente de la observación. Creo que los niños van a mencionar “dice qué mesa se encuentra más llena”, van a decir la mesa que tiene cuatrocientos dieciséis [...] dijimos que tienen la capacidad de ciento treinta y quinientos veinte, sin embargo, en esta mesa se sentaron ciento diecisiete personas (escribe abajo del 130 el número 117) y en la otra mesa cuatrocientos diecisiete (escribe abajo del 520 el número 416). Entonces aquí dice, ¿cuál mesa está más llena? Van a decir en esta mesa (señala el número 416) porque son más que en ésta (señala 117). Puede existir la posibilidad de que algunos niños tomen en cuenta esta cantidad de referencia (señala 130 y 520) que les estoy dando; pueden decir está más llena la mesa chica (señala el 117) porque quizá sólo faltaron de sentarse lo que son trece personas y puede que los niños van a decir porque aquí faltan de sentarse ciento cuatro personas (señala el número 520). Entonces, en ésta mesa faltaron más personas (señala la mesa grande) que en ésta (señala la mesa chica), por lo cual, casi está llena. Pueden existir otros niños que este dato de referencia no lo van a ver, sólo van a identificar la cantidad más grande y, por eso van a decir, está más llena la mesa donde se sentaron más personas, sin embargo, el propósito es que tomen en consideración estas dos (señala 520 y 416).

En función de su respuesta identificamos que **Israel_KFLM_IC_1.**, conoce que para seleccionar la mesa más llena los alumnos pueden recurrir a la observación para identificar la mesa que tiene mayor cantidad de personas sentadas (416) en comparación con la mesa chica (117).

Israel_KFLM_IC_2. Conoce que los alumnos que manifiesten que la mesa chica se encuentra más llena van a tomar como referencia la capacidad total de las mesas (130 y 520) y la cantidad de personas sentadas (117 y 416). Así, pueden identificar en la mesa chica faltan de sentarse trece personas y en la mesa grande ciento cuatro.

Después de que Israel nos externó las posibles respuestas que darían los niños a la pregunta, le cuestionamos sobre la respuesta correcta, situación que nos brinda conocimientos de algunas dificultades que cree pueden tener los alumnos [ES1_Israel_KFLM_FD_2. 731-743]:

E: ¿Cuál sería la respuesta correcta?

Israel: La correcta sería que la mesa chica está más llena que la mesa grande. Aquí quise hacer un poco más conflictivo por la tendencia a irse por cantidades grandes, porque igual pasa lo mismo con la fracción, decimos, por ejemplo, ¿qué vale más un medio o un cuarto? (escribe en el pintarrón $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$). Casi siempre pasa lo mismo, cuando empezamos a trabajar las fracciones dicen “un cuarto vale más que un medio porque el cuatro es más grande que un dos”.

E: ¿Usted cree que esas son algunas de las dificultades que pueden tener los alumnos al resolver ese planteamiento?

Israel: Sí, existe casi siempre la tendencia de irse [...] cuando decimos que está más lleno, tendemos a irnos por las cantidades más grandes, por eso creo que los niños van a remitirse a eso, casi siempre se fijan en las cantidades cuando no hay un análisis o reflexión de los datos.

Como podemos observar, Israel menciona algunas dificultades que tienen los alumnos al trabajar con números fraccionarios, por lo cual, decide agregar cantidades grandes y pequeñas al contexto de las mesas con el propósito de que determinen la mesa que se encuentra más llena. Así identificamos que:

Israel_KMT_FD_2. Conoce que algunos alumnos tienen dificultades para identificar cuándo una cantidad es mayor (fracciones), o en este caso, cuál mesa que está más llena, pues se dejan guiar por las cantidades mayores sin analizar su función en la situación que se describe.

A continuación presentamos la subtaska 3.2.2, donde Israel introduce el grado de aglomeración [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2.2. 177-191]

Para saber qué tan llena se encuentra cada mesa, el grado de aglomeración se describe como un número que permite comparar el número de personas sentadas respecto al número de asientos.

Grado de aglomeración

Número de personas

Número de asientos

Cantidad que está siendo comparada

Cantidad de referencia

Encuentra que tan cerca están de agotar su capacidad las mesas.

Mesa chica

$$117 \div 130 =$$

Mesa grande

÷

=

En la subtarea 3.2.2. Israel presenta el grado de aglomeración como el número de personas (cantidad que está siendo comparada) y el número de asientos (cantidad de referencia) y plantea frente a cada mesa una división; en la mesa chica está $117 \div 130$, la cual se requiere completar. Respecto a la mesa grande sólo presenta los recuadros para agregar información. En la Entrevista Semiestructurada 1, Israel nos señaló que la respuesta correcta era la mesa chica, y nos brinda información sobre el propósito de la subtarea anterior [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2.2. 744-749]

E: Usted dice que la respuesta correcta es la mesa chica, ¿qué realizó para definirlo?

PFI: Muy bien, abajo en la siguiente actividad dice “para saber qué tan llena se encuentra cada mesa, que es el grado de aglomeración, se describe como el número que permite comparar [...] aquí por ejemplo, tenemos lo que es aglomeración dice para saber [...] por ejemplo, los niños saben que es la mesa chica o la mesa grande, pero abajo es una forma de comprobación para saber si ellos estuvieron correctos o si no para ver cómo se le hace.

En la presentación de las subtareas 3.2.1. y 3.2.2, identificamos que Israel pretende introducir el concepto de aglomeración; en la primera contextualiza los datos y en la segunda presenta el algoritmo de la división para encontrarlo. Pero, ¿qué es el grado de aglomeración?, ¿por qué Israel lo plantea en las subtareas 3.2. Durante la Entrevista Semiestructurada 1 Israel nos externa qué entiende por aglomeración [ES1_Israel_KoT_D_1.750-759]:

E: ¿Qué es aglomeración?

Israel: Aglomeración es como la capacidad que tiene [...] o es que tan lleno se encuentra algo [...] es como la capacidad que tiene un recipiente para tener almacenado algo o qué tan lleno se encuentra. Por eso, encierro ese concepto porque se los voy a decir, sólo que ahorita no lo tengo a la mano, porque se los voy a presentar.

E: ¿Cree que los niños manejan este concepto?

Israel: No sé si manejen este concepto porque a veces, como usted lo acaba de preguntar, ni yo mismo lo domino. Entonces es cuestión de plantearlo así o planteárselo de otro concepto, pero quise plantearlo así porque es importante ir trabajando con los alumnos algunos conceptos.

A partir del fragmento anterior, identificamos que *Israel_KoT_D_1.* conoce el grado de aglomeración como la situación que permite determinar qué tan lleno se encuentra un objeto y, Al preguntar a Israel sobre cómo abordaría la subtask 3.2.2., donde maneja el grado de aglomeración externa [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2.2. 760-780]:

E: ¿Esta actividad la van a resolver al interior de los equipos?

Israel: Sí, al interior de los equipos.

E: Van a leer lo que viene “para saber qué tan lleno está se encuentra [...]” después de que visualicen esta información viene lo de grado de aglomeración, ¿usted se los va explicar hasta la fase de institucionalización o mientras estén resolviendo la actividad en los equipos va a pasar por si surgen inquietudes o qué va a hacer?

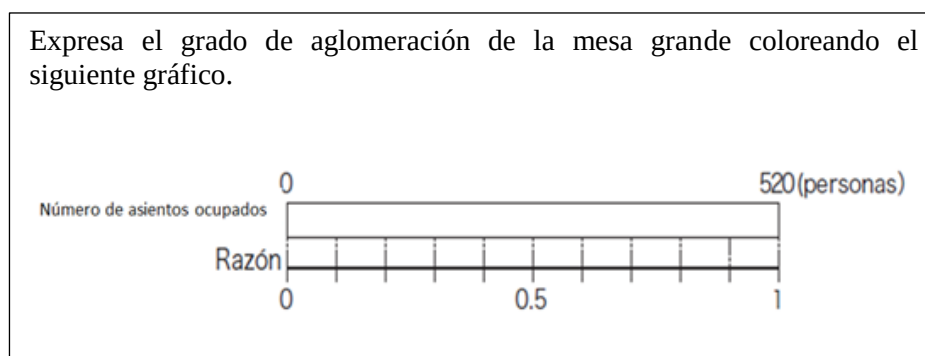
Israel: En ese sentido, voy a estar monitoreando a los alumnos para identificar cómo lo están trabajando, por ejemplo, aquí mencionábamos que dice “el grado de aglomeración se describe como el número que permite comparar [...]” aquí, por ejemplo, mencionamos uno de los conceptos clave, más bien las palabras claves, que es la razón que es esa comparación y dice “número de personas sentadas respecto al número de asientos”, aquí nos permite tener de una forma más gráfica esa comparación y dice “grado de aglomeración es igual al número de personas [...]” esa es la cantidad que está siendo comparada con un número que damos de referencia, por ejemplo, aquí dice “encuentra qué tan cerca están de agotar la capacidad esas mesas [...]” y, por ejemplo, aquí menciona que la mesa chica [...] esta actividad la quise meter porque se presta mucho en números de decimales cerrados, entonces aquí se expresa muy bien lo que es la razón como cociente, esa forma de comparar. Por ejemplo, aquí lo que se pide a los niños está más sencillo son ciento diecisiete sobre ciento treinta (escribe $117/130$) y está un cuadrado en blanco indica que los niños anoten lo que obtuvieron, no creo que exista algún inconveniente porque se les está dando qué deben de utilizar y luego por ejemplo en la mesa grande [...]

En el fragmento anterior, establece algunas relaciones entre grado de aglomeración y razón, situación que nos permite identificar que *Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2.2.*, conoce tareas para trabajar la comparación de razones como cocientes (parte-todo) a través de la identificación del grado de aglomeración en una situación determinada. Respecto a las divisiones indicadas en los recuadros de la subtask 3.2.2. Israel destaca [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1.781-788]:

E: ¿Los alumnos van a colocar los datos?

Israel: Sí, es lo interesante, quiero que se fije en lo que tienen de referencia en los cuadrillos que está en negro, por ejemplo, que es el número de personas, tengo que buscar cuál es el número de personas; éste se les da como una pequeña referencia (señala $117 \div 130 = 0.9$), para ver si lo hacen igual (señala las cantidades de la mesa grande). En el primer cuadrillo pues es el número de personas que son cuatrocientas, en cuánto lo vamos a dividir, pues en el número de asientos que son quinientos veinte, aquí nos da cero punto ocho (escribe $416 \div 520 = 0.8$) y para más adelante ver qué es lo que quiere decir eso.

En función del fragmento anterior identificamos que *Israel_KMT_ES_T_TA_E_1*. conoce la información que se presenta en recuadros de la subtarea 3.2.2., el número de personas y asientos de la mesa chica sirve de referencia para que los alumnos ubiquen ambas cantidades en relación con los datos de la mesa grande; así pueden obtener el cociente correcto en cada división. Como última subtarea de la hoja de trabajo 2, presentamos la subtarea 3.2.3. sobre la representación gráfica de razones en una recta numérica [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2.3.]:



En la subtarea 3.2.3., al igual que en la subtarea 3.2.2. Israel recupera el concepto de grado de aglomeración para hacer referencia a la razón. En el caso de la subtarea 3.2.3. solicita representen en una recta numérica la razón entre el número de asientos ocupados y personas en la mesa grande. Cabe mencionar esta subtarea los alumnos la realizarán después de la presentación de la diapositiva 4 que señala en la fase de institucionalización. Así, identificamos **Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2.3.**, conoce tareas para trabajar la representación del grado de aglomeración en una recta numérica.

Después de que presentamos algunos indicadores de conocimiento matemático y didáctico de Israel en relación con las subtarear de la hoja de trabajo 2, identificaremos su conocimiento especializado durante la ejecución de las subtarear. Así, en el documento de Análisis de la Práctica señala [AP_Israel_KMT_T_2. 462-465]:

Para iniciar la clase se comenzó a rescatar lo que los niños recuerdan de la primera actividad. Considero que es importante rescatar estos elementos para ver qué fue lo que de cierta manera les llamó más la atención y, partir de ahí, introducirlos en las nuevas actividades.

En la planificación didáctica Israel no hace referencia a la ejecución de la actividad que describe para rescatar situaciones de la sesión del día anterior, sin embargo, la agrega en el documento de Análisis de la Práctica y aparece en las Videograbaciones 2 [V2_Israel_KMT_T_2. 1-13]:

Israel: Vamos a realizar un recordatorio de lo que vimos ayer, ¿quién se acuerda de lo que estuvimos viendo?
/Algunos alumnos levantan la mano/
Ao: De que esos [...] que aquí nos dio una explicación de los globos que tronó, cuántos tronó y cuántos tiró /señala a la lámina/
Israel: Y los que falló, ¿qué?
Ao: Estos son los que falló /señala a la lámina/
Israel: A ver hicimos una comparación entre los globos que [...] Ao: Los que tronó.
Israel: Los que tronó verdad o los que falló [...] ¿Con qué los íbamos a comparar?
Ao: Con estos /Señalando los lanzamientos/
Israel: ¿Y estos qué son?
Ao: Número de lanzamientos /Lee la lámina/

En el fragmento de la videograbación 2, Israel cuestiona a los alumnos sobre las actividades que realizaron en la sesión anterior. Cuando un alumno hace referencia a los globos que tiró y los globos que tronó, Israel señala que realizaron una comparación entre los globos que tronaron y el número de lanzamientos; esta última aportación es extraída de la lámina que previamente trabajaron y se encuentra en el salón de clases. Enseguida presentamos otro fragmento de transcripción de la clase donde se rescata el inicio de la segunda sesión [V2_Israel_KMT_T_2. 14-24]:

Israel: Número de lanzamientos. A ver, ¿qué más estuvimos viendo?
/Algunos alumnos levantan la mano/
Aa: Que los globos tronados y el número de lanzamientos se puede expresar con una fracción.
Israel: ¿Esto lo podemos expresar con una fracción?
Aos: Sí.
Israel: ¿Se acuerdan cómo lo podemos expresar con una fracción? ¿Quién quiere pasar a expresar este? /señala la lámina/
/Una alumna escribe en el pintarrón 6/10/
Israel: A ver, explícales a tus compañeros por qué pusiste eso, ¿qué quiere decir?
Aa: Los tiros que realizó y los globos que tronó.

En este fragmento Israel insiste en que los niños expresen lo que trabajaron en la sesión anterior. Una alumna señala que abordaron “los globos tronados y el número de lanzamientos se puede expresar con

una fracción”; situación que propicia otra alumna escriba $6/10$, la cual se relaciona con los tiros realizados y los globos tronados.

Como podemos observar en los dos fragmentos, en la segunda sesión se inicia con el rescate de las actividades de la primera sesión sobre la comparación de dos cantidades en el contexto del puesto de dardos, es decir, identifican número de lanzamientos y globos tronados, en el segundo fragmento se recupera la representación numérica de la comparación a través de una fracción en contextos de parte-todo.

En el documento de Análisis de la Práctica, antes de rescatar lo que se trabajó en cada puesto (Don Benjamín y Don Octavio), Israel expone lo siguiente [AP_Israel_KMT_T_2. 497-503]:

La interrogación es un elemento importante en la clase, cuestionar al alumno o al grupo es someterlos a un análisis y a una reflexión al estimular el pensamiento, considero que se debe tener mucho cuidado al momento de plantear preguntas y no dar claves o pistas que interrumpen este proceso de estimulación del pensamiento. En diferentes momentos de la clase se realizó una pregunta sobre las acciones que habíamos realizado tratando de utilizar la memoria didáctica en cuanto a las fracciones y al concepto de razón, esto con la intención de comprobar qué fue lo más significativo para los alumnos.

En este fragmento Israel rescata el papel de las preguntas en el desarrollo de sus clases en relación con los conceptos que abordaron en la primera sesión. De ahí que identificamos que *Israel_KMT_T_2* conoce la memoria didáctica como la gestión que realiza el maestro a través de preguntas para recuperar conceptos que se trabajan en sesiones anteriores, en este caso, fracciones y razón. A continuación presentamos, por separado, los fragmentos de clase donde Israel recupera la memoria didáctica en relación con los conceptos que trabajó en la primera sesión en el puesto de Don Benjamín y Don Octavio [V2_Israel_KMT_T_2. 25-41]:

Israel: A ver, vamos a recordar un poquito, me ayudas a leer lo que dice aquí el problema.
Aa: La tabla de abajo muestra el registro de lanzamientos que realizó José el amigo de Carlos en el puesto de Don Octavio.
Israel: ¿Se acuerdan que había dos puestos?, ¿cuál era uno de esos puestos?
Aos: Don Octavio.
Aos: Don Benjamín.
Israel: El de Don Benjamín. Vamos a anotarlo por aquí /lo escribe en el pintarrón/ ¿Se acuerdan? ¿Cuántos globos debía de tronar con Don Benjamín para ganarse un premio?
Aa: Seis.
Israel: Seis y, ¿cuántos dardos les daban?
Aos: Ocho.
Israel: Ocho; esto, ¿cómo lo podemos expresar?
Aos: Seis octavos.
Israel: Seis octavos /Israel escribe en el pintarrón 6/8/. Entonces decimos que debe tronar [...]
Aos: Seis globos de [...] ocho.
Israel: Seis globos de ocho oportunidades que tiene [...]

En el fragmento anterior, Israel recupera información de una lámina que se trabajó en la institucionalización de las subtareas de la hoja de trabajo 1. Enseguida retoma el puesto de Don Benjamín para recordar la cantidad de globos que se deben tronar para obtener un premio (6) y el total de dardos que se entregaban (8). Posteriormente cuestiona sobre cómo se puede expresar lo anterior y un alumno señala que mediante “seis octavos”; Israel escribe “6/8” y lee “seis globos de ocho oportunidades que tiene[...]” Enseguida presentamos el fragmento de transcripción que corresponde al trabajo con el puesto de Don Octavio [V2_Israel_KMT_T_2. 41-72]:

Israel: [...] Muy bien, había otro puesto, ¿cuál puesto era?
Aos: El de Don Octavio.
Israel: Don Octavio y, se acuerdan cuántos debería de tronar.
Aos: Sí, siete y le daban diez dardos.
Israel: Siete, con cuántos dardos [...]
Aos: Diez.
Israel: Muy bien. Abajo dice: Expresa la relación entre estos dos datos usando una fracción o un número. Su compañerita dice lo representó así /señala 6/10 en el pintarrón/ ¿Qué quería decir esto?
Aa: Una fracción.
Israel: Una fracción y, ¿cómo se leería?
Aos: Seis décimos.
Israel: Seis décimos verdad, o qué más podemos decir, cómo la podemos interpretar o leer [...] como seis qué [...]
Aos: Globos tornados.
Israel: De [...]
Aos: De diez.
Israel: ¿Diez qué?
Aos: Dardos, lanzamientos.
Israel: De diez lanzamientos o diez dardos. Muy bien. Aquí dice expresa la relación entre estos dos datos usando una fracción o un número, aquí ya su compañerita realizó algo [...], esta que viene siendo, ¿una fracción o un número?
Aos: Una fracción.
Israel: ¿Y esto? /Señala una cantidad de la fracción/
Aos: Una división, un número, una fracción [...]
Israel: Pero lo de arriba.
Aos: Un número.
Israel: Un número. ¿Si se acuerdan que estuvimos ayer viendo cómo convertir las fracciones en número qué?
Aos: Decimales.
Israel: Con números decimales verdad [...]

En este fragmento Israel recupera la información que trabajaron en el puesto de Don Octavio: deberían tronar siete globos con diez dardos que les entregaban. Enseguida guía a los alumnos a la representación numérica de la comparación de las cantidades que se encuentran en la lámina a través de la fracción 6/10; la lectura que los alumnos realizan de la fracción anterior se traduce en “seis décimos”. De inmediato Israel los cuestiona sobre cómo se puede interpretar, situación que lleva a los alumnos a identificar que se habla de “seis globos tronados de diez dardos o lanzamientos”, es decir, recurren a la representación verbal de la fracción en un contexto de parte-todo. Para finalizar, Israel recuerda a los alumnos en la sesión anterior abordaron cómo convertir fracciones en números decimales.

En el documento de Análisis de la Práctica Israel retoma fragmentos del inicio de la segunda sesión, mismos que coindicen con los anteriores. En este espacio rescatamos algunas reflexiones que Israel agrega a los fragmentos citados [AP_Israel_KMT_T_2. 540-547]

En estos momentos trato de recordar parte de la institucionalización de la primera actividad haciendo referencia a varios conceptos, tales como razón y fracción. Al respecto, Centeno (1997) menciona que “en el acto de institucionalizar los conceptos adquiridos el maestro identifica lo que los alumnos deben retener” (p. 116). Para dar a conocer este nuevo concepto y percitar su comprensión fue necesario intervenir con algunos ejemplos y de esta forma los alumnos tuvieran un referente, es decir, asocien el concepto con un objeto (significado-significante), en este caso se asocia el número de globos tronados con el número total de lanzamientos.

En términos generales, identificamos que en el inicio de la segunda sesión, emplea algunos ejemplos que trabajaron en la primera sesión para rescatar los conceptos de fracción y razón que fueron institucionalizados, cuya relación está definida con el número de globos tronados y el número total de lanzamientos.

Después de que Israel rescata los conocimientos previos de los alumnos a través de la gestión de la memoria didáctica, procedemos a retomar el momento en que enuncia la consigna para el trabajo que van a realizar con las subtarear de la hoja 2 [V2_Israel_KMT_T_1. 72-84]:

Israel: [...]El día de hoy vamos a trabajar otras hojitas que les traigo preparadas para terminar con este tema, ¿si se acuerdan los equipos en los que estaban ayer?

Aos: Sí.

Israel: A ver, les voy a pedir que, nos organicemos en esos equipos /Los alumnos se organizan en equipos/. Vamos a contestar una hojitas que les traigo, quiero que primero las vean todos para poderles decir lo que vamos a hacer.

/Israel reparte el material a trabajar/. Es una para cada uno. Vamos a contestar esta hojita en quipo, la vamos a contestar hasta la rayita negra, ¿si ven todos la rayita negra?

Aos: Sí.

Israel: Eso que está abajo de la rayita negra no lo vamos a contestar, cuando el equipo termine de contestar, antes de la rayita negra, hasta ahí le paramos. Tenemos quince minutos para resolver esa hojita, y no podemos platicar con los demás equipos [...]

Como podemos observar en el fragmento anterior, Israel enuncia la consigna, en qué consiste la actividad: “contestar la hoja de trabajo 2 en equipos”, así como algunas restricciones: “sólo pueden contestar hasta la rayita negra” y “tenemos quince minutos para resolver la hojita”. Enseguida acompaña la consigna de las siguientes preguntas [V2_Israel_KMT_T_2. 84-92]:

Israel: [...] El equipo rojo, ¿qué vamos a hacer? Díganles a sus compañeros.
Aa: Vamos a trabajar hasta la línea negra.
Israel: Hasta la rayita [...] ¿Qué más podemos hacer?
Aa: Contestar eso [...]
Israel: Contestar eso, sí, podemos hacer uso de la calculadora. Entonces comenzamos [...]
/Los alumnos comienzan a leer la hoja mientras que Israel hace entrega de algunas calculadoras a los equipos que la requieran. Israel se acerca con algunos equipos para orientar el trabajo/

Cuando Israel pregunta a los alumnos ¿qué vamos a hacer? y ¿qué más podemos hacer?, recurre a la devolución de la consigna. En la Planificación, una vez que Israel enuncia la consigna 2 que corresponde a las subtareas de la hoja de trabajo 2, describe la fase de acción como el momento en que los alumnos se inician en la resolución de las subtareas; fase que citamos al inicio de este apartado. Enseguida identifica las siguientes fases [P_Israel_KMT_T_4-5 204-210]

Fase de formulación-validación:

- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las preguntas y qué les permitió llegar a esos resultados. Pueden pasar al frente para representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que permitieron llegar a lo deseado.

Este fragmento de Planificación es el mismo que en las subtareas de la hoja de trabajo 1. En este momento, es conveniente citemos que cuando enunciamos el conocimiento didáctico de Israel en relación con las teorías de enseñanza de la matemática en las subtareas 3.1., a partir de la información en las entrevistas semiestructuradas, Israel evidencia conocimiento de que ambas fases están muy relacionadas, sin embargo, deben separarse, lo cual no logró modificar en la Planificación. Por ello en este momento las rescatamos con esa aclaración. En la Entrevista Semiestructurada 1 menciona [ES1_Israel_KMT_T_4-5 789-791]:

E: Ahora la fase de formulación y la fase de validación son en función [...] Israel: En función de cómo lo hicieron, cuál mesa está más llena que la otra [...] la segunda, la socialización y validación de los procedimientos [...]

La fase de formulación-validación con las subtareas de la hoja de trabajo 2 que describe en la Planificación, se actualiza en función de las situaciones que maneja en dichas subtareas y, además, relaciona la fase de formulación con lo que hicieron los alumnos para identificar cuál mesa está más llena, mientras que la fase de validación la relaciona con la socialización y validación de los

procedimientos. Enseguida presentamos algunos fragmentos cuando los alumnos trabajan en equipo y se ubican en la fase de acción y formulación al resolver las subtarear de la hoja de trabajo 2; lo anterior con el propósito de identificar el conocimiento matemático y didáctico que Israel evidencia [V2_Israel_KMT_T_3. 93-109]:

Israel: Dice el grado de aglomeración, a ver, vamos a entender por aglomeración [...] ¿Qué les está pidiendo? ¿Cuál mesa está más que [...]?

Aa: Llena.

Israel: ¿Cuál mesa está más llena? Vamos a entender por eso grado de aglomeración, aquí les dice lo que se necesita para saber el grado de aglomeración [...] Dice: Para esto van a hacer estas operaciones como les indica aquí, qué dice para saber el grado de aglomeración, ¿qué se hace?

/Pregunta al interior de un equipo/

Aa: El número de personas y el número de asientos.

Israel: Muy bien y, ¿conocen el número de personas y el número de asientos?

Aos: Sí.

Israel: Muy bien. También aquí quiero que le pongan por qué piensan ustedes que esa mesa [...] platiquen entre ustedes y escríbanme aquí. ¿Se acuerdan que ayer dijimos que iban a justificar sus respuestas?, ¿que iban a poner por qué? Aquí pongan por qué ustedes creen que es esa mesa, no sólo pongan que en la mesa grande o en la mesa chica, si ponen en la mesa grande luego escriban el por qué, ¿de acuerdo?

Aos: Sí.

En este fragmento Israel cuestiona a los alumnos sobre lo que se pide en las subtarear de la hoja de trabajo 2 para que inicie su solución a partir de la información que se proporciona. En función de las intervenciones de Israel identificamos que relaciona el grado de aglomeración con la mesa que se encuentra más llena; situación que relaciona con las operaciones (divisiones) que están planteadas en la subtarea 3.2.2. En el siguiente fragmento, destacamos otro tipo de intervención de Israel [V2_Israel_KMT_T_3. 110-140]:

/Israel se acerca a otro equipo/
Israel: ¿Ya leyeron? ¿Qué les dice el enunciado del problema?
Aa: ¿Cuántas mesas tiene y para cuántas personas son?
Israel: Y para cuántas personas son [...] luego, ¿qué te pregunta?
Aa: ¿Qué mesa se encuentra más llena? La grande.
Israel: Pero quiero que aquí le pongan el por qué [...] acuérdense que debemos de justificar nuestras respuestas, quiero que le pongan por qué ustedes dicen que en la mesa grande, pero antes de escribir, comentan entre ustedes, qué tal si alguien dice que en la mesa chica.
Aa: Yo, yo, en la mesa grande, porque tiene más personas.
Israel: Porque tiene más personas [...] Entonces ustedes comenten para que tengan todo igual, comenten qué pueden poner, ¿por qué dicen que en la mesa grande?
Aa: En la mesa chica son 130 asientos, para 130 personas y en la mesa grande son 520 asientos para 520 personas. Pero ninguna de las dos mesas se llenó. En la chica están 117 personas y en la grande 416 personas [...] Entonces la cantidad más grande es 400 [...]
Israel: Muy bien, pero aquí no está pidiendo cuál es la cantidad más grande, ¿qué les está pidiendo?
Aa: ¿Cuál es la mesa que está más llena?
Aa: Entonces estamos viendo la cantidad que es más grande para saber cuál mesa está más llena.
Israel: Para saber cuál es la mesa que está más llena [...] está bien. También acuérdense que están viendo el número de personas, pero, ¿dónde dejan el número de asientos?
Aa: ¿Qué?
Israel: Ustedes sólo están viendo el número de personas, ¿y el número de asientos?
/El equipo no responde/
Israel: También observen cuántos asientos quedaron vacíos en cada mesa para que puedan ver [...]
Aa: En la mesa chica quedaron 30 asientos.
Aa: No es cierto.
Israel: ¿30? ¿Qué podemos hacer en eso?
Aa: No, porque si son 30-17, no quedaron 30 [...]
Israel: Vean todo eso para que puedan contestar la pregunta.

Aquí la intervención de Israel es más amplia, además de cuestionarlos sobre la información que proporciona el problema, identifica las posibles respuestas que los alumnos, cuando los alumnos mencionan que la mesa más llena puede ser la que tiene mayor cantidad de personas sentadas, él les dice que sólo están viendo el número de personas y no el número de asientos. A partir de lo anterior, en el documento de Análisis de la Práctica, Israel reflexiona sobre lo que sucede durante la resolución de las subtareas de la hoja de trabajo 2 [AP_Israel_KMT_T_3. 579-592]:

El docente dentro de sus intervenciones debe tomar un papel de mediador dentro los procesos de aprendizaje y de esta forma llevar a cabo el conflicto cognitivo que se ha planteado desde el inicio. En el fragmento anterior se muestra parte del registro en donde el docente se acerca a una de las mesas de trabajo y dialoga con los integrantes haciendo hincapié en la justificación que se le debe dar al primer planteamiento, en esta intervención se realizan una serie de planteamientos del profesor hacia los alumnos, planteamientos que de una u otra forma reorientan la labor de sus educandos; por una parte se pudiera pensar que se les da la respuesta, por lo tanto, la situación carecería de un problema y de un desafío para los alumnos, entra en esta parte lo que Centeno (1997) menciona como la devolución del problema:

La situación debe plantear un problema que el alumno no sabe resolver con los conocimientos que posee. Si el alumno supiera responder a la situación resolviendo el problema que se plantea, ésta no sería un problema y la situación tendría la condición de un ejercicio de aplicación, de refuerzo de consolidación, etc. (p. 116).

En función de este fragmento identificamos que:

Israel_KMT_T_3. Conoce que cuando los alumnos se inician en la resolución de un problema (subtareas 3.2.) el papel del docente consiste en realizar la devolución del problema a través de una serie de planteamientos (preguntas) que reorientan el trabajo de los alumnos.

Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.2. Conoce que una tarea está compuesta por un problema que plantea un desafío para los alumnos.

A continuación presentamos otro fragmento de transcripción de la Videograbación 2, donde Israel interviene por tercera ocasión en el trabajo que realiza un equipo al resolver al resolver las subtareas de la hoja de trabajo 2 [V2_ Israel_KMT_T_3. 145-166]:

Israel: Esto es lo de aquí abajo /Señala en la hoja de trabajo 2/. Dice: Para saber que tan llena está cada mesa, el grado de aglomeración se describe como un número que permite comparar el número de personas sentadas, ¿con cuál número?

Ao: Mesas [...]

Israel: Dice: Nos permite comparar el número de personas sentadas con el número de qué [...]

Ao: Decimal.

Israel: Con el número decimal. Aquí dice /señala la hoja/ con el número de [...]

Aa: De asientos.

Israel: Con el número de asientos, muy bien. Nos dice que para conocer este grado de aglomeración, ¿qué debemos de hacer? /Señala la información de la hoja de trabajo/

Ao: Dividir.

Israel: Una división, pero qué vamos a dividir, el número de [...]

Aa: De personas.

Ao: El número de asientos.

Israel: Y ustedes, ¿conocen el número de personas y el número de asientos?

Aa: Sí.

Israel: Entonces es lo que van a hacer aquí /señala la información de la hoja de trabajo/; encuentra que tan cerca están de agotar su capacidad las mesas. Aquí la de la mesa chica y la de la mesa grande. Entonces ustedes también pusieron que la de la mesa grande, pero escriban por qué; después de que platicaron entre todos, escriban lo que hicieron para saber cuál mesa está más llena.

En este fragmento, Israel lee planteamiento de la subtaska 3.2.2., enseguida cuestiona a los alumnos sobre lo que deben hacer para identificar el grado de aglomeración; un alumno señala “dividir”, Israel pregunte sobre los datos que van a dividir, los niños responden que el número de personas y de asientos. Retoma la respuesta “la mesa grande se encuentra más llena” y les pide que la justifiquen. Durante el trabajo de los equipos, en la fase de acción y formulación con las subtaskas 3.2., Israel guía a los alumnos para que identifiquen la información que se proporciona y lo que se pide, además, señala que deben justificar su respuesta en función de las aportaciones de cada equipo; algunas de las intervenciones se encuentran presentes en la fase de validación cuando Israel trabaja con los procedimientos que usaron en las subtaskas de la hoja de trabajo 2. A continuación presentamos un fragmento de esta acción [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 171-177]:

Israel: Ahorita que ya acabaron todos los equipos, quiero que el equipo naranja me ayude a leer el enunciado.
Ao: Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la tienda “Fiesta Alegre” le rentaron una mesa “chica” para 130 personas y en la tienda “Todo para tu fiesta” le rentaron una mesa “grande” para 520 personas. Carlos y sus amigos registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.
Israel: Muy bien [...]

En este fragmento Israel solicita a uno de los alumnos dé lectura a la subtaska 3.2.1., es decir, al planteamiento del problema de la misma; situación que se acompaña de las siguientes interacciones [V2_ Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 177-206]:

Israel: Equipo amarillo, dice tenemos [...] ¿Cuántas mesas tenemos?
Ao: Dos.
Israel: Dos, tenemos una mesa [...]
Aos: Chica.
Israel: Una mesa chica [...]
Aos: Y una grande.
Israel: Y una mesa grande /las escribe en el pizarrón/ ¿Qué más nos dice? Dijimos que tenemos un número de qué [...]
Ao: Número de asientos.
Israel: Primero tenemos un número de personas que se sentaron en la fiesta. En la mesa chica, ¿cuántas personas se sentaron?
Aos: 117
Israel: Equipo rojo, en la mesa chica, ¿cuántas personas se sentaron?
Ao: 117
Israel: Ciento diecisiete, y en la mesa grande, ¿cuántas se sentaron?
Aos: Cuatrocientos dieciséis.
Israel: Cuatrocientos dieciséis, pero también tenemos un número de [...] /Israel escribe todo en el pintarrón/
Aos: Personas, asientos [...]
Israel: ¿De qué?
Aos: De asientos.
/El maestro escribe en el pizarrón/
Israel: Número de asientos. Nos dice cuántos asientos tiene la mesa chica, ¿cuántos?
Aos: Ciento treinta.
Israel: ¿Ciento treinta? /Escribe en el pintarrón/
Ao: Quinientos veinte la otra.
Israel: ¿En la mesa grande?
Aos: Quinientos veinte.
Israel: Y luego les aparece una preguntita, ¿qué dice? /Pide a una alumna que lea/
Aa: ¿Qué mesa se encuentra más llena?

En el fragmento anterior, Israel cuestiona a los alumnos sobre los datos que se proporcionan en la subtarea 3.2.1., y escribe la información proporcionada por los alumnos en el pintarrón. Así, se favorece la representación numérica y verbal de los datos del problema.

En su documento de Análisis de la Práctica, Israel evidencia conocimientos respecto a la importancia de retomar el problema y hacer énfasis en la información que proporciona [AP_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 623-636]:

Para que un problema matemático sea considerado realmente como “problema”, es necesario que cumpla con una serie de criterios que lo diferencien de un ejercicio, por ejemplo, para entenderlos y resolverlos correctamente es necesario leerlos con atención, así como saber, más o menos, a dónde se quiere llegar; el objetivo es que organicen y relacionen sus conocimientos.

Es común que los alumnos mientras resuelven diversos problemas sientan alguna presión por resolverlos o no entrelacen la información que se les brinda, creando así algunas dificultades para su resolución, es por ello que en el fragmento anterior el maestro después de que los alumnos resolvieron el primer planteamiento retoma el problema y hace énfasis en cada una de la información que se proporciona, facilitando de esta forma una mejor comprensión del mismo. Al respecto, Centeno (1997) señala que “una dificultad es algo que impide ejecutar bien o entender pronto una cosa. Las dificultades pueden proceder de diversas causas, relacionadas con el concepto que se aprende, con el método que utiliza el maestro [...]” (p. 144). Es por ello que se hace hincapié de lo antes mencionado.

Con base en la información que Israel proporciona en el fragmento anterior identificamos que Israel_KMT_ES_T_TA_E_2., conoce que después de que los alumnos resuelven un problema en equipos es conveniente retomar el problema en forma grupal y hacer énfasis en cada una de la información que proporciona para facilitar una mejor comprensión del mismo; situación que disminuye las dificultades que puedan tener los alumnos. A continuación presentamos otra parte de la fase de validación. [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 207-216]:

Israel: Dice: ¿Qué mesa se encuentra más llena?

Aa: La grande.

Israel: Vamos a ver, levanten la mano, cuál equipo dice que la mesa que se encuentra más llena es la mesa chica.

/Un equipo levanta la mano/

Israel: ¿Sólo el equipo amarillo?

Aos: Nosotros también /levantan la mano otros integrantes de diferentes equipos/

Israel: Muy bien, dos equipos, ¿quién dice que la mesa grande?

/El resto de los equipos levantan la mano/

Israel: Los demás, uno, dos, tres [...]

En este fragmento observamos que Israel propicia que los equipos externen cuál creen es la respuesta correcta a la pregunta: “¿Qué mesa se encuentra más llena?”. Algunos equipos señalan que la mesa grande, otros que la mesa chica. Luego, solicita justifiquen las respuestas que dieron [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 216-238]:

Israel: Quiero que pase uno o varios de cada equipo para que digan por qué la mesa grande, los demás escuchamos.
Ao: Nosotros decimos que la mesa grande está más llena porque en la mesa grande hay 416 personas y en la chica sólo 117, y entonces en la mesa grande hay más gente que la chica, por eso decimos que está más llena.
Israel: Su compañero dice que porque hay más gente, es porque está más llena. El equipo verde, ¿por qué dicen que la mesa grande?
/Israel les entrega un marcador y una alumna pasa al frente/
Aa: Nosotros decimos, una posibilidad, porque aquí sólo son 130 mesas.
Israel: ¿Mesas?
Aa: Digo 130 asientos, entonces 117 personas, entonces no se llena tanto la mesa. En la mesa grande son 520 y 416 personas, entonces la mesa grande es más posible que se llene porque está más grande y ésta no /señala la mesa chica/ porque si se llenara toda la mesa grande tendría más personas porque es menos la cantidad de asientos que tiene la mesa chica.
Israel: Entonces ustedes concuerdan con el otro equipo, de que la mesa que está más llena es la que tiene más personas.
Aas: Sí.
Israel: Este equipo desde su lugar, ¿por qué ustedes dicen que la mesa grande?
Aa: Porque hay más personas.
Israel: Entonces los tres equipos concuerdan que la mesa que está más llena es donde hay más [...]
Aos: Personas.

En el fragmento anterior, Israel solicita que justifiquen por qué señalaron la mesa grande es la respuesta correcta. En ese momentos el papel de Israel es cuestionar cómo le hicieron para obtener esa respuesta, pedir que la representen en el pintarrón e intervenir cuando confunden la información que se maneja. En conclusión, Israel rescata las aportaciones de los equipos y señala coinciden que la mesa que está más llena es la que tiene más personas. Ahora presentamos los fragmentos de la Videograbación 2 [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 239-258]:

Israel: Ahora vamos a darle oportunidad a los otros equipos que dicen la mesa chica está más llena. Los pueden corregir o hacer preguntas. Ustedes, ¿por qué dijeron que en la mesa chica?

Aa: Nosotros pensamos que la chica, porque dividimos $117 \div 130$ y dio 0.8

Israel: ¿Les dio 0.8?

Aa: ¿Si nos dio 0.8? /Pregunta a su equipo y revisa su hoja/

Aa: No, nos dio 0.9

Israel: 0.9, anótalo en el pizarrón

/La alumna lo escribe/

Aa: Y dividimos $416 \div 520$ y nos salió 0.8

Israel: 0.8

Aa: Entonces nosotros pensamos que porque este era más cantidad /señala 0.9/ pensamos que era la chica, la mesa más llena.

Israel: ¿La chica estaba más qué?

Aa: Tenía más cantidad.

Israel: ¿Tenía más cantidad?

Aa: Que la grande.

Israel: Que la grande, ¿está más qué? [...] casi llena. Bien, ¿si entendieron por qué ellos dicen que en la mesa chica?

A. Aos: Sí.

En este fragmento, donde los alumnos justifican que la mesa chica está más llena, dicen que obtienen la respuesta al dividir $117 \div 130$, pero expresan como resultado 0.8. Por ello Israel pregunta si les dio 0.8, por lo cual rectifican y dicen que es 0.9. A petición de Israel una alumna escribe la cantidad en el pizarrón, lo que les permite comparar 0.9 con la cantidad que se obtiene al dividir $416 \div 520$. La situación es retomada por Israel para preguntar al resto de los alumnos que si queda claro por qué el equipo dice que la mesa chica está casi llena, algunos alumnos comentan que sí. En el documento de Análisis de la Práctica Israel presenta la información contenida en los dos recuadros anteriores y, a partir de ello, establece lo siguiente [AP_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 696-706]:

El fragmento anterior es de vital importancia, ya que es cuando los alumnos tratan de formular y validar sus procedimientos y resultados, la mayoría de sus respuestas se inclinan hacia la mesa grande, mientras que una minoría opina que la mesa chica, algunos de ellos dan argumentos sólidos de sus resultados, mientras que otros ignoran por completo lo que hicieron, respecto a aquellos niños que dan respuesta muy diferentes se genera un conflicto en el grupo, Centeno (1997) define conflicto como un “choque u posición entre formas contradictorias de interpretar una misma situación. Se habla de conflicto cognoscitivo cuando dos ideas son contradictorias y chocan y producen un desequilibrio que puede provocar duda y producir errores” (p. 144). En este choque de ideas algunos alumnos concuerdan con otros, mientras que el resto los rechaza, para salvar la situación tuve que ser más específico y remitirme a señalar la información que encaminara al resultado.

A partir de lo anterior identificamos que *Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.*, conoce que cuando los alumnos se enfrentan a un conflicto cognitivo, el docente debe intervenir para brindar información que oriente al resultado esperado. A continuación presentamos el fragmento de transcripción que da continuidad a las interacciones anteriores [v2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 259-289]:

Israel: ¿Siguen diciendo que en la mesa grande porque hay más personas? Ustedes, ¿por qué dijeron que en la mesa chica? /Pregunta al último equipo/
 Ao: Nosotros pensamos [...] entendimos cuál estaba más llena y a la otra todavía le faltan 100 y a este nada más le falta [...]
 Israel: Pasen a explicarlo al pintarrón.
 Ao: Es que nosotros pensamos [...] en el problema dice que cuál está más llena, y a ésta /señala la mesa grande en el pintarrón/ todavía le faltan como 100.
 Israel: ¿Cómo 100?
 Ao: Sí
 Israel: ¿Cuántos les faltan exactamente?
 Ao: Mm [...]
 Israel: ¿Qué podemos hacer?
 Ao: Una resta.
 Israel: ¿Qué vas a restar?
 /Su compañero de equipo hace la operación en su calculadora/
 Ao: Le faltan 104 a la mesa grande.
 Israel: A ésta le faltan cuántos [...]
 Ao: 104
 Israel: 104 verdad, anótale aquí /El alumno escribe 104 en el pintarrón/ ¿104 para qué?
 Ao: Para que se llene.
 Israel: Para que se llene, de acuerdo, y a la mesa chica, ¿cuánto le falta?
 Ao: 13. Nosotros pensamos que como ésta ya se iba a llenar, pues que era la más llena.
 Israel: ¿Si le entendieron? ¿Por qué ellos dicen que en la mesa chica es la que está más llena?
 Aa: Porque hay más personas.
 Ao: Porque a la otra le faltan 104 y a esa le faltan 13 /señala la mesa chica/
 Israel: Le faltan 13. Entonces, ¿ahora si me pueden decir cuál de estas dos mesas será la que está más llena?
 Aos: La chica [...]
 Israel: A ver, ¿quién sigue que todavía la mesa grande? /Nadie participa/ ¿Hubo algunos que cambiaron de parecer? Si [...]

En la primera parte del fragmento anterior, Israel retoma la participación de un equipo que tiene la respuesta correcta (la mesa chica) y solicita a uno de los integrantes que pasen a explicar cómo le hicieron para obtener esa respuesta. Enseguida, Israel emite una serie de preguntas (¿cuántos le faltan exactamente?, ¿qué podemos hacer?, ¿qué vas a restar?) para que los alumnos determinen cuál es la cantidad de asientos que faltan por ocuparse en la mesa grande y en la mesa chica. De esta manera concluyen que en la mesa grande faltan 104 asientos por ocuparse y en la mesa chica 13, situación que determina la respuesta correcta es la mesa chica.

En el documento de Análisis de la Práctica Israel rescata algunas evidencias de los alumnos en relación con la resolución de la subtarea 3.2.1. [AP_Israel_KFLM_IC_3. 708-719]:

Imagen 1.

Número de personas y asientos		
	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?
 la mesa Chica Porque dividimos
 $117 : 130 = 0.9$ y en la
 Grande 0.8

Respecto a la Imagen 1, observamos la respuesta que dan, la mesa chica se encuentra más llena. Enseguida presentamos la interpretación que realiza Israel de esta respuesta [AP_Israel_KFLM_IC_3.750-756]:

Como se puede apreciar, en la imagen 1 y en la parte del registro anterior, se representa el resultado de un equipo que realizó como procedimiento una operación que consistió en realizar una división con los datos que se proporcionaban, es decir, dividir el número de personas que estaban sentadas entre el número de asientos y, de esta forma, obtener el grado de aglomeración de cada una de las mesas, así obtuvieron que la mesa chica tenía un grado de aglomeración mayor que la mesa grande, lo cual indica que es la que está más llena.

En función del fragmento anterior identificamos:

Israel_KFLM_IC_3. Conoce que algunos alumnos obtuvieron el grado de aglomeración de al dividir el número de personas sentadas entre el número de asientos. Por otra parte, Israel menciona en el documento de Análisis de la Práctica que existen alumnos que mencionan la mesa chica es la que se encuentra más llena, pero la justificación que brindan es diferente [AP_Israel_KFLM_IC_4. 720-730]:

Imagen 2.

Número de personas y asientos		
	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
~~tema de mesas~~ Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?
 La mesa "chica" está llena por 90% la falta
 13 para llenar

En relación con la Imagen 2, Israel expresa [AP_Israel_KFLM_IC_4. 757-759]:

En la imagen 2 se aprecia una respuesta coherente, en la cual se argumenta que la mesa chica está más llena por que le faltan menos asientos para llenarse, llegando a tal conclusión [...]

Por lo anterior identificamos:

Israel_KFLM_IC_4. Conoce algunos alumnos señalan la mesa chica se encuentra más llena porque le faltan 13 asientos para llenarse.

En el documento de Análisis de la Práctica, Israel presenta otro par de evidencias de dos alumnos cuyas respuestas no son las esperadas, por lo cual expresa [AP_Israel_KFLM_IC_5. 759-762]:

[...] Por otro lado, se encontró que algunos alumnos no encontraron la relación entre las mesas, imaginando que no se podían comparar debido a que ambas tienen diferentes asientos, y se dejaron llevar por las cantidades que se les presentaban (total de asientos o número de personas).

Enseguida presentamos las evidencias de los alumnos [AP_Israel_KFLM_IC_5. 763-776]:

Imagen 3.

Número de personas y asientos		
	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?
Mesa grande porque en la mesa chica hay 117 y en la mesa grande hay 416 entonces hay mas en la mesa grande

Imagen 4.

Número de personas y asientos		
	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?
la mesa grande por que la chica tiene menos personas porque la mesa chica tiene 117 personas 130 de asientos por que la mas grande tiene 416 personas y de asientos 520

En la diapositiva anterior, Israel inicia con la presentación de la definición de razón y el procedimiento que se puede realizar para determinar el grado de aglomeración. Así, identificamos que **Israele_KoT_D_2**. Conoce la razón como el número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente. **Israel_KoT_P_1**. Conoce que la razón es igual a la cantidad que es comparada entre la cantidad de referencia. **Israele_KoT_P_2**. Conoce el grado de aglomeración en la mesa chica se obtiene a partir de la división de $117 \div 130$, es decir, en función de la cantidad que es comparada (117) entre el valor de la cantidad de referencia (130). El valor obtenido, en este caso 0.9 (nueve décimos), se puede representar en una recta numérica donde se identifica que 9 de cada 10 asientos están ocupados o que un décimo del total de asientos no está ocupado.

A continuación presentamos lo que Israel expresa respecto a la situación anterior en la Entrevista Semiestructurada 1 [ES1_Israel_KMT_T_6. 792-811]:

E: [...] Nuevamente viene otra de institucionalización, aquí usted nos señala que la idea es institucionalizar lo que se vio en la hoja de trabajo dos. Se va a apoyar en la diapositiva cuatro. Dice en este punto, será necesario hacer mención del concepto de razón para retroalimentar lo institucionalizado por las anteriores hojitas, entonces, ¿cómo va a trabajar esta actividad?

Israel: Se les va a presentar a los alumnos la siguiente diapositiva y menciona que un número que permite comparar dos magnitudes [...] aquí por ejemplo, para no confundir lo vamos a trabajar en vez de magnitud como una cantidad, porque esto lo saqué de un libro que lo trabaja como magnitud pero, a veces magnitud se puede confundir con una distancia [...] como una medida que nos permite obtener distancia. Aquí vamos a trabajarlo como cantidades, voy a hacer esa corrección. Se les lee eso, dice “un número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente o mediante el resultado como en el registro de los tiros se llama razón”. Aquí, por ejemplo, estamos institucionalizando un poquito lo que es este concepto [...] dijimos que la razón [...] aquí se les está diciendo a los alumnos que la razón [...] para obtenerla la razón es igual a una cantidad que estamos comparando sobre una cantidad de referencia que se da (escribe en el pintarrón), por ejemplo, se puede retomar lo que es el trabajo con los tiros, un poquito de memoria didáctica, por ejemplo, estábamos comparando el número de globos tronados, seis y, cuál es el número de referencia que me da, pues el número de lanzamientos, ocho, quizá aquí es una forma más formal de dar el concepto de razón; lo anterior, lo voy a trabajar en forma grupal.

Cuando Israel expresa cómo pretende trabajar con el grupo la diapositiva 4, identifica algunas posibles dificultades que pueden tener los alumnos:

Israel_KFLM_FD_3. Conoce que al referirse a la razón como un número que permite comparar dos magnitudes, el empleo del término magnitud puede confundir a los alumnos y guiarlos a asociarlo con distancia, por lo cual, cree conveniente presentar el concepto de cantidad en lugar de magnitud.

En la última parte del fragmento anterior, Israel expresa que puede recurrir al empleo de la memoria didáctica para retomar las situaciones que abordaron en una de las subtareas de la hoja de trabajo 1, de manera concreta, en lo que se refiere a los globos tronados y el total de lanzamiento en uno de los puestos; por los datos que maneja identificamos es en el puesto de Don Benjamín. Durante la Entrevista Semiestructurada 2 profundizamos en el propósito de la diapositiva 4 que, al trabajar en el grupo, Israel presenta la información anterior en una lámina [ES2_Israel_KMT_T_6. 615-627]:

E: ¿Cuál era el propósito de esa lámina?

Israel: Aquí el propósito es precisamente, antes de adentrarnos a esta última parte de la hoja de trabajo dos, dar esta explicación que dice "el número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente, como el registro de los tiros se llama razón; aquí nos da que la razón es la cantidad que se compara entre la cantidad de referencia, que lo vemos en este ejemplo, la cantidad de referencia es el total de asientos y la cantidad de asientos ocupados es la cantidad que se está comparando. Entonces dice que el grado de aglomeración en la mesa chica es la división de ciento diecisiete entre ciento treinta que es igual a cero punto nueve. Por lo tanto, dice que el grado de aglomeración es cero punto nueve, que son nueve décimos y significa que de cada diez asientos nueve están ocupados [...]

E: ¿Aquí está presente la razón?

Israel: Sí donde dice "nueve de cada diez".

En este fragmento de entrevista, Israel expresa la razón en función de algunos datos que se manejan en las subtareas de la hoja de trabajo 2: "la cantidad de referencia es el total de asientos y la cantidad de asientos ocupados es la cantidad que se está comparando". Al final menciona se hace presente la razón al expresar el grado de aglomeración como "nueve de cada diez".

En términos generales, en función de lo que Israel expresa en los fragmentos anteriores sobre la institucionalización identificamos:

Israel_KMT_T_6. Conoce la institucionalización como un momento de la clase donde el profesor da a conocer las definiciones y procedimientos relacionados con los conceptos matemáticos que se abordan en la resolución de algunas subtareas, en el caso de la hoja de trabajo 2, enfatiza en la definición de razón y el procedimiento para obtener el grado de aglomeración.

En la Entrevista Semiestructurada 2, indagamos en el concepto de memoria didáctica que Israel recupera en la Entrevista Semiestructurada 1 cuando señala lo que realizará en la institucionalización [ES2_Israel_KMT_T_2.1. 628-638]:

E: Aquí mismo cuando realizamos la entrevista pasada usted comenta que va a aprovechar esta lámina para recurrir a la memoria didáctica, ¿qué es eso de memoria didáctica?, ¿de dónde viene?

Israel: Nosotros veíamos que la memoria didáctica es algo exclusivo del profesor que él puede hacer a sus alumnos y es como recordar cosas que se vieron en otras clases o retomar un aprendizaje que los niños ya adquirieron y ponerlo en práctica en ese momento.

E: ¿Por qué retomarlo en ese momento?

Israel: En ese momento porque creo es adecuado, pues previamente ya habíamos visto qué es la razón. Entonces, rescatarlo en este momento, sería ese contraste de que recuerden lo que ya vimos y quizá puedan hacer esa analogía o esa comparación de las actividades que se plantean y puedan retomarlo.

A partir del fragmento anterior identificamos:

Israel_KMT_T_2.1. Conoce la memoria didáctica como una acción del profesor que propicia los alumnos recuerden conceptos y actividades que realizaron en sesiones anteriores y requiere de su puesta en práctica para resolver tareas presentes.

Ahora presentamos algunos fragmentos de clase que corresponden al momento de la institucionalización [V2_Israel_KMT_T_6. 289-309]:

Israel: Vamos a ver lo siguiente [...]

/Israel coloca una lámina en el pintarrón/

Aa: ¿Si estábamos bien maestro?

Israel: Ahorita vamos a ver. Dice la lámina: Un número que me permite comparar cantidades mediante una fracción, ¿cómo se llama?

/Los alumnos no contestan, Israel señala la palabra de la lámina y la lee/

Israel: Se llama “razón”. ¿Se acuerdan lo que vimos ayer de los tiros?

Aos: Sí.

Israel: ¿Cómo lo expresábamos? ¿Se acuerdan? Por ejemplo, si había tronado cuatro globos de ocho lanzamientos, ¿cómo lo podíamos poner?

Ao: Ocho [...] ¿ocho globos de cuántos maestro?

Israel: Si tronó cuatro globos de ocho lanzamientos /escribe en el pintarrón/ ¿Cómo podemos comprar estos dos con una fracción?

Aos: Cuatro octavos.

Israel: Cuatro octavos /escribe $\frac{4}{8}$ /, quiere decir qué [...] ¿cuántos tronó?

Aos: Cuatro de ocho.

Israel: O que por cada dos lanzamientos truena un globo, ¿si será cierto?

Aos: Si, no [...]

Israel: Por ejemplo, ¿cuántos globos tronó?

Ao: Cuatro.

Israel: ¿Y cuántos lanzamientos? Ocho /los dibuja en el pintarrón/.

En el fragmento anterior, se observa que Israel coloca una lámina en el pintarrón y señala que el número que permite comparar cantidades mediante una fracción se llama razón. Enseguida recuerda algunas situaciones que trabajaron en la sesión anterior “globos tronados y total lanzamientos”. Luego procede a la representación numérica, verbal y gráfica de cuatro globos tronados de un total de ocho lanzamientos. En lo anterior identificamos que los alumnos inician con la lectura de la fracción $\frac{4}{8}$ como “cuatro octavos”, situación que guía a Israel a cuestionar a los alumnos para que identifiquen que significa “truenan cuatro globos de ocho lanzamientos”. En otra intervención, Israel cuestiona que si será cierto que por cada dos lanzamientos truenan un globo; ante esto no se unifican respuestas en el grupo. A continuación presentamos otro fragmento donde se da continuidad a lo anterior [V2_Israel_KMT_T_6. 309-341]:

Israel: Vamos a ver lo siguiente, si es lo mismo tronar [...] cuatro globos de [...]
 Ao: Ocho.
 Israel: Que por cada dos lanzamientos truenan [...]
 Aos: Un globo.
 Israel: Tenemos que por cada dos lanzamientos truenan [...]
 Aos: Uno.
 /Israel encierra en pares los lanzamientos dibujados y los relaciona con los globos tronados/
 Israel: Entonces, ¿si es lo mismo?
 Aos: Sí.
 Israel: Dijimos que por cada ocho lanzamientos truenan 4 globos, ¿será lo mismo que con dos lanzamientos truenan un globo?
 Aos: Sí
 Israel: Entonces también lo podemos expresar así [...] habíamos dicho que la razón era una parte del total entre la cantidad total de lanzamientos de globos, ¿cuál sería la cantidad total?, ¿los lanzamientos o los globos que tronó?
 Aos: Lanzamientos [...]
 Israel: Equipo amarillo, dice que una razón nos permite comparar dos cantidades. Aquí tenemos que la razón es igual la parte del total, entre la cantidad total /señala la información de la lámina/, por ejemplo, ¿que vendría siendo la cantidad total?, ¿los globos o el número de lanzamientos? Uno vendría siendo la cantidad total y el otro sería solamente qué [...]
 Ao: Parte.
 Israel: Parte del total.
 Israel: Por ejemplo, este /señala en el pintarrón/ [...] de 4 globos tronados de 8, ¿cuál es la parte del total, un pedacito? ¿Los globos o los lanzamientos?
 Aos: Los globos tronados.
 Israel: Los globos y, ¿cuál sería el total?
 Aos: Los lanzamientos.
 Israel: Los lanzamientos. Por ejemplo, aquí dijimos que cuántos globos tronó.
 Aa: Cuatro de ocho.
 Aos: Cuatro.
 Israel: ¿Cuántas veces lanzó?
 Aos: Ocho.

En este fragmento, Israel inicia a establecer una razón equivalente en función de “cuatro globos tronados de ocho lanzamientos”: “por cada dos lanzamientos truena un globo”. Enseguida rescata el concepto de razón a partir de la situación anterior, donde la cantidad total corresponde al número de lanzamientos y los globos tronados a la parte del total.

Después de que Israel institucionaliza el concepto de razón y el procedimiento para obtener el grado de aglomeración, procede a la validación de la subtask 3.2.2. [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 342-364]:

Israel: Ahora vamos a ver lo que hicieron en la parte de abajo /refiriéndose a la hoja de trabajo/. Dice: Encuentra qué tan cerca están de agotar la capacidad esas mesas; para eso ustedes hicieron unas divisiones, en la primera, ¿qué tenían que dividir?
Ao: $117 \div 130$.
Ao: El número de personas entre el número de asientos.
Israel: ¿Qué dividieron? El número de qué [...]
Aa: Dividimos $117 \div 130$.
Israel: Pero los 117 son el número de qué, ¿de asientos o de personas o de globos?
Aa: De personas.
Israel: De personas. El número de personas lo dividieron entre qué [...]
Aa: El número de asientos.
Israel: El número de asientos. Entonces, ¿cuánto les dio en la mesa chica?
Ao: 0.9
Israel: ¿Cuál es el número de personas?
Aa: 117
Israel: 117; a eso qué le voy a hacer [...] multiplicar, sumar [...]
Aos: Dividir.
Israel: Dividir, ¿entre cuánto?
Ado: 130
Mo; ¿Y cuánto le dio?
Aos: 0.9
Israel: Les dio 0.9. ¿A todos los equipos les dio 0.9?
Aos: Sí.

Israel lee el planteamiento de la subtask 3.2.2., enseguida cuestiona a los alumnos sobre lo que tenían que dividir ($117 \div 130$) para luego identificar el cociente, en este caso, 0.9. En términos generales, Israel retoma la estrategia empleada en la validación de la subtask 3.2.1.: da lectura al planteamiento del problema, recupera los datos del mismo, cuestiona sobre los procedimientos que emplearon para resolverlo y el resultado que obtuvieron.

Enseguida Israel procede a la institucionalización del grado de aglomeración en el caso de la mesa chica [V2_Israel_KMT_T_6. 365-392]:

Israel: Si lo convirtieran en fracción, ¿cómo quedaría?
Aa: Ciento diecisiete entre ciento treinta /Israel escribe en el pintarrón 117/130/
Israel: Si lo quisiera leer, ¿qué quiere decir este? /señala el número 117/
Aos: Personas sentadas.
Israel: De 130. Dice: El grado de aglomeración de la mesa chica es de 117/130 asientos /Lee lámina/, eso les dio [...]
Ao: 0.9
Israel: Dice: El grado de aglomeración 0.9 significa que en la mesa chica 9 de cada 10 personas están [...]
Aos: Sentadas.
Israel: Que 9 de cada 10 asientos están [...]
Aos: Ocupados.
Israel: En la mesa [...]
Aos: Chica.
Israel: Muy bien, si a la mesa chica la dividiera en 10 asientos [...] /Dibuja una mesa rectangular y la divide en 10 partes iguales/ Dice que 0.9, ¿qué significa?
Aa: Que están ocupados.
Israel: ¿Cuántos?
Aa: 9 de cada 10 asientos.
Israel: Significa que nueve de cada qué [...]
Aos: 10 asientos están ocupados.
Israel: Entonces de aquí /señala dibujo de la mesa/, ¿hasta dónde sería?
Aos: Hasta el nueve /pasa un alumno y rellena las primeras nueve partes/ /Los alumnos cuentan los cuadros que está rellenando/
Israel: Entonces, ¿cuántos asientos en la mesa chica quedaron solos?
Aos: Uno.
Israel: Uno. Muy bien, porque dijimos que 9 de cada 10 asientos están [...]
Aos: Ocupados.

En este fragmento Israel recurre a la lectura de la información que proporciona la lámina, continúa con su interpretación: 9 de cada 10 personas están sentadas. Luego escribe en el pintarrón la representación gráfica de la mesa a través de un rectángulo, la divide en 10 partes y rellena los nueve asientos que están ocupados.

Enseguida presentamos lo que pasó en la clase en relación con el grado de aglomeración de la mesa grande [V2_Israel_KMT_T_6. 393-408]:

Israel: ¿Y en la mesa grande? A ver, ¿en la mesa grande cuánto les dio?, ¿qué hicieron? Equipo rojo, ¿qué hicieron?
Aos: Dividimos.
Aos: El número de personas y el número de asientos
Ao: $416 \div 520$
Israel: ¿Cuánto les dio?
Ao: 0.8
Israel: 0.8 /Israel lo escribe/. Entonces qué les dice aquí /señala la hoja de trabajo 2/. Expresa el grado de aglomeración de la mesa grande coloreándolo en el siguiente gráfico, ¿qué quiere decir aquí?, si 0.9 en la mesa chica me decía nueve personas estaban sentadas de diez, ¿qué quiere decir aquí? /señala la mesa grande/
Aa: Ocho de diez.
Israel: Ocho de diez, vamos a colorearlo, vamos a hacer algo de lo que realizó su compañero aquí.
/Los alumnos se ponen a contestar esta actividad porque anteriormente Israel les pidió no la contestaran. Israel se acerca a algunos equipos/

En relación con la mesa grande, los alumnos señalan que dividieron $416 \div 520$ y les dio 0.8. Israel retoma sus respuestas y les solicita se ubiquen en la subtarea 3.2.3., de la hoja de trabajo 2 para que expresen el grado de aglomeración de la mesa grande, para lo cual rescata lo que hicieron en el caso de la mesa chica. Así, cuando cuestiona a los alumnos sobre qué quiere decir 0.8, una alumna señala ocho de diez y, enseguida Israel le solicita que van a colorearlo en la última parte de la última parte de la hoja de trabajo 2. A partir de lo anterior, Israel plantea algunas reflexiones en el documento de Análisis de la Práctica [AP_Israel_KMT_T_6. 831-836]:

Es importante que el alumno se convenza tanto de sus aciertos como de sus errores, señalo lo anterior debido a que la mayoría de los alumnos se negaban a creer que la mesa chica era la que estaba más llena, para resolver sus dudas se continuo con la hoja de trabajo y se realizó una actividad que consistió en obtener el grado de aglomeración de cada una de las mesas, la forma de obtenerlo se señala en la misma hoja; a través de este procedimiento se obtuvieron dos números decimales.

En este fragmento, Israel señala cómo obtener el grado de aglomeración de las mesas (grande y chica), mismo que se representó en decimales, además, permitió a los alumnos identifiquen errores y aciertos en la resolución de las subtareas de la hoja de trabajo 2. A continuación presentamos una reflexión producto del trabajo anterior que externa Israel,[AP_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. 837-841]:

Para realizar una mejor comparación se les presentó el ejemplo de que “por cada 10 sillas de X mesa”, a través de este ejemplo, se les pudo decir a los alumnos que de cada 10 sillas de la mesa chica 9 estaban ocupadas, y en la mesa grande por cada 10 sillas solamente 8 están ocupadas, de esta forma se recobró valor y significado de lo que los alumnos estuvieron resolviendo y pudieron comprender mejor la situación.

En función del fragmento anterior identificamos que Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce el empleo del ejemplo “por cada 10 sillas de x mesa”, permite que los alumnos comparen las cantidades que se trabajan en las subtareas 3.2.: “de cada 10 sillas de la mesa chica 9 estaban ocupadas” y “en la mesa grande por cada 10 sillas solamente 8 están ocupadas”. Después de los fragmentos de transcripción anteriores, Israel valida con los alumnos la resolución de la subtarea 3.2.3., tal como se aprecia enseguida [V2_Israel_KMT_T_4. 409-425]:

Israel: Si en esta mesa 0.9 significaba que 9 personas de 10 estaban sentadas, ésta que significa /señala el 0.8/
Aa: Ocho personas están sentadas de diez.
Israel: De diez, ¿creen que lo podemos hacer así como lo realizó su compañero en la mesa chica?
Aos: Sí.
Israel: ¿Cómo quedaría coloreado? ¿Cuántos vamos a colorear?
Aas: 9
Israel: ¿De cuántos?
Aas: De diez.
Israel: Estamos hablando de la mesa grande, ¿serían nueve partes?, ¿cuánto les dio en la mesa grande?
Aas: Ocho personas.
Israel: Ocho personas, ¿de cuántos?
Aas: De diez
Ao: Vamos a colorear ocho.
Israel: Sí.

En fragmento observamos que Israel retoma el grado de aglomeración de la mesa chica para identificar el de rado la mesa grande y su representación en la recta numérica. Al inicio algunas alumnas confunden las cantidades que se manejan en cada mesa grande, por ello Israel cuestiona a los alumnos si son nueve partes en la mesa grande, a lo cual rectifican que son ocho partes las que van a colorear.

A continuación presentamos lo que sucede en la clase después de que los alumnos validan la subtarea 3.2.3. [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 432-452]:

Israel dibuja en el pintarrón un rectángulo dividido en 10 partes como el de la mesa chica/
Israel: Como ya terminamos, equipo amarillo, ¿cuántos cuadritos colorearon?
Aos: Ocho.
Israel: Equipo rojo [...]
Aos: Ocho.
Israel: Equipo verde [...]
Aos: Ocho.
Israel: Dijimos que en la mesa chica de 10 asientos, ¿cuántos estaban ocupados?
Aos: Nueve.
Israel: De la mesa chica, ustedes /señala un equipo/ [...]
Ao. ¿La mesa chica?
Israel: Dijimos que en la mesa chica, ¿cuántos asientos están ocupados?
Aos: Nueve.
Israel: Entonces de la mesa chica, por cada 10 asientos, ¿cuántos asientos estaban vacíos?
/Israel colorea nueve partes del rectángulo de la mesa chica que está en el pintarrón/
Aos: Uno.
Israel: Y en la mesa grande, ¿cuántos asientos estaban ocupados por cada 10?
Aos: Ocho.
Israel: Ocho /rellena ocho partes del rectángulo que corresponde a la mesa grande/
Israel: Bien, por cada 10, ¿cuántos asientos estaban solos?
Aos: Dos.

Observamos que Israel dibuja dos rectángulos en el pintarrón y los divide en diez partes, enseguida colorea nueve partes que corresponden a los asientos que están ocupados en la mesa chica y ocho partes que corresponden a la mesa grande; realiza esta acción después de que cuestiona a los alumnos sobre la cantidad de asientos que están ocupados en cada mesa. De ahí que identificamos que *Israel_KMT_ES_T_TA_E_2*. Conoce algunos ejercicios semejantes a las actividades que realizaron los alumnos durante la subtarea 3.2.3., como la representación en la recta numérica, permite identifiquen el grado de aglomeración en cada mesa. Para concluir con la institucionalización de las subtareas de la hoja de trabajo 2 se presenta el siguiente fragmento de clase [V2_Israel_KMT_T_6. 453-473]:

Israel: Dijimos que en la mesa chica por cada 10 asientos, ¿cuántos tenía solos?
Aos: Uno.
Israel: Uno verdad, y en la mesa grande por cada 10 asientos, ¿cuántos tenemos solos?
Aos: Dos.
Israel: Entonces, si en la mesa chica por cada 10 asientos me sobra uno, y en la mesa grande por cada 10 asientos me sobran dos, ¿cuál es la mesa que estaba más llena? ¿La que tenía 9 y le sobraba uno o la que tenía 8 y le sobraban 2?
Aos: La chica.
Israel: ¿Cuál era?
Aos: La chica.
Israel: La chica verdad.
Israel: Entonces, ¿qué pasó aquí?, ¿por qué algunos decían que en la mesa grande?
Aa: Porque había más personas.
Israel: Porque había más personas, sin embargo, aquí lo pusieron algunos de sus compañeritos que decían que en la mesa chica, ¿cuántos les faltaban para llenarse?
Aso: 13
Israel: 13 y, en la mesa grande [...]
Aa: 104
Israel: ¿Cuál era la mesa que estaba más llena, la grande o la chica?
Aos: La chica.
Israel: Muy bien.

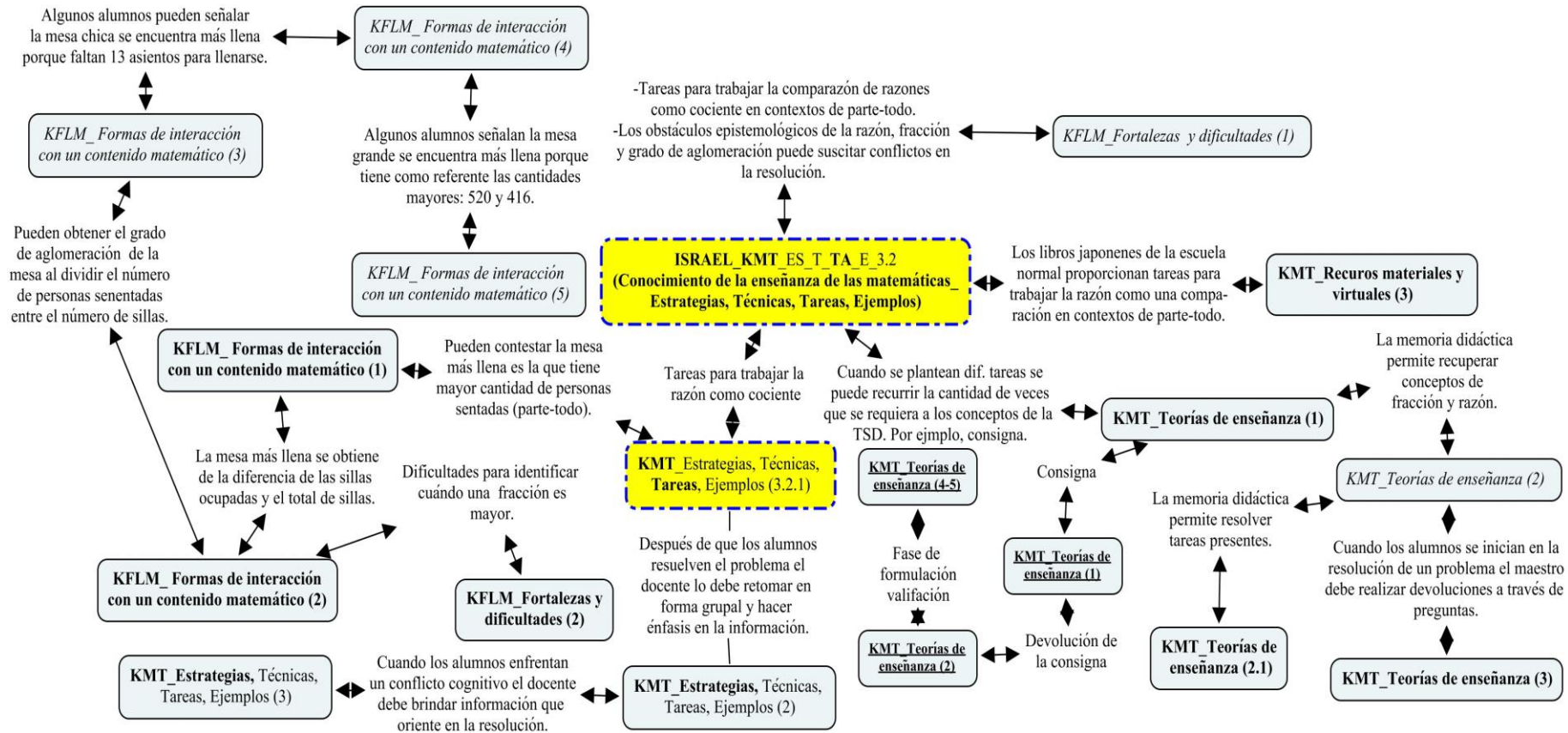
En esta última parte, observamos que Israel retoma el grado de aglomeración obtenido en cada mesa para que los alumnos confirmen que la mesa chica es la que se encuentra más llena y la diferencia entre la cantidad de asientos que faltan para llenarse en ambas mesas a partir de las cantidades iniciales: 416 y 520; 117 y 130. En el documento de Análisis de la Práctica Israel expone algunas reflexiones generales en relación con la ejecución de las subtareas de la hoja de trabajo 2 [AP_Israel_KMT_T_ 6. 858-864]:

Para concluir con la actividad el maestro señala las conclusiones a las cuales se llegaron, resolviendo dudas que pudieran detener el trabajo para las siguientes actividades. Aunque con sus bajas y altas considero que la clase cumplió su objetivo en torno al saber en juego, pues los niños resolvieron el problema por medio de sus propios recursos, si bien la mayoría no llegó al resultado correcto, es de destacar que durante el desarrollo de las actividades posteriores se fueron dispersando algunas dudas y se llegó a una conclusión final.

Como podemos observar, Israel menciona el papel del docente se traduce en dar a conocer conclusiones sobre las actividades realizadas, así como disminuir dudas sobre las mismas. Además, considera que la clase cumplió con su objetivo.

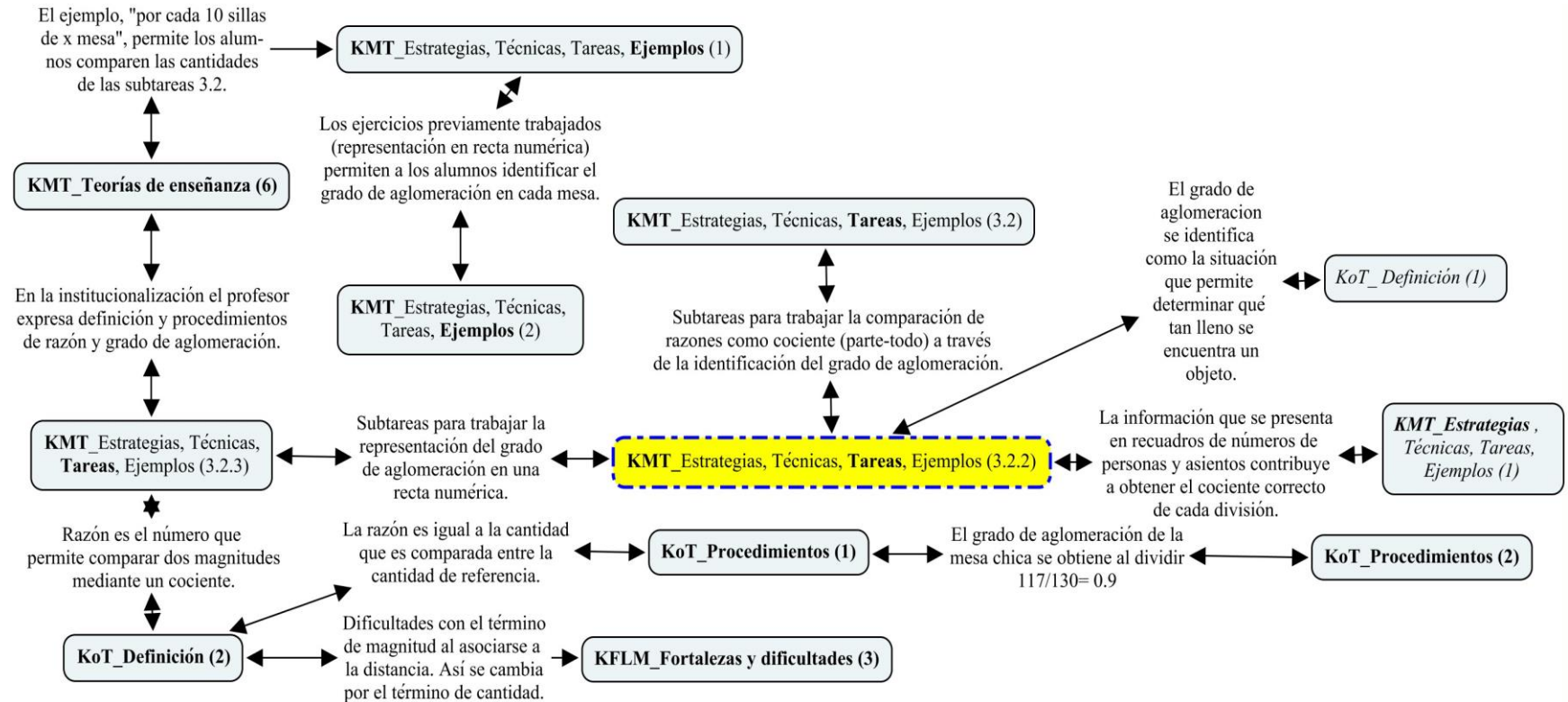
En los siguientes apartados presentamos algunas figuras y resumen de las relaciones entre los conocimientos matemáticos y didácticos evidenciados por el informante Israel, así como algunos indicios de su conocimiento especializado.

V.3.5.1. Figura de relaciones de conocimiento entre dominios y subdominios del MTSK. Subtareas 3.2.



V.3.5.1. Figura de relaciones de conocimiento entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK.

Subtareas 3.2.



V.3.5.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Subtareas 3.2.

En la Planificación, Israel presenta las subtareas 3.2 de la hoja de trabajo 2 a través del concepto de *Consigna 2*. De ahí que conoce que al plantear diferentes de tareas en una planificación puede recurrir a algunos conceptos de la TSD la cantidad de veces que crea conveniente, por ejemplo, consigna y fases (**KMT_T_1**). Así, las subtareas de la hoja de trabajo 2, giran en torno a una situación que se relaciona con la renta de mobiliario (mesas y sillas). Para ello, se presentan dos locales “Fiesta Alegre” y “Todo para tu fiesta”; en el primero rentan una mesa chica para 130 personas y en el segundo, una mesa grande para 520 personas. Enseguida, en una tabla se presenta el número de personas sentadas y asientos disponibles en cada mesa: en la mesa chica hay 117 personas y un total de 130 asientos y, en la mesa grande hay 416 personas sentadas de 520 asientos disponibles. La pregunta que acompaña la situación anterior se remite a identificar: ¿Qué mesa se encuentra más llena? (Subtarea 3.2.1). Después, en la subtarea 3.2.2, se pide determinen el grado de aglomeración en cada una de las mesas y, al final, en la subtarea 3.2.3, lo expresen en una recta numérica. En este contexto, Israel conoce los libros japoneses que se revisan en la escuela normal proporcionan información sobre el tipo de tareas que se pueden diseñar para trabajar la razón como una comparación en contextos de parte-todo (**KMT_R_1**). Además, conoce los obstáculos epistemológicos de razón, fracción y grado de aglomeración pueden suscitar confusiones en los alumnos durante la resolución de las subtareas (**KFLM_FD_1**).

A partir de lo que expresamos en el párrafo anterior, identificamos que Israel conoce tareas para trabajar la comparación de razones como cociente en contextos de parte-todo (ocupación-capacidad de dos mesas) (**KMT_ES_T_TA_E_3.2**).

En la subtarea 3.2.1, donde los alumnos tratarán de identificar cuál mesa se encuentra más llena, Israel conoce que los alumnos que seleccionan la mesa más grande pueden recurrir a la observación para identificar la mesa que tiene mayor cantidad de personas sentadas (416) en comparación con la mesa chica (117) (**KFLM_IC_1**), aunque conoce que los alumnos que seleccionan la mesa chica van a tomar como referencia la capacidad total de las mesas (130 y 520) y la cantidad de personas sentadas (117 y 416). Así, pueden identificar en la mesa chica faltan de sentarse trece personas y en la mesa grande ciento cuatro (**KFLM_IC_2**). En esta subtarea conoce algunos que alumnos tienen dificultades para identificar cuándo una cantidad es mayor (fracciones), o en este caso, cuál mesa que está más llena, pues se dejan guiar por las cantidades mayores sin analizar su función en la situación que se describe (**KMT_FD_2**).

En la subtarea 3.2.2, identificamos que Israel conoce tareas para trabajar la comparación de razones como cocientes (parte-todo) a través de la identificación del grado de aglomeración (KMT_ES_T_TA_E_3.2.2). En este caso, conoce el grado de aglomeración como la situación que permite determinar qué tan lleno se encuentra un objeto (*KoT_D_1*). En función de este contexto, Israel conoce la información que se presenta en recuadros de la subtarea 3.2.2 respecto al número de personas y asientos de la mesa chica sirve de referencia para que los alumnos ubiquen ambas cantidades en relación con los datos de la mesa grande; así pueden obtener el cociente correcto en cada división (KMT_ES_T_TA_E_1).

Cuando Israel inicia la clase donde los alumnos resolverán las subtareas 3.2, evidencia conocimiento de la memoria didáctica como la gestión que realiza el maestro a través de preguntas para recuperar conceptos que se trabajan en sesiones anteriores, en este caso, fracciones y razón (KMT_T_2).

En la fase de acción y formulación cuando los niños comienzan a resolver la subtarea, identificamos que Israel conoce que una tarea está compuesta por un problema que plantea un desafío para los alumnos, (KMT_ES_T_TA_E_3.2.?). Además, conoce que cuando los alumnos se inician en la resolución de un problema (subtareas 3.2.) el docente consiste en debe devolver el problema a través de una serie de planteamientos (preguntas) que reorientan el trabajo de los alumnos (KMT_T_3).

Durante la fase de validación de las subtareas 3.2, identificamos que Israel conoce que después de que los alumnos resuelven un problema es conveniente retomar el problema en forma grupal y hacer énfasis en cada una de la información que proporciona para facilitar una mejor comprensión del mismo (KMT_ES_T_TA_E_2). También conoce que cuando los alumnos se enfrentan a un conflicto cognitivo en la clase el docente debe intervenir para brindar información que oriente al resultado esperado (KMT_ES_T_TA_E_3).

En la subtarea 3.2.1 cuando los alumnos responden qué mesa se encuentra más llena, Israel conoce que algunos alumnos obtuvieron el grado de aglomeración de la mesa que al dividir el número de personas entre el número de asientos (KFLM_IC_3). Otros alumnos señalan que la mesa chica se encuentra más llena porque le faltan 13 asientos para llenarse (KFLM_IC_4), mientras que otros seleccionan la mesa grande como la más llena porque toman como referente el número de personas sentadas (416) o el total de asientos (520) (KFLM_IC_5).

En el trabajo grupal con la última parte de las subtareas 3.2., Israel se apoya en una lámina y retoma la subtarea 3.2.3 para que sea resuelta por los alumnos, aquí identificamos que se hace presente la fase de institucionalización como momento donde el profesor da a conocer las definiciones y procedimientos relacionados con los conceptos matemáticos que se abordan en la resolución de algunas subtareas, en el caso de la hoja de trabajo 2, la definición de razón y el procedimiento para obtener el grado de aglomeración (**KMT_T_6**). De manera concreta, Israel conoce la razón como el número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente (**KoT_D_2**), conoce que la razón es igual a la cantidad que es comparada entre la cantidad de referencia (**KoT_P_1**) y conoce que el grado de aglomeración en la mesa chica se obtiene a partir de la división de $117 \div 130$, es decir, en función de la cantidad que es comparada (117) entre el valor de la cantidad de referencia (130). El valor obtenido, en este caso 0.9 (nueve décimos), se puede representar en una recta numérica donde se identifica que 9 de cada 10 asientos están ocupados o que un décimo del total de asientos no está ocupado (**KoT_P_2**).

En la fase de institucionalización de las subtareas 3.2, Israel conoce que al referirse a la razón como un número que permite comparar dos magnitudes, el empleo del término magnitud puede confundir a los alumnos al asociarlo con distancia, por lo cual, cree conveniente presentar el concepto de cantidad en lugar de magnitud (**KFLM_FD_3**) y que puede ser conveniente recurrir a la memoria didáctica como acción que propicia que los alumnos recuerden conceptos y actividades que realizaron en sesiones anteriores necesarias para resolver tareas presentes (**KMT_T_2.1**). En este momento de la clase, Israel conoce que el ejemplo “por cada 10 sillas de x mesa”, permite que los alumnos comparen las cantidades de las subtareas 3.2.: “de cada 10 sillas de la mesa chica 9 estaban ocupadas” y “en la mesa grande por cada 10 sillas solamente 8 están ocupadas” (**KMT_ES_T_TA_E_1**). Además, conoce algunos ejercicios semejantes a los que realizaron los alumnos en la subtarea 3.2.3., como la representación en la recta numérica que permite identifiquen el grado de aglomeración en cada mesa (**KMT_ES_T_TA_E_2**).

V.3.6. Subtareas 3.3. Conocimiento especializado de Israel.

En el último apartado, la Planificación de Israel incluye el planteamiento y resolución de la subtarea 3.3., que se ubica en la hoja de trabajo 3. Enseguida presentamos un fragmento de la Planificación donde Israel registra la consigna que marca el inicio de la resolución de la tarea propuesta [P_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.3. 217-221]:

Consigna 3

Para finalizar se les entregará una hoja de trabajo 3, organizados en los mismos equipos resuelvan los problemas que aparecen en su hoja, recuerden que no se puede estar platicando con otros equipos. Tienen 10 minutos para terminar, de igual manera se podrá hacer uso de la calculadora.

En este fragmento, Israel señala que los alumnos continúan resolviendo la hoja 3 y que pueden usar la calculadora, establece algunas restricciones: no pueden platicar con otros equipos y tienen diez minutos para desarrollar la actividad. Durante la Entrevista Semiestructurada 1, Israel agrega información sobre el propósito de la consigna 3 [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.3. 882-896]:

E: Al ver su situación didáctica nos encontramos con otra consigna número tres, ¿cuál es el propósito de esta consigna tres?

Israel: La consigna tres [...] esta actividad la rescaté de un libro de matemáticas de quinto grado de primaria del ciclo escolar 2012- 2013 porque en las siguientes ediciones desaparece esta actividad, tiene la finalidad de trabajar la razón como proporcionalidad, por ejemplo, si vemos, cada actividad a lo mejor está un poco larga, pero tratamos de trabajar la razón desde diferentes perspectivas como cociente, proporcionalidad como fracción [...]

E: ¿Cuál es la tercera consigna que se va a dar a los niños?

Israel: Dice “para finalizar se les entregará la hoja de trabajo tres, organizados en los mismos equipos resuelvan los problemas que aparecen en su hoja, recuerden que no se puede estar platicando con otros equipos”. Para esta actividad les voy a dar un tiempo limitado de diez minutos, es como para apresurarlos pero, quizá les puedo dar más tiempo. De igual manera, se podrá hacer uso de calculadora, aquí me imagino voy a quitar eso de hacer uso de calculadora porque son cantidades que quizás se pueden trabajar de manera mental, no tanto de usar calculadora o de hacer procedimientos; esa sería la consigna.

En este fragmento, Israel señala que tomó la consigna y subtarea 3 de un libro de texto de matemáticas de quinto grado de educación primaria y que el propósito es trabajar la razón desde la proporcionalidad. Respecto a las posibles formas de interacción de los alumnos, señala que el tipo de cantidades que se manejan les permitirá resolverla sin usar la calculadora. Durante la Entrevista

Semiestructurada 2 Israel agrega información sobre esta subtaska [ES2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.3. 156-159]:

Israel: [...] lo del libro de quinto de primaria lo dejé al final, porque consideré era un poco más compleja, porque los niños tenían que identificar lo que mencionábamos del valor unitario, de la fracción como un todo. Por eso quise revisar algunas cosas previas que les ayudarán a esta parte.

En este caso, Israel expresa que la actividad le parece más compleja en relación con las subtasks de las hojas de trabajo anteriores. Enseguida presentamos la subtaska 3.3.:

Figura 21. Subtasks 3.3.

Hoja de trabajo 3

Para la comida el Alcalde quiere mandar preparar un rico pozole, para preparar una ración para 5 personas se necesitan, entre otros, los siguientes ingredientes y sus respectivas cantidades.

Ingredientes	Cantidad
Maíz	1 kg
Carne	750 g
Chile guajillo	$\frac{3}{4}$ kg
Agua	1.5 l
Sal	Al gusto

¿Cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere preparar para 8 personas?

Ingredientes	Cantidad
Maíz	
Carne	
Chile guajillo	
Agua	
Sal	

En la subtaska anterior, Israel plantea que el Alcalde quiere mandar preparar pozole, por lo cual presenta los ingredientes necesarios para 5 personas; en la primera columna se proporciona el nombre de los ingredientes y en la segunda la cantidad que se requiere. Enseguida solicita que identifiquen la cantidad de ingredientes que se requiere para preparar un pozole para cinco personas. En la Entrevista Semiestructurada 1 Israel presenta, de manera general, la información de la hoja de trabajo 3 [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.3. 900-908]:

Israel: La hoja de trabajo tres trata de que para la comida el Alcalde quiere mandar preparar un rico pozole. Aquí tenemos una tabla que se le da a los alumnos de referencia sobre las cantidades que se requiere de cada ingrediente para cinco personas [...] dice “se presenta la ración que se necesita para cinco personas [...]” vienen los ingredientes y sus respectivas cantidades. En términos generales, aquí menciona los ingredientes y la cantidad, se ve la tablita y se analiza. Entonces para cinco personas, cuánto ocupamos de maíz, pues que un kilo, para cinco personas cuánto ocupamos de carne, 750 gramos, para cinco personas cuánto ocupamos de chile guajillo [...] así se va a estar un poquito comentando la información que viene en la tabla [...]

Cuando Israel da a conocer la información que contiene esta la hoja, hace énfasis en los datos que proporcionan las tablas. En función de este contexto, cuestionamos a Israel sobre la presencia de la razón en la subtask 3.3. [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.3. 909-926]:

E: Hasta donde vamos, ¿se hace presente la razón?

Israel: La razón se hace presente en qué parte [...] una vez que estuvimos trabajando lo anterior con los niños [...] de que significaba el grado de aglomeración, por ejemplo, de que ocho de cada diez y aquí lo que quiero [...] aquí viene en kilogramos, pero quiero también ver si los niños los convierten en gramos, entonces vamos a trabajar esto [...] muy bien qué significa esto (escribe en el pintarrón 5/1000) ,que para cinco personas vamos a ocupar mil gramos o un kilogramo de maíz y aquí es donde estamos haciendo esta comparación de estas dos cantidades (señala el 5 y el 1000). Esta tabla me gustaría analizarla entre todos, de forma grupal para que quede bien claro qué es la proporción para cinco personas y, por ejemplo, cuánto se ocupa de agua para cinco personas, pues que 1.5 litros o 1500 mililitros. Abajo viene un planteamiento que quiero lo resuelvan en equipo [...] cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere preparar para ocho personas. Esta actividad, ahora que la estoy analizando me gustaría cambiarla porque, por ejemplo, lo que vamos a tratar de hacer es retomar lo que es el valor unitario [...] por ejemplo, dice “cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere preparar para ocho personas [...]” si lo queremos dejar así vamos a tener que [...] bueno lo voy a dejar mejor así [...] Porque si lo dejo en el valor unitario va a ser más sencillo, pero vamos a tratar de problematizar (escribe en el pintarrón ingredientes y luego cantidad y completa la tabla).

En el fragmento anterior Israel plantea la manera cómo se hace presente la razón en la subtask 3.3.: comparación entre la cantidad de personas (5) y la cantidad de ingredientes que se requiere en cada caso, por ejemplo, “para cinco personas vamos a ocupar mil gramos o un kilogramo de maíz”. Además, rescata la importancia de solicitar identifiquen la cantidad de ingredientes que se requiere para ocho personas en lugar de una. A partir de la información que Israel proporciona en los fragmentos de Planificación y entrevistas anteriores, identificamos los siguientes conocimientos:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.3. Conoce una subtask para la enseñanza de la razón en el contexto de la proporcionalidad.

Israel_KMT_R_1. Conoce el libro de matemáticas de quinto grado como un material que proporciona actividades en relación con la enseñanza de la razón en el contexto de la proporcionalidad.

Israel_KFLM_IC_1. Conoce que las cantidades que se plantean en la subtarea 3.3., permiten los alumnos empleen el cálculo mental para resolverla, sin recurrir al uso de la calculadora.

Israel_KFLM_IC_2. Conoce que los alumnos pueden convertir los kilogramos a gramos para identificar la cantidad de ingredientes de pozole que se requiere para preparar una ración para 8 personas.

Israel_KFLM_FD_1. Conoce que los alumnos enfrentan más dificultades al identificar la cantidad de ingredientes que se requieren para preparar una ración para ocho personas que al identificar la cantidad para una persona. En la Planificación, Israel señala un apartado denominado fase de acción, cuyo contenido es el siguiente [P_Israel_KMT_T_3. 245-247]:

Fase de acción:

- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 3 a los alumnos comienzan a realizar conjeturas mentales.

En ésta, Israel señala que los alumnos realizan ciertas conjeturas. Cabe mencionar que en las subtareas de la hoja de trabajo 1 y 2, Israel evidencia conocimiento de la fase de acción (KMT_T_3) como un elemento de la Teoría de las Situaciones Didácticas. A continuación un fragmento de la Entrevista Semiestructurada 1 donde señala posibles procedimientos de los alumnos para resolver la subtarea 3.3. [ES1_Israel_KFLM_IC_3. 927-945]:

E: ¿Cómo espera que los niños resuelvan este planteamiento?

Israel: Espero que primero los niños retomen lo que es el valor unitario en esta actividad, por ejemplo, estamos hablando de los ingredientes para una cantidad de ocho personas, tenemos maíz, carne, chile, agua y sal (los escribe en la tabla en la columna de ingredientes). Primero espero que los niños rescaten el valor unitario, por ejemplo, tomando de referencia los datos anteriores de la tabla que se encuentra en la hoja de trabajo, sabemos que de maíz para cinco personas ocupó mil gramos o un kilogramo (escribe en el pintarrón 5 - 1000 gr -1kg.-). En quinto grado empiezan a trabajar lo que es la regla de tres, por ejemplo, aquí quizá lo que espero que hagan los niños pueden ser dos cosas; primero, realicen la regla de tres, que ocho lo multipliquen por 1000 gramos y lo dividan entre cinco (escribe en el pintarrón 8 por 1000 entre 5) para obtener la cantidad de maíz para ocho personas. La segunda forma que espero que hagan los niños puede ser remitiéndonos al valor unitario, por ejemplo, que para cinco personas se ocuparon mil gramos, entonces para una persona cuánto se ocupó, pues 200 gramos (escribe en el pintarrón $1000/5 = 200/1$). Así sería que para una persona se ocuparían 200 gramos, entonces cuánto se ocuparía para ocho personas [...] una vez teniendo el valor unitario sería multiplicar 8×200 gramos, pasaría lo mismo con la carne, con el chile, con el agua y pues, con la sal menciona es al gusto, igual no hay ningún cambio. Aquí lo que estamos trabajando son las proporciones.

En función del fragmento anterior identificamos los siguientes indicadores de conocimiento:

Israel_KFLM_IC_3. Conoce los alumnos pueden recurrir a determinar el valor unitario o emplear la regla de tres para identificar la cantidad de ingredientes que se requiere para preparar un pozole para ocho personas cuando se da la cantidad que se necesita para cinco personas. **Israel_KoT_P_1.** Conoce los alumnos pueden emplear la regla de tres para identificar la cantidad de ingredientes que se requiere para preparar un pozole para 8 personas, es decir, multiplican 8 por 1000 gramos y lo dividen entre 5. **Israel_KoT_P_2.** Conoce los alumnos pueden determinar el valor unitario para identificar la cantidad de ingredientes que se requiere para preparar un pozole para 8 personas, es decir, dividen 1000 gramos entre 5, que es igual a 200 gramos; cantidad que se ocupa para una persona y luego se multiplica por 8. Durante la Entrevista Semiestructurada 1, solicitamos a Israel nos brinde más información sobre los posibles procedimientos de los alumnos para resolver la subtaska 3.3.,[ES1_Israel_KMLS_TAP_1. 946-963]

E: Usted dice que algunos niños van a usar la regla de tres, otros van a sacar el valor unitario para resolver la actividad anterior. ¿Cree que los resultados de los niños coincidan con lo esperado?

Israel: Espero que sí, porque a lo largo de los ciclos en la primaria se trabaja mucho este tipo de tablas de proporciones, aunque la razón por la que quería cambiar esta actividad es que siempre tendemos a partir de lo más sencillo, no dándoles el valor de cinco personas, sino dándoles el valor de una persona, de que para una se ocupan 200 gramos de maíz. Entonces creo que no va a haber mucho problema porque los niños trabajan esto muy seguido, es decir, de que a veces les dan un dato y aquí está una incógnita (señala en la segunda columna de la tabla) y luego tienen que buscar los demás datos para completar la información de una tabla, por ejemplo, veo que en los libros de quinto año, porque los estuve revisando, aparecen cantidades de hasta 40,000, cantidades grandes, por lo cual, no creo que exista mucho problema, según lo que estuve viendo en los libros anteriores y que casi siempre se parte del uno, es decir, si uno es a doscientos dos a cuánto es (lo escriben el pintarrón 1 a 200 y 2 a 400) [...] pero siempre tendemos a dar el uno como el valor de referencia inicial, lo que quiero aquí es empezar de más abajo, no regresar tanto el trabajo con el valor unitario, aunque quizás se retome hasta después, porque cuando se les da a los alumnos el valor unitario, se les está proporcionando mucha información.

Cuando cuestionamos a Israel si cree que los resultados de los niños coincidan con lo esperado, evidencia conocimientos de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, de manera concreta identificamos que **Israel_KMLS_TAP_1.** Conoce que en educación primaria se trabaja la representación y algunas formas de presentar la información de la subtaska 3.3.: tablas, brindar algunos datos y plantear incógnitas. **Israel_KMLS_TAP_2.** Conoce, que cuando se abordan tareas sobre la noción de razón en el contexto de la proporcionalidad en educación primaria, con frecuencia se proporciona el valor unitario para que los alumnos identifiquen diferentes valores.

Una vez que definimos los indicadores de conocimiento de la subtarea 3.3., presentamos la consigna que Israel expresa en la videograbación [V2_Israel_KMT_T_1. 473-475]:

Para terminar les voy a entregar otra hojita /Israel reparte el material/. Vamos a contestar esta hojita y ahorita vamos a ver cómo les queda. No vamos a usar calculadora, tenemos también 15 minutos.

En la consigna solicita a los alumnos se inicien en la resolución de la subtarea de la hoja de trabajo 3, sin el empleo de la calculadora; restricción que no se encontraba presente en la Planificación, pero ahora agrega. A continuación presentamos un fragmento de la Entrevista Semiestructurada 2 donde confirma porque omite el uso de la calculadora en la última subtarea [ES2_Israel_KFLM_IC_1. 682-690]:

E: Después usted aborda con ellos la hoja de trabajo tres, pero aquí en la consigna llama la atención les dice no se puede usar calculadora y en las anteriores sí, ¿a qué se debe?

Israel: La intención de no utilizar calculadora es que consideré eran cantidades que los niños fácilmente podían trabajar sin usar la calculadora y podía favorecer el desarrollo de habilidades en los niños al resolver problemas. En las otras hojas manejábamos cantidades como cuatrocientos dieciséis entre quinientos veinte, un poco más complejas [...] decimos que en este caso no está peleado el uso de la calculadora, siempre y cuando manejen la forma convencional de resolver las operaciones, quizá aquí sería conveniente subir un poco el nivel de complejidad, es decir, qué representaba hacerlo sin calculadora [...]

En términos generales, Israel expresa que pretende ampliar la complejidad de la subtarea al pedir que usen la calculadora. Enseguida presentamos los fragmentos de Planificación donde Israel expresa la fase de formulación-validación [P_Israel_KMT_T_4-5. 248-254]:

- Se pedirá participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las preguntas planteadas y qué les permitió llegar a esos resultados. Pueden pasar al frente para representarlas al pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que permitieron llegar a lo deseado.

En este fragmento Israel describe lo que consideraba correspondía a ambas fases, pero en las entrevistas realizadas y en el documento de Análisis de su Práctica evidencia conocimiento de que existe relación entre ambas fases, aunque cada una implica que el maestro y el alumno desempeñen roles diferentes. A continuación presentamos fragmentos de de clases que corresponden a las fases de acción, formulación, validación e institucionalización de la subtarea 3.3. [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. 476-480; 491-497]:

/Los alumnos continúan trabajando con la hoja 3, mientras tanto se acerca con un equipo y comienzan a leer el problema/
Aa: Para la comida el Alcalde quiere mandar preparar un rico pozole, para preparar una ración para 5 personas se necesitan, entre otros, los siguientes ingredientes y sus respectivas cantidades [...] /dan lectura a los ingredientes y las cantidades/
[...]
Israel: Muy bien, me está diciendo que esto se ocupa para cuántas personas
[...]
Aa: Para 5.
Israel: Muy bien, para cinco, ¿y qué dice abajo?
Aa: ¿Cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere preparar para 8 personas?
Israel: ¿Qué tendrían que hacer? A ver platiquen aquí entre ustedes, aquí les está dando las porciones o la cantidad para [...] ¿Cuántas personas?
Aa: Para 5

A partir de este fragmento, identificamos que es frecuente que, cuando Israel plantea la resolución de una subtarea en la fase de acción y formulación se evidencia que Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. conoce que cuando los alumnos comienzan a resolver una tarea en equipo el papel del docente consiste en realizar preguntas que les permitan identificar los datos del problema, lo que solicita y lo que creen pueden hacer para dar respuesta. Las intervenciones de Israel durante el trabajo en equipo para resolver la subtarea 3.3., muestran otros conocimientos que pone en juego [V2_Israel_KFLM_IC_4. 498-506]:

Israel: Muy bien, pero ahora queremos saber la cantidad para 8 personas.
Aa: Entonces sería un kilo y medio de maíz.
Israel: ¿Un kilo y medio?
Aa: Sí.
Israel: Platiquen aquí entre ustedes.
Aa: Un kilo un cuarto y de carne un kilo.
Israel: ¿Cuáles operaciones realizaron para saber eso? Anótale o por qué dices tú que un kilo un cuarto o un kilo y medio. ¿Qué podemos hacer?
/Una alumna comienza a realizar algunas operaciones en la calculadora/

Cuando los alumnos comienzan a expresar posibles respuestas a la pregunta de la subtarea 3.3. (¿Cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere preparar para 8 personas?) Israel escucha y solicita platiquen entre ellos; en estas intervenciones muestra algunos indicios de conocimientos respecto a los posibles procedimientos que espera empleen:

Israel_KFLM_IC_4. Conoce la realización de operaciones como uno de los posibles procedimientos a los que los alumnos pueden recurrir para dar respuesta a la pregunta de una subtarea donde se aborda la razón como cociente en el contexto de la proporcionalidad.

Los conocimientos que Israel posee en relación con las posibles formas de interacción de los alumnos con la razón en el contexto de la proporcionalidad propicia intervenga con diferentes propósitos, tal como expresamos enseguida [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 507-528]:

Israel: Dices que un kilo pueden ser diez [...] ¿y podemos transformar eso a gramos?
Aa: Serían 1000 gramos.
Israel: Más bien vamos a trabajarlo como 1000 gramos, ¿para cuántas personas dijimos que eran?
Aa: Para 5.
Israel: Para 5. Entonces tú dices que mil gramos de maíz son para cinco personas, pero me está pidiendo la cantidad para [...]
Aa: Ocho.
Israel: ¿Qué podemos hacer aquí?
Aa: Multiplicar por cinco [...] por los gramos [...] a la mitad.
Israel: A la mitad [...] entonces cuánto es la mitad de un kilo, si eran mil gramos [...]
Aa: Quinientos gramos.
Israel: Entonces si eran para 5 personas ¿500 gramos van a ser para cuántas personas?
Aa: Para las otras tres que faltan.
Israel: ¿Para las otras tres?
Aa: Si, si aquí ya nos dice para cinco y aquí ya le está aumentando otros tres [...]
Israel: Ustedes me están diciendo lo siguiente: Mil gramos de maíz son para cuántas personas [...]
Aa: Para 5.
Israel: Para 5. Entonces les estaba diciendo que si le sacamos la mitad sería [...] ¿cuánto?
Aa: 500
Israel: Serían 500 [...]

En este fragmento, cuando los equipos inician la resolución de la subtarea, Israel proporciona información: 1 kilogramo es igual a 1000 gramos y, enseguida emite una serie de preguntas para que encuentren la respuesta al planteamiento de la subtarea 3.3.

Durante la Entrevista Semiestructurada 2, preguntamos a Israel a qué se debe cuestione a los niños sobre la cantidad de gramos que tiene un kilogramo y comenta [ES2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 697-701]:

Israel: Planteo esta situación porque en esta actividad de la hoja tres, lo vemos en un nivel un poco más elevado, porque los niños tienen que hacer varias cosas, en primer lugar, tienen que hacer conversiones para que se facilite, igual vemos que se maneja el punto decimal que es uno punto cinco, se maneja lo que es fracción, que sería un cuarto y lo que serían números enteros.

En el fragmento anterior, Israel señala solicita a los alumnos convertir los kilogramos en gramos, la conversión facilita la resolución de la tarea. A partir de la información que Israel proporciona en la Videograbación 2 y la Entrevista Semiestructurada 2, identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. Conoce que proporcionar información sobre los procedimientos que los alumnos pueden emplear para resolver la subtaska contribuye a que los alumnos se inicien en su resolución. Por ejemplo, cuando los alumnos resuelven una tarea que implica la razón como cociente en el contexto de cantidades de ingredientes, puede conducirlos a convertir kilogramos a gramos para que avancen en su resolución.

Después de que Israel señala que pueden convertir kilogramos a gramos, identificamos, que existen confusiones en el manejo de la nueva información, sin embargo, Israel cuestiona las respuestas de los alumnos. A continuación presentamos un fragmento de la Videograbación 2 donde una alumna retoma la información para dar una respuesta correcta [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 529-543]:

Aa: A cada persona le tocarían de 200 gramos, espéreme [...]
Israel: ¿Cómo le hiciste?
Aa: $1000 \div 5$ es igual a 200 gramos a cada persona.
Israel: ¿Nos está pidiendo para una persona?
Aa: No, pero es que hay que sacar la cantidad para sumar lo demás y sacar la resta.
Israel: Entonces cómo te salió [...]
Aa: Mil más doscientos gramos de otra persona /La alumna está realizando la suma en la calculadora/
Israel: ¿Eso para cuántas personas sería?
Aa: Seis, más 200 gramos de otra persona, serían [...] siete, más 200 gramos de otra persona, serían 1600.
Israel: ¿1600 qué?
Aa: Gramos.
Israel: A ver póngale eso a ver si es cierto, ¿podemos hacer lo mismo para las demás?
Aa: Sí.

En los diálogos anteriores observamos la alumna convierte los kilogramos a gramos; decisión que le permite obtener la cantidad de maíz que se requiere para una persona y definir la cantidad para 8 personas. Ante esto, Israel cuestiona sobre el procedimiento, además, cuestiona si ese procedimiento se puede aplicar para obtener las cantidades del resto de los ingredientes, a lo cual, le contestan que sí. Enseguida presentamos otro fragmento de clase donde Israel interviene con un equipo diferente cuando resuelven la subtask 3.3. [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 544-552]:

/Israel va con otro equipo/
Israel: ¿Ustedes que están haciendo?
Aa: Sacando la cantidad que se ocupa para una sola persona para poner, porque dice: Cuánto de cada ingrediente se necesita si se quiere para 8. Entonces aquí ya dice que un kilogramo se necesita para 5 personas, sacando el resultado de lo que se come una persona para sumar los tres que se ocupan.
Israel: Muy bien. ¿Cuánto se ocupa del maíz?
Aa: 0.2 kg para una persona.
Israel: ¿0.2 qué es en gramos? Resuélvanlo.

En este fragmento observamos que un equipo obtiene la cantidad de maíz que se requiere para una persona pero en kilogramos: 0.2 kilogramos. Israel les cuestiona ¿qué es 0.2 en gramos?; los que nos permite identificar el conocimiento que tiene sobre las posibles formas de resolución de la subtask. La pregunta de Israel empleada en un primer momento como estrategia para que los alumnos avancen en su resolución, en este caso, tiene la intención de que los integrantes de otro equipo den respuesta en gramos. En la Entrevista Semiestructurada 2, Israel expresa la función de esta conversión [ES2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 728-737]:

E: ¿Cree que fue importante haber planteado convertir el kilogramo a gramos para poder resolver la tabla?
Israel: No creo que hubiera sido tan importante, pero mi intención era que todo lo tuvieran en gramos, porque sólo en este ingrediente lo maneja en kilogramos y los otros manejan en gramos [...] igual, por ejemplo, un cuarto de kilogramo aquí lo convirtieron a 250 gramos. Por lo tanto, la intención era ver todo en gramos, quizá eso es propio de mí porque se me hace más fácil dividir una cantidad sin que me salgan decimales, por ejemplo, me va a dar cero punto dos kilogramos, ah pero cuánto es cero punto dos kilogramos, entonces aquí serían doscientos gramos. Me parece es más fácil para los niños entender doscientos gramos que cero punto dos kilogramos.

En el fragmento anterior, Israel señala que pedía la conversión porque pretendía que las cantidades se determinaran en gramos, lo cual puede facilitar que los niños avancen en la resolución de la subtask. De ahí que cuando expresan se requieren 0.2 kilogramos de maíz para una persona, les pide lo expresen

en gramos. A continuación presentamos otro fragmento de transcripción de clase donde Israel se acerca a otro equipo durante la resolución de la subtaska 3.3. [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_2. 574-608]:

/La alumna vuelve a leer el problema/
Israel: A ver me está diciendo son para 5 y aquí tiene que anotar para ocho. ¿Si podemos sacar las cantidades que ocuparán para 8 personas? Dijimos que de maíz se ocupa un kilogramo para [...]
Aa: 5 personas.
Israel: Entonces para 8 personas que podemos hacer aquí [...]
Aa: Ponerle otro kilogramo.
Israel: A ver [...]
Aa: Un medio.
Aa: Otros tres kilogramos.
Israel: Pero si fuera otro kilogramo para cuántas personas sería [...]
Aa: Para diez.
Israel: ¿Y son para 10?
Aa: No.
Aa: Otro medio kilogramo.
Israel: ¿Y si fuera medio kilogramo para cuántas serían?
Ao: Yo sí sé cuánto, un cuarto.
Israel: ¿Un cuarto?
Aa: Sí, un cuarto sería para dos [...]
/Un alumno llama al Israel y él se dirige con ellos/
Israel: Este entero sería un kilogramo, entonces un medio, ¿cuánto sería?
Aa: La mitad.
Israel: ¿Y cuánto sería la mitad de un kilogramo?
Ao: Un medio.
Israel: Vamos a hacer algo más fácil, un kilogramo, ¿cuántos gramos tiene?
Ao: Mil gramos.
Israel: ¿Cuánto sería la mitad?
Ao: 500 gramos.
Israel: Medio kilo sería [...]
Aos: 500.
Israel: ¿Y con un cuarto cuánto sería? A ver este es nuestro medio, ahora vamos a dividirlo entre dos [...]
Aa: 250
Israel: ¿Ahora si ya lo pueden hacer?
Aos: Sí.

En el fragmento anterior Israel los alumnos comienzan a enunciar diferentes cantidades que no coinciden con la respuesta que espera Israel, por ello retoma algunas de sus aportaciones y los cuestiona sobre la validez de su solución: Pero si fuera otro kilogramo para cuántas personas sería [...], ¿Y son para 10? [...]; este contexto Israel propone a los alumnos que conviertan los kilogramos a gramos, pero los alumnos no modifican sus acciones. Después de que los alumnos resuelven la subtaska 3.3., Israel procede a su validación, donde evidencia algunos conocimientos que puso en juego en momentos anteriores [V2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. 609-623]:

Israel: Ahorita van a pasar algunos equipos a explicar cómo le hicieron /Pasa por los equipos/.

Israel: ¿Qué nos dice la hojita 3?

/Una alumna realiza en el pintarrón la tabla de la hoja 3 con ayuda de su equipo/

Israel: En la tablita que viene en su hojita les daban unas cantidades para preparar un pozole para cuántas personas [...]

Aos: Para 5.

Israel: Para 5 personas. Dijimos que de maíz, ¿cuánto se ocupa?

Aos: Un kilo.

Israel: Un kilo verdad; de carne, ¿cuánto se ocupa? /Pregunta por la cantidad para el resto de los ingredientes que vienen en la tabla/

Israel: Muy bien, pero en la tablita de abajo está pidiendo que con estas cantidades saquemos cuánto se ocupa para cuántas personas [...]

Aos: Para ocho. Israel: Para ocho personas.

A partir de lo anterior identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_3. Conoce que cuando los alumnos validar la resolución de una tarea el papel del docente consiste en plantear preguntas que les permitan identificar los datos del problema.

A continuación presentamos la validación que los alumnos hicieron sobre la respuesta a la p la subtarea 3.3. [V2_Israel_KMT_T_5. 623-656]:

Israel: [...] Vamos a ver cómo le hicieron ellas para saber cuánto se ocupa para esas 8 personas, ¿qué hicieron ustedes?

Aa: Para el maíz que es un kilo van a ser 1000 gramos.

Israel: 1000 gramos.

Aa: Son 1000 gramos, pero son para 5 personas

Israel: Nos está diciendo que 1000 gramos de maíz o un kilogramo era para cuántas personas [...]

Aos: 5.

Israel: Para 5. Después qué hicieron [...]

Aa: Y luego, dividimos $1000 \div 5$, es igual a 200.

Israel: Pero, ¿por qué dividieron 1000 entre 5?

Aa: Dividimos para saber cuánto le tocaba a cada persona.

Israel: ¿Y cuánto le tocaba a cada persona?

Aos: 200 gramos.

Israel: 200 gramos de maíz.

Aa: Luego multiplicamos [...]

Aa: Entonces como dijimos que les tocaron 200 gramos. Dijimos 200 /escribe 200 en el pintarrón/

Israel: Ya tenemos aquí 1000 gramos. Y dijimos que para cuántas personas [...]

Aos: Para 5.

Israel: Para 5, y ellas qué hicieron para saber cuánto le tocaba a cada persona [...]

Aa: Una suma

Israel: Una suma [...] ¿para una persona?

Aa: Dividimos para saber cuánto para una persona y después sumamos ocho veces doscientos.

Israel: Entonces para 8 personas, ¿cuánto es?

Aas: 1600

Mo: 1600 qué [...]

Aa: Gramos.
Israel: ¿A ustedes les dio? /Señala otro equipo/
Aa: 1.6
Israel: 1.6, ¿pero qué vendría siendo?, ¿gramos o qué?
Aa: Kilogramos.
Israel: Kilogramos.

En los diálogos anteriores, Israel y los alumnos comienzan a validar los procedimientos que emplearon para resolver la subtask 3.3., inician determinando la cantidad de maíz que se necesita para 8 personas. En función de lo anterior podemos decir que:

Israel_KMT_T_5. Conoce que durante la fase de validación el papel del docente consiste en solicitar que los alumnos expongan los procedimientos realizados, justifiquen su pertinencia y den a conocer los resultados obtenidos. Además, sabe que cuando sea necesario, debe pedir a los alumnos contextualicen las cantidades obtenidas en función de las situaciones que se plantean en la subtask. En relación con la validación de las otras cantidades de ingredientes se presentó lo siguiente [V2_Israel_KMT_T_1. 656-663]:

Israel: [...] Luego qué hicieron para las demás cantidades [...]
Aa: La carne son 750 [...] entonces 750 entre 5 igual a 150 [...] Sumamos ocho veces 150 y así lo hicimos con todos los ingredientes /escribe las operaciones en el pintarrón/
Aa: También multiplicamos 150 por 3, el resultado lo sumamos con la cantidad que tenía de las 5 personas y sacamos que para las ocho personas necesitamos 1200 gramos.
Israel: ¿Para cuántas?
Aa: Para 8 personas.
Israel: Muy bien.

En lo que respecta a la cantidad de carne que se requiere, una alumna explica que obtiene el valor unitario y enseguida suma o multiplica el valor obtenido para definir la cantidad necesaria para 8 personas. Ante esto, Israel concluye aprobando la respuesta de la alumna. La misma dinámica se realiza para validar cada uno de los ingredientes.

Una vez expuesto lo anterior, pasamos a identificar el conocimiento especializado de Israel en la fase de institucionalización que es definida por él desde su Planificación [P_Israel_KMT_T_6. 255-272]:

Fase de institucionalización:

En este último momento se les hablará a los alumnos que lo que estuvimos realizando fue comparar razones y se dará la siguiente definición más sintética:

Una razón es el cociente entre dos cantidades.

Se pondrá un ejemplo:

En el ejercicio del pozole la razón entre la cantidad de maíz y el número de personas es:

$$\begin{array}{rcl} \text{Cantidad de maíz} & & 1000 \text{ gramos} \\ \hline & = & \\ \text{Número de personas} & & 5 \end{array}$$

El número obtenido al simplificar la fracción anterior es el maíz añadido para cada persona.

Así es más fácil saber la cantidad de maíz, por ejemplo para 7 personas.

Simplemente se calcula:

$$7 \times 1000/5 = 1.4 \text{ kg. o } 7 \times 200\text{gr.} = 1400 \text{ gr. O } 1.4 \text{ Kg.}$$

Podemos realizar el mismo procedimiento para saber la cantidad unitaria, ya teniendo esta cantidad es más fácil saber las demás.

Para comprobar lo anterior y como última actividad se les presentará la diapositiva 5 en donde los alumnos tratarán de encontrar la cantidad de ingredientes del pozole para una persona.

En el fragmento anterior Israel señala que dará a conocer a los alumnos que estuvieron comparando razones y una definición sintética, para ello utilizará la diapositiva siguiente:

En la tabla de abajo encuentra las cantidades que se necesitan de cada ingrediente para preparar pozole para una persona.

Ingredientes	Cantidad
Maíz	
Carne	
Chile guajillo	
Agua	
Sal	

En la tabla anterior, Israel pretende que los alumnos identifiquen la cantidad de ingredientes necesarios para una persona después que les preguntó sobre la cantidad necesaria para 8 personas. En la Entrevista Semiestructurada 2 preguntamos a Israel sobre el propósito de estos planteamientos [ES2_Israel_KMT_ES_T_TA_E_4. 705-718]:

E: Hablando del contenido de las tablas en la hoja de trabajo tres [...] si se fija primero viene la cantidad de ingredientes que se requiere para cinco personas, luego se pide que saquen para ocho y luego usted les explica que para siete personas, por ejemplo, pueden ser [...] y, al final, quiere que saquen la cantidad que se requiere para una persona, ¿cuál es el propósito de que sea para cinco, ocho, siete y una persona?

Israel: Explicar para siete ese no lo dije en la clase [...]

E: Pero lo plantea en su planificación, en el apartado donde dice institucionalización.

Israel: Explicar para siete, sería como para tomar como referencia otro número de personas, igual hubiera sido otra cantidad, por ejemplo, para diez personas, pero hubiera sido un poco más fácil para los niños hacer esa comparación [...] dicen “pues si para cinco ocupo uno entonces para dos personas voy a ocuparlo el doble”, por eso decidí con otras cantidades que no son tan proporcionales [...] bueno si son, pero no tanto, por ejemplo que decir con diez personas o con quince que es el doble, triple [...] hacerla con ocho creí que iba a representar un conflicto un poquito más elevado [...]

Como podemos observar en el fragmento anterior, previo a la clase Israel determinó las cantidades que trabajaría en la subtarea 3. Así identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_4. Conoce que las cantidades que se manejan en una subtarea donde se favorece la enseñanza de la razón en el contexto de la proporcionalidad deben definirse y analizarse previo a su aplicación, con el propósito de que planteen un conflicto para el alumno. Por ejemplo, en el caso de los ingredientes que se requieren para elaborar pozole, en la primera tabla vienen las cantidades para 5 personas, después se solicita para 8, luego se explica para 7 y, al final, se pide determinar la cantidad para 1 persona; ninguna de las anteriores es múltiplo de 5.

En la Entrevista Semiestructurada 2, preguntamos a Israel por qué solicita en la última tabla que los alumnos determinen la cantidad de ingredientes que se requiere para una persona, a lo cual contesta [ES2_Israel_KFLM_FD_2. 719-727]:

E: ¿Por qué al final pedir la cantidad de ingredientes que se requieren para una persona?

Israel: Aquí era la pista, encontrar lo que decíamos en la otra entrevista pasada del valor unitario, porque decía son cinco personas pero si tienes un kilogramo, cuánto vas a ocupar para la mitad, pues medio kilo, medio kilo te va a alcanzar para dos punto cinco personas y decimos cómo le vas a dar de comer a dos personas y media. Entonces aquí hablábamos de encontrar ese valor unitario [...] para una persona, cuánto te va a hacer falta, si ocupas mil gramos de maíz para cinco, busca entonces de esos mil gramos cuánto va a comer una persona. Me parece que encontrar ese valor de uno, da la pauta para encontrar las demás cantidades, por eso, lo puse final.

En el fragmento anterior, Israel menciona que si en la primera tabla se brindan las cantidades de ingredientes necesarios para una persona, se facilita que los alumnos determinen la cantidad de ingredientes para 5 y para otras cantidades de personas. Por esa razón la ubicó al final. Una vez que teníamos un panorama general de la Planificación de la subtema 3.3., durante la Entrevista Semiestructurada 1 cuestionamos sobre lo que realizaría en la fase de institucionalización [P_Israel_KMT_T_6. 998-1018]:

E: En el caso de la institucionalización qué se va a realizar [...]

Israel: Dice que en este último momento se les va a hablar a los alumnos de lo que estuvimos realizando, comparar razones, se leerá la siguiente definición más sintética [...] (empieza a borrar el pintarrón). Aquí, por ejemplo, nos dice que “una razón es el cociente entre dos cantidades” y, quizás se van a preguntar cómo que el cociente, pues la razón aquí se presta mucho para trabajar el cociente como sigue, por ejemplo, de que la razón de maíz, si dijimos que era un kilogramo o mil gramos para cinco personas, la razón era de doscientos gramos (escribe 200 g), quiere decir que para una persona se le va a preparar con doscientos gramos de maíz, eso es un ejemplo de llegar a la razón como cociente, se pondrá otro ejemplo, en el ejercicio de pozole la razón entre la cantidad de maíz y el número de personas es el siguiente, por ejemplo, trabajando esto, es la cantidad de maíz con el número de personas (lo escriben el pintarrón) y me gustaría terminar con alguna utilización que dice “el número obtenido al simplificar la fracción anterior de maíz, añadiendo por cada persona [...], podemos obtener así el resultado o simplificando (señala lo que está en el pintarrón cantidad 1000 gr. / no. Personas 5 = 200 gramos/ 1), por ejemplo, mil entre cinco es igual a doscientos y así tenemos lo que es el valor unitario”. Me gustaría terminar con lo último, dice “así es más fácil saber la cantidad de maíz, por ejemplo, para siete personas”. Así, una vez que tengamos el valor unitario me gustaría trabajarlo no para ocho, sino para cuarenta, para siete, para quince personas, para encontrarle una utilidad a esto [...] dice podemos realizar el mismo procedimiento para saber la cantidad unitaria, así es más fácil saber las demás.

A partir de lo que Israel expresa en el fragmento anterior y en la Entrevista Semiestructurada 1 sobre la institucionalización de la subtema 3.3., identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_3.3.1. Conoce una subtema para comparar razones en el contexto de la proporcionalidad.

Israel_KoT_D_1. Conoce que una razón es el cociente entre dos cantidades.

Israel_KoT_P_3. Conoce que en la subtarea, la razón como cociente se obtiene al dividir la cantidad de maíz (1000 gramos) entre el número de personas (5).

Israel_KoT_P_4. Conoce que la simplificación de la fracción 1000 gramos/5 personas permite obtener la cantidad de maíz que se requiere para cada persona, es decir, el valor unitario.

Israel_KoT_P_5. Conoce que la cantidad de maíz que se requiere para para 7 personas se obtiene al realizar lo siguiente: $7 \times 1000/5 = 1.4 \text{ kg.}$ o $7 \times 200\text{gr.} = 1400 \text{ gr.}$ O 1.4 Kg.

Israel_KFLM_FD_2. Conoce que cuando los alumnos tienen el valor unitario es más fácil determinar la cantidad de ingredientes que se requiere para diferentes cantidades de personas.

En la Entrevista Semiestructurada 1 preguntamos sobre las posibles fortalezas y/o dificultades de los alumnos durante la institucionalización; situación que lo lleva a expresar lo siguiente [ES1_Israel_KFLM_FD_3. 1019-1035]:

E: Esto que va a trabajar en la institucionalización, ¿cree que resulte fácil o difícil para los alumnos?

Israel: Creo en un primer momento va a ser algo pesado de digerir por los alumnos porque como mencionaba, creo que este concepto de razón como fracción tiene que seguirse trabajando [...] En una de las investigaciones que revisé, mencionaba que en la teoría de Vergnaud sobre los campos conceptuales para que un concepto adquiriera un significado para los alumnos tiene que irse trabajando gradualmente, pero tiene que seguir siendo reforzado y que este concepto adquiere significado en situaciones problemáticas, que son las situaciones didácticas según el enfoque y que este concepto tiene significado mediante esas situaciones, no sólo dándoles la definición. Entonces, creo que a veces la definición pues a los alumnos se les puede olvidar, pero lo que quiero que se quede es las diferentes estrategias o las formas; quizá en este primer momento, puede que existan muchas complicaciones, depende como hayan trabajado con los maestros anteriores lo que son las fracciones, pero sí creo va a ser un poquito difícil por la carga quizá conceptual y de procedimiento que engloba muchas maneras de resolverlo, muchas estrategias y, por eso, creo va a estar un poquito complicado, pero igual se va a hacer la lucha de rescatar lo que se pueda.

En el fragmento de anterior identificamos que:

Israel_KFLM_FD_3. Conoce que los alumnos pueden tener algunas dificultades durante la institucionalización debido a la carga conceptual sobre la razón y los procedimientos que se emplean para determinarla.

En la Entrevista Semiestructurada 2, le cuestionamos sobre los referentes teóricos que menciona en la Entrevista Semiestructurada 1 y que le permiten identificar los posibles procedimientos de los alumnos, sobre ello expresa [ES2_Israel_KFLM_T_1. 789-799]:

Israel: Ah, por ejemplo, de Vigostky habla del constructivismo social o del socio constructivismo y lo retoma Brousseau [...] dice que nosotros no aprendemos solos, aprendemos a través de interacciones. Por eso es un aprendizaje social. También nos habla sobre esa zona de desarrollo próximo, de los andamiajes, habla incluso de los aprendizajes previos, cómo partir de ese aprendizaje que es mi base para ir construyendo otros aprendizajes [...]

E: En su planificación, ¿cree que favoreció algunas de estas cuestiones?

Israel: Me parece que sí, sobre todo en lo que es esa interacción social. Por lo mismo, de que el aprendizaje lo estaban construyendo entre varios, estaban interactuando, discutían debatían, argumentaban [...] por eso, si se dio esa parte del aprendizaje, aunque siento que quedaron muchas dudas, pero si se dio parte de esa interacción.

En función de los fragmentos anteriores de la Entrevista Semiestructurada 1 y la Entrevista Semiestructurada 2 identificamos que:

Israel_KFLM_T_1. Conoce que para que los alumnos adquieran el concepto de razón de manera significativa es necesario se trabaje gradualmente mediante situaciones problemáticas y a través de interacciones.

En los fragmentos de Planificación de la subtaska 3.3., fragmentos de Entrevistas Semiestructuradas 1 y 2, así como algunas transcripciones de la Videograbación 2, Israel evidencia conocimiento de la noción de razón y el valor unitario. A continuación presentamos algunas de las relaciones que establece entre los conceptos anteriores [ES1_Israel_KSM_T_A_1. 1036-1049]:

E: ¿Existe alguna relación entre la cantidad unitaria que señalaba en el caso anterior y la razón?

Israel: Sí, por ejemplo el libro de quinto año del alumno expresa la razón como un valor unitario (escribe en el pintarrón razón 200/1); es por eso que para una persona se ocupa doscientos, que es lo mismo que mil gramos para cinco personas (escribe en el pintarrón 1000/5), aquí es una comparación entre dos cantidades: mil sobre cinco, el número de personas en la que se toma de referencia, creo que esto también es una razón (señala la fracción 1000/5) el número que nos da, pero el valor unitario es una razón también (señala la fracción 200/1) porque igual, por ejemplo, si nos vamos ahora para ocho personas dijimos que eran mil seiscientos de todos modos esto (señala las fracciones que están en el pintarrón 200/1; 1000/5; 1600/8), sigue siendo lo mismo, sólo aumenta la cantidad, pero igual es una razón, es una comparación entre mil seiscientos con el número de personas o el número de personas con la cantidad de maíz que se requiere, pero para términos más sencillos no hay nada como remitirse también al valor unitario.

En el fragmento anterior, Israel señala que existe una relación entre la noción de razón y el valor unitario, y que su referente es el libro de matemáticas de quinto año. Así, identificamos que:

Israel_KSM_T_A_1. Conoce que la razón se puede expresar como un valor unitario. Por ejemplo, 200/1, es decir, para una persona se necesitan 200 gramos de maíz.

Israel_KoT_D_2. Conoce que la razón es una comparación entre la cantidad de maíz (1600 gramos) y la cantidad de personas (8).

Con el propósito de avanzar en la identificación de conocimiento de Israel en relación con algunas de las fortalezas o dificultades de los los alumnos al resolver la tabla de la diapositiva 5 lo interrogamos en la Entrevista Semiestructurada 1[ES1_Israel_KFLM_FD_4. 1069-1078]:

E: ¿Cree que los niños contesten la tablita de manera adecuada con los datos correctos?

Israel: Me imagino que sí porque los niños tienen dos cantidades, lo que es para cinco personas y para ocho personas y si retoman el valor para cinco personas o para ocho personas, creo que les va a dar el valor de doscientos, es decir, el valor unitario. Quizá puede que existan problemas de que algún niño quiera dividir cinco entre mil (5/1000) y lo que resulte diga que para una persona; ante eso, vamos a retomar lo que es la institucionalización que, para expresar la razón dijimos que era la cantidad sobre el número de personas (escribe en el pintarrón razón = cantidad/ no. Personas). Aquí se va a reflexionar en qué posición está el número de personas, en qué posición está la cantidad (encierra en el pintarrón cantidad/no. Personas y 5/1000).

En el fragmento anterior, Israel señala que los alumnos pueden resolver la tabla donde se requiere determinar los ingredientes para una persona, pues con anterioridad identificaron la cantidad para 5 y 8 personas, sin embargo, también:

Israel_KFLM_FD_4. Conoce que los alumnos pueden tener algunas dificultades para determinar la cantidad de ingredientes necesarios para una persona, es decir, ya que es posible que intenten dividir 5 (número de personas) entre 1000 gramos (cantidad de pozole) y no lo contrario.

Después de que Israel externa las posibles dificultades en esta subtarea, le preguntamos sobre las respuestas correctas [ES1_Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. 1079-1085]:

E: Coméntenos cómo quedarían las respuestas para una persona.
Israel: Para una persona de maíz se necesitarían doscientos gramos, de carne ciento cincuenta gramos, de chile cincuenta gramos y de agua trescientos mililitros y la sal sería al gusto. A partir de los valores unitarios me permite crear algunos ejemplos verbales con los alumnos, por ejemplo, cuánto se ocupará de carne para diez personas; aquí espero que exista una multiplicación, cuanto se necesitará de chile para quince personas y así puedo poner más ejemplos para aterrizar lo que son los conocimientos que revisamos en la clase.

En el fragmento anterior, Israel expresa la cantidad de ingredientes que se requieren para una persona; las cantidades que estaban en kilogramos las expresa en gramos y los litros en mililitros. Con base en esto identificamos que:

Israel_KMT_ES_T_TA_E_1. Conoce la manera de determinar los valores unitarios en una tarea donde se aborda la razón en el contexto de la proporcionalidad, permite el diseño de algunos ejemplos verbales donde se identifique la cantidad de ingredientes cuando la cantidad de personas son 10, 15, etc.

Israel_KFLM_IC_5. Conoce que cuando los alumnos conocen el valor unitario en una tarea donde se aborda la razón en el contexto de la proporcionalidad, pueden recurrir a la multiplicación para calcular las cantidades que se requieren para un determinado número. Por ejemplo, en esta subtarea, los alumnos pueden multiplicar el valor unitario por el número de personas a las que quieran prepararles pozole.

A continuación presentamos un fragmento de de la Videograbación 2 que corresponde la fase de institucionalización de la subtask 3.3. [V2_Israel_KMT_T_6. 767-787]:

Israel: Entonces para conocer los ingredientes para 8 personas, ¿cuál es la forma más fácil: conocer primero lo que se ocupa para una y después saber las demás cantidades? Por ejemplo, si ahora yo quiero preparar pozole para diez personas, ¿cuánto voy a ocupar de maíz?

Aos: Dos.

Israel: Señalan lo doble porque para 5 ocupamos 1 kilogramo y para 10 personas se necesitan 2 kilogramos, que es lo mismo a 1000 gramos y 2000 gramos. De carne, ¿cuánta se ocupa para 10 personas?

Aos: 1500 gramos.

Israel: Es decir, voy a ocupar lo doble [...] de chile para cinco personas ocupo $\frac{1}{4}$, pero para 10 personas cuánto [...]

Ao: Dos cuartos.

Israel: Dos cuartos o [...] ¿a qué es igual? /Dibuja un rectángulo en el pintarrón, lo dividí en cuatro partes y colorea 2/

Ao: Un medio.

Israel: De chile y si de agua ocupo 1.5 litros para 5 personas, para 10 personas cuánto ocupo [...]

Aos: 3 [...]

Israel: Tres litros. Entonces conociendo estos valores /señala la tabla del pintarrón/ para 5 personas puedo sacar la cantidad de ingredientes que se necesita para 8 personas, para 10 personas o para otras cantidades de personas [...]

En este fragmento podemos observar que Israel inicia la institucionalización con la forma más fácil para obtener la cantidad de ingredientes que se requieren para preparar pozole, sin embargo, cuando cuestiona a los alumnos sobre la cantidad de ingredientes que se requieren para 10 personas, ellos recurren a los valores proporcionados en la primera tabla de la subtask: la cantidad de ingredientes para 5 personas. Así identificamos que:

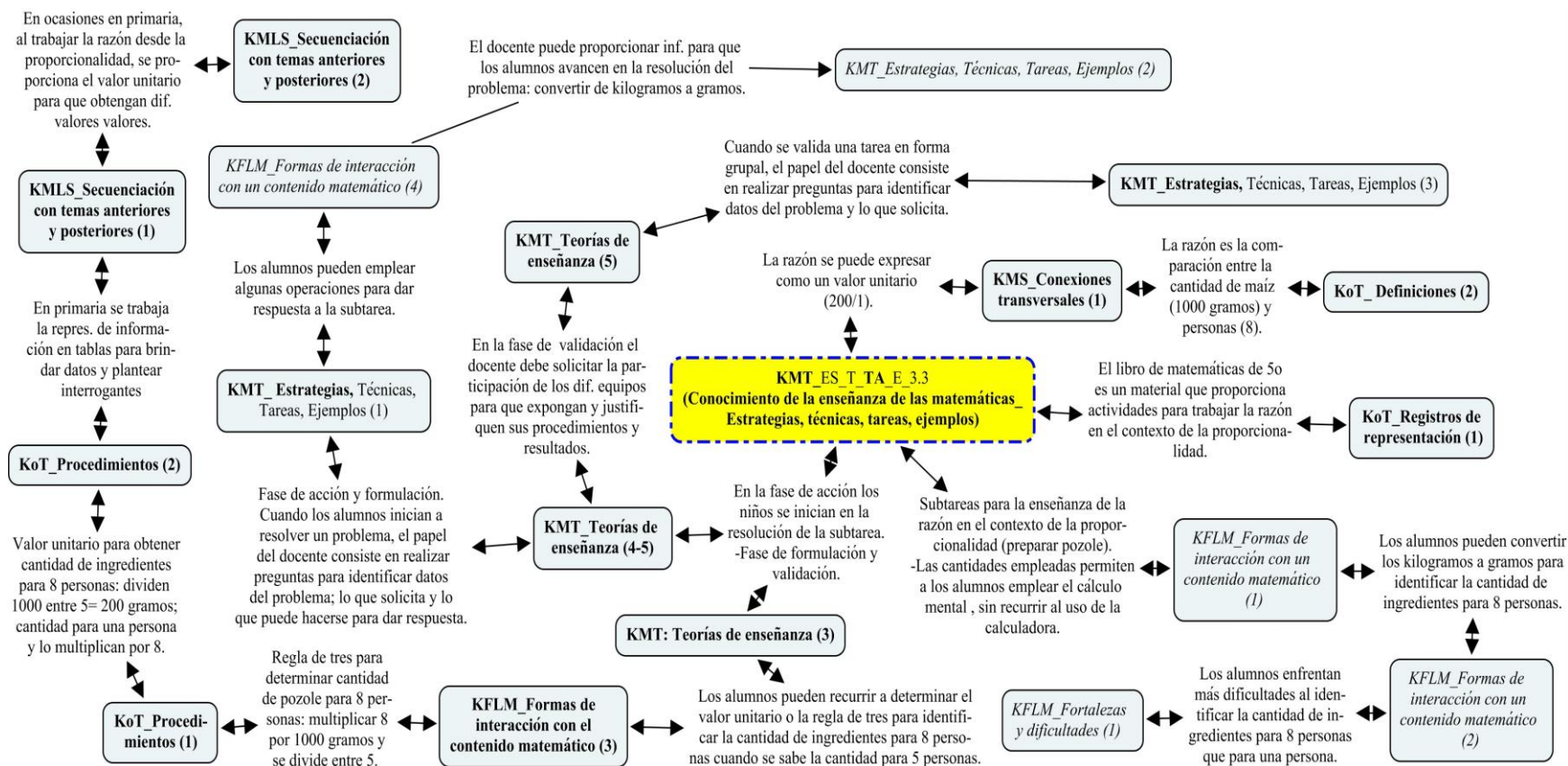
Israel_KMT_T_6. Conoce que la fase de institucionalización permite oficializar diferentes procedimientos para resolver una tarea donde se estudia la razón en el contexto de la proporcionalidad (preparar pozole).

Israel_KMT_T_6.1. Conoce que en la fase de institucionalización se puede plantear cuál es el procedimiento más económico para la resolución de una tarea, en este caso identificar el valor unitario para luego determinar el resto de los valores, así como convertir kilogramos en gramos en función de las cantidades que se manejan.

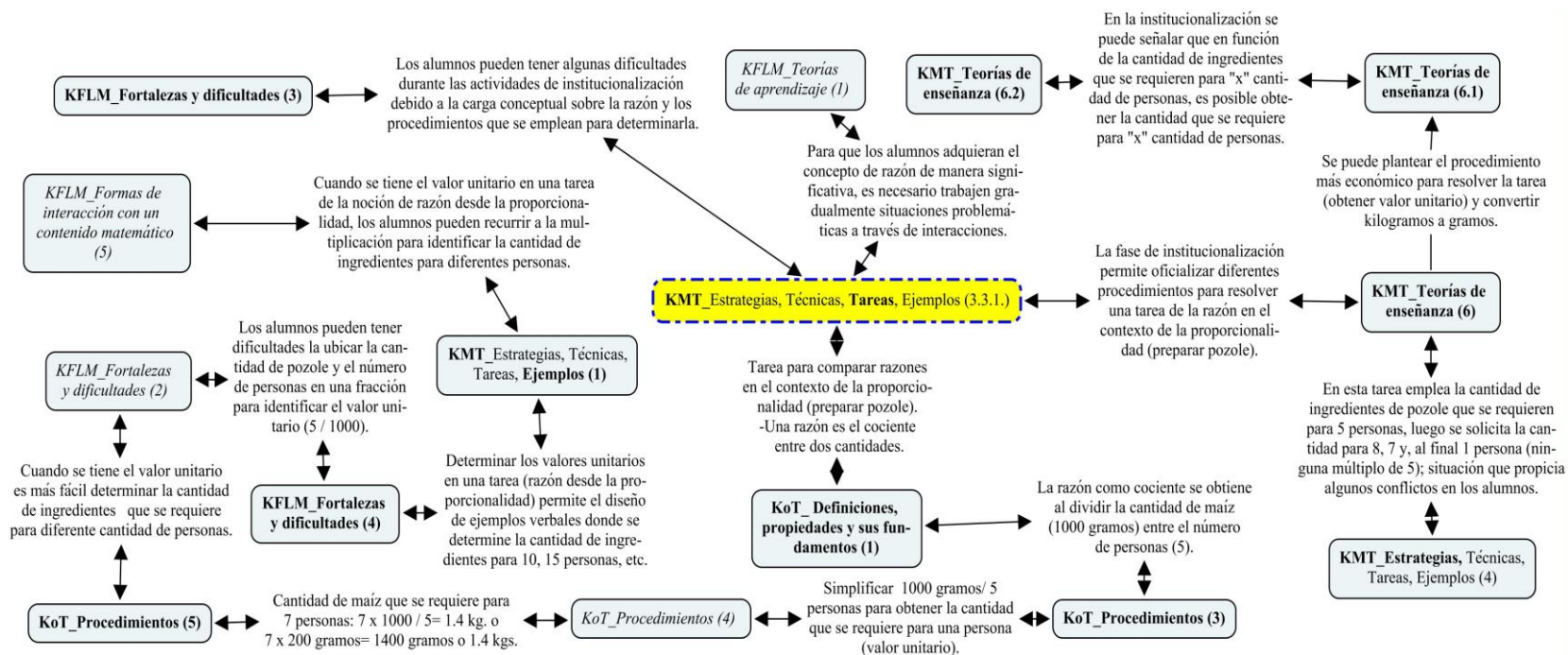
Israel_KMT_T_6.2. Conoce que en la fase de institucionalización puede señalar que a partir de la cantidad de ingredientes que se determine para “x” cantidad de personas (ejemplo 1000 gramos de maíz para 5 personas), es posible obtener las cantidades que se requieren para “x” cantidades de personas (por ejemplo, determinar la cantidad de maíz para 8 personas).

Con el indicador de conocimiento anterior, damos por concluido el análisis del conocimiento especializado en relación con la subtarea 3.3. En los siguientes apartados presentamos algunas figuras y resumen de las evidencias e indicios de conocimiento matemático y didáctico de Israel.

V.3.6.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.3.



V.3.6.1. Figura de relaciones entre dominios, subdominios, categorías e indicadores del MTSK. Subtareas 3.3.



V.3.6.2. Resumen de relaciones entre subdominios del MTSK. Subtareas 3.3.

En la hoja de trabajo 3, Israel presenta una subtarea (3.3) para la enseñanza de la razón (KMT_ES_T_TA_E_3.3). La situación plantea que un Alcalde quiere mandar preparar pozole y sólo tiene la cantidad de ingredientes que se requiere para 5 personas; información que se presenta en una tabla con el nombre de los ingredientes y su respectiva cantidad para 5 personas; luego se se pide que se obtenga la cantidad de ingredientes para 8 personas. Esto es evidencia de que Israel conoce el libro de matemáticas de quinto grado como un material que proporciona actividades para la enseñanza de la razón en el contexto de la proporcionalidad (KMT_R_1) y conoce que las cantidades que se plantean en la subtarea, permiten los alumnos emplear el cálculo mental para resolverla (KFLM_IC_1). Además, conoce que los alumnos pueden convertir los kilogramos a gramos para identificar la cantidad de ingredientes que se requiere para 8 personas (KFLM_IC_2). También, conoce que los alumnos enfrentan mayores dificultades al determinar la cantidad de ingredientes para ocho personas que la cantidad para una persona (KFLM_FD_1).

Israel señala que los alumnos pueden determinar el valor unitario o emplear la regla de tres para identificar la cantidad de ingredientes para ocho personas cuando saben la cantidad necesaria para cinco personas (KFLM_IC_3). En relación con el procedimiento, Israel conoce que para determinar el valor unitario pueden dividir 1000 gramos entre 5 y luego multiplicar por 8 (KoT_P_2). En el caso de que los alumnos empleen la regla de tres, multiplican 8 por 1000 gramos y lo dividen entre 5 (KoT_P_1). A partir de las situaciones que Israel presenta en la subtarea 3.3, identificamos que conoce que en la educación primaria se trabaja la representación y algunas formas de presentar la información de la subtarea 3.3.: tablas, brindar algunos datos y plantear incógnitas (KMLS_TAP_1). Israel conoce también que cuando se abordan tareas sobre la razón en el contexto de la proporcionalidad se proporciona el valor unitario para que los alumnos identifiquen diferentes valores (KMLS_TAP_2).

Durante la fases de acción y formulación de la subtarea 3.3, Israel conoce que cuando los alumnos resuelven una tarea en equipo el papel del docente consiste en realizar preguntas que les permitan identificar los datos del problema (KMT_ES_T_TA_E_1). En fases conoce que la realización de operaciones es uno de los posibles procedimientos a los que los alumnos pueden recurrir para dar solución a la subtarea (KFLM_IC_4). Además, conoce que proporcionar alguna información sobre los posibles procedimientos contribuye a que los alumnos se inicien en su resolución. Por ejemplo, cuando los alumnos resuelven una tarea que implica la razón como cociente en el contexto de cantidades de

ingredientes, puede conducirlos a convertir kilogramos a gramos para que avancen en su resolución (KMT_ES_T_TA_E_2).

Durante la fase de validación, Israel que conoce cuando los alumnos validan el papel del consiste en solicitar la participación de los diferentes equipos para que expongan los procedimientos realizados, justifiquen su pertinencia y den a conocer los resultados obtenidos, en este caso, en relación con la subtarea 3.3. Además, cuando sea necesario, debe pedir a los alumnos que contextualicen las cantidades obtenidas en función de las situaciones que se plantean en la subtarea (KMT_T_5).

En la subtarea 3.3, identificamos que Israel conoce que la institucionalización permite oficializar diferentes procedimientos (KMT_T_6). Además, conoce que puede plantear cuál es el procedimiento más económico para la resolución de una tarea, en este caso encontrar primero el valor unitario (KMT_T_6.1). En esta fase también conoce que puede señalar que a partir de la cantidad de ingredientes que se determine para “x” cantidad de personas (ejemplo 1000 gramos de maíz para 5 personas), es posible obtener las cantidades que se requieren para “x” cantidades de personas (por ejemplo, determinar la cantidad de maíz para 8 personas) (KMT_T_6.2); previo a esto Israel conoce que las cantidades que se manejan en esta subtarea deben definirse y analizarse previamente. Por ejemplo, en el caso de los ingredientes que se requieren para elaborar pozole, en la primera tabla vienen las cantidades para 5 personas, después se solicita para 8, luego se explica para 7 y, al final, se pide determinar la cantidad para 1 persona; ninguna de las anteriores es múltiplo de 5 (KMT_ES_T_TA_E_4).

Las situaciones que se presentan en la institucionalización de la subtarea permiten son evidencias del conicimiento de Israel, por ejemplo, conoce una subtarea para comparar razones en el contexto de la proporcionalidad (KMT_ES_T_TA_E_3.3.1.); que una razón es una comparación entre la cantidad de maíz (1600 gramos) y la cantidad de personas (8) (KoT_D_2); que una razón es el cociente entre dos cantidades (KoT_D_1) y; que la razón se puede expresar como un valor unitario (KSM_T_A_1).

En relación con los procedimientos, Israel conoce que la razón como cociente se obtiene al dividir la cantidad de maíz (1000 gramos) entre el número de personas (5) (KoT_P_3); conoce que la simplificación de la fracción 1000 gramos/5 personas permite obtener la cantidad de maíz que se requiere para una persona, es decir, el valor unitario (KoT_P_4) y; conoce que la cantidad de maíz que se requiere para 7 personas se obtiene al realizar lo siguiente: $7 \times 1000/5 = 1.4 \text{ kg.}$ o $7 \times 200\text{gr.} = 1400 \text{ gr.}$ O 1.4 Kg. (KoT_P_5). En suma, Israel conoce que cuando los alumnos tienen el valor unitario,

pueden recurrir a la multiplicación para identificar las cantidades de ingredientes que se requieren para un determinado número de personas. Además, conoce que determinar el valor unitario en esta subtaska permite diseñar algunos ejemplos verbales donde se identifique la cantidad para 10, 15, etc., personas.

Respecto de las fortalezas y las dificultades de los alumnos, Israel sabe que cuando los alumnos conocen el valor unitario es más fácil determinar la cantidad de ingredientes para diferentes cantidades de personas (*KFLM_FD_2*); conoce también que los alumnos pueden tener algunas dificultades durante las actividades de la fase de institucionalización debido a la carga conceptual de la razón y a los procedimientos que se emplean para determinarla (*KFLM_FD_3*) y; conoce que los alumnos pueden tener dificultades para determinar a partir de la cantidad de pozole y el número de personas, la cantidad requerida para una persona (*KFLM_FD_4*). Así, Israel conoce que, para que los alumnos adquieran el concepto de razón de manera significativa es necesario se trabaje gradualmente, mediante en situaciones problemáticas y a través de interacciones (*KFLM_T_1*)

.

CAPÍTULO VI.

CONCLUSIONES

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES

VI.1. Introducción

Cada vez son más las investigaciones sobre el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. En esta investigación nos centramos en identificar y caracterizar el conocimiento matemático y didáctico de profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, bajo la perspectiva teórica del MTSK.

En este apartado presentamos las conclusiones de esta investigación en relación con los indicadores de conocimiento definidos en los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), luego agregamos conclusiones sobre la formación de profesores y posteriormente describimos algunas aportaciones de este estudio en el contexto del MTSK y, al final, damos a conocer algunas limitaciones de este estudio y futuras líneas de investigación que deja abiertas.

VI.2. En relación con los indicadores de conocimiento de los dominios y subdominios del MTSK

En las siguientes líneas hacemos énfasis en los indicadores de conocimiento de los dos sujetos de estudio que se presentaron con mayor frecuencia en algunas las categorías de los subdominios del MTSK. Para ello, primero presentamos los subdominios del dominio del conocimiento matemático y en segundo término los subdominios del conocimiento didáctico del contenido.

VI.2.1. Dominio de conocimiento matemático

Este dominio está compuesto por tres subdominios: el conocimiento de los temas (KoT); el conocimiento de la estructura matemática (KSM) y; el conocimiento de la práctica matemática

(KPM). Cabe destacar que en esta investigación prevalecen indicadores de conocimiento del KoT, mientras que aparecen muy pocos sobre el KSM y KPM.

VI.2.1.1. Sobre el conocimiento de los temas (KoT)

Este subdominio está integrado por cuatro categorías: *definiciones, propiedades y sus fundamentos* (KoT_D), *procedimientos* (KoT_P), *registros de representación* (KoT_R) y *fenomenología y aplicaciones* (KoT_F).

En esta investigación identificamos que los dos profesores en formación inicial de primaria muestran evidencias e indicios de conocimiento de *definiciones, propiedades y sus fundamentos* (KoT_D) en relación con la razón y la fracción. De ahí que en este trabajo, caracterizamos la primera como un significado de la fracción, como un cociente y como una comparación entre dos cantidades. En el caso de la noción de fracción, la identificamos como un número que se expresa de la forma a/b , donde a y b son números enteros y b es diferente de cero.

En la categoría *registros de representación* (KoT_R), encontramos indicadores de conocimiento de la representación numérica, verbal y figural de la fracción (Rojas, 2014) y la razón; la primera bajo la expresión a/b y, la segunda, en función de la expresión $a:b$. En el caso de la representación de las fracciones, se evidencian más conocimientos del significado parte-todo en contextos continuos y discretos (Ribeiro, 2012; Tobías, 2013; Castro, 2015; Montes et al., 2015).

En relación con la categoría *procedimientos* (KoT_P), ubicamos conocimientos sobre la forma de obtener fracciones equivalentes, el cociente de una fracción y la representación figural de fracciones propias en función de su representación numérica. En el caso de la razón en el contexto de la proporcionalidad, identificamos evidencias de conocimientos para obtener el valor unitario y el grado de aglomeración.

En la categoría *fenomenología y aplicaciones* (KoT_F), encontramos menos indicadores de conocimiento en comparación con las categorías anteriores. Aquí, aparecen conocimientos asociados a las fracciones y algunos de sus significados como parte-todo (contextos continuos y discretos), cociente, medida y razón. En el caso del significado medida, su trabajo se relaciona con la medida de diferentes longitudes en una recta numérica, así como al medir capacidades, tal es el caso del litro.

VI.2.1.2. Sobre el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)

En este subdominio ubicamos indicadores de conocimiento sobre *conexiones de complejización* (KSM_C) al establecer que el estudio de la noción de razón puede abordarse en el marco de la proporcionalidad. Los conocimientos sobre la razón como el valor unitario, constante de proporcionalidad y fracciones emergen en este caso y los identificamos en la categoría *conexiones transversales* (KSM_T). Por último, en *conexiones auxiliares* (KSM_A) hay un indicador sobre el conocimiento del estudio de la razón en el contexto de las fracciones y la proporcionalidad. En términos concretos, podemos decir que no ubicamos evidencias e indicios de conocimiento en la categoría *conexiones de simplificación* (KSM_S).

VI.2.1.3. Sobre el conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Al igual que en otras investigaciones (Vasco, 2015), en ésta existen escasos indicadores de conocimiento de KSM y KPM. En el subdominio del KPM, identificamos indicios de conocimiento de *formas de validación y demostración* (KPM_VD) cuando los profesores en formación comparan diferentes procedimientos empleados por los alumnos para resolver tareas donde se involucra la división partitiva. Además, aparecen indicios de conocimiento de la categoría *papel de los símbolos y uso del lenguaje formal* (KPM_SL) en la expresión numérica y verbal de la razón en función de $a:b$ y, la fracción a/b .

VI.2.2. Dominio del conocimiento didáctico del contenido

El conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) son los subdominios del conocimiento didáctico del contenido y, es en este dominio donde hemos encontrado la mayor cantidad de indicadores de conocimiento.

VI.2.2.1. Sobre el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Las categorías *teorías de aprendizaje* (KFLM_T), *fortalezas y dificultades* (KFLM_FD), *formas de interacción con un contenido matemático* (KFLM_IC) e *intereses y expectativas* (KFLM_IE) componen este subdominio del conocimiento didáctico del contenido. En los siguientes apartados enunciamos, de manera general, los principales indicadores de conocimiento de cada categoría.

En la categoría *formas de interacción con un contenido matemático* (KFLM_IC), ubicamos gran cantidad de evidencias e indicios de conocimiento. ¿A qué se debe? Las entrevistas semiestructuradas nos permitieron recuperar mayor cantidad de información. Así, los profesores en formación inicial enuncian las posibles formas de interacción de los alumnos con cada una de las tareas que propusieron para la enseñanza de la noción de razón. En el caso de tareas de apertura donde rescatan conocimiento previos de la representación numérica, verbal y figural de fracciones propias como parte-todo en contextos continuos y discretos, identificamos que los alumnos pueden obtener fracciones equivalentes para relacionar/justificar la representación numérica y verbal de fracciones (contextos continuos), aunque en otros casos, pueden usar el cálculo mental (contexto discreto). En las tareas de apertura donde rescatan conocimientos previos sobre la comparación de razones (parte-parte) en el contexto de compra de pasteles, destaca que los alumnos pueden recurrir a la multiplicación para determinar el pago que deben realizar por la compra de tres pasteles, además pueden obtener la diferencia de los precios en las pastelerías propuestas y pueden identificar la pastelería para la compra en función de la cantidad de pasteles que deseen comprar.

En la tarea principal donde se aborda la razón en el contexto de las fracciones y la proporcionalidad, prevalecen indicadores de conocimiento sobre las posibles formas de interacción: recurrir a la división o a la multiplicación, representar de manera gráfica la información, elaborar tablas, recurrir al cálculo mental y no hacer uso de la calculadora. En relación con las subtareas que favorecen la resolución de la tarea anterior y hacen énfasis en los registros de representación verbal y numérica de la fracción (a/b) y la razón ($a:b$) identificamos como posibles formas de interacción: la representación figural de la fracción (parte-todo), emplear la multiplicación y emplear técnicas de conteo, por citar algunos ejemplos.

En las subtareas donde se aborda la razón como parte-todo y parte- parte en el contexto de la proporcionalidad, encontramos indicadores de conocimiento de la categoría *formas de interacción con un contenido matemático*: representación figural de la fracción como parte-todo, comparación de las cantidades que se plantean en la tarea (identificar cantidades mayores y menores), emplear la división, emplear el cálculo mental, pueden realizar conversiones de unidades de medida (kilogramos a gramos), determinar el valor unitario a partir de la regla de tres, emplear técnicas de conteo, entre otras formas de interacción.

En la categoría *fortalezas y dificultades*, hablamos de tareas de apertura, tareas principales, subtareas para resolver la tarea principal y subtareas de desarrollo. En las tareas de apertura donde se rescatan

conocimientos sobre la fracción como parte-todo hay evidencias de conocimiento de *fortalezas* en relación con los conocimientos que los alumnos tienen de la representación figural de la fracción $\frac{1}{2}$, la representación numérica y figural de la fracción en contextos continuos y discretos, la obtención de fracciones equivalentes y el empleo del cálculo mental. En la tarea principal donde se aborda la razón en el contexto de las fracciones y la proporcionalidad, así como en las subtareas de la misma, encontramos evidencias e indicios de conocimiento de *fortalezas* relacionadas con la representación figural de la fracción como parte-todo en contextos continuos, el empleo de la división, la representación verbal y numérica de la razón y, enseguida la representación verbal y numérica de la fracción. Entre los indicadores de conocimiento de *dificultades* ubicamos: la primera vez que se aborda el concepto de razón, los alumnos pueden tener dificultades asociadas al empleo de los dos puntos en la representación numérica y verbal ($a:b$).

En las tareas de apertura donde se comparan razones hay evidencias e indicios de conocimiento de la categoría *fortalezas y dificultades*. Se definen *dificultades* relacionadas con la representación figural de fracciones como parte-todo (contextos continuos) cuando el numerador y el denominador no son números pares y al dividirlos el resultado no es coherente con el contexto de la tarea (3.5 personas).

En las subtareas de desarrollo que se plantean para abordar la razón como parte-parte y parte-todo en el contexto de la proporcionalidad, identificamos indicadores de conocimiento de *fortalezas y dificultades*. En este caso, las *fortalezas* están asociadas a la representación de fracciones como parte-todo en contextos continuos, la obtención de fracciones equivalentes en función de algunas relaciones de proporcionalidad directa y, la ubicación correcta del numerador y denominador en una fracción para representarla en forma de cociente. En sí, los alumnos pueden emplear diferentes procedimientos para resolver las tareas de apertura. Por otra parte, ubicamos evidencias de conocimiento asociadas al conocimiento del valor unitario en una tarea (receta) para encontrar la cantidad de ingredientes que se puede requerir para cualquier número de personas. Entre las *dificultades* ubicamos: la simplificación de dos fracciones cuando el numerador de una de ellas es impar ($7/10-6/8$), en algunos casos los alumnos pueden tener confusiones en la ubicación del numerador y denominador en una fracción, convertir fracciones en números decimales e identificar cuándo una cantidad es mayor al trabajar con números decimales. Además, pueden suscitar confusiones en los alumnos los obstáculos epistemológicos de la razón, la fracción y el grado de aglomeración.

En la categoría *teorías de aprendizaje* identificamos evidencias e indicios de conocimiento relacionados con la adquisición de conceptos matemáticos como la noción de razón, la cual se plantea

es necesario se trabaje gradualmente en situaciones problemáticas a través de interacciones entre los miembros de un grupo. Además, las actividades que realice el profesor para favorecer el aprendizaje de la noción de razón (representación numérica y verbal en el pintarrón) debe tomar en cuenta los estilos de aprendizaje auditivos y visuales. También ubicamos el conocimiento de que los alumnos pueden resolver un problema que implica la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad cuando, en un primer momento, tratan de resolverlo con sus propias herramientas, emiten mensajes sobre los posibles procedimientos para resolverlo, tienen la oportunidad de validarlos e institucionalizarlos con el acompañamiento del profesor.

Por último, en la categoría *intereses y expectativas*, ubicamos un indicador de conocimiento: los alumnos pueden identificar el valor unitario en la tarea principal (contexto de cajas y lechugas) para avanzar en la representación verbal de la razón (“una caja es para dieciséis lechugas” a “una a dieciséis”), cuya expresión corresponde a la representación numérica de la forma $a:b$. Así, al final, expresan la representación verbal de la razón y la fracción.

VI.2.2.2. Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Este subdominio está integrado por las categorías *teorías de enseñanza* (KMT_T), *recursos materiales y virtuales* (KMT_R) y *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* (KMT_ES_T_TA_E).

En la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* es donde mayor cantidad de evidencias encontramos. En un primer momento, hablamos de los indicadores que corresponden a las *tareas* (KMT_ES_T_TA_E) donde encontramos evidencias de conocimiento de tareas de apertura para verificar los conocimientos previos de los alumnos en relación con la representación numérica, verbal y figural de la fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos a partir del uso de materiales (láminas y tarjetas). También ubicamos indicadores de tareas de apertura relacionados con la comparación de razones a través de una preparación del medio que permite plantear problemas, contextualizar y recuperar conocimientos previos. Además, hay indicadores de conocimiento de una tarea principal para la enseñanza de la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en un contexto específico (lechugas).

Identificamos que una tarea principal puede estar compuesta por subtareas que favorecen su resolución. En este contexto, las subtareas hacen énfasis en diferentes problemas: un problema para expresar la fracción (parte-todo) y la razón (parte-parte) de manera verbal y textual, donde profundiza en ésta última como la comparación/relación entre dos números naturales a partir de un contexto real

(partición de pastel entre diferente cantidad de niños), un problema para expresar la razón (parte-parte) de manera verbal y de forma numérica bajo la expresión $a:b$ y, un problema para expresar la representación numérica de la fracción como parte-todo (a/b) y a través de la simplificación de fracciones acceder a la expresión de la razón (parte-todo) de manera verbal y numérica ($a:b$).

También identificamos indicadores de conocimiento de tareas de desarrollo que introducen conocimientos científicos-técnicos a través de actividades de aprendizaje y evaluación. Además, en este tipo de tareas se conoce que deben preverse las actividades de interrogación, aplicación, decisión, autorregulación, trabajo en equipo, análisis y juicio crítico. En las tareas de desarrollo ubicamos conocimientos de tres subtareas: tarea para trabajar la comparación de razones en contextos parte-parte y parte-todo (representación de razones en fracciones y números decimales), tareas para trabajar la comparación de razones como un cociente (parte-todo) al identificar el grado de aglomeración en una situación determinada, tareas para trabajar la razón (comparación) en el contexto de la proporcionalidad.

En lo que respecta a los indicadores de conocimientos de *estrategias* de la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* (KMT_ES_T_TA_E), ubicamos el conocimiento de la pregunta como una herramienta didáctica para que los alumnos reflexionen y justifiquen sus respuestas al establecer relaciones entre la representación numérica, verbal y figural de algunas fracciones (parte-todo). En otro momento, identificamos el cuento como estrategia didáctica donde se puede preguntar, escuchar, comentar e inventar para contextualizar el planteamiento de problemas donde se aborda la noción de razón (comparación de razones –parte-parte, parte-todo-) como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, otra estrategia fue las conversaciones entre niños y el material impreso para que avancen en la identificación de los números de referencia en una situaciones de comparación de razones (parte-todo). Además, en estos contextos, previamente deben definirse las cantidades que se manejan para que representen un conflicto para los alumnos, es el caso de la preparación de pozole (en la primera tabla vienen las cantidades para 5 personas, después se solicita para 8, luego se explica para 7 y, al final, se pide determinar la cantidad para 1 persona; ninguna de las anteriores es múltiplo de 5).

En términos generales, ubicamos diferentes indicadores de conocimientos de estrategias del papel que debe desempeñar el docente, por ejemplo: modificar variables en las tareas que se proponen, solicitar a los alumnos la lectura grupal de los problemas, cuestionar sobre la información que se maneja y proporcionar al información sobre los procedimientos que los alumnos pueden emplear para resolver una subtarea. Por ejemplo, cuando los alumnos resuelven una tarea que implica la razón como cociente

en el contexto de cantidades de ingredientes, puede señalarse que convertir kilogramos a gramos permite avanzar en la solución.

Las evidencias e indicios de conocimiento de los *ejemplos* en la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* (KMT_ES_T_TA_E), dan cuenta de que se emplean con diferentes propósitos: se puede recurrir a ejemplos que emanan del contexto de la tarea propuesta (“¿Y si yo tuviera seis lechugas?”) para que los alumnos confirmen la representación verbal de una fracción como parte-todo (“un sexto”); se usan ejemplos/ejercicios para verificar los aprendizajes que van adquiriendo los alumnos y; se pueden usar para promover el uso de los dos puntos como símbolo que indica una comparación entre cantidades, los cuales permiten trabajar la definición de razón como una comparación entre cantidades bajo la forma $a:b$ (1 pastel para 4 niños; 1:4).

En otras tareas donde se favorece la comparación de razones (parte-parte y parte-todo), también ubicamos indicadores de conocimiento relacionados con *ejemplos*: conoce que plantear como ejemplo la representación gráfica (contextos continuos) del número decimal 0.5 contribuye a que los alumnos identifiquen relaciones entre un número decimal y una fracción de la forma a/b ; conoce que tomar como referente una fracción cotidiana de trabajo con los alumnos ($1/2$) para ejemplificar cómo se convierte a un número decimal (dividir el numerador entre el denominador), favorece que en otras situaciones identifiquen las representaciones numéricas correctas, aunque se evidencia los alumnos pueden identificar un número decimal a partir de su representación numérica. Por otra parte, identificamos evidencias e indicios de conocimiento relacionados con el empleo del ejemplo “por cada 10 sillas de x mesa”, que permite que los alumnos comparen las cantidades que se trabajan en las subtareas 3.2.: “de cada 10 sillas de la mesa chica 9 estaban ocupadas” y “en la mesa grande por cada 10 sillas solamente 8 están ocupadas”. Además, se conoce que algunos ejercicios semejantes a las actividades de la subtarea 3.2.3., como la representación en la recta numérica, permiten identificar el grado de aglomeración en cada mesa y; que determinar los valores unitarios en una tarea donde se aborda la razón en el contexto de la proporcionalidad, permite el diseño de ejemplos verbales donde se identifique la cantidad de ingredientes para preparar pozole cuando la cantidad de personas son 10, 15, etc.

En la categoría *teorías de enseñanza* (KMT_T) del subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, ubicamos evidencias e indicios de conocimiento en relación con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), cuyo referente es Brousseau; la cual se convierte en el referente para el diseño de tareas y subtareas donde se aborda la noción de razón como significado de la fracción y en

algunas relaciones de proporcionalidad. El conocimiento de la preparación del medio (rescate de conocimientos previos, organización del grupo y materiales) aparece como un elemento de la TSD que permite enseñar la razón. Enseguida, ubicamos evidencias de conocimiento de la consigna y la devolución de la consigna; la primera hace alusión a las indicaciones que se dan a los alumnos en función de las tareas que van a realizar, las cuales deben ser claras, objetivas, definen el tiempo y algunas otras restricciones, por ejemplo, lo que se puede usar o no se puede usar, mientras que la segunda, se convierte en una estrategia que el maestro emplea para identificar si los alumnos comprendieron las indicaciones de las actividades que van a realizar a través de una serie de preguntas.

Enseguida encontramos indicadores de conocimiento de situaciones o fases de la TSD: acción, formulación, validación e institucionalización. La fase de acción emerge cuando los alumnos comienzan a resolver los problemas que se les plantean a partir de sus conocimientos previos, mismos que les permiten realizar analogías o conjeturas mentales. Aquí, el papel del maestro consiste en realizar devoluciones a través de preguntas que orientan al alumno para que se haga responsable de las tareas que se le proponen; lo anterior, los ubica en una situación adidáctica. En el caso de la fase de formulación se define existe un emisor (alumno o grupo de alumnos) y receptor (alumno o grupo de alumnos); el primero debe formular un mensaje al segundo, quien se debe iniciar en la comprensión del mensaje y actuar con base en su contenido. La fase de validación, se presenta como una situación donde existen diferentes grupos de alumnos; un grupo intenta convencer al resto de que los procedimientos empleados para resolver cierta tarea son los correctos, mientras que los otros grupos se ponen de acuerdo sobre la verdad o falsedad de los mismos. La fase de institucionalización se conoce como un momento de la clase donde el profesor da a conocer las definiciones y procedimientos (económicos) relacionados con los conceptos matemáticos que se abordan en la resolución de algunas subtareas, por ejemplo, la representación numérica y verbal de la fracción y la razón, la definición de razón y el procedimiento para obtener el grado de aglomeración, entre otros.

En el contexto anterior, aparecen evidencias e indicios de conocimiento de la memoria didáctica como la gestión que realiza el maestro a través de preguntas para recuperar conceptos y actividades que se trabajan en sesiones anteriores (fracciones y razón) y se requiere de su puesta en práctica para resolver tareas presentes. Además, identificamos existen conocimientos de que, al plantear diferentes de tareas en una planificación se puede recurrir la cantidad de veces que se crea conveniente a algunos conceptos del TSD, por ejemplo, consigna y fases.

En la categoría *recursos materiales y virtuales* (KMT_R), identificamos menor cantidad de indicadores de conocimiento en comparación con las categorías *teorías de enseñanza* (KMT_T) y *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* (KMT_ES_T_TA_E). En particular, ubicamos evidencias de conocimiento relacionadas con el empleo del libro de matemáticas de quinto grado de educación primaria como material que proporciona actividades para trabajar la comparación de razones y por otra parte proporciona actividades para la enseñanza de la razón en el contexto de la proporcionalidad. En este contexto, ubicamos evidencias de conocimiento del contenido de algunos libros japoneses que se estudian en el curso de aritmética: su aprendizaje y enseñanza, en el primer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria en México, los cuales proporcionan información y actividades para la enseñanza de la razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad.

Otros indicadores de conocimiento de la categoría *recursos materiales y virtuales*, hacen énfasis en las hojas de trabajo como material impreso que incluye planteamientos a través de un lenguaje icónico y se apoya en tablas con información de los problemas y cuadros que permiten organizar la misma. Además, las tablas tienen diferentes funciones, por ejemplo son un recurso para iniciar a los alumnos en la representación numérica y verbal de comparaciones de razones (parte-todo; parte-parte) que, posteriormente los puede llevar a representar una fracción. También aparecen indicadores sobre el uso de la calculadora, en los primeros grados se debe limitar su uso, mientras que en quinto se puede aprovechar para optimizar el tiempo de las actividades, pues conocen cómo se resuelve una operación. En algunas de las tareas propuestas en esta investigación aparece la calculadora como un recurso que ayuda a convertir fracciones a números decimales.

Antes de concluir con la descripción de los indicadores de la categoría *recursos materiales y virtuales* agregamos el conocimiento del pintarrón como un apoyo para plasmar información que se presenta en las subtareas, por ejemplo, las tablas donde se favorece la representación numérica y textual de la razón como parte-parte. Además, aparecen conocimientos de una lámina que contiene información visual sobre algunos datos de un problema, misma que se puede emplear como un recurso y/o material didáctico que contribuye a la reflexión cognitiva que los niños pueden realizar del mismo.

VI.2.2.3. Sobre el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Este subdominio está integrado por tres categorías: *expectativas de aprendizaje* (KMLS_EA), *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado* (KMLS_NCP) y *secuenciación con temas anteriores y posteriores* (KMLS_TAP).

En la categoría *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado*, ubicamos dos indicadores de conocimiento: la razón (relación entre cantidades) como significado de la fracción es un aprendizaje esperado en quinto grado de Educación Primaria al igual que la identificación y expresión, por medio de la razón o cociente, de una comparación entre dos cantidades; éstos son un referente para presentar evidencias de conocimiento de la categoría *expectativas de aprendizaje* (KMLS_EA) que tienen relación con algunas competencias matemáticas que se proponen en el programa de estudio 2011 como: validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente, comunicar información matemática y resolver problemas de manera autónoma.

En la categoría *expectativas de aprendizaje* encontramos otros indicadores de conocimiento: el trabajo de la razón como significado de la fracción favorece el trabajo de los ejes temáticos sentido numérico y pensamiento algebraico, y manejo de la información, sobre todo cuando se trabaja con la lectura de tablas y gráficas para rescatar cierto tipo de información. Además, el planteamiento y resolución de secuencias de situaciones problemáticas es parte del enfoque de las matemáticas.

En la categoría *secuenciación con temas anteriores y posteriores* (KMLS_TAP), identificamos como indicador de conocimiento: la noción de razón adquiere diferentes maneras de abordarse en cada grado o nivel educativo. De ahí que entre los temas que se abordan antes de trabajar la razón está el estudio de la fracción como parte-todo en contextos continuos, la representación numérica de las fracciones, la fracción bajo su expresión a/b . Por otra parte, identificamos como indicador de conocimiento que el estudio de la noción de razón puede llevar al estudio del valor unitario y la proporcionalidad.

En lo que respecta a las relaciones entre indicadores de conocimiento de los dominios y subdominios del MTSK, podemos identificar que, cuando los profesores en formación inicial evidencian conocimiento del *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado* (KMLS_EA), éste permite que muestren evidencias e indicios de conocimiento de *definiciones, propiedades y sus fundamentos* (KoT_D) y *registros de representación* (KoT_R). Por otra parte, los indicadores de conocimiento de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* (KMT_ES_T_TA_E), nos permiten observar que cuando se definen tipos de tareas que se fundamentan en una *teoría de enseñanza* (KMT_T) como la TSD, el maestro se puedan apoyar en *recursos materiales y virtuales* (KMT_R) para organizar las posibles *formas de interacción de los alumnos con un contenido matemático* (KFLM_IC), ya que se pueden vislumbrar algunas de las *fortalezas o dificultades* (KFLM_FD) que los alumnos pueden enfrentar durante las mismas.

VI.3. En relación con la formación de profesores

La formación de profesores está constituida por dos campos: la formación inicial y la formación continua; en ambas, el estudio del conocimiento profesional ha despertado un gran interés en docentes e investigadores a nivel local, nacional e internacional. En este contexto, han surgido investigaciones sobre el conocimiento matemático y didáctico que los profesores de primaria poseen al enseñar la noción de razón como significado de la fracción y en el campo de la proporcionalidad. Al respecto, Block (2001) expresa que la razón se encuentra en la intersección de las fracciones y la proporcionalidad; situación que ha sido abordada en diferentes investigaciones centradas en el estudio de la proporcionalidad (Valverde, 2012; Rivas, 2013).

En el contexto de la formación continua de profesores de primaria, destacamos la investigación de Ramírez y Block (2009), quienes observaron las clases de un maestro de sexto grado e identificaron algunas dificultades en el vínculo razón-fracciones, cuando la primera se ubica en el contexto de la enseñanza de la proporcionalidad. En correspondencia con el estudio de Ramírez y Block (2009), nuestra investigación se constituye como un diagnóstico que, desde la perspectiva teórica del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), da cuenta del conocimiento matemático y didáctico que profesores en formación inicial ponen en juego cuando enseñan la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad. En nuestro estudio se identifican dificultades evidenciadas en la investigación de Ramírez y Block (2009) en relación con la representación verbal de la razón, a partir de su representación numérica expresada en forma de fracción (a/b).

En esta investigación, resaltamos la importancia de realizar en diferentes momentos seguimientos sistemáticos a la formación inicial de profesores que enseñan matemáticas: antes de la práctica (planificación y entrevistas), durante la práctica (videgrabaciones de clases) y después de la práctica (entrevistas y documentos de análisis de la práctica), con el propósito de obtener información que contextualice las decisiones que toman en sus clases.

En términos generales, en la formación inicial y continua de profesores, la perspectiva teórica del MTSK nos permite identificar y caracterizar en diferentes momentos: ¿cuáles son los conocimientos matemáticos que poseen sobre la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad?, ¿cuáles son sus conocimientos sobre la estructura matemática?, ¿cuáles son sus conocimientos sobre la práctica matemática?, ¿cuáles son sus conocimientos sobre las

características de aprendizaje de las matemáticas que ponen en juego?, ¿cuáles son sus conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas? y, ¿cuáles son sus conocimientos sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas que muestran?; lo anterior, permite dar seguimiento a los conocimientos matemáticos y didácticos que los profesores de primaria evidencian en diferentes momentos de su formación (inicial y continua), identificar cuáles se mantienen, cuáles se dejan de lado y cuáles emergen, así como diagnosticar las necesidades de conocimiento que aparecen en cada momento de su formación. Mediante las respuestas a estas preguntas se puedan diseñar propuestas de formación que favorezcan la adquisición y potencialización de los mismos.

VI.4. Aportaciones de la investigación en el contexto de la perspectiva teórica del MTSK

A partir de la presentación oficial del MTSK en el contexto del CERME 8 (Carrillo et al., 2013) algunos investigadores miembros del SIDM han dirigido o codirigido tesis doctorales donde el MTSK constituye un referente teórico (Carrillo; Climent; Contreras; Muñoz-Catalán). Estas investigaciones se han realizado con profesores y estudiantes en formación inicial y en formación continua²⁰ de diferentes niveles educativos, aunque en algunos casos se han atendido otros criterios propios de la institución donde se ubica el programa de doctorado. Enseguida presentamos una descripción general de las temáticas presentes en las tesis de doctorado que se han tomado como referente; lo anterior, con el propósito de ubicar el contexto en el que emerge esta investigación y sus aportaciones. Es conveniente mencionar que en las Actas de las II Jornadas del SIDM “*Reflexionando sobre el conocimiento del profesor*” Escudero, Joglar, Corréa y Reyes (2015) publicaron una retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas que incluye tesis de doctorado y publicaciones de artículos en diferentes congresos, seminarios, entre otros, en contextos nacionales e internacionales. Sin embargo, en este apartado nos enfocamos en las tesis de doctorado cuyo referente teórico es el MTSK.

Rojas (2014) caracterizó el conocimiento especializado de dos profesores en servicio (primaria y secundaria) cuando enseñaban los números racionales a través de una serie de videgrabaciones de clases. Esta investigación estableció una relación teórica entre el análisis didáctico y el MTSK. En las conclusiones se destaca que en el caso del profesor de primaria se identifica un fuerte componente del conocimiento didáctico, donde resalta el conocimiento de la enseñanza y las características del

²⁰ En las primeras páginas de este capítulo expusimos en formación continua ubicamos a profesores que se encuentran en servicio (activo) y aquellos profesores que, además, se encuentran en un contexto de formación, por ejemplo participan en un taller, curso, entre otros.

aprendizaje de las matemáticas. Por su parte, se señala, el profesor de secundaria evidencia un alto componente de conocimiento de los temas matemáticos y conocimiento de la estructura de las matemáticas.

Moriel-Junior (2014) investiga el conocimiento especializado de profesores en relación con los números racionales, pero se enfoca en profesores que participan en un contexto de formación. Su tesis doctoral versa sobre la formación inicial de profesores de matemáticas, a partir de un taller sobre división de fracciones, identifica el conocimiento especializado para enseñar la división de fracciones de dos estudiantes de la licenciatura en matemáticas y dos profesores de matemáticas. Entre las aportaciones de esta tesis al MTSK, destaca el concepto de indicio de conocimiento,²¹ el cual permite acceder a evidencias de conocimiento.

En otro estudio, Montes (2015) identifica el conocimiento especializado que sobre el concepto de infinito tiene un profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato. En esta investigación se recurre a observaciones del aula, pero sobre todo, al diseño y aplicación de entrevistas que permitieron construir y fundamentar categorías de conocimiento del infinito desde la perspectiva teórica del MTSK.

Las investigaciones sobre el MTSK que desde 2013 se realizaron y publicaron en diferentes escenarios, contribuyeron a su consolidación teórica; prueba de ello son las tesis descritas y las que le siguieron. Así, Escudero-Ávila (2015) incorpora y describe de manera detallada todos los componentes del MTSK en su tesis doctoral “Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria”, su sujeto de estudio fue un profesor que participaba en un taller de formación en línea.

Por su parte, Flores-Medrano (2015) realiza su tesis doctoral “Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)”, en la modalidad de compendio de publicaciones y en ella destaca algunas publicaciones de alto impacto que han aportado a la consolidación del modelo.

En Vasco (2015) y Aguilar (2016) tienen el propósito de identificar de manera explícita el dominio del conocimiento matemático, el dominio del conocimiento didáctico y las concepciones, por lo cual, además de recurrir a las categorías e indicadores de conocimiento del MTSK se apoyaron en las

²¹ Su definición se aborda en el capítulo de la metodología.

categorías sobre concepciones que proponen Carrillo y Contreras (1995) y algunas nociones que agrega Climent (2005), situación que les permite establecer relaciones entre los componentes anteriores. En concreto, Vasco (2015) caracteriza el conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal de nivel universitario utilizando para ello las videgrabaciones de clases. Aguilar (2015) por su parte identifica el conocimiento especializado de una maestra de cuarto grado de primaria en relación con la clasificación de las figuras planas.

En otra tesis, Liñán (2017) identifica el conocimiento especializado de una maestra que imparte clases de geometría en un aula de quinto grado de educación primaria, para ello utiliza videgrabaciones de clases. La aportación de esta investigación se centra en los elementos metodológicos que le permiten relacionar el MTSK con la geometría y fundamentalmente trabaja dos grandes categorías, el MTSK observado en la maestra (evidencias e indicios de conocimiento) y el MTSK observado en el aula de la maestra (conocimiento evocado en el investigador por las oportunidades emergentes en el aula).

En la Tabla 104 presentamos un resumen de las tesis doctorales que se han realizado bajo la perspectiva teórica del MTSK, destacamos el año, título, tema y nivel (formación inicial o formación continua).

Tabla 104. Tesis doctorales con la perspectiva teórica del MTSK

Año	Autor	Título	Tema	Perspectiva teórica	Nivel
2014	Rojas	Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos	Números racionales	-MTSK -Análisis didáctico	Profesores en servicio-activo (expertos) -Un profesor de primaria (6º) -Un profesor de secundaria (1º ESO)
2014	Moriel-Junior	Conocimiento especializado para enseñar la división de fracciones	División de fracciones	-MTSK	Profesores y estudiantes en contexto de formación

					-Dos profesores de matemáticas
					-Dos estudiantes de licenciatura en matemáticas
2015	Montes	Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito: un estudio de caso	El infinito	-MTSK	Profesor en servicio-activo -Un profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato
2015	Escudero-Ávila	Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria	-Curso TSD (Función, entre otros)	-MTSK	Profesor en contexto de formación en línea -Profesor de matemáticas de secundaria
2015	Flores-Medrano	Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)	Compendio de publicaciones de MTSK	-MTSK	
2015	Vasco	Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario	Álgebra lineal (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales)	-MTSK	Profesor en activo -Un profesor de universidad

2016	Aguilar	El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas: un estudio de casos	Polígonos	-MTSK	Profesora en activo -Una profesora de primaria (o)
2017	Liñán	Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5° de Primaria	Geometría plana	-MTSK	Profesora en activo -Profesora de primaria (5°)

En la Tabla anterior presentamos ocho tesis de doctorado cuyo referente teórico es el MTSK. Algunas se realizaron con profesores en servicio de primaria (Rojas, 2014; Montes, 2015; Aguilar, 2016), otras con profesores de secundaria (Rojas, 2014) y unas más estudiaron profesores universitarios (Vasco, 2015), dos tesis con profesores en contextos de formación en secundaria (Escudero-Ávila, 2015) y en una universidad donde se oferta la Licenciatura en Matemáticas (Moriel-Junior, 2014). En la Tabla ubicamos la investigación de Flores-Medrano (2015), pero debido a que la modalidad corresponde a un compendio de publicaciones no la definimos en un nivel específico.

En relación con los temas que se abordan en estas investigaciones destacan, el estudio de los números racionales (Rojas, 2014; Moriel-Junior, 2014) y la geometría (Aguilar, 2016; Liñán, 2017), seguidos del álgebra (Vasco, 2015) y el infinito (Montes, 2015). En el caso de Escudero-Ávila (2015) se retoman diferentes temas, entre ellos el estudio de la función, ya que lo desarrolló en un contexto de formación en línea. Finalmente, estas investigaciones se caracterizan por realizar estudios constituidos por uno o dos casos, aunque prevalecen casos únicos entre cuyas fuentes de recuperación de información se encuentran videgrabaciones de clases y entrevistas.

¿A qué contribuye la investigación de esta tesis doctoral en el corpus del conocimiento del MTSK?

Como describimos en capítulos anteriores, esta investigación se centra en la formación inicial de profesores de primaria cuando enseñan la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad, lo cual se constituye un estudio de casos instrumental (Stake, 1999) y de carácter exploratorio (Yin, 2003).

Las aportaciones de esta investigación se centran principalmente en la identificación y caracterización de diferentes indicadores de conocimiento de algunas categorías del KMLS, KMT, KFLM y KoT;

subdominios del MTSK. Así, se constituye en la primer tesis doctoral que avanza en la descripción de indicadores de conocimiento del MTSK en la formación inicial de profesores de primaria cuando enseñan la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad en quinto grado.

En este estudio contribuimos a la identificación y caracterización de la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, específicamente de las tareas; término que recuperamos de Stein & Smith (1998), quienes las definen como segmento de actividad de clase que se dedica al desarrollo de una idea o concepto matemático en particular. Además, contribuimos a la caracterización de diferentes tipos de tareas: tareas de apertura, tareas principales, tareas compuestas por uno o más problemas (tareas auténticas) y subtareas para resolver una tarea principal (Mason & Johnston-Wilder, 2006; Thanheiser et al., 2016).

En relación con los temas que se abordan en esta investigación, aportamos indicadores de conocimiento en el contexto de las fracciones y sus significados, al igual que Rojas (2014) y Moriel-Junior (2014). Además, incorporamos indicadores de conocimiento sobre la noción de razón en el marco de la proporcionalidad.

Respecto a la contribución de esta investigación en términos de metodología, nos permitimos citar que la diversidad de instrumentos que empleamos desde la perspectiva de la investigación cualitativa y bajo un paradigma interpretativo, como las entrevistas semiestructuradas, videograbaciones de clases y recuperación de diferentes documentos (planificaciones y análisis de las prácticas), contribuyen a obtener una mayor cantidad de datos que posibilitan encontrar mayor cantidad de evidencias de conocimiento matemático y didáctico de los informantes.

VI.5. Limitaciones del estudio y futuras investigaciones

En esta investigación avanzamos en la identificación y caracterización de algunos indicadores de conocimiento de los subdominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido, sin embargo, en el futuro requerimos trabajar en su refinamiento y avanzar en la descripción de otros indicadores de conocimiento relacionados con el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM) que, al igual que en otras investigaciones (Vasco, 2015), poco aparecen.

Otra limitación en este estudio se debe al poco tiempo de estancia de los profesores en formación inicial en las escuelas primarias que, desde el Plan de estudios 2012 se establece, por lo cual, es difícil prolongar su estancia cuando se ubican en quinto y sexto semestre, además, por condiciones de las instituciones formadoras, con frecuencia cambian de escuelas y grupos de un semestre a otro.

Por otra parte, es conveniente mencionar que requerimos profundizar en las relaciones que se establecen entre los diferentes dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En relación con futuras investigaciones que pueden surgir para contribuir a la identificación y caracterización del conocimiento matemático y didáctico en la formación de profesores, así como a su potenciación, definimos la necesidad de:

- Diseñar propuestas de formación inicial y continua, desde la perspectiva del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, que contribuyan a la adquisición y puesta en práctica de conocimientos matemáticos y didácticos en relación con el estudio de la noción de razón desde las fracciones y la proporcionalidad.
- Continuar con la identificación y caracterización del conocimiento matemático y didáctico (indicadores de conocimiento) que profesores en formación inicial de diferentes semestres de la Licenciatura en Educación Primaria ponen en juego cuando enseñan la noción de razón como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad a través de estudios longitudinales.
- Profundizar en la demanda cognitiva de las tareas que diseñan profesores en formación inicial de primaria para enseñar la noción de razón en el contexto de las fracciones y la proporcionalidad.
- Trabajar en colaboración con formadores de nivel secundaria para identificar y caracterizar el conocimiento especializado de profesores en formación inicial de secundaria (incluida la modalidad de telesecundaria²²) cuando enseñan la noción de razón en el contexto de las fracciones y la proporcionalidad. De ahí que podemos dar seguimiento al conocimiento matemático y didáctico que los profesores en formación inicial ponen en juego en el nivel primaria y secundaria; lo anterior se fundamenta en que el estudio de la proporcionalidad se presenta de manera profunda en el segundo nivel educativo (secundaria).

²² En México, la telesecundaria es una modalidad de la educación secundaria. En las escuelas telesecundarias un mismo profesor imparte diferentes asignaturas, mientras que en las escuelas secundarias convencionales, existen docentes para cada asignatura.

Las iniciativas que describimos constituyen algunos de los posibles caminos que puede adoptar la investigación que realizamos, sin embargo, el bagaje de conocimientos del lector que acuda a consultar este estudio y el contexto en que se ubique puede enriquecer las mismas.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- Aguayo, L. M. (2005). *La transposición del "saber didáctico". Un estudio con profesores en formación en el marco de los números racionales* (Tesis doctoral). México: UPN.
- Aguilar, A. (2015). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Recuperado de: <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006>.
- Albert-Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas*. España: McGraw-Hill.
- Altet, M. (2005). La competencia del maestro profesional o la importancia de saber analizar las prácticas”, En *La formación profesional del maestro*. FCE, México, pp. 33-48.
- Álvarez-Gayou, J. (2012). *Cómo hacer investigación cualitativa*. México: Paidós Educador.
- Allard, C. (2015). Analysis of teachers’ practices: The case of fraction teaching at the end of primary school in France. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.). *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (pp. 2975-2981). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- Andonegui, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Fracciones I, número 9. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudios sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar*(Tesis doctoral). México: UNAM.
- Ávila, A., Aguayo, L. M., Eudave, D., Estrada, J. L., Hermosillo, A., Mendoza, J., y Becerra, E. (2004). *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México: SEP - Informe de investigación.
- Ávila, A. (coord.), Block, D., Carvajal, A., Camarena, P., Eudave, D., Sandoval I., y Solares, A. (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002–2011. En A. Avila, A. Carrasco, A. Gómez-Galindo, M.T. Guerra-Ramos, G. López-Bonilla y J.L. Ramírez (Coords.), *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México* (pp. 27-150). México: COMIE-ANUIES.

- Aydogdu-Iskenderoglu, T. (2016). Multiplication and division problems posed by pre-service elementary mathematics teachers about fraction topic. En C. Csíkos, A. Rausch, J. Sztányi (Eds.), *Actas del PME 40*, (Vol.2, pp. 34-42). Hungary.
- Babbie, E. (2000). *Fundamentos de la investigación social*. México: International Thomson Editores.
- Balbuena, H. y Block, D (1991). "¿Qué significa multiplicar por $7/4$ ". *Cero en conducta*. México. 25, (9).
- Baldor, A. (1990). *Álgebra*. México: PUBLICACIONES CULTURAL.
- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, 93 (4), 373-397.
- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Ball, D. L. (2002). Knowing mathematics for teaching: Relations between research and practice. *Mathematics and Education Reform Newsletter*, 14, (3), 1-5.
- Ball D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Ediciones Akal.
- Barrios, A. y Meza, A. (2010). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones. *En Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Colombia.
- Bartell, T. G., Bieda, K. N., Putnam, R. T., Bradfield, K., & Dominguez, H. (Eds.). (2015). *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. East Lansing, MI: Michigan State University.
- Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 57–79.
- Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Celtic Court: Open University Press.
- Bayat, M. (2010). Use of Dialogue Journals and Video-Recording in Early Childhood Teacher Education. En *Journal of Early Childhood Teacher Education*, 31 (2), 159-172
- Bednarz, N., & Proulx, J. (2013). The (relativity of the) whole as a fundamental dimension in the conceptualization of fractions. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 844-851). Antalya, Turquía.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* , (pp. 91-125). New York: Academic Press.
- Bello, I. (1999). *Álgebra elemental*. México: International Thomson Editores.

- Billstein, R., Libeskind, S. y Lott, J. (2008). *Un enfoque de solución de problemas de matemáticas para maestros de educación básica*. México: Manuel López Mateos (Editor).
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla, S. A.
- Blanco, L.J., & Contreras, L.C. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Unión*, 30, 101-123.
- Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria* (Tesis de maestría). Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN. México.
- Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico* (Tesis doctoral). México: DIE-CINVESTAV.
- Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral, O. Covián Chávez, R. M. Farfán Márquez, J. Lezama Andalón, & A. Romo Vázquez, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (págs. 455 - 470). México: CLAME - Díaz de Santos.
- Block, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo. *En Educación Matemática*. 13 (2).
- Borsotti, C. (2007). *Temas de metodología de la investigación en ciencias sociales empíricas*. Argentina: Miño y Dávila Editores.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Bryman, A. (2012). *Social Research Methods (4th Edition)*. USA: Oxford University Press.
- Calderón, I. y Mejía, V. (2012). Significados asociados al concepto de fracción en los libros de texto de educación básica. *En Memoria XV Escuelas de Invierno en Matemática Educativa*. Red-Cimates. CINVESTAV.
- Calvo, G. (1996). La pregunta por la enseñanza y el aprendizaje. En *El oficio docente*. Recuperado de http://www.cuaed.unam.mx/rieb/docs/basicas/b3/LA_PREGUNTA.pdf
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: CERME.
- Carrillo, J., y Contreras, L.C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), 79-92.

- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (2014a), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent N., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D. y Flores-Medrano (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Paraninfo.
- Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.
- Carrillo, J., Escudero, D. y Flores, P. (2013). *Claves para entender el MTSK*. España: Universidad de Huelva.
- Carrillo, J., Escudero, D. y Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. En *FOR-MATE Revista de análisis matemático-didáctico para profesores*. 1 (1), 16-26.
- Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Investigación en educación matemática. XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 77-98). Ciudad Real, España: SEIEM.
- Castro, E. y Rico, L. (2011). La fenomenología de las fracciones: un estudio con maestros en formación. En *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Boletín. No. 31
- Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, 285-314. Madrid: Síntesis.
- Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial* (Tesis de maestría). Granada: España. Recuperado de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Elena_Castro.pdf
- Castro-Rodríguez, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros* (Tesis doctoral). Granada: España. Recuperado de <https://hera.ugr.es/tesisugr/24939493.pdf>
- Cedillo, T. y Cruz, V. (2012). *Del sentido numérico al pensamiento prealgebraico*. México: Pearson.
- Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A., Cruz, V., Ramírez M.E. y Vega, E. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal: guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética*. México: Pearson/SEP.

- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research. En H. L. Chick, J. L. Vincent, & (eds), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, (págs. 233 - 240). Melbourne: PME.
- Clark, M.R., Berenson, S.B. y Cavey, L.O. (2003). A comparison of ratio and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 297-317
- Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Michigan: Proquest Michigan University.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El análisis de clases de matemáticas en la formación inicial del maestro. Un estudio exploratorio. *Investigación en Educación Matemática*, 11, 307-314.
- Climent, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C., y Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. En J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 35-55). Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Cohen L. y Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla. (Traducción de Francisco Agudo López de la obra original de Cohen L. y Manion L. (1989). *Research Methods in Education*, 3rd. Ed., Routledge).
- Corbetta, P. (2007). *Metodología y técnicas de investigación social*. España: McGRAW-HILL
- Cortina, J. L., Cardoso, E. y Zúñiga, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º de primaria. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 14(1), 70-85. Recuperado de <http://redie.uabc.mx/vol14no1/contenido-cortinacardozo.html>
- Dalmiya, V. y Alcoff, L. (1993). "Are old wives' tales justified?" In L. Alcoff and E. Potter (eds). *Feminist Epistemologies*. London: Routledge.
- Dávila, M., Figueroa, O. y López, G. (1992). Las fracciones en situaciones de reparto y medición. En *Guía para el maestro. Tercer grado*. México: SEP.
- De Miguel, M. (1988). Paradigmas de la investigación educativa Española. En I. Dendaluze (Ed.), *Aspectos metodológicos de la investigación educativa*. Madrid: Narcea.
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2003). Introduction: The Discipline and Practice of Qualitative Research. In. N. Denzin, & Y. Lincoln, *Strategies of Qualitative Inquiry*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.
- Diario Oficial de la Federación (2012). *Acuerdo número 649 por el que se establece el Plan de estudios para la Formación de Maestros de Educación Primaria*. México: Autor.

- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC, Labor.
- Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación. (2011). *Documento base. Versión preliminar*. Licenciatura en Educación Primaria. México: Autor.
- Empson, S. (2003). Low-Performing Students and Teaching Fractions for Understanding: An Interactional Analysis. En *Journal for Research in Mathematics Education*. 34, (4), 305-343.
- Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Recuperado de <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456>.
- Escudero, A., Joglar, N., Corréa, D. y Reyes, A. (2015). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). En *Actas II Jornadas SIDM. Reflexionando sobre el conocimiento del profesor*. Huelva: España. ISBN: 978-84-608-9815-3
- Fandiño-Pinilla, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Fazio, L. y Siegler R. (2010). *Teaching fractions*. SWITZERLAND: IAE. Recuperado de <http://www.iaoed.org>
- Fernández, C., Callejo, M.L., y Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, J. Contreras, M. C. Deulofeo, F. J. Penalva, L. García, & Ordoñez, *Investigaciones en educación matemática XVI* (págs. 219 -227). Jaén: SEIEM.
- Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Investigación didáctica. Enseñanza de las ciencias*, 30 (1), 129-142.
- Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 237-246). Málaga: SEIEM.
- Ferreira, N., & da Ponte, J. P. (2015). Exploring pictorial representations in rational numbers: Struggles of a prospective teacher. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.). *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (pp. 3199-3205). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales* (Tesis doctoral). México: Cinvestav-Matemática Educativa.
- Fitzgerald, A., Hackling, M. & Dawson, V. (2013). Through the viewfinder: reflecting on the collection and analysis of classroom video. *International Journal of Qualitative Methods*, 12, 52-64.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.
- Flores, P. (1998). Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *UNO* 17, 37-48.
- Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 70, 27-40.
- Flores, R. (2012). La noción de fracción como parte-todo. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame*. Vol. 25.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.
- Flores, R. y Martínez, G. (2009). Una construcción de significados de la operatividad de los números fraccionarios. *En Memoria X Congreso de Investigación Matemática*.
- Flores, P. y Morcote, O. (2001). *Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria (un caso: Las fracciones)*. Universidad de Sevilla. *En Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces*, 2, 449-458. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=430252#volumen64160>
- Flores, P. y Moreno, A. (2000). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento desde los números racionales. *En Matemáticos y matemáticas para el tercer milenio, de la abstracción a la realidad*: San Fernando, 7, 8, 9 y 10 de septiembre de 2000. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~pflores/textos/.../Investigacion/Moreno_Flores.pdf
- Flores, P. y Torralbo, M. (2011). Números racionales. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 189-218). Madrid: Pirámide.
- Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* (Tesis doctoral). Recuperado de <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes

- (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.
- Franzosi, R. (2009). Content Analysis. In M. Hardy & A. Bryman (Eds.), *Handbook of Data Analysis* (pp. 547- 565). London: SAGE Publications.
- Fuentes, R. (2010). Enseñanza de fracciones. Una experiencia en quinto año de enseñanza primaria. *En Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 22.
- García, C. (1992). Como conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. *En Congreso "Las didácticas específicas en la formación del profesorado"*, Santiago, 6-10 de julio, 1992. Recuperado de http://www.inet.edu.ar/.../marcelo_garcia_como_conocen_docentes.pdf
- Gibbs, G. (2012). *El análisis de datos cualitativos en investigación cualitativa*. México: Ediciones Morata.
- González, I. (2005). *Los significados de la fracción en el discurso y en la práctica de los estudiantes de 4º grado de normal* (Tesis de maestría). México: UPN
- González, R. y Block, D. (2000). La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica. *En Educación Matemática*. 17 (2).
- Hansen, A., Mavrikis, M., & Geraniou, E. (2016). Supporting teachers' technological pedagogical content knowledge of fractions through co-designing a virtual manipulative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19 (2-3), 205-226
- Hargreaves, A. (1996). Cuatro edades del profesionalismo y del aprendizaje profesional. Seminario internacional sobre Formación Inicial y Perfeccionamiento Docente. 1996-Santiago de Chile. Recuperado de <http://es.scribd.com/doc/92727796/Cuatro-Edades-Del-Profesionalismo-y-Del-Aprendizaje-Profesional-a-Hargreaves>
- Hayman, J.L. (1991). *Investigación y Educación* (3ª Ed.). Paidós Ibérica, Barcelona.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14 (3), 213-230
- Jansen, A., & Hohensee, C. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers' conceptions of partitive division with fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (6), 503-522

- Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: Process practice and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 3–31.
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101–144). Columbus, USA: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. Paper presented at the Recent Research on Number Learning.
- Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. (pp. 50-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kilpatrick, J., & Spangler, D. A. (2016). Educating future mathematics education professors. En L. D., English, & D., Kirshner (Eds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education. Third Edition* (pp.297-309). New York: ROUTLEDGE
- Krause, G., Empson, S., Pynes, D'A., & Jacobs, V. (2016). Teachers' Knowledge of Children's Strategies for Equal Sharing Fraction Problems. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli. (Eds.). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 466-473).. Tucson, AZ: The University of Arizona.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.
- Kuzniak, A. (1994). Las estrategias utilizadas para formar a los maestros de primer grado en matemáticas en COPIRELEM: *La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia*. Francia: ARPEME.
- Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en Investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte: NCTM, Information Age Publishing.
- Latorre, A., Del Rincón, D., y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado ediciones.
- Lee, M. Y., Son, J. M., & Arabeyyat, T. (2015). Preservice Teachers' Fractional Concepts in Solving Advanced Fraction Problems. En T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, & H. Dominguez. (Eds.). (2015). *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (724-731). East Lansing, MI: Michigan State University.

- León, G. (2010). *Trabajo de fin de máster. Unidad didáctica: fracciones. Especialidad matemáticas*. Granada: España. Recuperado de http://xa.yimg.com/kq/groups/19326480/1337723886/.../Gloria_Leon.pdf
- León, J. (1998). Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. *En Relime*. Vol. 4.
- León, H y Fuenlabrada, I. (1996). Procedimiento de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* 1 (2), 268-283.
- Li, Y., Xi, Ch., & Kulm, G. (2009). Mathematics teachers' practices and thinking in lesson plan development: a case of teaching fraction division. *En ZDM Mathematics Education* 41, 717–731.
- Lincoln, Y.S., & Guba, E.G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, Ca: SAGE Publications.
- Liñán, M. M. (2017). *Conocimiento especializado en geometría en un aula de 5º de primaria* (Tesis doctoral). Huelva: UHU . Recuperado de <http://hdl.handle.net/10272/14230>
- Lizarde, E. (2013). *Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico. Representaciones y prácticas en la formación inicial de profesores* (Tesis doctoral). Huelva: UHU.
- Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En Ma. del C. Chamorro (coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson-Prentice Hall. Colección: Didáctica Primaria.
- Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Revista Didáctica de las Matemáticas* [en línea], N° 51. Recuperado el 3 de abril de 2009, de http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/13468/1/UNO_51-llinares.pdf
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones*. España: SÍNTESIS.
- Lo, J.-J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(6), 481–500.
- Lo, J., & Grant, T.(2012). Prospective elementary teachers conceptions of fractional unit. In T. Y. Tsao (Ed.), *Proceedings of the 36th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 169–176). Taipei,Taiwan: PME.
- López, J. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo*. Colombia. Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/5922/1/8410009.2012.pdf>

- Ma., L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. (Trad. P. Micheli). Santiago de Chile: Academia Chilena de Ciencias. (Original en inglés, 1999).
- Malet, O. (2010). Los significados de las fracciones: Una perspectiva fenomenológica. *Revista Mendomatica*, 10, 1-18. Consultado en <http://www.mendoza.edu.ar/wp-content/uploads/2017/04/MATEM%C3%81TICA-Y-CURRICULUM-Los-significados-de-las-fracciones.pdf>
- Mancera, M. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *En Revista Educación Matemática*. Vol. 4. (2). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Marcelo, C. (1992). Como conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. *En Congreso "Las didácticas específicas en la formación del profesorado"*, Santiago, 6-10 de julio, 1992. Recuperado de http://www.inet.edu.ar/.../marcelo_garcia_como_conocen_docentes.pdf
- Marcelo, C. (2008) (coord.). *El profesorado principiante. Inserción a la docencia*. Barcelona: OCTAEDRO.
- Martínez, J. (2009). Lenguaje matemático; objetos matemáticos... *En Curso Intensivo de Matemáticas*. Madrid: Universidad de Alcalá.
- Martínez Carazo, P. C. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*. No. 20, 165 - 193.
- Martínez, L. y Solano, A. (2008). *Reflexiones acerca de las fracciones*. Encuentro colombiano de matemática educativa. Colombia: GEMAT. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/884/1/20Conferencias.pdf>
- Mason, J. (2002). *Qualitative Researching (Second Edition)*. London: SAGE Publications.
- Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. The Open University: Tarquin
- Maza, C. (2003). *Las matemáticas en el antiguo Egipto*. España: Universidad de Sevilla.
- Medrano Camacho, V., Ángeles Méndez, E., Morales Hernández, M. A. (2017). *La educación normal en México. Elementos para su análisis*. México: INEE.
- Mejía, F. (2012). Dinamización matemática: Estrategias para resolver problemas con fracciones de fracciones. *En Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. No. 32 (Diciembre de 2012). Recuperado de http://www.fisem.org/web/union/images/.../32/archivo13_volumen32.pdf
- Mellado, V. (2003). Cambio didáctico del profesorado de ciencias experimentales y filosofía de la ciencia. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 343-358.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*. Jossey-Bas Inc.

- Merriam, S.B. & Tisdell, J. (2016). *Qualitative Research. A guide to design and implementation*. United States of America: JOSSEY-BASS.
- Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Huelva: España. Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/10944/Conocimiento_especializado.pdf?sequence=4
- Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti, *Actas del CERME 8* (pp. 3185-3194), Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.
- Montes, M., Contreras, L.C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.
- Montes, M. Á., Contreras, L. C., Liñán, M.^a C., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, 36-62.
- Montes, M. A., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J. y Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 9-22). Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Moriel-Junior, J.G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações* (Tesis doctoral). Recuperado de <http://www.ufmt.br/ufmt/unidade/userfiles/publicacoes/79e3fe1d66c40ff5d174dc92c84fc777.pdf>.
- Moriel-Junior, J.G., & Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.
- Mosquera, C. (2003). El concepto de fracción. *En Memoria XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética*. Bogotá: Universidad Distrital.
- Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Huelva: Repositorio Arias Montano: <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949>.

- Muñoz-Catalán, M.C., y Monteiro, R. (2016). Afrontando la controversia en la investigación cualitativa. Discusión sobre la naturaleza de elementos metodológicos desde la investigación en educación. *Omnia*, 4, 23-30.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Navia, C. (2006). *Autoformación de maestros en los márgenes del sistema educativo*. Barcelona: Pomares Corredor.
- Nemiña, R., García, H., y Montero, L. (2009). Desarrollo profesional y profesionalización docente. Perspectivas y problemas. *Profesorado. Revista de currículo y formación del profesorado*, 13, (2), 1-13.
- Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, 45, 1080–1110.
- O'Daffer, (1998). *Introducción al Álgebra*. México: PEARSON.
- Olguín, E. y Valdemoros, M. (2012). El reparto con fracciones mediante escenarios didácticos. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame*. Vol. 25.
- Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación (2013). *Miradas sobre la educación en Iberoamérica. Desarrollo profesional docente y mejora de la educación*. España: OEI. Recuperado de: www.oei.es/publicaciones/InformeMiradas2013.pdf
- Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*. 62 (39), 307-332.
- Peña, P. (2011), *Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar*. Instituto Politécnico Nacional de México, México. Recuperado de www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/pena_2011.pdf
- Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona: GRAÓ.
- Perera, P., y Valdemoros, M. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria* (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Pérez, A. (1996). Comprender la enseñanza en la escuela. Modelos metodológicos de investigación educativa. En J. Gimeno Sacristán. A. I. Pérez Gómez. *Comprender y transformar la enseñanza*. España: Ediciones Morata.
- Pérez, M., Rincón, E. y Domínguez, A. (2012). La visualización y el aprendizaje colaborativo en la enseñanza de las fracciones. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame*. Vol. 25.

- Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación matemática*, 18(1), 37-72.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2015). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.). New York, NY: Taylor & Francis.
- Quispe, W., Gallardo, J. y González, J. L. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? *PNA*, 4(3), 111-131.
- Ramírez, M., & Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación matemática*, Vol 21, No. 1, 63 - 90.
- Reyes, A. y Sosa, L. (2014). Las fracciones y sus significados. Un estudio con profesores en formación inicial de primaria. En *Memoria Electrónica 6º Congreso Internacional sobre la Enseñanza y la Aplicación de las Matemáticas*.
- Reyes, A. y Sosa, L. (2015). Caracterización del conocimiento matemático de los profesores en formación para enseñar el significado razón. En *Memoria Electrónica XIII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Vol 2, No. 1 ISSN 2007-7246
- Ribeiro, C. M. (2012). Conocimiento matemático de futuros maestros sobre fracciones. El rol de la unidad. En A. Estepa, J. Contreras, M. C. Deulofeo, F. J. Penalva, L. García, & Ordoñez, *Investigaciones en educación matemática XVI* (págs. 447 - 455). Jaén: SEIEM.
- Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. [en línea] *Revista Omnia*. Universidad del Zulia, Venezuela 13, pp. 120-157.
- Ríos, Y. (2011). Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemáticas. [en línea] *Revista Redalyc*. Vol. 17, (1) Universidad del Zulia, Venezuela.
- Ríos, Y. y Escalona, M. (2002). Proyecto de investigación: Representaciones cognitivas del concepto de fracción en alumnos que ingresan al programa de la Licenciatura de Educación, Mención Matemática y Física. Venezuela. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, pp. 5-15.
- Ritchie, J. y Lewis, J. (Eds.) (2003). *Qualitative Research Practice: a guide of Social Science Students and Researchers*. Thousand Oaks: SAGE Publications.
- Rodríguez G, Gil J. y García E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. España: Ed. Aljibe, S. L.
- Rojano Ceballos, M. T. y Solares Rojas, A. (coords.) (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países*. México: INEE-CINVESTAV.

- Rojas, N. (2010). *Conocimiento y enseñanza para la calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno* (Tesis de maestría). Granada: España. Recuperado de http://masteres.ugr.es/didacticamatematica/pages/investigacion/fin_master
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Tesis doctoral). Granada, España. Recuperado de Tesis%20%28VF2%29.%20Nielka%20Rojas
- Rojas, R. (2002). *Investigación social: teoría y praxis*. México: Plaza y Valdés.
- Rojas, N. y Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 17-28). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Rojas, N.; Flores, P., & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 47-64.
- Ruiz, Á. (2011). La lección de matemáticas a través de estudios internacionales con videos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8, 55-121. Recuperado de file:///C:/Users/usuario/Downloads/6950-9534-1-PB.pdf
- Rumbos, I., Avella, D., Reyes, A., Possani, E., Lupercio, E., Gómez, R. y Prieto, C.(2009).Álgebra elemental. México: Trillas.
- Salazar, M. C., Martinic, S. y Maz, A. (2011). Avances de una investigación sobre los modelos, representaciones y recursos utilizados por profesores de primaria para las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 39-47). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Sandín, M.P. (2003). *Investigación cualitativa en Educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw-Hill.
- Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: contributos para uma discussão. *Actas del VI Simposio de la SEIEM: Logroño*, pp. 157-170.
- Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routlege.
- Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner. How professionals think in action*. Basic Books Inc. [Versión en castellano: Schön, D.A. (1998). *El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan*. Barcelona: Paidós].

- Schön, D.A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.
[Versión en castellano: Schön, D.A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje de las profesiones*. Barcelona: M.E.C.-Paidós].
- Secretaría de Educación Pública. (1997). *Plan de estudios 1997. Licenciatura en educación primaria*. México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Acuerdo número 592 por el que se establece la Articulación de la Educación Básica*. México: SEP.
- Secretaría de Educación Pública (2011a) *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Quinto grado*. México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública (2011c). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Sexto grado*. México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública. (2012). *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza. Licenciatura en educación primaria. Programa del curso*. México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública. (2012a). *Matemáticas. Quinto grado. Libro del alumno*. México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública. (2012b). *Matemáticas. Sexto grado. Libro del alumno*. México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública. (2012c). *El trayecto de práctica profesional: orientaciones para su desarrollo. Plan de estudios 2012*. México: Autor.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1998). "Theory, Practice, and the Education of Professionals". *The Elementary School Journal*, 98 (5), 511-526.
- Shulman, L. (2005). "Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma", en: *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9, 2.
- Shulman, L., Grossman, P. & Wilson, S. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia en: *Revista de currículum del profesorado*, 9, 2
- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Madrid: Morata.
- Smith, S., Charles, Dossey, R., Keedy, M. y Bittinger, M. (1990) *Álgebra*. México: ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA.
- Solares, D. V. (1999). Las fracciones y la división. Estudio didáctico de algunos vínculos. Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas CINVESTAV.

- Sosa L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos* (Tesis doctoral). Huelva: España. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10272/4509>
- Sosa, L., Aguayo, L.M., & Huitrado, J.L. (2013). KFLM: Un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, & L. Sosa (Eds.). *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México, D.F.: Díaz de Santos.
- Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. En *Learning and Instruction* 14 (2004) 503–518.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.
- Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.) *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks: SAGE Publications.
- Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada en los datos*. Colombia: Universidad de Antioquía.
- Tardif, M. (2004). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional*. España: NARCEA.
- Tenti, E. (2007). Profesionalización docente: consideraciones sociológicas sobre profesionalización docente, 28, (9), 335-353. Recuperado de <http://www.cedes.unicamp.br>
- Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A., Feldman, Z., Tobias, J., & Welder, R. M. (2016). Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19 (2-3), 123-148
- Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83 (1), 133-143
- Tobias, J. (2013). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (2), 85-103
- Torres, R. (1999). Nuevo papel del docente ¿Qué modelo de formación y para qué modelo educativo?. *Revista Perfiles Educativos*, 82. Recuperado de http://ses2.sep.gob.mx/dg/dgespe/o_mater/otrosmat.htm
- Valdemoros, M. E. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (2), 423-440
- Valdemoros, M.E., Ramírez, M. M. E., y Lamadrid, P. (2015). “Núcleos de significación y pensamiento” en la enseñanza de las fracciones. En P., Scott y Á., Ruíz (Eds). *Educación*

- Matemática en las Américas: 2015. Volumen I: Formación Inicial para Primaria* (pp. 195-204). República Dominicana.
- Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Vasco, D. L. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario* (Tesis doctoral). Recuperado de <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11901>
- Whitacre, I., & Nickerson, S. D. (2016). Investigating the improvement of prospective elementary teachers' number sense in reasoning about fraction magnitude. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(1), 57-77
- Whitehead, A. N., & Walkowiak, T. A. (2015). Pre-Service Teachers' Understanding of Fraction Operations: Providing Justification for Common Algorithms. En T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, & H. Dominguez. (Eds.). *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (844-851). East Lansing, MI: Michigan State University.
- Wong, M. & Evans, D. (2008). Fraction as a measure. En M. Goos, R. Brown, K. Makar, & (Eds), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (págs. 597 - 603). Australia: MERGA.
- Yin, R. (2003). *Case Study Research. Design and Methods*. London: SAGE Publications.