SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE GOBIERNO DEL ESTADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIDAD 241

"EL CONOCIMIENTO DEL HORIZONTE MATEMÁTICO EN DOS PROFESORAS DEL DEPARTAMENTO FÍSICO MATEMÁTICO EN EL CONCEPTO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTORA EN DESARROLLO EDUCATIVO CON ÉNFASIS EN FORMACIÓN DE PROFESORES

PRESENTA

MARÍA DEL ROSARIO SANDOVAL CEDILLO

DIRECTORA DE TESIS

DRA. LETICIA SOSA GUERRERO

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P. AGOSTO, 2022.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Doctorado Regional en Desarrollo Educativo

con Énfasis en Formación de Profesores

Estados que integran la Región:

Coahuila

Nuevo León

Tamaulipas

San Luis Potosí

Zacatecas

CÁTEDRA UNESCO CECILIA BRASLAVSKY: Formación docente para la innovación de la educación

DICTAMEN DE TRABAJO DE TESIS

San Luis Potosí, S.L.P., 1 de septiembre de 2022.

C. MTRA.
MARÍA DEL ROSARIO SANDOVAL CEDILLO
P R E S E N T E. –

En mi calidad de Coordinador Regional del programa de Doctorado Capítulo Noreste, de la Universidad Pedagógica Nacional, y después de haber sido analizado su **Trabajo de Tesis** titulado: ***"El conocimiento del horizonte matemático en dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto de inducción matemática",*** encuentro que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos en vigor para ser presentado ante el H. Jurado del examen para la obtención de Grado, por lo que deberá entregar los 9 ejemplares y 4 Cd's requeridos como parte de su expediente institucional.

A T E N T A M E N T E

Vo. Bo.

S. E. G. E.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD 241
SAN LUIS POTOSI, S.L.P.

DRA. YOLANDA LÓPEZ CONTRERAS
Coordinadora Regional del Doctorado

JOSÉ JAVIER MARTÍNEZ RAMOS
Director de la Unidad

ÍNDICE

Agradecimientos

A la Dra. Leticia Sosa Guerrero por su invaluable asesoría, tiempo y paciencia en este trabajo de investigación, ya que su orientación permitio que este trabajo tuviera sentido, forma y ubicación en un campo de conocimiento científico.

A la Dra. Patricia Eugenia Jiménez Gallegos y al Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón por su co-asesoría en este trabajo de investigación, dado que sus conocimientos ampliaron y ubicaron este trabajo en un contexto de formación de docentes.

Al Departamento Físico Matemático de la UASLP, por facilitarme realizar este trabajo de investigación con dos profesoras de nivel superior.

A las Lic. Sarita Reyes, Ely Ramírez, Wendy Pérez, a los Mtros. Hugo Pascual y Rafael Zavala del Sistemas de Bibliotecas de la UASLP, por apoyarme en los recursos bibliográficos que consolidaron y dieron forma a este trabajo de investigación.

A mis profesores (as) de la UPN 241 de San Luis Potosí por su conocimiento dado durante mi proceso de formación.

A mi amiga la Dra. Chayito Auces Flores, por su acompañamiento académico durante el proceso de ejecución de mi estudio de este doctorado.

A mis padres David Sandoval y Socorro Cedillo por darme la vida, por su tiempo y por su cuidado, ya que su esfuerzo se ve consolidado en este trabajo de investigación.

A mis hermanos Pita, David, Lolis, Carmen y Gerardo ya que sus palabras, su tiempo y acompañamiento brindaron las fuerzas suficientes para terminar está tesis.

A mi esposo Juan Manuel y mi hermoso hijo Pedro Villanueva por su inagotable paciencia en los tiempos de desapego que tuve que atravesar para consolidar esta tesis.

Dedicatoria

A un ser supremo “Dios”

Proverbios 24:14

Así será el conocimiento de la sabiduría para tu alma; si la hallas, entonces habrá un porvenir, y tu esperanza no será frustrada.

Introducción

En un grupo de profesores e investigadores de distintas universidades y entidades educativas se desarrolla mensualmente, desde hace varios años, un Seminario de Investigación en didáctica de las matemáticas (con siglas SIDM) con el objetivo de examinar y explicar las aportaciones que se desarrollan en el campo educativo dentro de un contexto matemático.

Todas las aportaciones ofrecidas en estas reuniones mensuales nos han permitido tener conciencia de las dimensiones y problemáticas actuales que impactan en la formación docente. Por lo que la propuesta de investigación que ahora se expone, presenta una reestructuración desde su origen con la finalidad de presentar un estudio pertinente y adecuado conforme a las necesidades educativas actuales.

En este trabajo, subyace un tipo de problemática teórica que se refiere al reconocimiento de un modelo teórico que describa específicamente las conexiones matemáticas que se ejecutan en un contexto educativo de nivel superior en el concepto matemático de inducción matemática. Derivado de esta problemática, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto matemático de Inducción matemática?

Por ser un estudio de corte cualitativo, se considera un estudio de caso intrínseco ya que se comprenderá, analizará y profundizará la práctica docente de dos profesoras de matemáticas de nivel superior. Para lograr este propósito, se describe en esta investigación un objetivo general y un objetivo específico. El objetivo general es analizar los saberes adquiridos en términos del Conocimiento del Horizonte Matemático que se reconocen en la práctica docente de dos profesoras de nivel superior en el concepto de Inducción Matemática. El objetivo específico es analizar el subdominio del Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK, siglas en inglés) proveniente del modelo teórico del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, siglas en inglés) con la finalidad de describir puntualmente las conexiones matemáticas que se ejecutan en un contexto de nivel superior.

Para fines de alcanzar los objetivos de esta investigación, está tesis contendrá los siguientes apartados: en el primer capítulo se describe el problema de investigación, su pregunta y los objetivos del mismo. En el segundo capítulo se describe los antecedentes o estado del arte. En el tercer capítulo se describe la metodología, donde se fundamenta con autores la metodología ad hoc, en el cual se justifica por qué haremos lo que haremos con el método y la técnica basados en el problema, la pregunta y los objetivos de investigación. En el cuarto capítulo se presenta el análisis ad hoc a esta pregunta, problema y objetivos de investigación. En el quinto capítulo se presenta los resultados y conclusiones a la investigación, seguido de este se coloca las referencias. Finalmente se agregan los anexos.

Capítulo 1

Problema de investigación, su pregunta y los objetivos

Este capítulo tiene por objeto describir y justificar el problema de investigación, la pregunta y los objetivos de esta. Por la importancia que implica para esta investigación, se considera relevante ir a los autores para fundamentar y específicar la naturaleza que tienen estos elementos. Partiremos describiendo la importancia y posición que guarda el problema de investigación, ya que Espinoza (2018), refiriéndose a la investigación, señala que:

> […] el planteo del problema es la llave del resto de los apartados de las tesis, una vez que se tiene en claro sobre lo que se va a trabajar y precisa que es importante haber realizado un relevamiento sobre lo publicado con relación al tema que se quiere investigar […] (Espinoza, 2018, p.23).

Por otro lado, Pérez & Merino (2015), consideran que “los problemas son inconvenientes o fallas que surgen en distintos contextos y que requieren de una solución” (como se citó en Espinoza, 2018, p. 25). Precisando lo anterior, Espinoza (2018), enfatiza que “un problema de investigación es una pregunta o interrogante sobre algo que no se sabe o que se desconoce, y cuya solución es la respuesta o el nuevo conocimiento obtenido mediante el proceso investigativo” (p. 27).

Dadas estas investigaciones, es importante hacer explícito los elementos sustanciales que se requieren para sustentar un problema de investigación. Ante esta línea, Iglesias & Cortez (2016) exponen:

que de una idea de investigación puede surgir un problema de investigación si se cumplen las tres premisas correspondientes: objetividad, especificidad y asequible. Teniendo las siguientes específicaciones:

> La idea debe conducir a un problema objetivo, es decir, responder a una necesidad de la sociedad, partir de un desconocimiento científico y dar como resultado la creación de un nuevo conocimiento. Objetividad.
>
> La idea debe ser precisa, no tener ambigüedades, debe estar bien claro el objetivo y las cuestiones particulares de interés. Especificidad.
>
> La idea debe conducir a un problema que sea soluble en un tiempo determinado, no puede llevar a algo rebuscado, insoluble o en extremo difícil de resolver, su forma de solución debe estar garantizada, la búsqueda de la información, los métodos de análisis de datos, los métodos de solución, etc. Asequible (Iglesias & Cortez, 2016 citado en Espinoza, 2018, p. 28).

Considerando el punto de vista de estas investigaciones, se abré un punto de análisis en donde se expone y justifica la existencia de estas premisas en esta investigación.

1.1.- Objetividad del problema de investigación

Partiendo del punto de vista de Mora (2005), describe que un acercamiento al problema de investigación consiste en una: “explicación en forma general, desde el ámbito internacional, nacional, regional o comunal, de los esfuerzos que se han realizado (instituciones, organismos, docentes, estudiantes u otras entidades o personas), para abordar directa o indirectamente las interrogantes generales […]” (p.80).

Por tal motivo, buscando objetivar esta investigación, se presenta explicaciones generales para tener un radio de aproximación al problema de investigación central, de esta forma: Es muy común escuchar comentarios con respecto a que estamos mal en matemáticas, pero ¿por qué lo decimos?, ¿qué tan mal estamos?, ¿mal con respecto a qué o a quiénes? En la educación, como en la mayoría de las disciplinas, siempre es importante conocer el sustento o las bases sobre los cuales se construyen algunas afirmaciones; con ello se puede realizar un mejor análisis y emitir juicios pertinentes.

Precisamente, uno de los objetivos de tantas evaluaciones estandarizadas, que se aplican en México y en todo el mundo es ésa, la de ofrecer información sobre cómo estamos en comparación con lo que deberíamos saber y con lo que otros saben. En México, se realizan evaluaciones estandarizadas, elaboradas por muchos especialistas en la materia, y estas se aplican e interpretan con cautela y profesionalismo. Algunas de estas son la Comisión Nacional para la mejora continua de la educación (MEJOREDU) del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) y la del Programme for International Student Assessment (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

Las estadísticas muestran cómo año tras año el nivel de conocimientos matemáticos de los alumnos de niveles básicos está muy por debajo de lo deseable según lo reportado en los resultados de PISA del año 2018 (PISA, 2018). Esta situación es de importancia central dado que el tipo de matemática que se enseña en estos niveles constituye el fundamento del conocimiento científico básico que se requiere en los niveles de enseñanza posteriores. Por lo cual, es necesario incorporar enfoques educativos innovadores. Dado que la exposición de los alumnos al sistema tradicional de la escuela y la influencia del entorno social, provocan que los alumnos perciban a las matemáticas como un área muy difícil, es usual que los alumnos manifiesten un rechazo temprano hacia las áreas del conocimiento que tengan que ver con estas.

Las recomendaciones de este tipo de estudios se refieren siempre a elementos que se manejan de manera universal, a un nivel de todo un sistema, tal como es el currículo, sin tener en cuenta lo que ocurre realmente en las aulas. Es importante comentar que, para grandes conjuntos de estudiantes en un salón de clase el desempeño académico no siempre logra la meta deseada. Dado que, para conseguir avances significativos se considera importante tomar en cuenta muchos factores. Uno de los que se considera pertinente mencionar son las prácticas docentes de los profesores en matemáticas, ya que dentro de las aulas es donde se deslumbra la capacidad que tiene el docente de comunicar su conocimiento al alumno, así como el desarrollo de actividades dirigidas para su aprendizaje y la forma de como verifica que se asimiló este conocimiento.

Esto es: “the capacity of a teacher to transform the content knowledge he or she possesses into forms that are pedagogically powerful and yet adaptive to the variations in ability and background presented by students” [la capacidad de un maestro para transformar el conocimiento de contenido que posee en formas que son pedagógicamente poderosos y, sin embargo, se adaptan a las variaciones en la capacidad y el fondo presentados por los estudiantes] (Shulman, 1987, p. 15 como se citó en Park y Oliver, 2008, p. 262).

Bajo este primer panorama, se considera pertinente buscar y analizar propuestas formativas específicas dentro del campo del conocimiento matemático, en lo que compete a la ejecución de las prácticas docentes en un entorno educativo. Ya que este acercamiento permitirá construir un diálogo discursivo y autocritico que, de pauta a responder a algunas de las necesidades sociales específicas de esta área educativa, en miras de generar un nuevo conocimiento que dé respuestas a este tipo de problemáticas.

1.2.- Especificidad del problema de investigación

Habiendo objetivado el problema de investigación, se considera importante denotar un punto de especificidad en el problema de investigación, ya que existen muchos y variados problemas educativos, y por más entusiasmo que exista, no se tendría el tiempo suficiente para responderlo.

Por lo que, como ya se hizo saber el concepto de la práctica docente es un tema de estudio que ha preocupado y ocupado a muchas entidades educativas, dado que sus acciones en el campo educativo repercuten constantemente en los resultados anuales que reportan los gobiernos, todo esto para dar fe a que se están ejecutando de forma adecuada los apoyos gubernamentales dados al sector educativo. Estas reflexiones las vemos reflejadas en los resultados de TALIS 2008 donde se manifiesta que:

A medida que los factores relacionados con la mejora de los resultados de los estudiantes se hacen más evidentes, los gobiernos en todo el mundo están mirando la calidad de su fuerza en el trabajo docente. La práctica del maestro es el corazón de muchas discusiones, mientras que los esfuerzos por desarrollar y apoyar a los maestros son continuamente en lo que se está implementando y estudiando (TALIS, 2018).

El concepto de práctica docente es considerado un tema de interés y estudio por muchos investigadores; dado que su apreciación sociocultural permite evidenciar las realidades humanas que se ejecutan en el acto. Esto es, una buena práctica es: "Una manera de actuar que ofrece unos resultados concluyentes y que su puesta en práctica puede mostrar una innovación respecto a lo que se hace hasta el momento" (Anne, 2003, p. 4 como se citó en Casabón y autores, 2009, p.4).

Esta perspectiva abre un abanico de posibilidades para ser contextualizado en un ambiente educativo que, por su propia naturaleza reflejarán un conjunto de fenómenos, situaciones o circunstancias que rodearán o condicionarán toda acción ejecutada en el salón de clase. Martínez describe que una práctica docente es:

> La expresión que denota al conjunto de actividades que llevan a cabo los maestros, como parte de su trabajo en el aula o en relación directa con él, con el propósito de que los estudiantes alcancen los propósitos de aprendizaje establecidos en planes y programas de estudio (Martínez, 2012, p.1).

Este criterio permite poner en escenario a los actores principales de este acto educativo profesor-alumno que, por las características de sus personajes, escenifican acciones que validan y dan fe de lo que ocurre en el aula. La Agencia Andaluza de Evaluación Educativa manifiesta que:

> Las buenas prácticas también hacen referencia a criterios de actuación que son considerados óptimos para alcanzar unos determinados resultados, a experiencias que se guían por principios, objetivos y procedimientos apropiados o pautas aconsejables que se adecuan a unos determinados estándares o parámetros consensuados, así como experiencias que han arrojado resultados positivos, demostrando su eficiencia y utilidad en un contexto concreto (Agencia Andaluza de Evaluación Educativa, 2012, p.7).

A partir de ello, se puede observar que ha ocurrido una verdadera evolución en el estudio de las prácticas docentes, y actualmente es común hablar del análisis entre las diferentes metodologías de enseñanza aprendizaje. Los estudios con respecto de la indagación de la práctica del profesor de matemáticas se han potenciado, con objetos de estudio claramente definidos. Estas investigaciones consideran importante buscar alternativas serias que permitan perfeccionar y dimensionar la función docente en las matemáticas en todos los niveles educativos. Por tal motivo se considera importante y sobresaliente analizar los conocimientos que se desarrollan en los profesores de matemáticas, ya su estudio dará pie a las reflexiones de futuros profesores. Ana María Reyes describe que: "los conocimientos del profesor de matemáticas se han convertido en el objeto de estudio de diferentes investigadores, que tiene el propósito de caracterizar la disciplina y el conocimiento para su enseñanza" (Reyes, 2018, p.73).

Por tal motivo, el poder plantear investigaciones con la índole de específicar el problema de investigación, nos permitió solidificar e identificar la ruta investigativa que se debe tomar, en obras de precisar la pregunta de investigación con respecto de los conocimientos matemáticos que se reflejan en un espacio áulico de nivel superior.

1.3.- Asequible en el problema de investigación

Habiendo mostrado el panorama general del problema de investigación, ahora es importante determinar, definir y hacerlo alcanzable, dado que desde el punto de vista de Mora (2005), la definición del problema implica una: "depuración del problema, quien investiga debe desechar aquellos problemas triviales, incoherentes y poco útiles, que no compensen el tiempo y los recursos a invertir en la ejecución del estudio" (Mora, p. 81).

Por lo que, una de las propuestas que ha impactado en el análisis de la práctica docente es la que se definió por Shulman, dado que él caracterizo los conocimientos necesarios que necesita un profesor para enseñar. Esto es:

> How might we think about the knowledge-that grows in the minds of teachers, with special emphasis on content? I suggest we distinguish among three categories of content knowledge: (a) subject matter content knowledge, (b) pedagogical content knowledge, and (c) curricular knowledge [¿Cómo podríamos pensar en el conocimiento que crece en las mentes de profesores, con especial énfasis en el contenido? Sugiero que distingamos entre tres categorías de contenido conocimiento: (a) conocimiento del contenido de la materia, (b) conocimiento didáctico del contenido, y (c) conocimiento curricular] (Shulman, 1986, p.9).

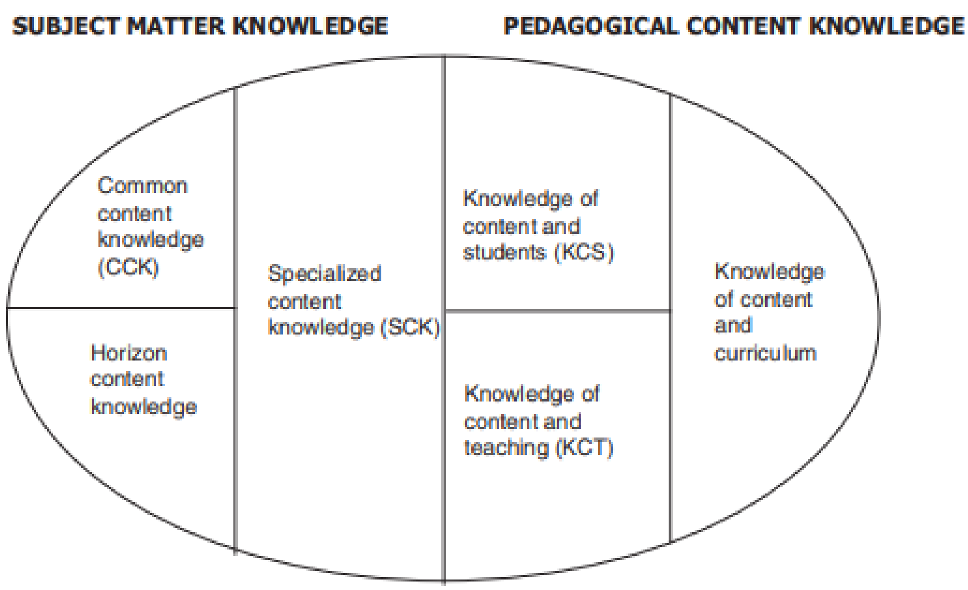
Derivado de lo anterior, surgió un modelo de estudio y análisis de la práctica del profesor en servicio propuesto por Deborah Ball y colaboradores denominado por "Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)" en el cuál:

> To represent our current hypotheses, we propose a diagram as a refinement to Shulman's categories. Figure 5 shows the correspondence between our current map of the domain of content knowledge for teaching and two of Shulman´s (1986) initial categories: subject matter knowledge and pedagogical content knowledge. We have provisionally placed Shulman's third category, curricular knowledge, within pedagogical content knowledge [Para representar nuestras hipótesis actuales, proponemos un diagrama como un refinamiento de las categorías de Shulman. La figura 5 muestra la correspondencia entre nuestro corriente mapa del dominio del conocimiento del contenido para la enseñanza y dos de las categorías

iniciales de Shulman (1986). Tema conocimiento y conocimiento del contenido pedagógico. Tenemos colocado provisionalmente en la tercera categoría de Shulman, conocimiento curricular, dentro del conocimiento pedagógico del contenido] (Ball, Thames y Phelps, 2008, p.403).

Figura 1

Domains of Mathematical Knowledge for Teaching [Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza] (Ball, Thames y Phelps, 2008, p.403).



Nota: Esta figura es la mencionada como *Figure 5* [Figura 5] en la cita anterior.

Este modelo permitirá hacer un análisis más profundo del tema de interés en esta investigación, pero será necesario poder delimitar y seleccionar uno o más de los subdominios de este modelo. Por lo que en el capítulo 2 se hará una descripción más profunda de este modelo, en particular lo que corresponde al subdominio del conocimiento del horizonte matemático, subdominio en el cúal focaliza, justifica y da sentido a la pregunta de investigación: ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto matemático Inducción Matemática?

Capítulo 2

Marco teórico

2.1.- La profesora en su práctica docente

¿Qué es práctica docente?

El concepto de la práctica docente es un tema de estudio que ha preocupado y ocupado a muchas entidades educativas, dado que sus acciones en el campo educativo repercuten constantemente en los resultados anuales que reportan los gobiernos, todo esto para dar fe a que se están ejecutando de forma adecuada los apoyos gubernamentales dados al sector educativo. Estas reflexiones las vemos en los resultados de TALIS 2018 donde se manifiesta que:

> "*A medida que los factores relacionados con la mejora de los resultados de los estudiantes se hacen más evidentes, los gobiernos en todo el mundo están mirando la calidad de su fuerza de trabajo docente. La práctica del maestro es el corazón de muchas discusiones, mientras que los esfuerzos para desarrollar y apoyar a los maestros son continuamente los que se están implementando y estudiando*" (TALIS, 2018).

El concepto de la práctica docente es considerado un tema de interés y estudio por muchos investigadores; dado que su apreciación sociocultural permite evidenciar las realidades humanas que se ejecutan en la práctica educativa. Se considera que una buena práctica docente es: "una manera de actuar que ofrece unos resultados concluyentes y que su puesta en práctica puede mostrar una innovación respecto a lo que se hace hasta el momento" (Anne, 2003, p. 4, como se citó en Casabón et al., 2009, p.4).

Desde esta mirada, se abre un abanico de posibilidades en la acción de la práctica docente para ser ubicado y contextualizado en un ambiente educativo que, por su propia naturaleza reflejarán un conjunto de fenómenos, situaciones o circunstancias que rodearán o condicionarán toda acción ejecutada en el salón de clase. Martínez describe que una práctica docente es:

> La expresión que denota al conjunto de actividades que llevan a cabo los maestros, como parte de su trabajo en el aula o en relación directa con él, con el propósito de que los estudiantes alcancen los propósitos de aprendizaje establecidos en planes y programas de estudio (Martínez, 2012, p.1).

Este criterio permite poner en escenario a los actores principales de este acto educativo profesor-alumno que, por las características de sus personajes, escenifican acciones que validan y dan fe de lo que ocurre en el aula. La Agencia Andaluza de Evaluación Educativa manifiesta que:

> Las buenas prácticas también hacen referencia a criterios de actuación que son considerados óptimos para alcanzar unos determinados resultados, a experiencias que se guían por principios, objetivos y procedimientos apropiados o pautas aconsejables que se adecuan a unos determinados estándares o parámetros consensuados, así como experiencias que han arrojado resultados positivos, demostrando su eficiencia y utilidad en un contexto concreto (Agencia Andaluza de Evaluación Educativa, 2012, p.7).

¿Qué es práctica?

Partiendo del criterio de observación y análisis que determinaron las investigaciones anteriores con respecto del concepto de la práctica docente. Se considerá pertinente dirigir un espacio de análisis de lo que se entiende por la palabra raíz “práctica”. Davini (2015) describe que la palabra práctica determina las acciones de los “[…] resultados de los sujetos, que involucran siempre el pensamiento y la valoración, así como las diversas nociones o imágenes sobre el mundo. Es decir, acción y pensamiento van de la mano, y en este proceso influyen ideas y valoraciones propias resultado de diversas experiencias anteriores, sociales y personales” (p.24).

Esta conceptualización del concepto de práctica permite iniciar un diálogo de crítica y análisis con respecto de donde están posicionadas las prácticas docentes. Y permite sondear la dificultad que implica llevarlas a cabo. Davini (2015) hace la distinción de tres zonas de complejidad de las prácticas, que son: zonas reguladas objetivamente y zonas conscientes, permeables a la reflexión y resultados de decisiones. Las zonas indeterminadas son, justamente, determinadas por el habitus y responsables de una serie de interacciones entre los miembros del grupo – costumbres, rituales y rutinas- construidas de manera experiencial y transmitidas por las tradiciones prácticas (p.27).

Las zonas reguladas objetivamente refieren a aquellas dimensiones de las prácticas regladas en las instituciones, a través de políticas, normas, documentos formales, división del trabajo y funciones, y que presentan un constreñimiento a las decisiones individuales (Davini, 2015, p.27). Las zonas conscientes son las que en sentido estricto permiten la reflexión, el análisis y la fundamentación, así como la toma de decisiones propias (Davini, 2015, p.28).

Estas tres zonas de complejidad del concepto de “práctica” ayudan a ver la naturalidad y esencia de su ubicación educativa. Dado que en entornos sociales es necesario romper los estereotipos formales para poder tener una empatía, no solo como persona que dará un conocimiento, sino como un ente social que adopta un compromiso por esforzarse y entender la conducta, los gustos, los malestares del contenido que presentará.

2.2.- La profesora como profesional en su profesión.

¿Qué es profesionalismo y profesionalización?

El arte de ser una profesora, como ya vimos en anteriores investigaciones requiere constantemente de evaluar y reevaluar las actuaciones docentes. Los estándares de una evaluación profesional según Avalos y Nordenflycht (1999) "[…] puede menoscabar o ignorar el igualmente importante componente afectivo de la labor del maestro, vale decir, la pasión por enseñar y la preocupación por la vida y el aprendizaje del educando" (p.116), son en muchas de las ocasiones omitidas porque son muy sutiles a simple inspección de la actuación docente. Estas consideraciones propician que la acción de ejecutar alguna práctica da indició a que: "todas estas presiones y tendencias están forzando a los maestros y a aquellas personas que colaboran con ellos, a reevaluar su profesionalismo y a reconsiderar el tipo de aprendizaje profesional que necesitan para mejorar su trabajo" (Avalos y Nordenflycht, 1999, p.115).

Actualmente estas problemáticas siguen estando presentes, dado que los profesores noveles o expertos necesitan profesionalizar su profesión. Pero ¿qué se entiende por los conceptos de profesionalismo y profesionalización?, ¿qué diferencias, similitudes o relaciones hay entre estos conceptos? Se dice que el concepto de *profesionalismo* "[…] se refiere a la calidad del trabajo que realizan, el modo y estilo de conducirse y a los estándares que enmarcan su actividad" (Avalos y Nordenflycht, 1999, p.116) y que el concepto de *profesionalización* “se refiere a […] las iniciativas tendientes a mejorar el prestigio y la posición social de la docencia” (Avalos y Nordenflycht, 1999, p.116).

Por lo cual, para ejercer una evaluación de los ejercicios y acciones de la profesión docente es necesario repensar en las actividades propias de la labor docente. Mirando como primer parte las necesarias o básicas como son las planeaciones de clase, las actividades de desempeño en clase, los criterios o métodos de evaluación, etc. Posteriormente las actividades de carácter académico tal y como la capacitación de cursos, mejora de su alcance profesional, etc. Todas estas actividades promueven el desarrollo eficiente para poder desarrollar los conocimientos requeridos durante la práctica docente. Ya que el hecho de tener una proyección profesional aceptable y alcanzable, permite cubrir las demandas de las autoridades educativas en nuestro sector educativo, compromiso latente que demandan actualmente nuestras autoridades y nuestra sociedad en común.

Park y Oliver, describen y distinguen los principios para entender a los profesores como profesionales, ellos miran al conocimiento didáctico del contenido (CDC) como una herramienta conceptual para comprender dicho profesionalismo, el cual lo específican en los siguientes tres puntos:

1.- Los profesores son productores de conocimiento, no receptores de conocimiento. Esta característica es esencial para ver a los profesores como profesionales.

2.- La idiosincrasia (modo de ser que es característico de una persona o cosa y la distingue de los demás) caracterizada por la autonomía y las habilidades de los profesores en relación con el acceso y la generación de información y conocimiento.

3.- Al desarrollar el CDC, los profesores llegan a crear teorías personales y explicaciones basadas en ellos y luego esas teorías informan las decisiones y acciones de los profesores en la enseñanza (Park y Oliver, 2008).

Se puede apreciar que, en el margen de casi dos décadas, los principios que encontraron para definir a un profesor como profesional eran muy generales, muy afines para un profesor en ejercicio de su profesión docente; sin prestar atención si se trataba de un profesor de español, matemáticas u otra materia.

2.3.- Los conocimientos necesarios del profesor

Se puede observar que ha ocurrido una verdadera evolución en el estudio de las prácticas docentes, y actualmente es común hablar del análisis entre las diferentes metodologías de enseñanza aprendizaje. Los estudios con respecto de la indagación de la práctica del profesor de matemáticas se han potenciado, con objetos de estudio claramente definidos. Estas investigaciones consideran importante buscar alternativas serias que permitan perfeccionar y dimensionar la función docente en las matemáticas en todos los niveles educativos. Por tal motivo se considera importante y sobresaliente analizar los conocimientos que se desarrollan en los profesores de matemáticas, ya su estudio dará pie a las reflexiones de futuros profesores. Ana María Reyes describe que: “los conocimientos del profesor de matemáticas se han convertido en el objeto de estudio de diferentes investigadores, que tiene el propósito de caracterizar la disciplina y el conocimiento para su enseñanza” (Reyes, 2018, p.73).

Ante las búsquedas de respuestas varios investigadores han hecho esfuerzos significativos por ubicar y dar sentido a esta actividad, buscando estrategias idóneas para colocarlo en un marco teórico que lo identifique y posicione en búsqueda de mejorar las problemáticas que subyacen en la práctica docente. Gómez y Planchart (2005) describen que:

> La Didáctica de la Matemática y Práctica Docente debe encararse potenciando el marco teórico de la didáctica especial como disciplina autónoma emergente, que aporta y problematiza a la práctica docente. Es altamente conveniente que la Didáctica de la Matemática y la Práctica Docente se proyecten en el propio diseño de la carrera de profesor de Matemática. (p.61).

Una de las propuestas que ha impactado en el análisis de la práctica docente es lo definido por Shulman, dado que él caracterizó los conocimientos necesarios que necesita un profesor para enseñar. Shulman considero tres componentes: a) Conocimiento del contenido, b) Conocimiento didáctico del contenido, c) Conocimiento curricular. En el cuál:

> Content Knowledge. This refers to the amount and organization of knowledge per se in the mind of the teacher [El conocimiento del contenido. Se refiere a la cantidad y la organización de conocimiento de contenido en la mente del profesor] (Shulman, 1986, p.9).
>
> Pedagogical Content Knowledge. A second kind of content knowledge is pedagogical knowledge, which goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter knowledge for teaching [Conocimiento de contenido pedagógico. Un segundo tipo de conocimiento del contenido es el

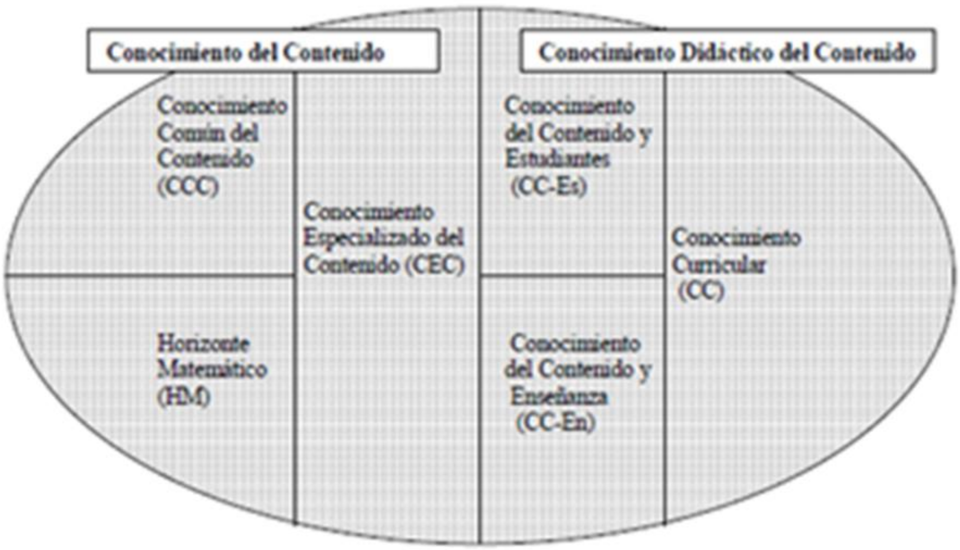
conocimiento pedagógico, que va más allá del conocimiento de la materia per se a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza] (Shulman, 1986, p.9).

The curriculum is represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at a given level, the variety of instructional materials available in relation to those programs [El plan de estudios está representado por la gama completa de programas diseñados para la enseñanza de materias y temas particulares en un nivel determinado, la variedad de materiales de instrucción disponibles en relación con esos programas] (Shulman, 1986, p.10).

Derivado de lo anterior, surgió un modelo de estudio y análisis de la práctica del profesor en servicio denominado “Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)”, como se muestra en la figura 2, este modelo fue propuesto por Deborah Ball y colaboradores (Ball, 2000, 2002: Ball y Bass, 2003; Ball, Hill y Bass, 2005). Este modelo MKT, se divide en dos subdominios; que al mismo tiempo se dividen en tres subdominios: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico del Contenido. El primer subdominio contiene al Conocimiento Común del Contenido (CCC); al Conocimiento Especializado del Contenido (CEC) y al Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK). El segundo subdominio contiene al Conocimiento del Contenido y estudiantes (CC-Es); al Conocimiento del Contenido y enseñanza (CC-En) y al Conocimiento Curricular (CC).

Figura 2

Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching siglas en inglés MKT) (Ball et al, 2008).



2.3.1.- Investigaciones dentro del campo del conocimiento matemático para la enseñanza

Durante varias décadas han surgido varios modelos del análisis de la práctica docente del profesor, todas estas aportaciones han generado múltiples estilos y estrategias de enseñanza. Se considera que el modelo del MKT se centra en el análisis de los conocimientos que necesita el profesor en su práctica docente, dado que influyen directamente en su capacidad didáctica y su destreza matemática en desarrollar sus conocimientos. Se considera pertinente mostrar algunas aportaciones donde se reflejen las expectativas y exigencias en el análisis bajo este modelo, ya que esta actividad contribuye en la determinación del punto nodo de esta investigación.

2.3.1.1.- Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de casos. Autora: Sosa Leticia. Existen muchas investigaciones en donde han utilizado el modelo MKT, muestra de ello lo describe la tesis doctoral de Leticia Sosa, cuya investigación consideró un estudio de dos casos, con respecto al conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) en bachillerato. Su aportación a la investigación educativa consistió en ofrecer una matización del modelo del MKT en bachillerato y con él una serie de descriptores o indicadores para identificar y comprender los distintos subdominios del MKT que pueden servir para analizar a otros profesores. En las limitaciones de su investigación, menciona que:

> Sin embargo, aún hay que continuar refinando (enriqueciendo) los descriptores que proponemos, hay que sustentarlos con más ejemplos en otros dominios de la matemática (eg. Cálculo, probabilidad y estadística, etc.), es decir, ponerlos a prueba con otros profesores y en los distintos temas de matemáticas que se imparten en bachillerato (Sosa, 2011, p. 490).

Por lo que, esta da pauta a investigar que ha sucedido en las actuaciones de profesores de matemáticas de nivel superior, dado que en estos contextos educativos prevalece los temas afines buscando un sentido matemático de aplicación a la vida cotidiana.

2.3.1.2.- Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. Autores: Ciccioli y Sgreccia. Ciccioli y Sgreccia en su trabajo de investigación “Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT”, hacen la específicación de la importancia que prevalece en la transversalidad de los contenidos matemáticos, ya que durante este camino curricular el profesor desarrolla los contenidos matemáticos que permiten vincular conexiones entre los conceptos que ya se conocen y los que están por conocer, brindando un sentido y significado a los conocimientos que se revisan. Ellos describen que: “en el nivel secundario no se explica la transición del marco geométrico al Álgebraico, y en el nivel superior se avanza rápidamente hacia el estudio de espacios más abstractos, quedando perdido el eslabón esencial para la comprensión de la geometría analítica” (Ciccioli & Sgreccia, 2017, p. 144).

2.3.1.3.- El conocimiento del Horizonte Matemático: Más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. Autores: Martínez, Gine, Fernández, Figueras, Deulofeu. La propuesta de investigación que presentan Martínez y colaboradores responde a una de las limitaciones del estudio de Sosa con respecto de uno de los indicadores de los subdominios del modelo MKT, ya que Sosa describe: “además, falta profundizar más en todos los subdominios y posiblemente más en aquellos de los que apenas obtuvimos información, por ejemplo, el CC y el HM” (Sosa, 2011, p. 491).

Martínez y colaboradores centraron su investigación en la importancia del conocimiento matemático que evidencia el profesor durante las etapas educativas de primaria hasta secundaria, tomando como referencia el modelo del MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008). Consideraron como punto de análisis uno de los subdominios de este modelo que es el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK), en el cual les permitió atender la problemática de la transición desde la perspectiva del conocimiento del profesorado. Esto es: “el problema de investigación al que nos referimos en este trabajo tiene que ver con la búsqueda de una definición del conocimiento profesional del profesor que permita abordar la problemática de la transición” (Martínez et al., 2011, p.430).

Es importante resaltar que, en este tipo de investigaciones se pueden desprender muchos resultados a partir del análisis de la práctica docente; ya que la riqueza del análisis del conocimiento matemático que evidencian los profesores de primaria y secundaria es amplia en el contexto educativo que se desarrollan. Esto es:

> La investigación en educación matemática ha evidenciado cómo las creencias que los profesores tienen sobre la naturaleza de las matemáticas, el aprendizaje y enseñanza o las restricciones que impone el contexto de desarrollo curricular al profesor, son determinantes en su práctica (Martínez et al., 2010, p.435).

2.3.1.4.- El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. Autores: Fernández, Figueras.

En todo proceso educativo, el tránsito por los diferentes niveles educativos ofrece para el profesor y el alumno una tipificación de conocimientos que a lo largo de su vida académica lo forman y consolidan en sus aprendizajes. En el área de las matemáticas este proceso de transición se ve fuertemente afectada, dado que el profesor tiene que hacer grandes esfuerzos por equilibrar y dosificar el contenido matemático en unidades, para finalmente llegar a la unificación y totalidad del tema curricular. Fernández y Figueiras describen que: “tendencias actuales en Educación Matemática consideran el papel del profesor y los estudiantes desde una perspectiva holística, teniendo en cuenta la adquisición de la competencia matemática de manera continua. Esta continuidad se ve particularmente alterada en momentos de transición de etapa" (Fernández y Figuereiras, 2010, p.292).

En esta investigación que realizaron Fernández y Figueiras con respecto de la transición en los niveles básicos, describen la importancia que tiene el hacer un análisis del conocimiento matemático que manifiesta el profesor durante su práctica docente, ya que prestan interés en conocer: "[…] qué elementos de los conocimientos de los profesores afectan directamente a la continuidad del aprendizaje de matemáticas y en particular durante la transición de primaria a la secundaria" (Fernández y Figueiras, 2010, p. 293).

Para poder lograr esta meta, Fernández y Figueiras retomaron nuevamente el subdominio del Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK) perteneciente al modelo del MKT, dado que "[…] emerge como un constructo especialmente relevante en la transición ya que refiere al punto de vista longitudinal de la Educación Matemática necesaria en el profesorado" (Fernández, 2010, p. 293). Esta característica del HCK permitió a los investigadores poder precisar y ubicar su investigación, ya que el analizar la transición de está etapa educativa a otra no obliga al profesor de nivel primaria a abordar un contenido Álgebraico que se revisa en secundaria, pero si lo concientiza en "[…] saber con qué dificultades se enfrentarán sus estudiantes para sentar una base conceptual firme" (Fernández, 2010, p. 294).

Todos estos elementos de investigación, nos permiten posicionarnos en nuestra investigación, dado que la transición en niveles educativos superiores ha sido poco abordada por la complejidad que implica, pero muchos de los elementos ya investigados en etapas tempranas beneficiará para marcar este elemento, ya que como lo describe

Fernández y Figueiras "[…] nuestro objetivo es dar algunas sugerencias para abordar en futuras investigaciones y ampliar la conceptualización de la HCK con el fin de utilizarlo como una herramienta teórica para abordar la transición" (Fernández y Figueiras, 2010, p.292).

2.3.1.5.- Modelo teórico que describe las conexiones matemáticas. Uno de los trabajos de investigación que fungió como base para el desarrollo de esta investigación es el descrito por Sosa, dado que en su aportación utiliza el modelo teórico del MKT el cuál consistió en:

> […] una descripción pormenorizada de cada subdominio, pues argumenta que éstos son definidos de una manera muy general, y eso hace que sean difíciles de observar durante la práctica de enseñanza de los profesores. Para compensar esta generalidad propone un conjunto de indicadores para cada subdominio del modelo MKT, con lo que, desde su perspectiva, se alcanza una descripción detallada de los conocimientos matemáticos y didácticos (González, 2018, p. 94).

Ahora bien, en este modelo teórico MKT utilizado por Sosa y descrito en la figura 1[*], se consideran dos dominios, el conocimiento de la materia (SMK) y el conocimiento didáctico (PCK) que ambos contienen seis subdominios que son; el conocimiento común del contenido (CCK), el conocimiento especializado del contenido (SCK), el conocimiento del horizonte matemático (HCK), el conocimiento del contenido y estudiantes (KCS), el conocimiento del contenido y enseñanza (KCT) y el conocimiento curricular (KCC). Donde consideramos relevante unirnos a las voces e inquietudes de muchos investigadores que se han cuestionado sobre el papel que juega el predominio de un

*. figura 1 se encuentra en la página 21

subdominio sobre de otro subdominio en el modelo MKT, al respecto González describe: “el separar los subdominios genera dificultad para hablar de ellos en conjunto, pues Ball dice que están relacionados y no es fácil establecer en qué momento inicia y término un subdominio para hablar de otro” (González, 2018, p. 258).

Un par de investigadoras Fernández y Figueiras, analizaron la relación de un subdominio sobre de otro en el modelo del MKT; en el cual a partir de las observaciones de las prácticas docentes identificaron dos tipos de conocimiento: el estático y el de acción. En el cual determinaron que:

> Un conocimiento estático (statical) de los contenidos, en el sentido que a menudo pueden ser adquiridos individualmente y aislados de la práctica docente en matemáticas, y un conocimiento en acción (in-action), que se expresa únicamente en la práctica de la enseñanza o la observación de otras prácticas de enseñanza (Fernández y Figueiras, 2010, p.295).

Bajo este criterio las autoras denominan los conocimientos estáticos al CCK y KCC. Y a los conocimientos en acción los denominan a KCS, KCT y SCK. Dado que estos subdominios: “[…] tienen un carácter diferente, ya que surgen y se expresan únicamente durante la práctica de las matemáticas” (Fernández y Figueiras, 2010, p.295).

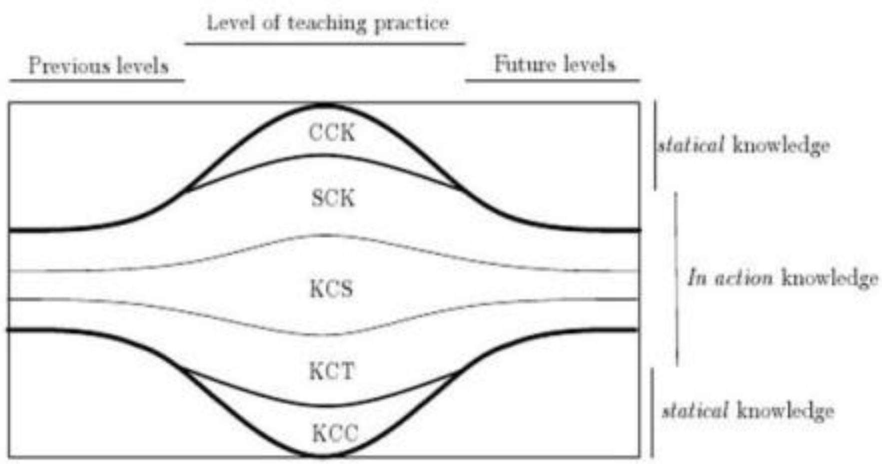
Como parte de esta clasificación en el modelo del MKT, las autoras Fernández y Figueiras, pormenorizaron los subdominios CCK, SCK, KCS, KCT y KCC con respecto del subdominio de HCK, dado que describieron que este subdominio no es pensado “[…] como otro subdominio de MKT, sino como un conocimiento que da forma al MKT.”

(Fernández, 2010, p.296). Derivado de este análisis estas autoras presentaron la Figura 2, donde describen:

> Nosotras sostenemos que, para ser utilizado como una herramienta de orientación y análisis del papel del conocimiento práctico del profesor durante la transición, todos los dominios que hemos denominado en acción deben ser abordados desde la perspectiva del HCK. Así pues, el conocimiento de lo pasado y lo futuro debe estar incluido en el KCS, el KCT y el SCK (Fernández y Figueiras, 2010, p.296).

Figura 3

El HCK da forma al MKT y retrata su naturaleza.



Esta característica detonante del HCK ha permitido analizar el conocimiento del profesor durante su práctica docente, ya que le permite realizar un escáner entre las ideas previas que requiere enfocar y las ideas futuras que deberá marcar. Esta característica notable del HCK, lo hace colocarse en el foco de investigación de varios investigadores, Carrillo y autores describen que: “si el PCK supuso un avance muy importante en el modelo de Shulman, el HCK y el SCK son probablemente las aportaciones más relevantes del modelo de Ball" (Carrillo et al., 2013, p. 195).

Todas estas aportaciones vivifican y confirman el posicionamiento que sustenta la pregunta de esta investigación que es: ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico matemático en el concepto matemático Inducción Matemática?

2.4.- Definición del subdominio HCK

En este apartado describiremos algunas definiciones del subdominio HCK; las cuales permitirán delimitar y orientar esta investigación.

> Para Ball, Thames y Phelps (2008), el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK) es un subdominio del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) que se refiere a la conciencia del profesor sobre los conocimientos matemáticos previos y futuros presentes en el currículum de matemáticas (Martínez, 2011, p. 430).

Esta definición permite visualizar el HCK desde una mirada globalizada con respecto a los conceptos, y una forma transversal con respecto a los contenidos ya que, durante la práctica docente de un profesor de matemáticas, se requiere que conozca el concepto a tratar, pero también se necesita que tenga una mirada de cómo lo va a utilizar con la finalidad de orientar el trabajo en clase. Estas necesidades formativas son muy necesarias en las prácticas docentes de profesores de nivel superior, dado que en estos contextos se requiere sintetizar las ideas matemáticas para poderlas llevar a un contexto problematizador. Zazkis y autores hacen énfasis en este elemento, ya que describen al HCK como:

> […] resonate with our description of mathematical horizon as the place where advanced mathematical knowledge meets school curriculum [{…} resuenan con nuestra descripción del horizonte matemático como el lugar donde el conocimiento matemático avanzado se encuentra con el currículo escolar] (Zazkis, 2011, p. 9).

Este subdominio ha sido reconocido por varios autores y lo han denominado un subdominio que ofrece más características de análisis durante la práctica docente; ya que permite ver "[…] una visión global de la educación matemática de los estudiantes, de manera que pueda ser utilizada por el profesor al enseñar matemáticas en el aula" (Martínez, 2011, p. 430).

2.4.1.- Analizar su definición y la relación que tiene con las conexiones matemáticas

Partiendo de la relevancia que yace de este subdominio del HCK, algunas investigaciones han:

> […] concluido una caracterización del Conocimiento del Horizonte Matemático en términos de conexiones matemáticas que parecen fundamentales desde el punto de vista de la construcción del significado de los contenidos matemáticos escolares en términos de continuidad (Martínez, 2011, p. 430).

Esta caracterización del HCK con respecto de las conexiones matemáticas ha sido un tema actual y de importancia en las investigaciones de Educación Matemática. Dado que "[…] su importancia radica, entre otras cosas, porque favorecen la integración del conocimiento y la interdisciplinariedad, son útiles para resolver problemas de aplicación y problemas no matemáticos, además de que son fundamentales para lograr la compresión matemática" (García, 2019, p. 129).

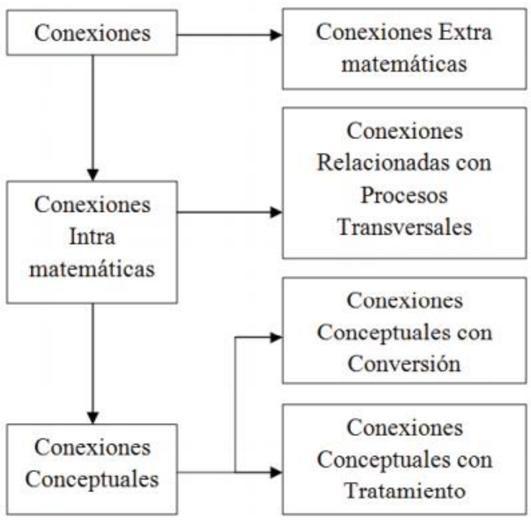
Eli, Schroeder & Lee (2013) definen las conexiones matemáticas de la siguiente manera: "mathematical connection is a part of a network structured like a spider´s web; the junctures, or nodes, can be thought of as pieces of represented information, and threads between them as the connections or relationships" [la conexión matemática es parte de una red estructurada como una telaraña; las uniones, o nodos, se pueden considerar como piezas de información representada, y los hilos entre ellos como las conexiones o relaciones] (Pambudi, 2020, p.134).

Ahora bien: "[…] entenderemos las conexiones como redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos. Dichos enlaces son vínculos lógicos y coherentes entre representaciones –en el sentido de Duval- y su interpretación errónea o incompleta da lugar a errores comunes en la matemática escolar" (Gamboa y Figueiras, 2014, p.340).

Dado la complejidad de la detección de las conexiones matemáticas durante la ejecución de la práctica docente. Gamboa y Figueiras propusieron una clasificación de las conexiones matemáticas que se muestra en la Figura 3, donde en ella se muestra la: "[…] diferenciación entre aspectos internos y externos en la actividad matemática producen a su vez una diferencia en las tipologías de relaciones que se pueden establecer y por tanto una diferencia en la tipología de las conexiones" (Gamboa y Figueiras, 2014, p. 341).

Figura 4

Clasificación de las conexiones matemáticas.



Todas estas investigaciones reflejan la importancia que tiene "[…] la capacidad de las conexiones matemáticas (utilizando vínculos entre conceptos, procedimientos y hechos) está relacionada con las habilidades de resolución de problemas matemáticos" (Pambudi, 2020, p.131).

Es importante describir que el tratar el tema de la resolución de problemas y las conexiones matemáticas: "[…] son dos cosas importantes en el aprendizaje de las matemáticas, a saber, como el objetivo del aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, es lamentable que la capacidad de las conexiones matemáticas de los estudiantes sea muy baja, por lo que repercute en el fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos" (Pambudi, 2020, p.129).

Todas estas aportaciones empoderan y direccionan el objetivo de esta investigación; ya que se busca analizar los saberes que se manifiestan durante la práctica docente en matemáticas de dos profesoras de nivel superior, ya que es de total relevancia en este nivel darles un sentido matemático a los contenidos, no de manera aislada, sino de forma conjunta, para de esta forma permitir tener una:

> […] coerência, afinidade ou semelhança entre as ideias matemáticas produzidas no/com o mundo; ou ainda, venham a estabelecer qualquer vínculo, união ou ligação entre informações, conjecturas, inferências, hipóteses, reflexões que estejam adjacentes ao movimento estabelecido para a produção do conhecimento matemático, ocorrido consigo, com os outros e com o mundo. [{…} coherencia, afinidad o similitud entre las ideas matemáticas producidas en/con el mundo; o, establecerán cualquier vínculo, unión o vínculo entre información, conjeturas, inferencias, hipótesis, reflexiones adyacentes al movimiento establecido para la producción de conocimiento que ocurrie contigo, con los demás y con el mundo] (Rosa, 2018, p.1071).

2.4.2.- Características y clasificación del HCK

Es importante resaltar que dada las condiciones y características de análisis del subdominio del HCK, algunos autores han determinado tres clasificaciones en este subdominio que son: HCK (T), HCK (P) y HCK (V). Donde:

> El HCK (T) incluye el conocimiento de las principales ideas y estructuras de la disciplina y las conexiones entre diferentes entes matemáticos, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente. Incluye también el conocimiento de conexiones con contenidos posteriores y anteriores a los que se están tratando. En el HCK (P) está el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas, aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la

prueba, saber definir y usar definiciones, establecer relaciones (entre conceptos, propiedades, etc.), correspondencias o equivalencias o elegir representaciones, generalizar o explorar. En el HCK (V) se consideran los valores centrales de la disciplina, como la precisión y el cuidado con la consistencia del lenguaje matemático, el gusto por la coherencia argumental, la corrección y la exactitud como opuesto de la ambigüedad (no como opuesto de la aproximación) (Carrillo, 2013, p. 195).

Por otro lado, Flores (2020) en su ponencia del seminario SIDM, consideró a esta clasificación del HCK como una base para la construcción del subdominio KSM (Conocimiento de la Estructura Matemática) perteneciente al modelo MTSK (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas), y lo consolida como:

a) HCK(T) conexiones tanto entre temas de matemáticas como con temas de otras disciplinas.

b) HCK(P) contempla cómo es construida la matemática.

c) HCK(V) contiene los principales valores cuando se trabaja o se hacen matemáticas (Flores, 2020).

2.4.3.- Analizar porque el HCK es una pieza clave para la construcción del nuevo modelo del MTSK

Ahora bien, como se ha podido observar el modelo del MKT ha sido y es una propuesta innovadora en el núcleo de los profesores de matemáticas que se interesan en mejorar su práctica docente. Ya que, desde el origen de este, Shulman (1986) enfatizó los conocimientos que necesita un profesor para enseñar. Ball, Thames y Phelps (2008) determinaron los conocimientos de un profesor de matemáticas que son; conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido.

> Sin embargo, reconociendo la innovación que suponen algunas de estas ideas, existen ciertos elementos de este modelo que desde nuestra perspectiva requieren una discusión en profundidad, en pos de su coherencia desde un punto de vista teórico, así como desde la perspectiva de la utilidad del modelo como marco teórico para el análisis del conocimiento del profesor (Muñoz-Catalán, 2015, p. 594).

Ante esta discusión Muñoz y colaboradores, determinaron cuatro aspectos claves a discutir; uno de los que presenta interés en esta investigación es el Conocimiento en el Horizonte Matemático y sus múltiples naturalezas, dado que:

> Estos cuatro puntos de discusión nos llevan a proponer el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, de sus siglas anglófonas), en el que recogemos algunas de las ideas fundamentales de los modelos anteriormente comentados (Muñoz-Catalán, 2015, p. 595).

Finalmente, habiendo descrito los referentes teóricos que darán respuesta a la pregunta de investigación que es: ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto matemático de Inducción Matemática?, así como a su objetivo general y objetivo específico descrito en el Capítulo 1. Se concluye de este capitulado que bajo la lupa epistémica de estas referencias se presenta el análisis y resultados de está investigación en tres momentos principales; el primero momento de ellos atiende al análisis de la práctica docente de dos profesoras de nivel superior del área de matemáticas, Aby y Lore. El segundo momento atiende al análisis de la representación esquemática de la identificación de las conexiones matemáticas. El tercer momento atiende a las similitudes y diferencias conceptuales de las prácticas docentes de Aby y Lore". Justificando que estos tres momentos dierón lucidez y ubicación al problema de investigación que se está resolviendo, evitando en todo momento la perdida de la brújula de este campo de acción, ya que durante el análisis del mismo surgierón infinitud de tentaciones por utilizar otro marco teórico de referencia, pero dado la solidificación de la selección meticulosa del mismo se pudo evitar constantemente está intención.

Capítulo 3

Propuesta Metodológica

Antes de determinar la estrategia metodológica, se considera pertinente mencionar lo que es un paradigma en la investigación educativa, ya que esto mostrará la forma de percibir y comprender la investigación planteada, de manera tal que sea factible analizarla e interpretarla. Ahora bien, existen varios autores que la definen, pero la que está enfocada en la investigación educativa es la que define el autor De Miguel (1988), lo cual la define como:

> Un punto de vista o modo de ver, analizar e interpretar los procesos educativos que tienen los miembros de una comunidad científica que se caracteriza por el hecho de que tanto científicos como prácticos comparten un, conjunto de valores, postulados, fines, normas, lenguaje, creencias y formas de percibir y comprender los procesos educacionales (p.66).

Ahora bien, existen tres tipos de paradigmas reconocidos en la investigación educativa que son el positivista, interpretativo y el sociocrítico. De estos tres se encuentra el paradigma que se utilizará en esta investigación, que es el interpretativo, ya que este paradigma comprende e interpreta la realidad educativa, analiza los significados de las personas, percepciones, intenciones y acciones.

Bassey (2003) define la finalidad de investigar bajo este paradigma interpretativo, en el cual: For the interpretive researcher, the purpose of research is to advance knowledge describing and interpreting the phenomenon in the world, in its attempt to obtain meanings shared with others. Interpretation is a search for deep perspectives on events individuals and theoretical knowledge. This may offer possibilities, but not certainties, in as to the outcome of future events. [Para el investigador interpretativo, el propósito de investigar es avanzar en el conocimiento describiendo e interpretando el fenómeno en el mundo, en su intento de obtener significados compartidos con otros. Interpretación es una búsqueda de perspectivas profundas en eventos particulares y de conocimientos teóricos. Esto puede ofrecer posibilidades, pero no certezas, en cuanto al resultado de futuros eventos] (Bassey, 2003, p. 44).

En esta investigación, que se sitúa en el paradigma interpretativo, el método consiste en un estudio de caso, y la técnica para obtener la información será mediante grabaciones en aula, notas de campo, cuestionarios y entrevistas semiestructuradas. Para aproximarnos al objeto de estudio, la pregunta de investigación guía es: ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto matemático Inducción Matemática?

Bajo este panorama, en este apartado se presenta la metodología que buscará dar respuesta a esta pregunta. Como primer elemento se describe el tipo de estudio, como segundo elemento las herramientas y técnicas para obtener los resultados y, por último, los elementos de inclusión y exclusión que guían a esta investigación.

3.1.- Descripción del tipo de estudio: Estudio de caso

Descripción

Desde el punto de vista de Knobel (2002), un estudio de caso se define como: "un estudio intensivo (en profundidad y detalle) de un fenómeno limitado y contemporáneo tal como un aula, una escuela, un programa de alfabetismo en servicio, un enfoque pedagógico […]" (p. 253).

Esto significaría que uno de los propósitos principales del estudio de caso es el mejor entendimiento de un fenómeno. Permitiendo que el investigador haga comparaciones con casos similares o relevantes en su propio campo de experiencia a fin de aplicar los hallazgos de este estudio a su propio contexto o situación.

Esta perspectiva de estudio ya hace más de una década Stake (2007), lo había determinado, ya que este fundamento de estudio de caso es: “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p.1).

Variados investigadores en este campo de estudio han utilizado la aportación que hizo Stake y lo ha dejado descrito en su libro Investigación con estudio de casos, Pérez realizó una reseña de su libro de este autor, en el cual menciona que: “seleccionar un caso no es tarea fácil, se debe contemplar la utilidad respecto a lo que se quiere aprender, así el estudio de casos debe dar un resultado óptimo de comprensión, debe producir asertos e incluso modificaciones” (2015, p.100).

Así mismo, Pérez manifiesta en la reseña que realizó sobre el libro de investigación de casos de Stake, que hay cuatro temas específicos que se deben tomar en cuenta para realizar un estudio de caso: “el primero es el estudio intrínseco e instrumental, el segundo la selección de datos, el tercero la fórmulación de generalizaciones y por último la importancia de la interpretación” (2015, p.100).

Esta descripción permite posicionar la importancia de esta investigación ya que su característica principal es estudiar un fenómeno áulico en sus quehaceres de su práctica docente donde las relaciones, los afectos y la comunicación dan sentido al aprendizaje. Por otro lado, Knobel (2002) manifiesta que los conceptos y descripciones fundamentales de un estudio de caso son; estudio a profundidad, concentración en un caso y contextos de la vida real. Dado que un estudio a profundidad: “el estudio de caso es intensivo en términos del tiempo del estudio y de la recolección de datos detallados” (pp. 253-254). Una investigación se considera que contiene la concentración en un caso, dado que: “se concentra generalmente en un ejemplo de una clase más amplia de cosas (por ejemplo, un aula de Cuarto Grado, una escuela rural). En consecuencia, los “límites” o “fronteras” del caso son claros o relativamente fáciles de definir” (Knobel, 2002, pp. 253-254). Se considera que esta investigación contiene contextos de la vida real, dado que: “el estudio de caso investiga los fenómenos tal como ocurren, en lugar de crear grupos de control, manipular variables, etc.” (Knobel, 2002, pp. 253-254).

Esta metodología de estudios de casos, resulta particularmente atractiva para los profesores e investigadores, dado que permite una concentración directa en el caso, en lugar de dispersar este enfoque en un gran número de casos. Además, es más manejable en términos de recursos, tiempo y esfuerzo requeridos por los diseños de estudios de casos específicos.

3.2.- Herramientas y técnicas para la recolección de datos en el estudio de caso

En esta sección se específica las herramientas y técnicas en la recolección de los datos en esta investigación, el cúal desde el punto de vista de Laura Caro se describe que: “La observación es una técnica que consiste precisamente en observar el desarrollo del fenómeno que se desea analizar. Este método puede usarse para obtener información cualitativa o cuantitativa de acuerdo con el modo en que se realiza” (Caro, 2021).

Por lo que precisamente, esto […] ocurre cuando el investigador participa efectivamente en mayor o menor medida en el contexto observado. Permite el acceso a ciertos grados de entendimientos y prácticas “confidenciales”. Los tipos de observación participante van desde la inmersión completa y anónima en un grupo social (lo que implica graves conflictos éticos), hasta la observación periférica y la participación completa y reconocida (Knobel, 2002, p.256)

Es importante específicar que Laura Caro describe que: “Documentos y registros: Está técnica consiste en examinar los datos presentes en documentos ya existentes, como bases de datos, actas, informes, registros de asistencia, etc.” (Caro, 2021).

Knobel específica que:

> Las notas de campo se emplean para registrar observaciones, sentimientos y descripciones siempre que sean posible. Las notas de campo son relatos muy detallados de lo que ocurrió, e incluyen transcripciones literales de lo que se dijo, los tiempos exactos en que se observaron las cosas, y a menudo incluyen una columna para el registro de corazonadas personales, interpretaciones en el sitio, y referencias a la teoría (Knobel, 2002, p.257).

Laura Caro describe que:

> La entrevista es, en esencia, una conversación bien planificada. En ella, el investigador plantea una serie de preguntas o temas de debate a una o varias personas, con el fin de obtener información específica. [...] La entrevista semiestructurada existe una guía de preguntas o temas generales de

conversación. Sin embargo, el entrevistador puede desarrollar preguntas nuevas a medida que vayan surgiendo los temas de su interés" (Caro, 2021).

Todas las herramientas metodológicas mencionadas anteriormente son las que se utilizo en este trabajo de investigación para consolidar y dar firmeza a los resultados.

3.3.- Elementos de inclusión y exclusión.

Es pertinente mencionar que los sujetos para esta investigación son dos profesoras del Departamento Físico Matemático de la UASLP que cuentan con las siguientes características:

a) Tituladas de un posgrado, una con grado de Maestría en Matemáticas Aplicadas y la otra, Doctora en Ciencias.
b) Con experiencia docente mayor a 3 años.
c) Profesoras frente a grupo, teniendo por lo menos una materia de la especialidad de matemáticas.
d) Trabajar en el nivel medio superior o superior.

La selección de estas profesoras se hizo de forma particular, dado que por las características del contexto en donde se desarrollan las clases hay más protuberancia de profesores que de profesoras. Y cuando se tuvo que determinar la selección de los investigados, la mayoría de los profesores no accedió a que grabaran sus clases, solicitar apuntes a sus estudiantes e incluso hacer una entrevista a uno de ellos. Por lo que se optó por tomar aquellas profesoras que pudieran aportar mayor número de datos a la investigación.

e) Datos de las entrevistadas

Nombre seudónimo: Aby

Grado académico: Doctorado en Ciencias (especialidad en matemáticas)

Años de experiencia docente: 6 años

Nombre seudónimo: Lore

Grado académico: Maestra en Ciencias (especialidad en matemáticas)

Años de experiencia docente: 4 años

3.4.- Herramientas y técnicas en la recolección de datos

Como parte de la estrategia metodológica que se desea emplear en esta investigación educativa, se considera pertinente mencionar que el paradigma que se empleó es el interpretativo, ya que este paradigma comprende e interpreta la realidad educativa, buscando analizar los significados de las personas, las percepciones, intenciones y acciones que ejecutan en un acto educativo.

Ahora bien, en esta estrategia metodológica se aplicó el método de estudio de caso, por lo que la técnica para obtener la información es mediante grabaciones en el aula, notas de campo y una entrevista semi-estructurada. Para aproximarnos al objeto de estudio, la pregunta de investigación es: ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto matemático de Inducción Matemática?

Se ha tomado como marco de referencia conceptual el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) propuesto por Deborah Ball et al (2008). En donde unos de sus subdominios de este modelo, el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK), nos parece pertinente vincularlo con nuestro problema de investigación, ya que este subdominio incluye las habilidades que tiene las profesoras para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante las diversas etapas educativas, así como los conocimientos matemáticos previos y futuros presentes en el currículo de matemático.

Por tal motivo, en el apartado 3.5, se hace la descripción, que son la observación participante (observación por grabaciones de los participantes en sus aulas), y entrevista semi-estructurada o no estructurada (se accede a las opiniones, las creencias, los valores, las prácticas y las experiencias de aprendizaje compartida de los participantes). En donde a groso modo se justifica el como y donde se hace uso de estas herramientas y técnicas.

3.5.- Objetivo de la entrevista semi-estructurada o no estructurada

Dado las herramientas y las técnicas metodológicas, el objetivo de esta entrevista es analizar como la profesora de matemáticas recupera el HCK en su espacio áulico, ya que nos permitirá identificar las manifestaciones de la presencia o ausencia de su conocimiento matemático. Todo esto a través de la observación y el análisis que se realice en su práctica docente. Se buscá cuestionar sobre el conocimiento que determina las habilidades que tienen las maestras para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular. Para poderlo llevar a cabo se presenta como primera parte un esquema del tema que se va a analizar en la materia correspondiente. Como segunda parte se determina la selección y caracterización de los conceptos asociados al concepto de inducción matemática. Como tercera parte se determina la guía de la entrevista semiestructurada que se le realizo a las profesoras Aby y Lore.

Primera parte: Esquema del tema que se va a analizar en la materia correspondiente

Materia: Álgebra A

Objetivo del curso: El alumno será capaz de traducir expresiones ordinarias al lenguaje conjuntista o lógico, manejar diferentes sistemas de numeración, desarrollar funciones como series de potencias como herramienta para otras materias de su materia.

Tema: Inducción Matemática

Objetivo del tema: Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de empelar toda clase de números con sus diferentes operaciones y propiedades, así como manejar las distintas bases de sistemas de numeración.

Periodo de observación: 8 al 19 de octubre de 2018

Tiempo de observación: 10 horas

Horario de observación: 13:00 a 14:00 hrs.

Días de observación: 3 días de la semana

Segunda parte: Selección y caracterización de los conceptos asociados al concepto de inducción matemática

La selección y caracterización de los conceptos asociados al concepto de inducción matemática se detérmino en dos fases: 1) En esta fase se fundamenta porque el tema de inducción matemática fue seleccionado de la materia de Álgebra A, asi como también se describe la ubicación curricular que sustenta en este contexto de nivel superior 2) En esta fase se fundamenta porque el tema de inducción matemática fue seleccionado como un campo de análisis en el conocimiento del horizonte matemático.

Fase 1.- Porque el tema de inducción matemática fue seleccionado de la materia de Álgebra A

La Facultad de Ingeniería es una de las entidades de nivel superior en el estado de San Luis Potosí que forma a profesionistas con dirección en el campo de la Ingeniería. Actualmente la Facultad de Ingeniería de la UASLP dispone de 15 carreras a nivel superior, de la cuales 12 de las 15 carreras contiene dentro de su retícula el curso de Álgebra A. El propósito del curso de Álgebra A es proporcionar las bases para el conocimiento del Álgebra con el propósito de que el alumno se familiarice y aplique dichos conocimientos en la solución integral de problemas en los cuales intervengan conjuntos, lógica matemática, estructuras numéricas, funciones y series. Se busca en este curso contribuir al análisis crítico del alumno de tal forma que permita proponer soluciones a los problemas que se le presentarán en las materias subsecuentes, lo cual se reflejará al aplicar sus conocimientos posteriormente, durante y en el ejercicio de su carrera. El curso de Álgebra A se encuentra en el tronco común de las ofertas educativas de la Facultad de Ingeniería de la UASLP. Donde su materia antecedente es la materia de Geometría y Trigonometría; y su materia subsecuente son Álgebra B y Cálculo A, como se muestra en la siguiente figura de una de las carreras ofertadas:

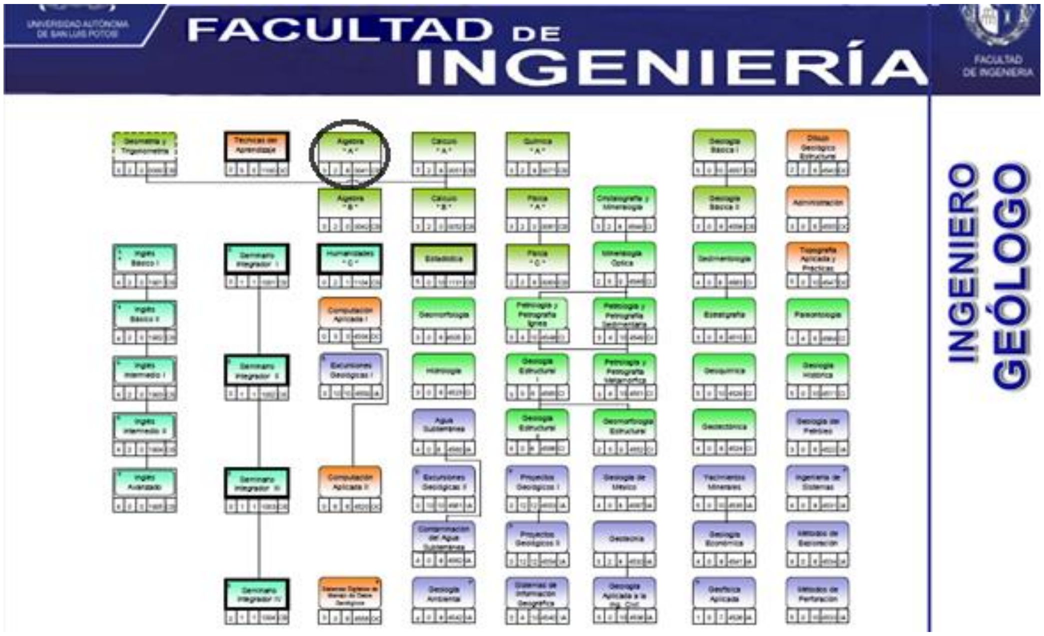


Imagen 1: Mapa curricular de la carrera de Ingeniero Geólogo de la Facultad de Ingeniería de la UASLP (Facultad de Ingeniería, 2014)

Las unidades correspondientes de la materia de Álgebra A son cuatro, dentro de las cuales la tercera unidad contiene el concepto de “inducción matemática”. Tema en el cual presenta interés en esta investigación por la transversalidad de sus conceptos matemáticos. Analizar este concepto, nos conduzco a presentar las evidencias pertinentes y necesarias para justificar como este conocimiento se refleja hacia un conocimiento del horizonte matemático. Para poderlo lograr hemos trazado una ruta metodológica, que parte de: a) Describir las materias antecedentes, subsecuentes y paralelas de la materia de Álgebra A, conforme a la retícula de las carreras de la Facultad de Ingeniería. b) Realizar el análisis curricular de los conceptos matemáticos que tienen las materias mencionadas en el inciso anterior.

a) Materias antecedentes, subsecuentes y paralelas de la materia de

Álgebra A

La materia de Álgebra A es una de las materias pertenecientes al tronco común de las ingenierías ofertadas en la Facultad de Ingeniería, en el cúal el 80% de las carreras de está identidad educativa de nivel superior la contiene en su plan de estudio. En esta sección se describe los contenidos programáticos de está asignatura (Unidades y temas), así como también se describe las materias antecedentes y subsecuentes de la materia de Álgebra A.

UNIDAD 1: TEORÍA DE CONJUNTOS Y SU APLICACIÓN

1.1.- Antecedentes históricos. 1.2.- Concepto de conjunto. 1.3.- Notación de conjuntos. 1.4.- Clasificación de los conjuntos. 1.5.- Relación de pertenencia. 1.6.- Conjuntos especiales. 1.7.- Cardinalidad. 1.8.- Igualdad y desigualdad de conjuntos. 1.9.- Inclusión.1.10.- Equivalencia de conjuntos. 1.11.- Comparación de conjuntos. 1.12.- Conjuntos de conjuntos. 1.13.- Conjuntos pontencia. 1.14.- Complementación y sus propiedades. 1.15.- Intersección y sus propiedades. 1.16.- Unión y sus propiedades. 1.17.- Diferencia de conjuntos. 1.18.- Diagramas lineales. 1.19.- Diagramas de Venn-Euler. 1.20.- Tablas de regiones y de pertenencia. 1.21.- Conjunto producto. 1.22.- Leyes del álgebra de conjuntos. 1.23.- Número de elementos de la unión de conjuntos. 1.24.- Aplicaciones.

UNIDAD 2: LÓGICA MATEMÁTICA

2.1.- Definición y objeto de la lógica. 2.2.- División general de la lógica. 2.3.- Métodos de demostración. 2.4.- Enunciados. Porposiciones y conectores lógicos. 2.5.- Operaciones fundamentales de la lógica matemáticas. 2.6.- Tablas de verdad. 2.7.- Leyes de la lógica matemática. 2.8.- Aplicaciones.

UNIDAD 3: ESTRUCTURAS NUMÉRICAS

3.1.-Breve historia de los sistemas de numeración antguos. 3.2.- Conversación del sistema decimal a otros sistemas de numeración. 3.3.- Conversión de otros sistemas al decimal. 3.4.- Operaciones elementales en bases distintas. 3.5.- Números Naturales. 3.6.- Inducción matemática. 3.7.- Números Naturales. 3.8.- Números racionales e irracionales. 3.9.- Números reales. 3.10.- Números complejos.

UNIDAD 4: FUNCIONES

4.1.- Funciones. 4.2.- Relaciones. 4.3.- Definición (analítica, conjuntista).4.4.- Definición de función, dominio y rango. 4.5.- Función compuesta. 4.6.- Funicón inversa. 4.7.- Función uno a uno, constante, idéntica, par e impar. 4.8.- Progresión aritmética. 4.9.- Progresión geométrica. 4.10.- Progresión geométrica indefinida. 4.11.- Progresión armónica. 4.12.- Sucesiones. 4.13.- Series.

Materia antecedente: Geometría y trigonometría (Álgebra Básica)

Habiendo descrito los contenidos programáticos de la materia de Álgebra A, en está sección se describirá las materias antecedentes y subsecuentes

UNIDAD 1: ÁLGEBRA

1.1.- Operaciones fundamentales con expresiones Álgebraicas. 1.2.- Ecuaciones. 1.3.- Logaritmos. 1.4.- Teorema del Binomio. 1.5.- Fracciones Parciales. 1.6.- Propiedades de las raíces.

UNIDAD 2.- GEOMETRÍA EUCLIDIANA

2.1.- Conceptos y elementos fundamentales de Geometría Euclidiana. 2.2.- Triángulos. 2.3.- Polígono. 2.4.- Cuadriláteros. 2.5.- Proporcionalidad y triángulos semejantes. 2.6.- Cincunferencia y círculo.

UNIDAD 3.- TRIGONOMETRÍA PLANA

3.1.- Diferentes clases de ángulos y sumedida. 3.2.- Funciones trigonométricas de un ángulo agudo. 3.3.- Funciones de un ángulo cualquiera. 3.4.- Funciones en el círculo trigonométrico. 3.5.- Fórmulas de suma, diferencia de dos ángulos y fundiones de ángulos múltiples. 3.6.- Identidades y ecuaciones trigonométricas. 3.7.- Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos. 3.8.- Representación gráfica de las funciones trigonométricas.

Materia subsecuente: Álgebra B

UNIDAD 1: POLINOMIOS Y ECUACIONES DE GRADO N

1.1.- Definición, clasificación y valor numérico de un polinomio. 1.2.- Operaciones y propiedades. 1.3.-Ecuaciones polinómicas. 1.4.- Transformación de ecuaciones. 1.5.- Solución de ecuaiones de grado n. 1.6.- Propiedades de las raíces.

UNIDAD 2.- MATRICES Y DETERMINANTES

2.1.- Sistemas de ecuaciones lineales y matrices. 2.2.- Matrices. 2.3.- Determinantes y regla de Cramer. 2.4.- Matriz inversa.

UNIDAD 3.- VECTORES Y ESPACIOS VECTORIALES

3.1.- definición de vector. 3.2.- Vectores en el plano y en el espacio. 3.3.- Operaciones vectoriales. 3.4.- Generalización a n dimensión. 3.5.- Espacios vectoriales y subespacios.

UNIDAD 4.- TRANSFORMACIONES LINEALES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

4.1.- Definición y propiedades de las transformaciones lineales. 4.2.- Valores y vectores de una matriz. 4.3.- Introducción a la programación lineal.

Materia paralela: Cálculo A

UNIDAD 1.- RECTA NUMÉRICA REAL

1.1. Números reales. 1.2.- Definición. 1.3.- Inecuaciones. 1.4.- Valor absoluto

UNIDAD 2.- ANÁLISIS DE CONCEPTOS, FÓRMULAS Y GRÁFICAS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

2.1.- Plano Cartesiano. 2.2.- Funciones.

UNIDAD 3.- LÍMITES Y SUS PROPIEDADES.

UNIDAD 4.- LA DERIVADA

4.1.- Funciones Álgebraicas. 4.2.- Definición, notación e interpretación geométrica de la derivada. 4.3.- Derivación por incrementos. 4.4.- Velocidad, aceleración y otras razones de cambio. 4.5.- Reglas de derivación. 4.6.- Regla de la cadena y función a una potencia. 4.7.- Forma alternativa de la derivada. 4.8.- Derivación implícita. 4.9.- Razones relacionadas. 4.10.- Reglas de derivación de funciones trigonométricas y logarítmicas. 4.11.- Funciones exponenciales y derivación. 4.12.- Funciones trigonométricas inversas y derivación. 4.13.- Funciones hiperbólicas y derivación.

UNIDAD 5.- APLICACIONES DE LA DERIVADA

5.1.- La derivada como una razón de cambio. 5.2.- Recta tangente y normla de una curva. 5.3.- Aplicaciones a la Físca. 5.4.- Aplicación a la química. 5.5.- Aplicación a la ingeniería. 5.6.- Variación con respecto al tiempo. 5.7.- Valorex extremos de una función. 5.8.-

Crecimiento y decrecimiento. 5.9.- Máximos y mínimos. 5.10.- Concavidad y punto de inflexión, criterio de la segunda derivada. 5.11.- Teorema de Rolle y teorema del valor medio.

UNIDAD 6.- INTEGRACIÓN

6.1.- Inverso de la deriferenciación. 6.2.- Aplicaciones. 6.3.- Fórmulas fundamentales de integración. 6.4.- Métodos de integración. 6.5.- Cambios de variable. 6.6.- Integración definida.

b) Análisis curricular de los conceptos matemáticos que tienen relación con la materia de Álgebra A.

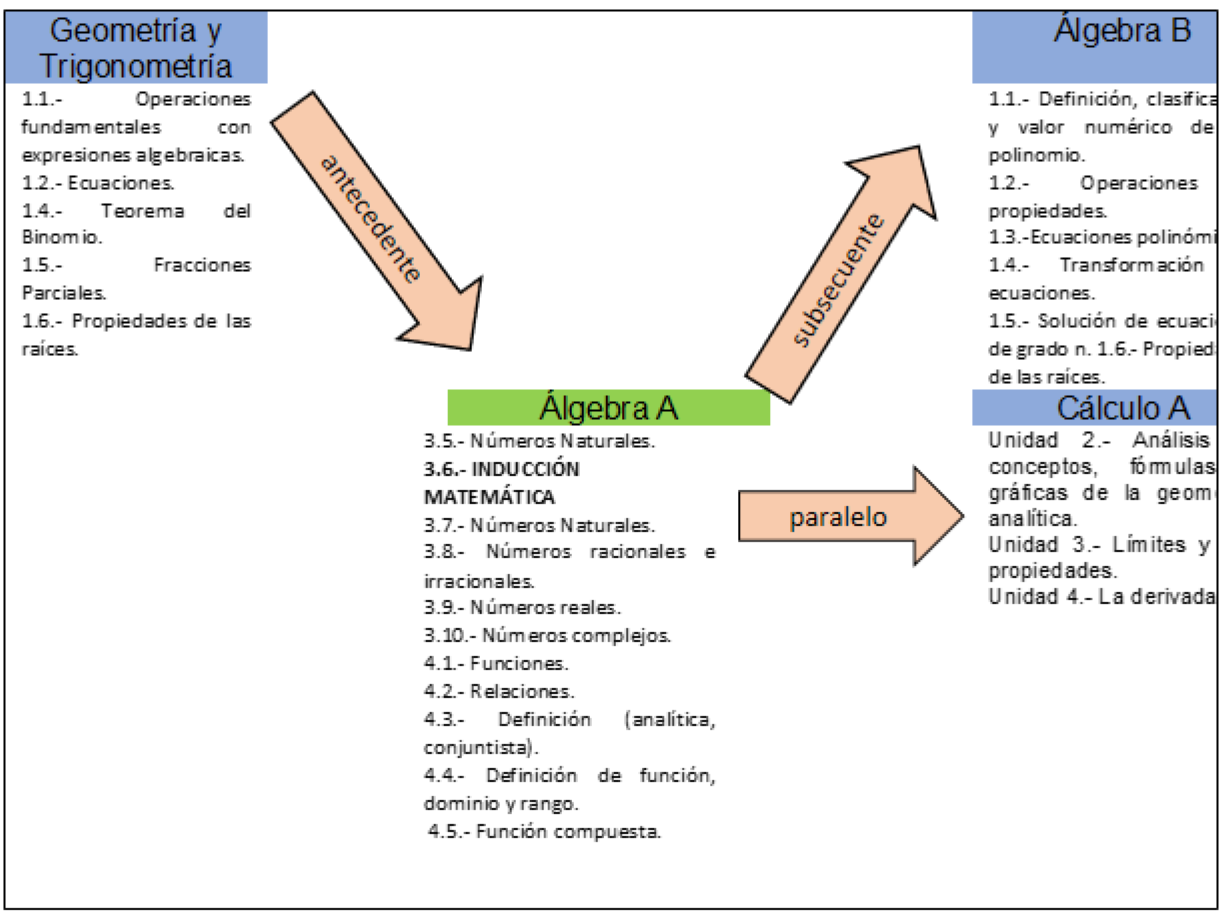


Imagen 2.- Relación de las materias antecedentes, subsecuentes y paralelas de la materia de Álgebra-A (Imagen propia)

El tema de inducción matemática es un conocimiento matemático que se determina dentro del plan reticular en la mayoría de las carreras de Ingeniería de está entidad de nivel superior. En la imagen 2 se presenta un listado de los conceptos matemáticos que se relacionan antes, después y en paralelo con el tema de inducción matemática. Ahora bien, se procede a presentar en ejemplo de inducción matemática que facilita el análisis de la relación que sustenta la relación conceptual que tiene la materia de Álgebra A con las materias de Geometría y Trigonometría, Álgebra B y Cálculo A.

Ejemplo:

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos, más la suma de todos los posibles dobles productos de parejas de términos diferentes; o, simbólicamente:

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$……(1)

Demostración: Para n =2, la fórmula (1) puede probarse por multiplicación directa.

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1a_2)$$

Supóngase que la fórmula (1) se cumple para n = k -1, es decir,

$$(a_{1+}a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + a_k^2 + 2S_1$$

Donde S_1 es la suma de todos los productos posibles de dos de los números a_1, a_2, …, a_{k-1}, a_{k},, es decir,

S_1 = S + $(a_{1+}a_2 + \cdots + a_{k-1})a_k$

En efecto, $(a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k)^2 = [(a_1 + \cdots + a_{k-1}) + a_k]^2$

$$= (a_1 + \cdots + a_{k-1})^2 + 2(a_1 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2$$

$$= a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2S + 2(a_1 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2$$

$= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + 2S_1$ (Sominskii, 1959, p.47)

En este ejemplo el conocimiento matemático $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$ se hace uso de los conceptos de la materia de Geometría y Trigonometría que son expresiones Álgebraicas y teorema del binomio, dado que durante el proceso de la demostración estos conceptos son necesario para el procedimiento inductivo . Así como también se hace uso de ecuaciones polinómicas de la materia de Álgebra B, dado que al manipular expresiones Álgebraicas con una sola variable estas propician ecuaciones polinómicas. También se hace presente el uso de análisis y fórmulas Álgebraicas de la materia de Cálculo A, dado que al término del ejemplo se determina que cumple la hipótesis de inducción para n = k+1 en la expresión $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + 2S_1$

Fase 2.- Selección del concepto de inducción matemática como un campo de análisis en el conocimiento del horizonte matemático.

Dado las características de está investigación es relevante resaltar que el concepto de inducción matemática fue seleccionado como foco de análisis de está tesis, donde a partir del marco teórico específicado en el capítulo 2, se describen algunas de las razones porque fue seleccionado: 1) Porque es un concepto matemático que está considerado en un contexto de nivel superior, específicado desde la mirada de Zazkis que reconoce al HCK [{…} como el lugar donde el conocimiento matemático avanzado se encuentra con el currículo escolar] (Zazkis, 2011, p. 9). 2). Porque el concepto de inducción matemática es un conocimiento que presenta una riqueza en su tranversalidad de los conceptos matemáticos, específicado desde la mirada de Martínez que describe al HCK como: "[…] una visión global de la educación matemática de los estudiantes, de manera que pueda ser utilizada por el profesor al enseñar matemáticas en el aula" (Martínez, 2011, p. 430). 3) Porque el concepto de inducción matemática realiza conexiones entre sus conceptos matemáticos como se decribio en la Fase 1, donde Martínez describe que:

> […] concluido una caracterización del Conocimiento del Horizonte Matemático en términos de conexiones matemáticas que parecen fundamentales desde el punto de vista de la construcción del significado de los contenidos matemáticos escolares en términos de continuidad (Martínez, 2011, p. 430, párrafo 53).

Tercera parte: guía de la entrevista semiestructurada que se le realizo a las profesoras Aby y Lore.

La siguiente guía de entrevista tiene el propósito de presentar las preguntas básicas que respaldarón las evidencias de las transcripciones de las clases por parte de las profesoras Aby y Lore con respecto de su práctica docente. Los análisis de las respuestas de las entrevistas se describen en el capítulo 4 de este trabajo de investigación.

1.- Maestra, podría decirnos, ¿por qué es importante revisar el concepto de inducción matemática?

2.- Maestra, podría decirme, ¿qué conocimientos previos necesita el alumno para entender el concepto de inducción matemática?

3.- Maestra, podría decirme, ¿por qué es importante revisar el tema de inducción matemática dentro del tema de estructuras numéricas?

4.- Maestra, podría decirme, ¿por qué es relevante para futuras materias revisar el tema de estructuras numéricas?

5.- Maestra, podría describirme, ¿cuáles de las materias que revisara el alumno en su retícula es relevante el tema de inducción matemática?

6.- Maestra, ¿considera que el tema de inducción matemática puede ser revisado en otro orden de contenido?

7.- Maestra, si se pudiera realizar un comparativo entre temas, ¿con qué tema considera usted pudiera compararse el tema de inducción matemática?

8.- Maestra, podría decirme, ¿qué tipo de estrategia evaluativa utiliza usted para verificar que el alumno ha aprendido el tema de inducción matemática?

9.- Maestra, podría describirme algunas de las bibliografías que usted utiliza para desarrollar su planeación de la clase.

10.- Maestra, podría decirme, ¿qué tipo de ejercicios matemáticos le pueden ayudar a usted para verificar que el alumno ha aprendido el tema de inducción matemática?

Capítulo 4

Análisis de la Información

Imagen 3. *Mapa conceptual del análisis panorámico por clase-sesión de Aby y Lore*

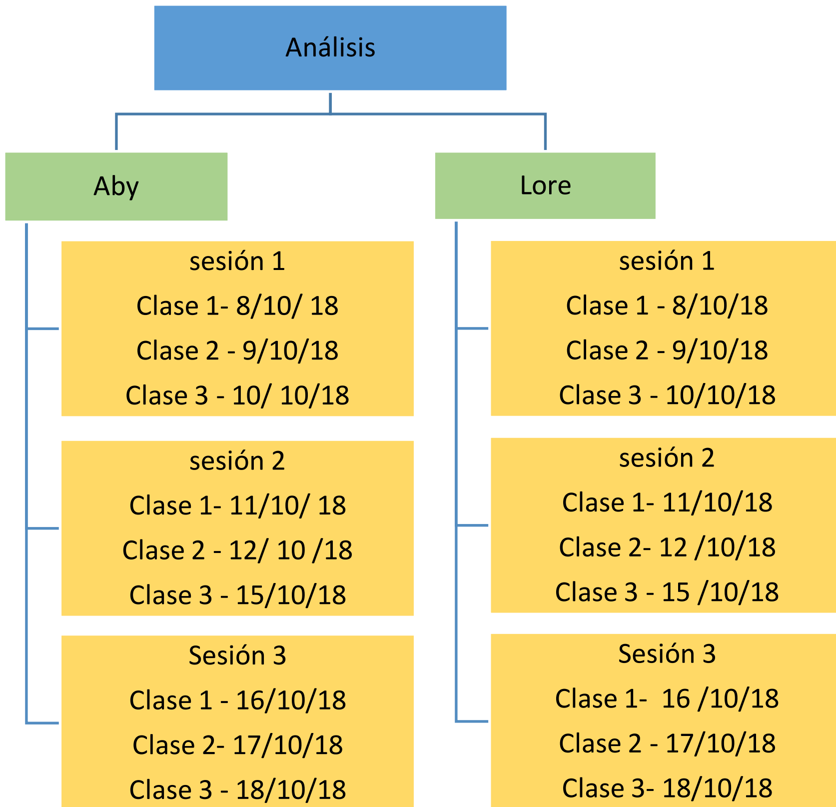


Imagen 4. *Mapa conceptual del análisis panorámico con respecto del conocimiento del horizonte matemático para Aby y Lore*

4.1- Análisis ad hoc de las preguntas sus problemas y objetivos.

En este apartado se describirá el análisis ad hoc de las observaciones de las clases que se grabaron y se evidenciaron de Aby, se presentan las nueve sesiones espaciadas comprendida entre los días 8 de octubre al 19 de octubre de 2018. La imagen 3 y 4 resumen la ruta de análisis de esta investigación. Para analizar dichas clases se parte de las transcripciones de estas, es importante determinar que, durante la escritura de estas transcripciones, se consideraron todos los acontecimientos presentes, inclusive hasta los más sutiles, dado que “This kind of analysis allows us to obtain a wide understanding of the teacher’s practice and, if it is done by the teacher him/herself, it may be a first step to being aware of their own cognitions and their role in the way they face the teaching process” [Este tipo de análisis nos permite obtener una amplia comprensión de la práctica del profesor y, si es que es realizado por el propio maestro, puede ser un primer paso para ser consciente de sus propias cogniciones y su papel en la forma en que afrontan el proceso de enseñanza] (Riberio, 2008, p. 6).

En este primer acercamiento del análisis de las transcripciones, se busca afinar y presentar los elementos teóricos y metodológicos que posicionarán está investigación, y que darán respuesta al problema y pregunta de investigación, dado que: “The elaboration of the transcriptions corresponds to the first phase of analysis– identifying triggering and terminating events as well as the teacher’s goal (which defines if it is an episode of revision, presentation, ...), the type of episode and the resource(s) used” [La elaboración de las transcripciones corresponde a la primera fase de análisis-identificar los eventos desencadenantes y finales, así como el objetivo del maestro (que define si se trata de un episodio de revisión, presentación, …), el tipo de episodio y el recurso (s) utilizado (s)] (Ribeiro, 2008, p. 3).

Es importante específicar que se ha determinado utilizar un modelo de análisis para organizar la información de estas transcripciones, este modelo es una adaptación que hizo Sosa (2011) al modelo de Ribeiro (2008), dado que este modelo analiza el Conocimiento Matemático para la Enseñanza puesto en acción.

Este modelo de Ribeiro (2008) consiste en formar “[…] episodios fenomenológicamente coherentes, regidos por un objetivo declarado o interpretado por el investigador (referente a lo que el profesor pretende enseñar en la clase y moldeado por las acciones que el profesor desarrolle para la enseñanza)” (Sosa, 2011, p.52).

La esquematización de la adaptación de Sosa (2011) que hizo para este modelo de Ribeiro (2008), se describe en la ilustración 1. Esta adaptación contiene los siguientes elementos. Como primera parte se tiene la notación: [i, j] indica la clase i y el episodio j que corresponde a alguna actuación específica en clase. Como segunda parte se describe el objetivo general que se pretende enseñar desde la mirada del contenido matemático. Como tercera parte se describe el evento que fungirá como causa de inicio de este episodio seleccionado que ha sido transcrito, a esta acción se le llama evento desencadenante. Como cuarta parte se describe la identificación de los conocimientos que se han presentado en las acciones de este episodio, esta parte es un punto primordial dado que se analizan el subdominio del conocimiento del horizonte matemático. Como quinta parte se describe el evento de término que será de utilidad para cerrar el episodio seleccionado y analizado.

Ilustración 1

Modelo de análisis de las clases transcritas, considerando la adaptación de Sosa (2011) al modelo de Ribeiro (2008).

[i.j] Descripción del episodio. (línea de inicio- línea de fin)

Objetivo general: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.

Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del episodio.

[A, i.j] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

Conocimientos:

Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese episodio.

Conocimiento Común del Contenido (**CCC**)

Subdescriptores

Conocimiento Especializado del Contenido (**CEC**)

Subdescriptores

Horizonte Matemático (**HM**)

Subdescriptores

Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (**CC-Es**)

Subdescriptores

Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (**CC-En**)

Subdescriptores Conocimiento Curricular (**CC**) Subdescriptores **Evento de término**: Evento que funciona como causa de término de ese episodio

Es importante aclarar que para poder llevar a cabo el cuarto paso que consiste en el análisis de los conocimientos que se han presentado en las acciones de este episodio, se ha utilizado la primera lista de descriptores postulado por Sosa (2011), dado que "[…] en este tipo de estudios cualitativos es muy importante exigirnos rigor en el análisis de la información para robustecer la credibilidad de los resultados de la investigación" (Sosa, 2011, p. 61). En estos descriptores se presenta de manera rigurosa y meticulosa los subdominios del modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), en particular se busca analizar el subdominio del Conocimiento del Horizonte Matemático, ya que se pretende analizar los saberes adquiridos en términos del HCK que se reconocen en la práctica docente de la profesora de nivel superior, que se evidenciarán en la Tabla base de este análisis.

Tabla base

Tabla de análisis de los indicadores encontrados en la práctica docente de Aby y Lore

Subdescriptor	Indicador
Evidencia	
Indicio	
Oportunidad	
Conocimiento emergente	

En donde se tendrá que:

Subdescriptor: será en lo que corresponde a las dimensiones del HCK con respecto a los temas (HCK (T)), con respecto a las prácticas (HCK(P)), con respecto a los valores (HCK (V))

Indicador: será la propuesta del indicador localizado en la práctica docente de Aby o Lore donde se refleje el HCK.

Evidencia: f. Certeza clara y manifiesta de la que no se puede dudar.

Indicio: m. Fenómeno que permite conocer o inferir la existencia de otro no percibido.

Oportunidad: f. Momento o circunstancia oportunos o convenientes para algo.

Conocimiento: m. Entendimiento, inteligencia, razón natural.

Emergente: adj. Que nace, sale y tiene principio de otra cosa. (Del diccionario de la Real Academia Española, 2022)

Las características de la materia en el cual se observó y se realizaron las transcripciones de clase fue la materia de Álgebra A, cuya ubicación curricular se encuentra en el primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la UASLP. En las observaciones grabadas de las profesoras Aby y Lore estuvierón presentes durante el desarrollo de sus clases, atendiendo las dudas de los alumnos, y proponiendo actividades para el tema de interés. Durante este periodo de observación Aby y Lore propusierón el tema de inducción matemática, cuyo desarrollo desato el estudio de contenidos relacionados con el tema que fueron dosificados. Ahora bien, se comenzará el análisis de las clases grabadas de Aby y posteriormente se procederá con Lore.

Como cierre de está introducción, se considerá relevante presentar una breve semblanza de los informantes Ribeiro (implemento) y Sosa (adapto) del modelo de análisis de las prácticas docentes bajo el modelo del MKT.

Miguel A. Ribeiro. Profesor, Doctor, (Asociado) en la Universidad de Campinas

Actualmente trabajo en profesores conocimiento interpretativo; tareas para la formación del profesorado.

Disciplinas: Formación del profesorado, Educación de adultos, Educación matemática

Habilidades y Experiencia: Pedagogía y Educación, Desarrollo Profesional, Enseñanza, Pedagogía, Experiencia Docente, Aprendizaje, Enseñanza y Aprendizaje, Desarrollo Curricular, E-Learning Tecnología de la Información y la Comunicación (Ribeiro, 2022).

Leticia Sosa Guerrero. La Dra. Sosa obtuvo el grado de Maestro en Matemática Aplicada en la UAZ-CIMAT (México), el de Maestro en Matemática Educativa en el CINVESTAV (México) y recientemente el de Doctor en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Huelva (España). Ella ha participado en proyectos internacionales (eg. el proyecto "Conocimiento Matemático para la Enseñanza respecto a la Resolución de Problemas y Razonamiento", financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (España) y el "Proyecto de Investigación Colaborativa" financiado por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía (España)). Además, ha realizado estancias en la Universidad de Cambridge, Inglaterra y en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Quebec en Montreal (UQAM), Canadá. También participó en la Fifth YERME Summer School

Poggio San Francesco, Italia en el verano pasado. Leticia, ha sido invitada como ponente para inaugurar eventos académicos en Huelva, España. Asimismo, ha participado en varios congresos nacionales e internacionales y ha sido organizadora de varios eventos académicos nacionales. A la fecha, cuenta con una Nota Laudatoria por el evidente desempeño en actividades matemáticas como docente gestor de acciones para beneficio de la juventud zacatecana, la preservación y mejoramiento de la institución, así como para bien de la sociedad, expedida por autoridades del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ, México) y recibió el Homenaje de Gratitud y Cariño en el COBAEZ. Actualmente es docente -investigador de tiempo completo en la Unidad Académica de Matemáticas de la UAZ, México (Sosa, 2013).

4.2.- Análisis de las 9 clases correspondientes a las tres sesiones de Aby

4.2.1.- Análisis de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

En el capítulo 2 de este trabajo de investigación, se mencionó que algunos autores han determinado tres clasificaciones en este subdominio del HCK que son: HCK (T), HCK (P) y HCK (V), donde en el marco ya se hizo la descripción de su definición y los componentes que lo caracterizan, ahora bien, haciendo uso del modelo de Ribeiro presentaremos al análisis de la clase 1 de la sesión 1 de Aby bajo esta primera clasificación del HCK.

Ilustración 2

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (1-4) **Objetivo general:** Introducir el concepto de inducción matemática haciendo uso de los tres tipos de demostración en una proposición. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo introductorio, tomando como referencia sus notas de clase, donde se describen los tipos de métodos de demostración que se utilizan para demostrar una proposición (inductivo, deductivo, analógico). [A, 1.4] Aby presenta un ejemplo introductorio de inducción matemática describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en el método inductivo para

evidenciarlo con algunos ejemplos desarrollados bajo el concepto de inducción matemática

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)**

Subdescriptores;

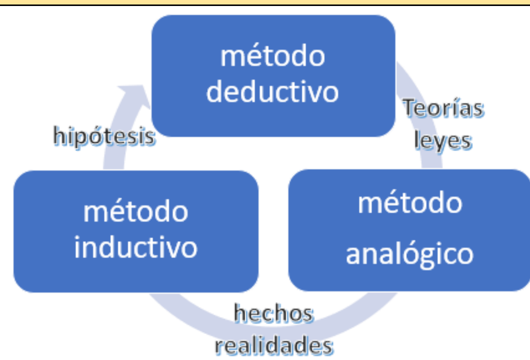
i) Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática.

ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de inducción matemática.

Evento de término: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los tres tipos de demostración, parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 1

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de uno de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

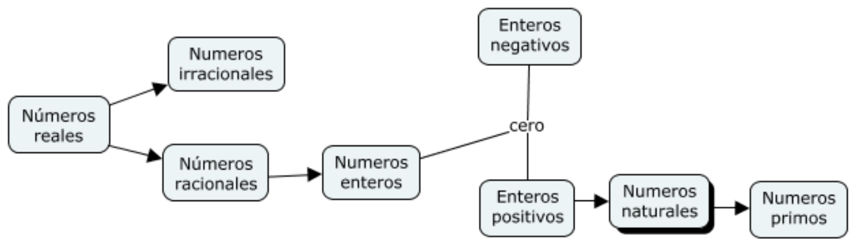
<table>
<tr><td>Subdescriptor HCK (P)</td><td>i) Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática.</td></tr>
<tr><td>Evidencia</td><td>

Se evidencia que Aby conoce la comunicación matemática del conocimiento de inducción matemática, dado que la conexión que</td></tr>
</table>

	guardan los conceptos método deductivo, inductivo y analógico establecen las formas de como demostrar una proposición. Se determina que el método inductivo es aquel que va de la particular a lo general, el método deductivo es aquel que va de lo general a lo particular, el método analógico es aquel que va de lo particular a lo particular.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar ejemplos introductorios al tema de inducción matemática, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en sus notas de clase de Aby describe un ejemplo del manual de ejercicios donde se tiene que demostrar que la suma de las fracciones $\frac{1}{1\,(2)}$, $\frac{1}{2\,(3)}$, $\frac{1}{3\,(4)}$, $\frac{1}{4\,(5)}$, …, $\frac{1}{n(n+1)}$ da como resultado $\frac{n}{n+1}$. Dando indicio a que es importante saber usar las operaciones entre fracciones para fines de la operatividad de la demostración, aunque en el manual y en la práctica docente de Aby no hagan tal referencia.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar el manual de ejercicios, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos desarrollado en otra área específica y demostrarlo por el concepto de inducción matemática y hacer la ubicación en la materia que se está impartiendo. Por ejemplo, como se demuestra que una matriz A es periódica, esto es: $$A^{p+1} = A$$ Se cumple para A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tabla 2

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de inducción matemática.**
Evidencia	 Se evidencia que Aby conoce la comunicación matemática entre los conceptos del conocimiento de inducción matemática, ya que se establece una relación entre los conceptos números reales, números irracionales, números racionales, números enteros, números naturales y números pares y números impares.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y sabe del uso de definiciones de conceptos tales como fracciones mixtas o impropias, operaciones básicas entre fracciones. Aunque no se tiene una prueba en las práctica docente o notas de clase de Aby que haya sido así, se intuye que debió haber sido así para entender la naturaleza de la demostración.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar ejemplos del libro *El método de la inducción matemática* del autor Sominskii que, en el año de 1959, redactó un libro completo de demostraciones con conclusiones verdaderas o falsas del concepto de inducción matemática.

	Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby. 
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar ejemplos donde se haga uso del conocimiento matemático en lo que corresponde la comprensión y validación de definiciones ya establecidas, utilizando estrategias de falacias para llegar a conclusiones verdaderas. Como por ejemplo si se considera el trinomio $x^2 + x + 41$ analizado por el matemático L. Euler, para algunos enteros positivos se cumple que es un número primo se logra apreciar que para los primeros números $x = 1\ se\ tiene\ 43\ es\ un\ número\ primo$ $x = 2\ se\ tiene\ 47\ es\ un\ número\ primo$ $x = 3\ se\ tiene\ 53\ es\ un\ número\ primo$ Pero cuando se llega a $x = 40\ se\ tiene\ 41^2\ el\ cual\ es\ un\ número\ compuesto$

En el análisis del conocimiento del horizonte matemático que se evidencia en la práctica docente de Aby de como presenta el tema de inducción matemática, se parte del hecho de presentar las conexiones matemáticas con respecto de los temas, denominado **HCK (P),** esto se realiza evidenciando por las notas de sus clases, que los métodos más comunes de demostración que son el método inductivo, el método deductivo y el método analógico. Estas definiciones son tomadas con base en las notas de la clase de Narváez (2002, p. 40) material que usa como recurso complementario que ofrece la institución en donde trabaja Aby, que nos describe que:

La lógica es el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto. En el cual se clasifica en:

a) Razonamiento inductivo: es el que, a partir de un número de observaciones particulares, se concluyen leyes generales; o sea aquel en que los casos particulares conducen a ideas generales.
b) Razonamiento deductivo: es aquel en que concluimos ciertos pensamientos particulares a partir de otros generales.
c) Razonamiento analógico: Es aquel en el que la conclusión tiene el mismo grado de particularidad que de generalidad en sus premisas.

Uno de estos razonamientos, que es el inductivo, es el razonamiento que se utiliza en el tema de inducción matemática, ya que puede conducir a conclusiones verdaderas o falsas según la naturaleza del ejercicio. El principio de inducción matemática, que también es llamado el principio del buen orden, recae en el conjunto de los números naturales (denotado como N), dado que es una de las propiedades más importantes del conjunto N. Spivak define este principio como:

Supóngase que P(x) significa que la propiedad P se cumple para el número x. Entonces el principio de inducción matemática afirma que P(x) es verdad para todos los números naturales x siempre que:

i) P (1) sea verdad.

ii) Si P(k) es verdad, también lo es P(k+1). (Spivak, p. 27)

Este tipo de demostración es conocida cuánto dentro del campo de la matemática aplicada, ya que contesta preguntas como: ¿Cuánto nos da la suma de los primeros n-números naturales? Pregunta que fue contestada por Peano, cuando tan solo era un niño de 7 años, el cual dedujo que la suma de los primeros 100 números naturales da como resultado 5050, lo que aludió el título del niño prodigio. Actualmente se asegura que la suma de los primeros n- números naturales es:

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ahora bien, existen varios libros de matemáticas que, dentro de sus capitulados, designan un capítulo completo al tema de inducción matemática. Tal es el ejemplo de Sominskii que, en el año de 1959, redactó un libro completo de demostraciones con conclusiones verdaderas o falsas. Lo que permitió en esta línea tener un diálogo de crítica con respecto al abordamiento que presenta algún profesor(a) dentro de su salón de clase.

A continuación, presentaremos algunos ejemplos de aseveraciones incorrectas, ya que dentro de la práctica docente permite valorar y discernir el dominio del conocimiento matemático que prevalece en el docente, en particular el conocimiento del horizonte matemático con respecto a los temas.

Si consideramos el ejemplo:

> […] el trinomio x^2+x+41 analizado por primera vez por el famoso matemático L. Euler. Si en este trinomio se reemplaza x por el número 0, se obtiene el número primo 41. Si se remplaza x por el número 1, nuevamente se obtiene un número primo, a saber 43. Si se continúa en está forma y se remplaza x por los números 2,3,4,5,6,7,8,9,10, sucesivamente, se obtiene en cada uno de los casos, un

número primo: 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, respectivamente. Basándose en estos resultados podría concluirse que para todo entero no negativo x, el valor del trinomio es un número primo. […] también se ve que para x=40, el valor del trinomio es 41^2, que es un número compuesto (Sominskii, 1959, p.12)

Si consideramos otro ejemplo:

Si consideramos el ejemplo de las fracciones de la forma $\frac{1}{n(n+1)}$,

[…] $S_n = \frac{1}{1\,(2)} + \frac{1}{2\,(3)} + \frac{1}{3\,(4)} + \frac{1}{4\,(5)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ Sin embargo, supóngase que al estudiar S_n se hubiera establecido la hipótesis $S_n = \frac{n+1}{3n+1}$. La fórmula es válida para n = 1, puesto que $S_1 = \frac{1}{2}$. Suponer que la fórmula se cumple para n=k significaría que $S_k = \frac{k+1}{3k+1}$. Trataremos de probar que. Si la fórmula es verdadera para n = k, también sería verdadera para n =k+1, es decir, que $S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4}$. Pero $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Que es igual a $\frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^3+4k^2+8k+3}{(k+1)(k+2)(3k+1)}$. Que no es el resultado esperado. Por lo tanto, la validez de la fórmula para n=k no implica su validez para n = k+1. Se ha descubierto que la fórmula es falsa (Sominskii, 1959, p.19).

Ilustración 3

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (1-17)

Objetivo general: Introducir los conocimientos matemáticos más inmediatos que se presentan antes y después del concepto de inducción matemática **Evento desencadenante**: Iniciar la clase presentando un ejemplo introductorio del concepto de inducción matemática, donde se describen las relaciones que guardan los conceptos matemáticos antes y después. Se hace énfasis en los conocimientos previos, dado que parten de las propiedades del campo de los números reales. [A, 1.17] Aby presenta un ejemplo introductorio de Inducción matemática describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en el uso de las propiedades de los números reales. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de los temas **HCK (T)** Subdescriptores **i)** **Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores al concepto de inducción matemática, estableciendo las conexiones entre los temas.** ii) **Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de inducción matemática, y el desarrollo de nuevos antes a partir del conocimiento existente.** **Evento de término**: Aby termina de explicar el ejemplo introductorio específico, ya que dará luz a otro ejemplo en donde hace nuevamente uso de las propiedades de los números reales.

Tabla 3

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

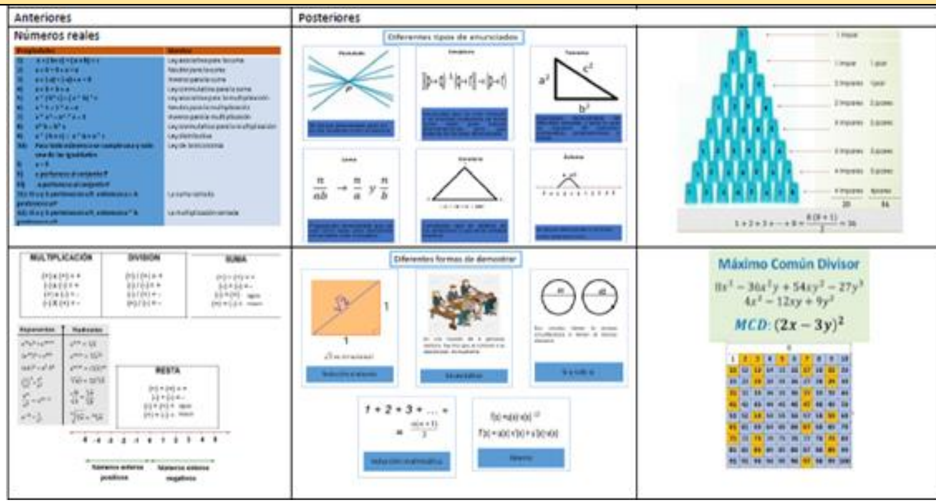
Subdescriptor HCK (T)	**i)** **Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores al concepto de**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

inducción matemática, estableciendo las conexiones entre los temas.

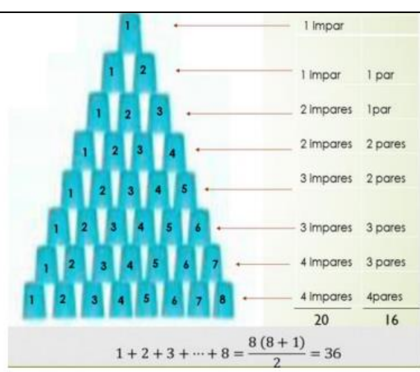
ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de inducción matemática, y el desarrollo de nuevos antes a partir del conocimiento existente.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Evidencia</td>
<td>

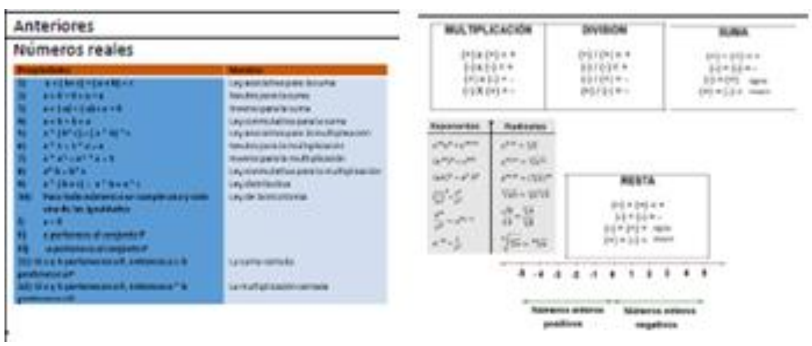


Se evidencia que Aby conoce la relación que sustentan los conocimientos anteriores y posteriores al tema de inducción matemática. Dado que en las transcripciones de las clases como conocimiento anterior sustenta el concepto del campo de los números reales, las propiedades que lo sustentan, así como el uso de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división, potencia). Y como conocimiento posterior menciona los diferentes estilos de enunciados y diferentes estilos de demostración.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Indicio</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

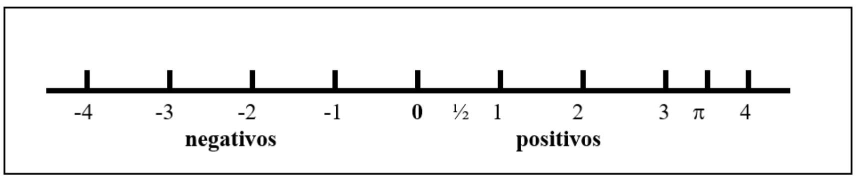
	Se da indicio que Aby conoce y sabe orientar los conocimientos previos de sus estudiantes, dado que para poder dar introducción al concepto de inducción matemática utiliza una estrategia didáctica que consistió en apilar una tira de vasos en forma de pirámide, y poder saber cuánto es la cantidad de vasos que se observa. Con esta estrategia Aby buscó hacer un conteo controlado en procesos en vías de su generalización
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce como hacer los tipos de conexiones entre los conceptos, Aby presenta los conocimientos anteriores del tema de inducción matemática, y establece la conexión entre las propiedades de los números reales con las operaciones básicas entre el campo de números reales, a este tipo de conexión se le denomina una conexión interconceptual. 
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos desarrollados en otra área específica y demostrarlo por el concepto de inducción matemática y hacer uso de los conocimientos previos que se utilizan para el tema. Por ejemplo: Probar la identidad $\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta \ldots \cos 2^n\theta = \frac{sen\, 2^{n+1}\theta}{2^{n+1}\, sen\,\theta}$

En la representación del esquema anterior, se presentan los conocimientos que dan cuenta de la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores al concepto de inducción matemática. En lo que corresponde a los contenidos anteriores se establecen las conexiones entre los temas números reales y sus propiedades, sus operaciones básicas y las propiedades que lo implican, dado que:

Todos los conjuntos de números estudiados anteriormente conforman el conjunto de los números reales, mismos que pueden ser representados en una recta imaginaria.

Figura 7

Representación de la recta numérica.



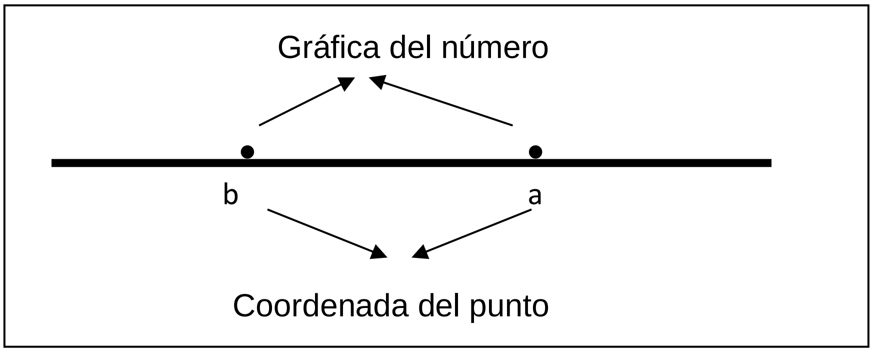
Que llamaremos la ***recta imaginaria*** de los números reales, la cual está dividida en dos partes a la derecha y a la izquierda de un origen representado por el cero.

A la derecha de este corren los números naturales que a su vez son los números enteros positivos, así como los racionales y los irracionales, todos ellos con un argumento de 0° que nos indicará que son positivos. Los que corren hacia la izquierda que son los números enteros negativos, así como racionales e irracionales, cuyo argumento será de 180° y que nos indicará que son negativos.

Una propiedad importante que presentarán los números reales es su relación de orden. En esa recta imaginaria de números reales, veremos que cada punto que este asociado a un número será la gráfica del número y cada número que está asociado a un punto será la coordenada del punto.

Figura 8

Relación y representación del orden de un número real (imagen propia).



El sistema R tiene las siguientes características que lo diferencian de otros sistemas numéricos: Nota: a, b, c $\in$ R

Propiedades de Orden:

Tricotomía: a < b, a = b, a > b

Monotonía de la Adición: si a < b $\Rightarrow$ a + m < b + m

Monotonía de la multiplicación: si a < b y m > 0 $\Rightarrow$ am < bm

Continuidad: todo límite de Q es un número Real

Integridad: todo límite de R es un número Real

Propiedades de la Adición:

Cerradura: a + b $\in$ R

Conmutativa: a + b = b + a

Asociativa: (a + b) + c = a + (b +c)

Existencial de Neutro: a + 0 = a

Existencial de Inverso aditivo: a + (– a) = 0

Propiedades de la multiplicación:

Cerradura: $a \cdot b \in R$

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Existencia del idêntico multilicativo: $a \cdot 1 = a$

Existencia de Inverso multiplicativo: $a \cdot (a^{-1}) = 1$

Distributiva: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

El conjunto de propiedades básicas que caracterizan al sistema R se expresa sintéticamente en la siguiente proposición que las resume a todas: El sistema de números Reales “R” (aditivo y multiplicativo) es un campo ordenado, íntegro y continuo.

Ilustración 4

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (21-24) **Objetivo general:** Introducir al uso y manejo de notación matemática, así como la precisión que se guarda en los pasos para realizar el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante**: Iniciar la clase presentado un ejemplo introductorio de inducción matemática. Se presenta la especificidad del concepto, además del cuidado del uso y manejo de la notación matemática.

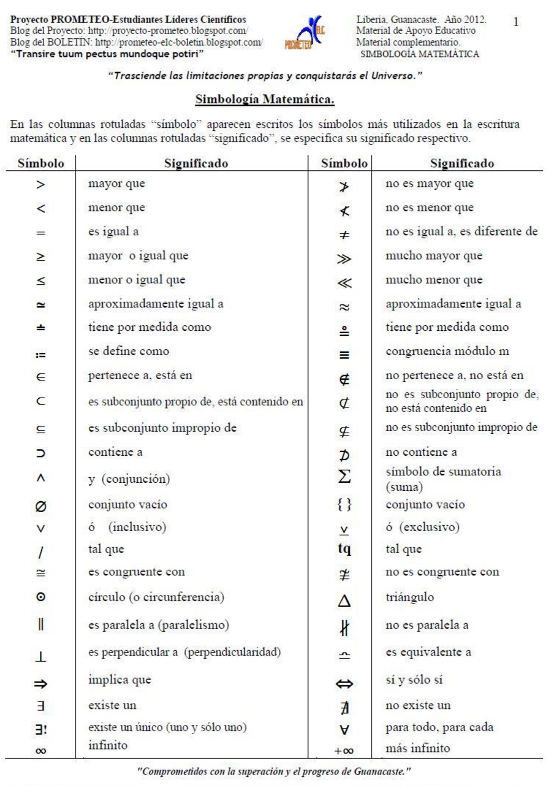
[A, 21.24] Aby presenta un ejemplo introductorio de inducción matemática describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en la notación matemática y especificidad de los pasos. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de los temas **HCK (V)** Subdescriptores **i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de inducción matemática.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de inducción matemática.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer el uso y manejo de la notación matemática por la relevancia en el tema, así como en el manejo de otras áreas de conocimiento.

Tabla 4

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de inducción matemática.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de inducción matemática.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce los pasos necesarios para poder llevar a cabo el proceso de inducción matemática, ya que si llegará a omitir alguno de ellos se convierte en una ambigüedad matemática. Aby específica que si $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k\ (k+1)}{2}$ Entonces se cumple para n = 1, ya que $1 = \frac{1\ (1+1)}{2}$

	para n = 2, tendremos $1 + 2 = \frac{2\,(2+1)}{2}$ para n = 3, tendremos $1 + 2 + 3 = \frac{3\,(3+1)}{2}$ Esto es; podemos ver que se cumple en ambos lados. Después el siguiente paso, es que se sustituyen n = k en ambos lados. $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k\,(k+1)}{2}$ Donde k representa cualquier número natural, que se considera fijo que se cumple para ese número.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa a este conjunto de números naturales, así como la representación matemática que lo indica. Consideramos que este indicio está justificado del concepto de la simbología matemática común en la teoría de conjuntos. (Proyecto Prometeo, 2012)



Proyecto PROMETEO-Estudiantes Líderes Científicos
Blog del Proyecto: http://proyecto-prometeo.blogspot.com/
Blog del BOLETÍN: http://prometeo-elc-boletin.blogspot.com/
"Transire tuum pectus mundoque potiri"

Liberia, Guanacaste. Año 2012.
Material de Apoyo Educativo
Material complementario.
SIMBOLOGÍA MATEMÁTICA

1

"Trasciende las limitaciones propias y conquistarás el Universo."

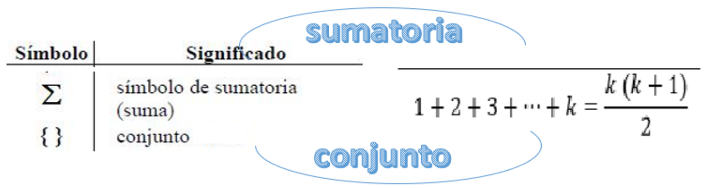
Simbología Matemática.

En las columnas rotuladas "símbolo" aparecen escritos los símbolos más utilizados en la escritura matemática y en las columnas rotuladas "significado", se especifica su significado respectivo.

Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
$>$	mayor que	$\ngtr$	no es mayor que
$<$	menor que	$\nless$	no es menor que
$=$	es igual a	$\neq$	no es igual a, es diferente de
$\geq$	mayor o igual que	$\gg$	mucho mayor que
$\leq$	menor o igual que	$\ll$	mucho menor que
$\simeq$	aproximadamente igual a	$\approx$	aproximadamente igual a
$\doteq$	tiene por medida como	$\circeq$	tiene por medida como
$:=$	se define como	$\equiv$	congruencia módulo m
$\in$	pertenece a, está en	$\notin$	no pertenece a, no está en
$\subset$	es subconjunto propio de, está contenido en	$\not\subset$	no es subconjunto propio de, no está contenido en
$\subseteq$	es subconjunto impropio de	$\nsubseteq$	no es subconjunto impropio de
$\supset$	contiene a	$\not\supset$	no contiene a
$\wedge$	y (conjunción)	Σ	símbolo de sumatoria (suma)
$\varnothing$	conjunto vacío	$\{\,\}$	conjunto vacío
$\vee$	ó (inclusivo)	$\veebar$	ó (exclusivo)
$/$	tal que	**tq**	tal que
$\cong$	es congruente con	$\ncong$	no es congruente con
$\odot$	círculo (o circunferencia)	Δ	triángulo
$\parallel$	es paralela a (paralelismo)	$\nparallel$	no es paralela a
$\perp$	es perpendicular a (perpendicularidad)	$\bumpeq$	es equivalente a
$\Rightarrow$	implica que	$\Leftrightarrow$	sí y sólo sí
$\exists$	existe un	$\nexists$	no existe un
$\exists!$	existe un único (uno y sólo uno)	$\forall$	para todo, para cada
∞	infinito	$+\infty$	más infinito

"Comprometidos con la superación y el progreso de Guanacaste."

Director: Prof. Milton Fernández F. Teléfonos: 2666-5374 / 8683-0559 e-mail: prometeo.elc@gmail.com

Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que está usando para demostrar el concepto de inducción matemática. Nuevamente se logra observar el tipo de conexiones intraconceptuales (conexión entre diferentes ideas asociadas a un concepto) que se deriva. 
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de un ejemplo introductorio para el concepto de inducción matemática, presentando los valores centrales, así como la precisión y cuidado del lenguaje matemático. Se puede propiciar ejemplos donde se reflejan estos elementos, tal es el caso del campo de los números complejos en donde también se requiere el tratamiento del tema de inducción matemática para demostrar sus operaciones básicas. Tal y como se muestra en el siguiente ejemplo: $x_1 = a + bi, \quad x_2 = c + di.$ Entonces $x_1 + x_2 = (a + c) + (b + d)i = u;$ $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{u}$

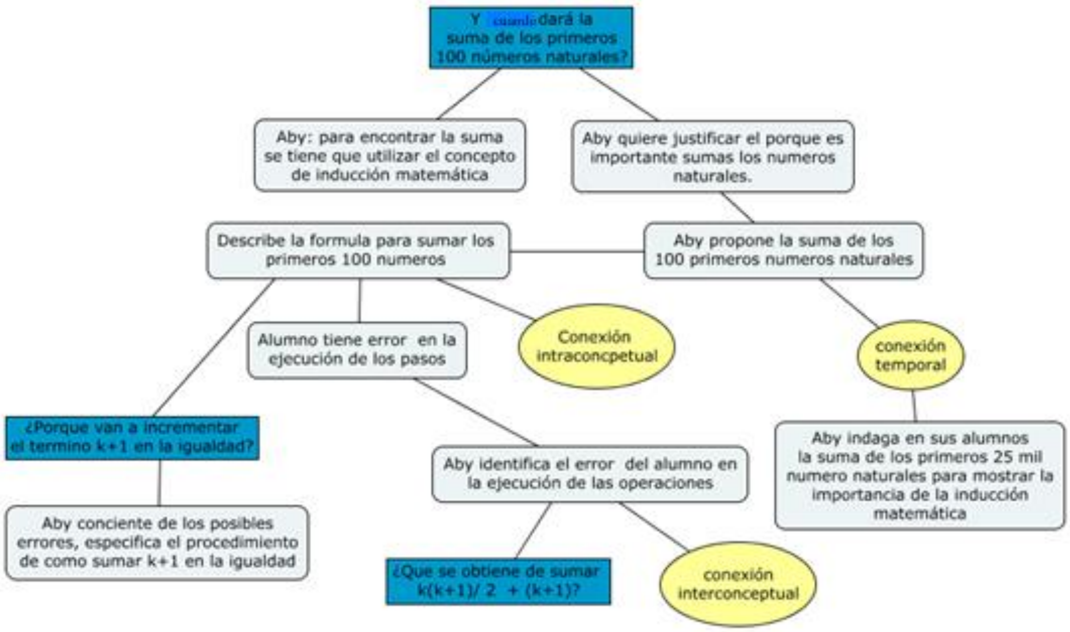
Ahora bien, el conocimiento matemático de los valores **HCK(V)** se hace presente en la práctica docente de Aby dado que el concepto que describe el uso y buen manejo de la notación matemática, así como la precisión en los pasos para demostrarlo. Aby afirma que la inducción matemática, es un proceso recurrente, que parte de un hecho particular, para llegar a grandes generalizaciones. Y por la dificultad de está, consideramos que su ruta conceptual atraviesa una ruta matemática compleja, ya que tiene que revisar que temas matemáticos son necesarios y suficientes para llegar al concepto específico, y posteriormente ver el impacto general de su aplicación. El principio de inducción matemática desde el punto de vista de la lógica supone el ejercicio de realizar un salto de una afirmación que se supone cierta para casos particulares y realizar afirmaciones para todos los demás casos. Este proceso no es una trivialidad, ya que implica tener una fiabilidad y precisión en la fundamentación lógica.

Estas reflexiones sobre el impacto de los conocimientos matemáticos del concepto de inducción matemática se ven reflejadas en algunas aportaciones de dos autores que hacen referencia de ello, Casás (2007) y Ozámiz (1995).

4.2.2.- Análisis de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales.

Esquema 1

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT



En el esquema anterior se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptuales y temporales de la sesión 1 de la clase 1 de la práctica docente de Aby. En este esquema se presenta el conocimiento del horizonte matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. Aby está revisando el tema de inducción matemática, en el cual se evidenciaron algunas acciones durante el análisis. La primera acción que se suscitó en la clase fue indagar los conocimientos previos de sus estudiantes, anotando en la pizarra los números naturales del 1, 2, 3…,100. Y realizando la pregunta ¿Y cuánto dará la suma de los primeros 100 números naturales?, buscando presentar en sus estudiantes, la necesidad de justificar él porque es importante sumar de una manera controlada y específica los primeros números naturales, y también conocer la naturaleza matemática de sus propiedades que debe cumplir (asociativa, conmutativa, distributiva, existencia del neutro).

Como segunda acción que se suscitó en la clase, fue que Aby describió la fórmula matemática para sumar los números naturales, la cual se determina como: $1 + 2 + 3 + ... + \eta = \eta(\eta+1)/2$. Se presentan las premisas que determina el método de inducción matemática, que debe asegurar que se cumple para $n = 1$ (caso inicial), se asegura que se cumple para $n= K$ (caso finito dentro de la infinitud de la demostración), y se debe verificar para $n= k+1$ (caso infinito), en este momento crítico del análisis de la práctica docente de Aby, se realizan diferentes ideas asociadas al concepto de inducción matemática, constituyendo la esencia del tema de este concepto, a este procedimiento lo denominaremos una **conexión intraconceptual.**

Como parte del análisis de esta segunda acción, donde se especificó que $1 + 2 + 3 + ... + \eta = \eta(\eta+1)/2$ representa la suma de los primeros n números naturales. Aby indaga en sus alumnos que resultado se obtiene de la suma de los primeros 100 números naturales, en donde algunas soluciones que se presentaron fue sumar el primero y último término, posteriormente el segundo y antepenúltimo término, después el tercero y antepenúltimo término, etc., dando siempre como resultado 101.

Ahora bien, dado el conocimiento previo que se presentó en los alumnos, Aby propone cuanto dará la suma de los 25 mil primeros números naturales. Esperando suscitar en los alumnos la necesidad de utilizar la fórmula matemática $1 + 2 + 3 + ... + \eta = \eta(\eta+1)/2$. Y con ello dejar establecido las conexiones entre los conceptos matemáticos entre lo que se está estudiando y lo que se estudiará, a este tipo de conexión la denominamos **conexión temporal.**

Durante el desarrollo de la demostración de $1 + 2 + 3 + ... + \eta = \eta(\eta+1)/2$. Aby corrige a sus estudiantes de los errores cometidos durante el proceso de ejecución de la demostración que van desde errores de forma (operatividad en cuando se le agrega el (k+1)-término), hasta errores de fondo (errores comunes de factorización y productos notables). A este proceso en donde las conexiones establecidas en los diferentes conceptos del tema que se está tratando son muy cercanos, la denominaremos una **conexión interconceptual.**

4.2.3.- Análisis de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

En el capítulo 2 de este trabajo de investigación, se describieron las tres clasificaciones en este subdominio del HCK (siglas en inglés HKM) que son: HCK (T), HCK (P) y HCK (V), ahora bien, siguiendo, haciendo uso del modelo de Ribeiro presentaremos al análisis de la clase 1 de la sesión 2 de Aby bajo está primera clasificación del HCK.

En este análisis, Aby describe con mayor énfasis el concepto de inducción matemática, rescatando el ejemplo que reviso un día anterior, pero ahora lo presenta a través de un material didáctico. Ya que como lo manifiestan las evidencias de las grabaciones de las clases, Aby clarifica y precisa con sus alumnos, que el concepto de inducción matemática es muy difícil de abordarlo por la gran tipificación de temas que se le pueden vincular.

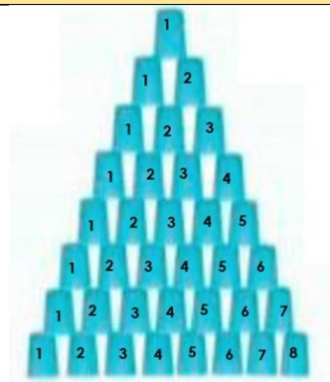
Ilustración 5

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 1. [2.1] Descripción del episodio (9-21) **Objetivo general:** Introducir el concepto de inducción matemática haciendo uso de un material didáctico. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase recordando el ejercicio visto en la clase anterior, presentando ahora una estrategia que le permite crear y producir conocimiento matemático en sus alumnos. [A, 1.4] Aby presenta un ejemplo visto en la clase anterior, describiéndolo en la pizarra. Pero ahora, apoyada de un material didáctico se hace énfasis en buscar una estrategia específica que dé cuenta de cómo se suman los números enteros. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **i) Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de inducción matemática.** **ii) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que asocian a inducción matemática.** **Evento de término**: Aby termina de explicar el ejemplo anterior con el apoyo de su material didáctico, dado que pudo dar cuenta que sus alumnos tuvieran reconocimiento de la fórmula matemática, para posteriormente abordar el final de la demostración.

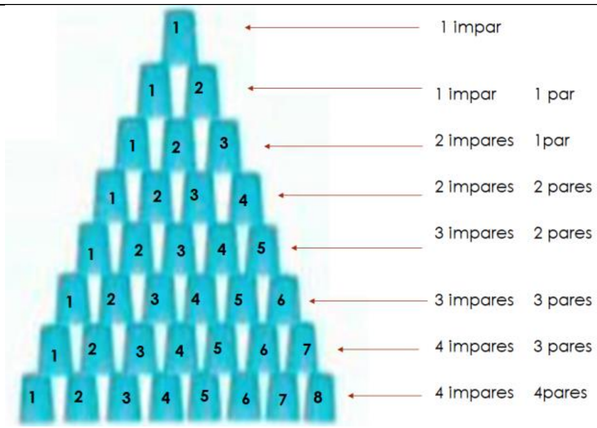
Tabla 5

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	i) **Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de inducción matemática.**
Evidencia	 Se evidencia que Aby conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático, dado que, al recuperar el conocimiento matemático desarrollado en clase, hace uso de un material didáctico (vasos acomodados en forma de pirámide), haciendo énfasis en buscar una estrategia específica que dé cuenta de cómo se suman los números enteros.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar estrategias para dar a conocer el conocimiento matemático. Ya que en la evidencia de su práctica docente Aby describe los pasos de la demostración: $$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$$ Y como parte del desarrollo, hace uso de una estrategia para dar cuenta de cómo se suman los números naturales, desencadenando la necesidad de particionar el campo de los números naturales en números pares e impares positivos, y poder diagnosticar su posible suma. En sí, este abordamiento no fue determinado en las notas de clase de Aby, se fue dando conforme a la clase, pero permite tener un indicio del conocimiento matemático desarrollado en los estudiantes.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar estrategias para sumar los números naturales, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en

las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.

Conocimiento emergente



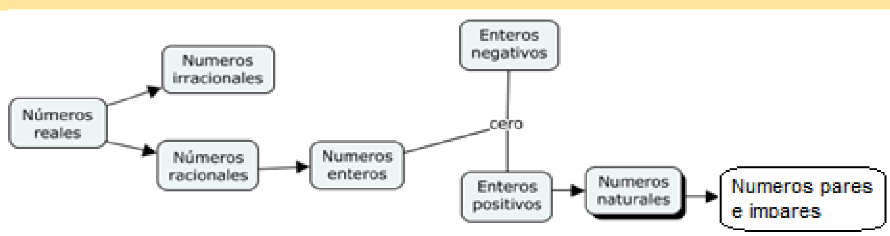
Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de estrategias para dar cuenta de cómo se suman los números naturales. Este desarrollo permitió indagar, de forma intuitiva, la representación inductiva de la suma de los números pares e impares. Conocimiento emergente que nos lleva a inspeccionar la forma matemática de la representación, esto es:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que asocian a inducción matemática.**

Evidencia



Se evidencia que Aby conoce la relación entre los conceptos del conocimiento de inducción matemática, ya que se establece una relación entre los conceptos números reales, números irracionales,

	números racionales, números enteros, números naturales, números pares y números impares.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y sabe establecer relaciones entre los conceptos que se usan en inducción matemática. Algunos de los conceptos productos notables y factorización, así como operaciones básicas en el conjunto de los números naturales. Aunque no se tiene una prueba en la práctica docente o notas de clase de Aby que haya sido así, se intuye que debió haber sido así para entender la naturaleza de la demostración.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce los conocimientos anteriores que se utilizan en la representación inductiva de la suma de números enteros, muy comúnmente justificados en libros de Álgebra, Álgebra Moderna o Matemáticas Universitarias. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar ejemplos donde se haga uso del conocimiento matemático en lo que respecta a Álgebra (conocimientos previos) en lo que corresponde la comprensión y validación de definiciones ya establecidas, utilizando estrategias de falacias para llegar a conclusiones verdaderas. Como por ejemplo si se considera el binomio $x^n - 1$ analizado por el matemático V. Ivanov, se estipula que uno de sus factores es (x-1), pero para el año de 1941 se demostró que el polinomio $x^{105} - 1$ ya no tiene la forma descrita, dado que uno de los factores es el polinomio $x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1$ (Sominskii, 1959, p.13)

Ilustración 6

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

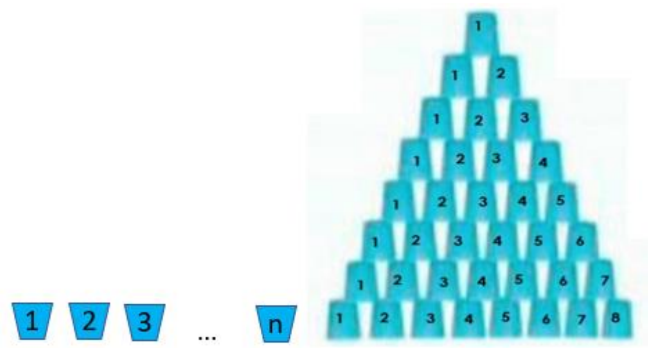
Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 1. [2.1] Descripción del episodio (9-21) **Objetivo general:** Introducir el concepto de inducción matemática haciendo uso de un material didáctico.

Evento desencadenante: Iniciar la clase recordando el ejercicio visto en la clase anterior, presentando ahora una estrategia que le permite crear y producir conocimiento matemático en sus alumnos. [A, 1.4] Aby presenta un ejemplo visto en la clase anterior, describiéndolo en la pizarra. Pero ahora, apoyada de un material didáctico se hace énfasis en buscar una estrategia específica que dé cuenta de cómo se suman los números enteros. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)** Subdescriptores; **i) Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de inducción matemática.** **ii) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática.** **Evento de término**: Aby termina de explicar el ejemplo anterior con el apoyo de su material didáctico, dado que pudo dar cuenta que sus alumnos tuvieran reconocimiento de la fórmula matemática, para posteriormente abordar el final de la demostración.

Tabla 6

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i)**	**Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de inducción matemática.**

	ii) **Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática.**
Evidencia	 Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y su conocimiento previo, ya que hace uso de un material didáctico (ristra de vasos) para presentar estructuras claves del concepto de conteo de números naturales.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y sabe usar estrategias entre los conceptos que se usan en inducción matemática. Dado que algunos de los conceptos que se presentarán fue número par y número impar, así como la representación matemática generalizada. Aunque no se tiene una prueba en la práctica docente o notas de clase de Aby que haya sido así, se intuye que debió haber sido así para entender la naturaleza de la demostración.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias que se utilizan en la representación inductiva de la suma de números naturales, muy comúnmente justificados en libros de Teoría de Números. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias con este ejemplo donde se haga uso del conocimiento matemático en lo que respecta a Aritmética

(conocimientos previos). Como por ejemplo realizar la suma del primer + último término, dará la misma respuesta que segundo + antepenúltimo término. Etc.

1+2+3+4+5+6+.......+94+95+96+97+98+99+100

4+97 = 101

3+98 = 101

2+99 = 101

1+100 = 101

Ilustración 7

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 1.

[2.1] Descripción del episodio (9-21)

Objetivo general: Introducir el concepto de inducción matemática haciendo uso de un material didáctico.

Evento desencadenante: Iniciar la clase recordando el ejercicio visto en la clase anterior, presentando ahora una estrategia que le permite crear y producir conocimiento matemático en sus alumnos.

[A, 1.4] Aby presenta un ejemplo visto en la clase anterior, describiéndolo en la pizarra. Pero ahora, apoyada de un material didáctico se hace énfasis en buscar una estrategia específica que dé cuenta de cómo se suman los números enteros.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)**

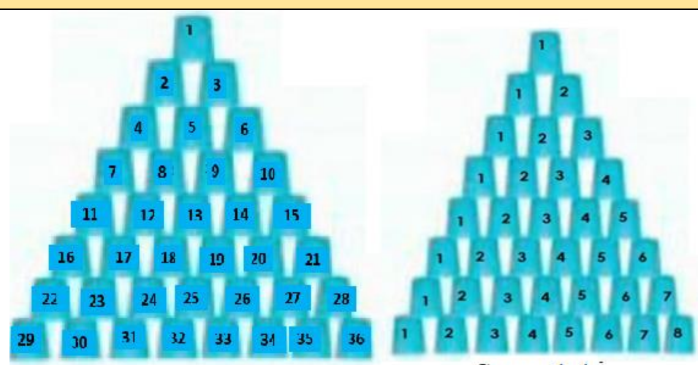
Subdescriptores;

i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de inducción matemática.

ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de inducción matemática.   **Evento de término**: Aby termina de explicar el ejemplo anterior con el apoyo de su material didáctico, dado que pudo dar cuenta que sus alumnos tuvieran reconocimiento de la fórmula matemática, para posteriormente abordar el final de la demostración.

Tabla 7

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

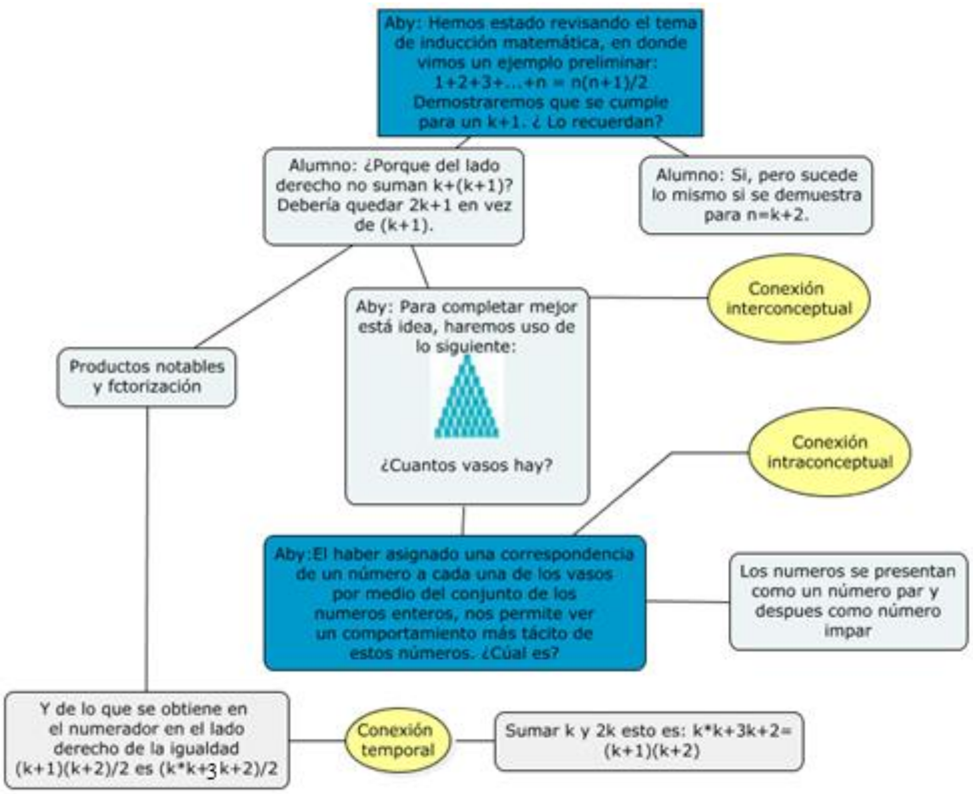
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de inducción matemática.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de inducción matemática.**
Evidencia	 Suma por posición Suma 1-1 Se evidencia que Aby conoce el concepto de inducción matemática, ya que se establece una relación de la suma de los primeros números

	naturales con un acomodo de una ristra de vasos en forma de pirámide. Se considera que la propuesta de asignación por número de vasos, lo hizo por estrategia de “suma 1-1” y no por “suma por posición”, dado que el valor central es saber cuántos vasos hay, y si lo realiza por suma de posición sería ofertar el método natural del conteo, a diferencia de la suma 1-1 que tiene que indagar en alguna estrategia de solución.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa la suma de los números naturales, así como la representación matemática de los números pares e impares.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que está usando para demostrar el concepto de inducción matemática utilizando la estrategia de la ristra de vasos. Como lo fue en el caso de la representación matemática de la suma de los números pares, así como la representación de los números impares. $2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)$ $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de una estrategia para la representación de la suma de los números naturales. Conforme al análisis se reflejó que la suma de los números pares se representa con el término final 2n y la de los números impares se representa con el número final de la forma (2n-1) o (2n+1). Motivo por el cual permite indagar la relación matemática que sustenta con la representación general de su sumatoria. $2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)$ $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ $1+2+3+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$ ¿Por qué?

4.2.4.- Análisis de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales

Esquema 2

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 2 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT



En el esquema anterior se describe el análisis del conocimiento del horizonte matemático que se evidencia en la práctica docente de Aby, se parte del hecho de presentar las conexiones matemáticas, esto se realiza utilizando estrategias didácticas para abordar el tema de inducción matemática, haciendo uso de un acomodo de la ristra de vasos en forma de pirámide, y queriendo cuestionar entre sus alumnos cuantos vasos habrá en el acomodo, sin tener que sumar uno a uno cada uno de ellos. En este momento crítico se captura lo siguiente:

> Aby: el haber asignado una correspondencia de un número a cada uno de los vasos por medio del conjunto de los números enteros, nos permite ver un comportamiento más tacito de estos números. ¿Cuál es?", uno de los alumnos le contesta: Alumno: Los números se presentan como un número par y después otro número impar

En este momento crítico se puede apreciar que se presenta una **conexión interconceptual**, ya que Aby presenta ideas matemáticas del concepto del conteo, y los estudiantes lo afrontaron haciendo una asociación del acomodo creciente que tienen los números naturales, esto es; como números pares e impares.

De la sesión 1, previa a esta, se describió que un conocimiento previo era el reconocimiento del concepto de conjunto y sus tipos de clasificaciones, lo que ahora vemos más evidente como un saber nuevo, ya que el describir el conjunto de pares e impares, nos lleva a representarlo en una expresión matemática, que tiene la forma 2n para los pares, y 2n+1 o 2n-1 para los impares. Y es aquí donde se ve reflejado el subdescriptor "Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que se asocian a la inducción matemática" ya que se conecta un contenido con otras áreas, para este momento se conectó concepto de conteo con el concepto de conjunto, y conjuntos de números pares e impares.

Otro momento crítico se presenta cuando Aby, sigue inspeccionando con sus alumnos el número de vasos que tiene esta pirámide de vasos que Aby propuso al comienzo de la clase, en el cual se suscita el siguiente momento; "*Aby: Entonces bajo esta relación. Podemos contestar a la pregunta, ¿Cuántos vasos hay?".* Uno de los alumnos contesto: "*Alumno 4: Pues, se ve que hay un patrón de filas, esto es 1 impar,1 impar,2 impares ,2 impares, 3 impares, 3 impares, 4 impares, 4 impares, 5 impares, 5 impares…etc.".* Otro de los alumnos contesto: "*Y en la otra fila es: 1 par, 1 par, 2 pares, 2 pares, 3 pares, 3 pares, 4 pares, 4, pares…etc."*

En este momento crítico se logra apreciar que se suscita una **conexión intraconceptual,** dado que permite tener lugar a las condiciones suficientes y necesarias para plantear una razón o patrón matemático, constituyendo una de las esencias del conjunto de los números naturales. Todo este proceso cognitivo es el que estudia el campo de la lógica matemática, ya que es un área que estudia los métodos y principios usados para distinguir lo correcto de lo incorrecto.

Otro momento crítico se suscita cuando Aby hace énfasis en el procedimiento Álgebraico que se debe de realizar para llegar a una expresión Álgebraica simplificada, porque como ya se vio en las intervenciones que realizo Aby, se necesita un conocimiento previo para el abordamiento de este conocimiento, en particular los productos notables (Álgebra, 2004, p.97) y la factorización de términos Álgebraicos. Presentamos a continuación el momento crítico de esta investigación:

Aby: Y de lo que se tiene en el numerador, se obtiene $\mathrm{k}^2 + \mathrm{k} + 2\mathrm{k} + 2$", el alumno le contesta "¿Por qué se obtiene 2k +2?, no debería de dar k + 1?", y le contesta, "Aby: Porque acuérdese, estamos sumando dos fracciones, pero el (k+1), no tiene forma de fracción, por eso se le coloca el número 1 como factor común. Y cuando se suman las fracciones nos queda en el numerador $\mathrm{k}^2 + \mathrm{k} + 2(\mathrm{k} + 1) = \mathrm{k}^2 + \mathrm{k} +$

$2\mathrm{k}+2$. Estamos de acuerdo. Ahora que más tendríamos que hacer con los términos $\mathrm{k}^2+\mathrm{k}+2\mathrm{k}+2$". Y el alumno contesta, "Sumar k y 2k", otro alumno contesta, "$\mathrm{k}^2+\mathrm{k}+2\mathrm{k}+2 = \mathrm{k}^2+3\mathrm{k}+2$". Aby reitera la simplificación de la expresión preguntado: "Y con el trinomio que se obtiene, ¿Cómo se factoriza?", un alumno le contesta; "Se factoriza como (k+1) (k+2).

Donde se detecta que el tipo de conexión que se presenta en una **conexión interconceptual,** ya que permite afrontar los mismos y diferentes conceptos de un tema al momento de estar resolviéndolo. Ya que resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$, implica conectarlo con un contenido más específico, en este caso, los productos notables y los casos de factorización. Es propio describir que algunos de los conceptos que necesitará para conectar este contenido a otro más específico, son:

i) Productos Notables

Binomio al cuadrado

$(a+b)^{2} = (a+b)(a+b)$

$(a-b)^{2} = (a-b)(a-b)$

Binomios conjugados

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Productos con término común

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (a)(b)$

ii) Factorización

Factorizando un trinomio cuadrado perfecto de la forma

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Factorizando una Diferencia de Cuadrados

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Factorización de un Trinomio de Segundo Grado de la forma $x^2 + bx + c$

Descomposición Factorial por Factor Común

$a^6 - 3a^4 + 8a^3 - 4a^2 = a^2(a^4 - 3a^2 + 8a - 4)$

En estos criterios, se logra detectar que está presente el descriptor "conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que se asocian a la inducción matemática"**.** Ya que el distinguir y seleccionar el caso o casos que se aplicarán en algún tipo de ejemplo, o lo que se estudiará en un futuro, enfrente al alumno a ubicar y discernir sobre la estrategia que aplicará para resolver dicho ejemplo, a este tipo de relación la denominamos la **conexión temporal**.

También se puede apreciar que está presente el "saber cómo conectar un contenido con otro más específico", dado que tener el término $k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2$". Y llevarlo a una suma de términos semejantes, según los criterios ya revisados de descomposición Álgebraica como $k^2 + 3k + 2 = (k + 1)(k + 2)$, nos lleva a presentar a una expresión Álgebraica como un producto Álgebraico de binomios. Y es ahí la importancia de conocer los conceptos que anteceden a este tema, ya que esto permitirá que los alumnos puedan resolver otro tipo de ejemplos que le permitirán ver generalizaciones de los conceptos.

4.2.5.- Análisis de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Durante el desarrollo de estas sesiones, Aby continúa profundizando en el tema de las soluciones apartir del "principio de inducción matemática" y como se pudo evidenciar durante las grabaciones en clase, se suscitan varias manifestaciones de un episodio de clase, que permitieron analizar las conexiones entre la profesora y los alumnos, y se desatan nuevamente una trayectoria de conexiones de este horizonte matemático, que a continuación se describe.

Ilustración 8

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [3.1] Descripción del episodio (1-13) **Objetivo general:** Ubicar el concepto de inducción matemática, demostrando la sumatoria de las potencias del número 2. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, tomando como referencia los ejemplos anteriores, donde se describen el uso del método de inducción matemática. [A, 1.13] Aby presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias pares del número 2 describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciarlo con algunas reglas de factorización y productos notables, así como de potenciación. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores;

	i) Conoce las formas de relacionar un ejemplo introductorio con un ejemplo secuencial, para posteriormente llegar a un ejemplo general. **ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al conocimiento.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo (en este caso la sumatoria de las potencias del número 2), parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 8

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de relacionar un ejemplo introductorio con un ejemplo secuencial, para posteriormente llegar a un ejemplo general.** **ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al conocimiento.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática, dado que la conexión que guardan los ejemplos anteriores y posteriores establecen las formas de como demostrar una proposición. Aby detérminó que el método inductivo sustenta tres premisas para llevar a cabo la demostración.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar ejemplos asociados al tema de inducción matemática, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de

	Aby se describe el ejemplo $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^{n\ =}\ 2(2^n - 1)$. Dando indicio a que es importante saber usar las leyes de las potencias, las leyes de los signos (suma, resta, multiplicación) para fines de la operatividad de la demostración, aunque en la práctica docente de Aby no hagan tal referencia.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de inducción matemática, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos desarrollados en otra área específica y demostrarlos usando por el concepto de inducción matemática y hacer la ubicación en la materia que se está impartiendo.

Ilustración 9

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 1. [3.1] Descripción del episodio (1-13) **Objetivo general:** Ubicar el concepto de inducción matemática, demostrando la sumatoria de las potencias del número 2. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, tomando como referencia los ejemplos anteriores, donde se describen el uso del método de inducción matemática.

[A, 1.13] Aby presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias pares del número 2 describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciarlo con algunas reglas de factorización y productos notables, así como de potenciación. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)** Subdescriptores; **i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de inducción matemática.** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de inducción matemática.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo (en este caso la sumatoria de las potencias del número 2), parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 9

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de inducción matemática.** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática.**

<table>
<tr><td>Evidencia</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">Leyes de los exponentes</td></tr>
<tr><td>i) $a^n = \underbrace{a * a * a * \ldots * a}_{n-veces}$</td><td></td></tr>
<tr><td>ii) $(a^n)^m = a^{n*m}$</td><td></td></tr>
<tr><td>iii) $a^n * a^m = a^{n+m}$</td><td></td></tr>
<tr><td>iv) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$</td><td></td></tr>
<tr><td>v) $a^0 = 1$, excepto</td><td>$0^0 = Error$</td></tr>
<tr><td>vi) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$</td><td></td></tr>
</table>
Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y su conocimiento previo, dado que haciendo uso del ejemplo de la representación matemática de la sumatoria de las potencias del número 2, recuerda aspectos básicos de las reglas básicas de los exponentes, clave importante para entender la naturaleza del ejercicio.</td></tr>
<tr><td>Indicio</td><td>Se da indicio que Aby conoce y saber usar conocimientos previos para ubicarlos en los conocimientos presentes. Dado que reconoce que la representación matemática de la sumatoria de las potencias del número 2 es $2(2^n -1)$.
Es alusivo a poder usar conceptos de reconocimiento de las propiedades básicas de las potencias. Aunque no se tiene una prueba en la práctica docente o notas de clase de Aby que haya sido así, se intuye que debió haber sido así para entender y guiar la naturaleza de la demostración.</td></tr>
<tr><td>Oportunidad</td><td>Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias que se utilizan en la representación inductiva de la sumatoria de las potencias del número 2, probablemente justificados en libros que consideren el tema de inducción matemática. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.</td></tr>
</table>

Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias con este ejemplo donde se haga uso del conocimiento matemático con respecto a la representación matemática de la sumatoria de las potencias del número 3, o del número 4 del número n. Y de esta manera validar si es cierto que se cumple que: $$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Ilustración 10

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 1. [3.1] Descripción del episodio (1-13) **Objetivo general:** Ubicar el concepto de inducción matemática, demostrando la sumatoria de las potencias del número 2. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, tomando como referencia los ejemplos anteriores, donde se describen el uso del método de inducción matemática. [A, 1.13] Aby presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias pares del número 2 describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciarlo con algunas reglas de factorización y productos notables, así como de potenciación. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; **Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utilizan en los pasos previos que se está necesitando.**

Evento de término: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo (en este caso la sumatoria de las potencias del número 2), parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 10

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores

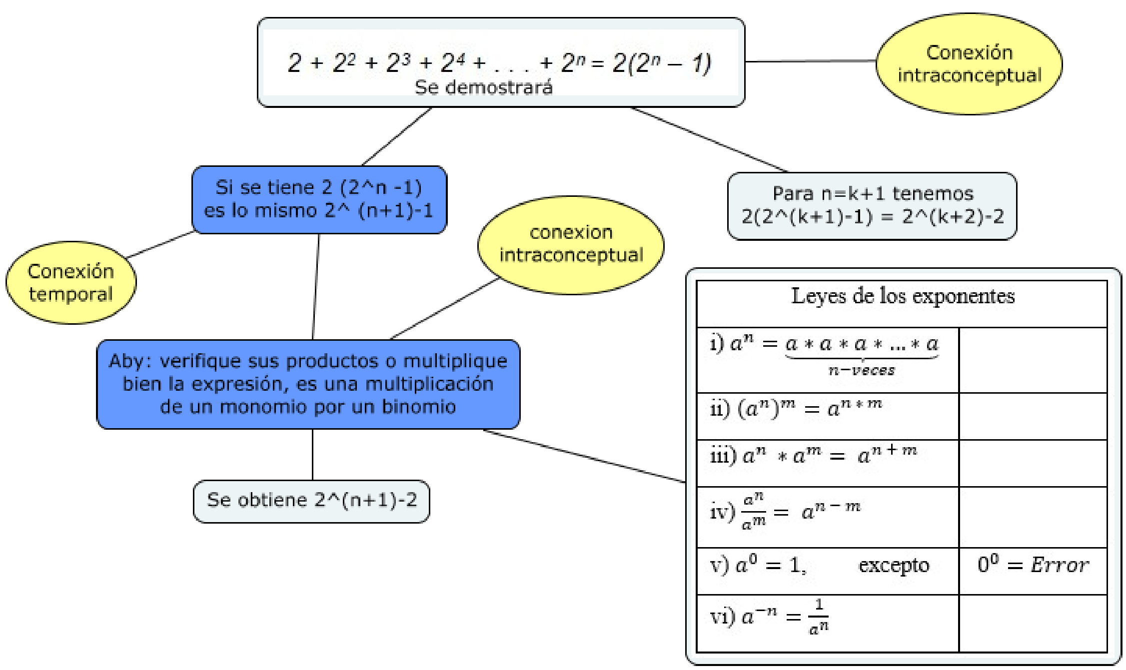
Subdescriptor HCK (V)	**Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utilizan en los pasos previos que se está necesitando.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce el concepto de inducción matemática, ya que se establece una relación entre la suma de los números naturales con la representación de la suma de las potencias del número 2. Se considera que está asociación se establece ya que el concepto principal es el mismo "suma de números enteros", pero las propuestas son distintas, por un lado, la suma de 1+2+3+4+…+n, y por otro lado $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n.}$
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa la suma de los números naturales, así como la representación matemática de la suma de las potencias del número 2.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que está usando para demostrar el concepto de inducción matemática, brindando la oportunidad de indagar en las

	propuestas de las potencias de 3, o en las potencias de 4, o de las potencias de n.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de una estrategia para la representación de la suma de las potencias del número 2, la cual está dada por la expresión 2 (2^n -1). Conforme al análisis se permite indagar la relación matemática que sustenta con la representación general de su sumatoria. $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$

4.2.6.- Análisis de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hacen presentes las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales

Esquema 3

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 3 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En el esquema anterior se describe el análisis del conocimiento del horizonte matemático que se evidencia en la práctica docente de Aby, se parte del hecho de presentar las conexiones matemáticas, esto se realiza mediante los momentos críticos que se presentan cuando Aby**,** aborda otro ejemplo de inducción matemática, con otro tipo de características, pero solicitando que los alumnos reconozcan los pasos preliminares.

Aby: Bueno chicos, en base a lo anterior visto, les voy a presentar otro ejemplo similar para saber si entendieron, y les revisaré en su cuaderno lo que hayan trabajado. Demostrar por inducción matemática que:

$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^n = 2(2^n – 1)$

Como se puede apreciar ahora se propone el caso para la suma de las potencias del número 2, y se pide verificar que es igual a $2(2^n – 1)$” Uno de los alumnos le contesta: “Si se tiene $2(2^n – 1)$ es lo mismo tener $2^{n+1} – 1$”. La maestra le corrige diciéndole: “Verifique sus productos, multiplique bien la expresión, es una multiplicación de un monomio por un binomio, ¿Qué se obtiene?”. El alumno le contesta “Ah… $2^{n+1} – 2$.

En este bloque se logra apreciar que se hace presente una **conexión temporal**, dado que Aby específica los conocimientos previos que necesitan para contestar a la simplificación $2(2^n – 1)$ que se logra contestar gracias a los conceptos de las leyes de los exponentes. Un conocimiento suficiente de este concepto es el reconocimiento de lo que es una base y una potencia de una expresión matemática, dado que:

Una potencia es el producto de la base por el número de veces que indique el exponente, es decir, es el producto de varios factores iguales, esto es:

$$a^n = \underbrace{a*a*a*\ldots*a}_{\text{n-veces}}$$

Y las leyes que les justifican son:

Leyes de los exponentes	
i) $a^n = \underbrace{a * a * a * \ldots * a}_{n-veces}$	
ii) $(a^n)^m = a^{n*m}$	
iii) $a^n * a^m = a^{n+m}$	
iv) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	
v) $a^0 = 1,$ excepto	$0^0 = Error$
vi) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	

Este episodio hace presente una **conexión interconceptual**, ya que se sabe cómo un contenido; lo que son las leyes de los exponentes, está relacionado con otro más general; en nuestro caso el proceso de la hipótesis en la inducción matemática.

Otro momento crítico se presenta cuando Aby, aborda el caso general de la demostración, y enfoca el lado derecho de la igualdad $2(2^k - 1) + 2^{k+1}$, recuperando los pasos detonantes para que se cumpla la igualdad, y que llegue a la forma $2(2^{k+1} - 1)$. En donde lo describiremos a continuación:

Aby "Proponiendo para k, tendremos

P(k): $2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2(2^k - 1)$

Demostraremos para k+1 esto es:

P(k+1): $2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2(2^k - 1) + 2^{k+1}$

Teniendo la anterior propuesta, ¿qué paso tenemos que hacer?"

Uno de los alumnos le contesta: "Simplificar el lado izquierdo, esto es $2(2^k - 1) + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$, y después sacar como factor común el 2.

En este bloque vemos que está presente una **conexión intraconceptual**, dado que un conocimiento previo que se necesita para contestar a la pregunta $2(2^k - 1) + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$, es hacer uso del concepto de producto Álgebraico, elemento que fue retomado en el análisis descrito en el caso de Aby. Otro elemento que se hace presente es la factorización de expresiones Álgebraicas donde tenemos una potencia en forma de variable, esto es: $= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = = 2(2^{k+1}) - 2 = 2(2^{k+1}-1)$.

En estos dos momentos, se hace presente notablemente el conocimiento del horizonte matemático, ya que se está consolidando un saber de un contenido que está relacionado con cursos anteriores.

4.2.7.- Análisis de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

En esta sección se determinará la sesión 2 de las 3 sesiones de intervención que se tuvo en las clases de Aby. En las transcripciones de clase se evidencia que Aby establece una relación del tema de inducción matemática con el concepto de función. Esto se describe dado que Aby manifiesta en su entrevista la importancia que tiene el tema de inducción matemática con otros conceptos que están presentes en la retícula de los estudiantes en particular el concepto de función y su derivada. Por tal motivo se describe a continuación el análisis de las tres clases donde se evidencia la práctica docente de Aby con respecto del tema de funciones.

Ilustración 11

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (1-33) **Objetivo general:** Ubicar el concepto de función continua, partiendo de la relación que tiene el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando algunas gráficas de funciones en donde indaga la opción de continuidad. [A, 1.13] Aby presenta un ejemplo de la representación gráfica de algunas funciones, haciendo uso de un cañón y laptop para mostrarlas en la pizarra. Se hace énfasis en las tres condiciones que se necesitan para poder discernir si es o no una función continua. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; i) **Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de función.** ii) **Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de función.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los tres pasos para demostrar las condiciones para ser una función continua.

Tabla 11

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

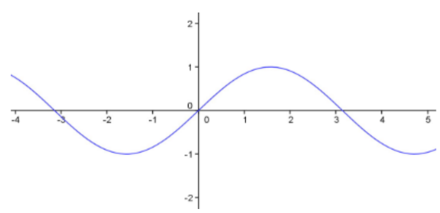
Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de función.** **ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de función.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de función continua, dado que la conexión que guardan los ejemplos anteriores y posteriores establecen las formas de como demostrar una proposición.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar ejemplos asociados al tema de función continua, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de Aby representa la gráfica de algunas funciones.  Dando indicio a que es importante saber usar las propiedades para discernir si es continua o no lo es, considerando los conceptos básicos de continuidad de una función.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de función continua, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, con está tipificación de ejercicios se puede validar el conocimiento matemático en otras áreas específicas y ubicarlo en la materia que se está impartiendo.

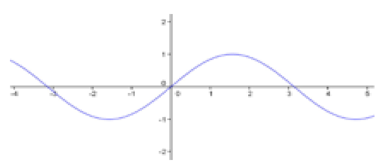
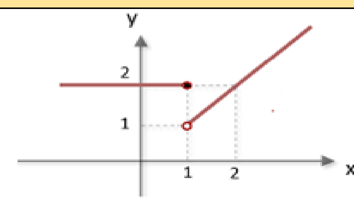
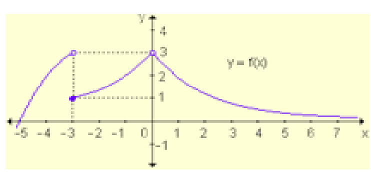
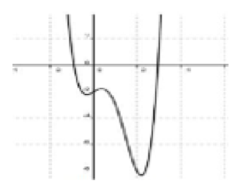
Ilustración 12

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 2. [1.1] Descripción del episodio (1-33) **Objetivo general:** Ubicar el concepto de función continua, partiendo de la relación que tiene el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando algunas gráficas de funciones en donde indaga la opción de continuidad. [A, 1.13] Aby presenta un ejemplo de la representación gráfica de algunas funciones, haciendo uso de un cañón y laptop para mostrarlas en la pizarra. Se hace énfasis en las tres condiciones que se necesitan para poder discernir si es o no una función continua. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)** Subdescriptores; i) Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de funciones, estableciendo las conexiones entre los temas**.** ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de función, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente**.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los tres pasos para demostrar las condiciones para ser una función continua.

Tabla 12

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de funciones, estableciendo las conexiones entre los temas** **ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de función, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.**
Evidencia	 Figura 1  Figura 2  Figura 3  Figura 4 Se evidencia que Aby conoce la relación que sustentan los conocimientos anteriores y posteriores al tema de inducción matemática. Dado que en las transcripciones de las clases como conocimiento anterior sustenta el concepto de función, las propiedades que lo sustentan, así como su representación gráfica. Y como conocimiento posterior menciona los diferentes ejemplos para identificar si es o no una función.

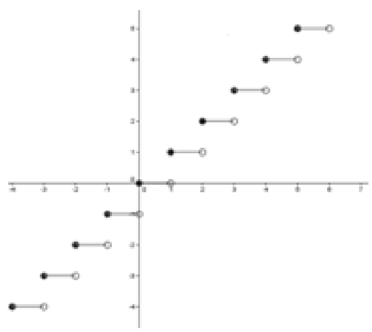
Indicio	1) f(a) exista. 2) $\lim_{x \to a} f(x)$ exista 3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ se cumpla la igualdad en ese punto Se da indicio que Aby conoce y sabe orientar los conocimientos previos de sus estudiantes, dado que para poder dar introducción al concepto de función menciona tres propiedades que debe cumplir para que sea continua.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce como hacer los tipos de conexiones entre los conceptos, Aby presenta los conocimientos anteriores del tema de función continua, y establece la conexión entre el concepto de inducción matemática.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos y analizar su continuidad.  Verificar que la función mayor entero es o no continua.

Ilustración 13

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

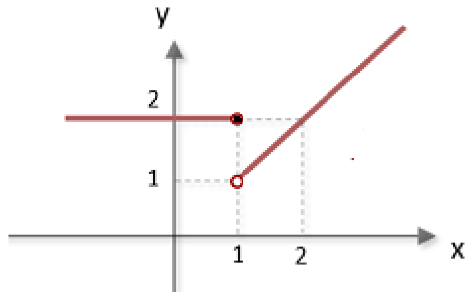
Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 2. [1.1] Descripción del episodio (1-33)

Objetivo general: Ubicar el concepto de función continua, partiendo de la relación que tiene el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando algunas gráficas de funciones en donde indaga la opción de continuidad. [A, 1.13] Aby presenta un ejemplo de la representación gráfica de algunas funciones, haciendo uso de un cañón y laptop para mostrarlas en la pizarra. Se hace énfasis en las tres condiciones que se necesitan para poder discernir si es o no una función continua. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de los valores **HCK (V)** Subdescriptores; **i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de función.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de función.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los tres pasos para demostrar las condiciones para ser una función continua.

Tabla 13

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores

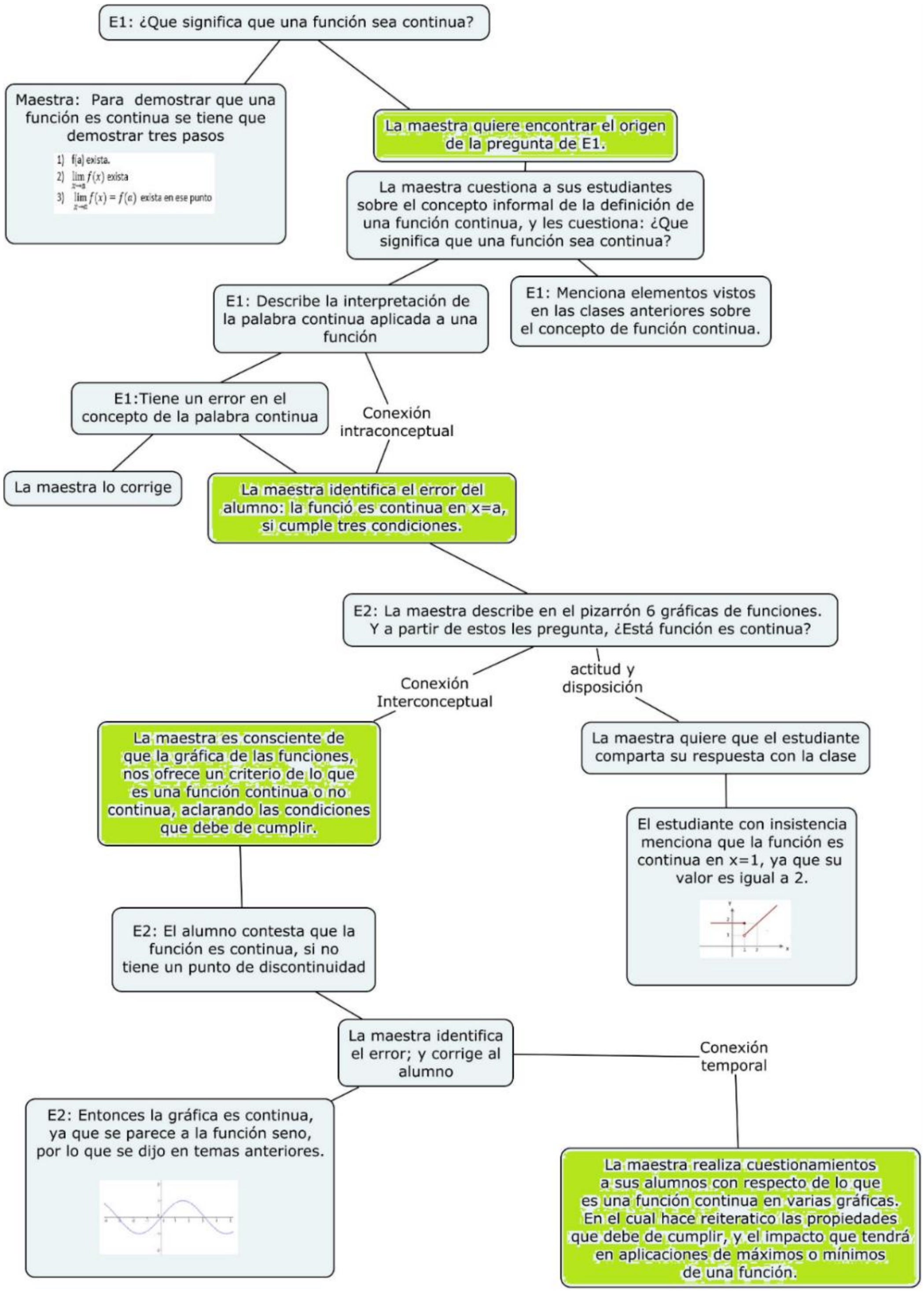
Subdescriptor HCK (V)	i)	**Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de función.**
	ii)	**Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de función.**

Evidencia	 Se evidencia que Aby conoce el concepto de función continua, dado que en la gráfica de la Figura 2, se hace uso de las propiedades para verificar que es una función continua, desarrollando con la precisión y cuidado del lenguaje matemático que se usa.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y sabe determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita las propiedades para que sea una función continua, así como el buen manejo de la representación gráfica que se presenta.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar algún tipo de software para representar la gráfica de una función. Con la garantía que le será de utilidad para representar de una forma más rápida y concreta la expresión matemática.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de algún tipo de software para expresar la función. Con la oportunidad de compartir este conocimiento entre los maestros que imparten la misma materia o necesiten de algún recurso tecnológico.

4.2.8.- Análisis de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales

Esquema 4

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 1 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT



En el esquema anterior se presenta el conocimiento del horizonte matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En clases anteriores Aby comenzó revisando el tema de inducción matemática, y en clases posteriores lo vínculo al tema de funciones continuas, dado que una de las aplicaciones que mencionó Aby en su entrevista, es encontrar la derivada de una función por medio de la regla de los cuatro pasos. Ahora bien, durante el análisis se presentaron algunas acciones que da cuenta de las **Conexiones intraconceptuales:**

i) Identificar una idea errónea: Describe la interpretación de la palabra continúa aplicada a una función.

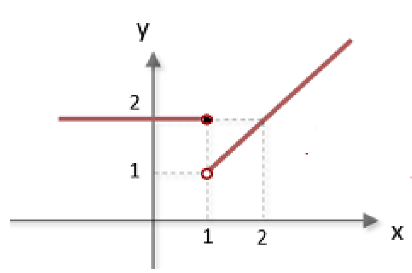
ii) Corregir la idea errónea del concepto de función continua: Para demostrar que una función es continua se tiene que demostrar los tres pasos.

1) f(a) exista.

2) $\lim_{x \to a} f(x)$ exista

3) $\operatorname{Lim}_{x \to a} f(x) = f(a)$ se cumpla la igualdad en ese punto

Así de las **Conexiones interconceptuales,** Aby describe en el pizarrón seis gráficas de funciones. Y a partir de estas les pregunta, ¿Está función es continua?, en el cual se identifica una idea errónea, dado que el estudiante contesta que la función es continua en el valor de x=1, ya que su valor es igual a 2.



Es importante describir que relacionar la definición de función continua con los ejemplos de gráficas, es necesario para que los estudiantes tengan un criterio de lo que es una función continua de lo que no es una función continua.

Algunas conexiones entre conocimientos previos y futuros que se presentaron en el análisis fueron:

i) Ampliar y estudiar los resultados en ejercicios de graficas semejantes.

ii) Extender el estudio a las relaciones entre funciones transcendentales.

Del análisis anterior se desprende que existe una relación directa entre las intervenciones de los estudiantes y las conexiones matemáticas en clase. Con estas intervenciones Aby analiza y desarrolla conocimiento matemático, y en consecuencia pone en evidencia su Conocimiento del Horizonte Matemático.

4.2.9.- Análisis de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio CHM del modelo CME donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 14

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 2. [2.2] Descripción del episodio (1-16) **Objetivo general:** Analizar la primera de las tres condiciones que cumple una función para ser continua.

Evento desencadenante: Iniciar la clase recordado las tres condiciones para que una función sea continua, para posteriormente analizar la primera condición, partiendo del concepto de plano cartesiano, y llegando a las representaciones de una función (mediante valores, mediante una ecuación y mediante una gráfica). [A, 1.16] Aby presenta un ejemplo de una función f(x) = x+2, analizando la primera propiedad que describe que "la función evaluada en a exista", hace uso de la pizarra, para posteriormente describir la Tabla de valores y posteriormente graficar la función. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; i) **Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático de la representación gráfica de una función.** ii) **Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la representación gráfica que asocian al concepto de función.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer una de las tres condiciones que implica el discernimiento de la función continua, para en clases posteriores verificar las otras dos condiciones.

Tabla 14

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Subdescriptor HCK (P)	**i)**	**Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático de la representación gráfica de una función.**

	ii) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la representación gráfica que asocian al concepto de función.
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de función, dado que la conexión que guardan las condiciones para que sea una función continua permite ver las formas de como indagar el concepto de continuidad.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar ejemplos asociados a las condiciones para que una función sea continua. Ya que en las transcripciones de clase de Aby se describe el ejemplo f(x) = x+2. Dando indicio a que es importante saber Tablas de evaluación para tener un primer criterio de valoración, aunque en la práctica docente de Aby no hagan tal referencia.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del concepto de función, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar otros ejemplos para verificar la primera condición de una función continua.

Ilustración 15

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 2. [2.2] Descripción del episodio (1-16) **Objetivo general:** Analizar la primera de las tres condiciones que cumple una función para ser continua. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase recordando las tres condiciones para que una función sea continua, para posteriormente analizar la primera condición, partiendo del concepto de plano cartesiano, y llegando a las representaciones de una función (mediante valores, mediante una ecuación y mediante una gráfica). [A, 1.16] Aby presenta un ejemplo de una función f(x) = x+2, analizando la primera propiedad que describe que "la función evaluada en a exista", hace uso de la pizarra, para posteriormente describir la Tabla de valores y posteriormente graficar la función. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)** Subdescriptores; **i) Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la representación gráfica de una función.** **ii) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros de la representación gráfica de una función.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer una de las tres condiciones que implica el discernimiento de la función continua, para en clases posteriores verificar las otras dos condiciones.

Tabla 15

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la representación gráfica de una función.** **ii) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros de la representación gráfica de una función.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y la relación que tiene con el concepto de función, dado que hace uso de Tablas para describir algunos valores de la función, conjunto con su representación gráfica.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar estrategias entre los conceptos que se usan en inducción matemática y los conceptos de función. Dado que algunos de los conceptos que se presentarán fue la representación en forma de ecuación de la función f(x) = x+2, esto es y=x+2, se representa como la ecuación y-x =2
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias de cómo se gráfica una función, muy comúnmente justificados en libros de Precálculo. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.

Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias tales como el criterio de intersecciones entre los ejes para graficar una función. En particular para f(x) = x+2 que es una función lineal, con solo dos puntos basta para poder encontrar su representación gráfica, esto es: Si f(x) = x+2, entonces si x=0 entonces y=2, se obtiene (0,2). Si y=0 entonces x = -2, se obtiene (-2, 0)

Ilustración 16

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro Análisis de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hacen presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 2. [2.2] Descripción del episodio (1-16) **Objetivo general:** Analizar la primera de las tres condiciones que cumple una función para ser continua. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase recordando las tres condiciones para que una función sea continua, para posteriormente analizar la primera condición, partiendo del concepto de plano cartesiano, y llegando a las representaciones de una función (mediante valores, mediante una ecuación y mediante una gráfica). [A, 1.16] Aby presenta un ejemplo de una función f(x) = x+2, analizando la primera propiedad que describe que "la función evaluada en a exista", hace uso de la pizarra, para posteriormente describir la Tabla de valores y posteriormente graficar la función. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores;

i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la representación gráfica de una función. **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la representación gráfica de una función.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer una de las tres condiciones que implica el discernimiento de la función continua, para en clases posteriores verificar las otras dos condiciones.

Tabla 16

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

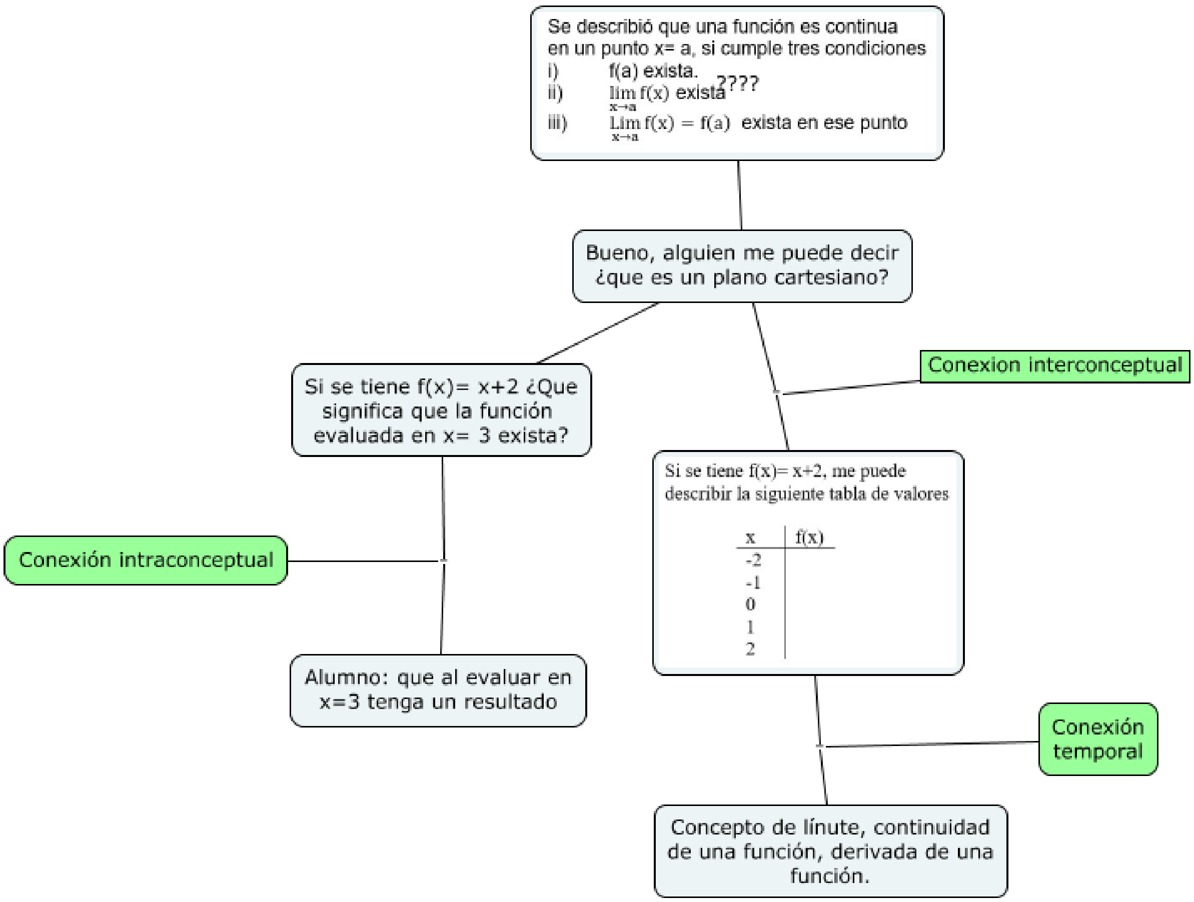
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la representación gráfica de una función.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la representación gráfica de una función.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y la relación que tiene con el concepto de función, dado que hace uso de Tablas para describir algunos valores de la función, conjunto con su representación gráfica.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar estrategias entre los conceptos que se usan en inducción matemática y los conceptos de función. Dado que algunos de los conceptos que se presento fue la representación en forma de ecuación de la función f(x) = x+2, esto es y=x+2, se representa como ecuación y-x =2

Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias de cómo se gráfica una función, muy comúnmente justificados en libros de precálculo. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias tales como el criterio de intersecciones entre los ejes para graficar una función. En particular para $f(x) = x+2$ que es una función lineal, con solo dos puntos basta para poder encontrar su representación gráfica, esto es: Si $f(x) = x+2$, entonces si $x=0$ entonces $y=2$, se obtiene $(0,2)$ Si $y=0$ entonces $x = -2$, se obtiene $(-2, 0)$.

4.2.10.- Análisis de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hacen presentes las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales

Esquema 5

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En el esquema 5 se describen las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 2 de la clase 2 de la práctica docente de Aby. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo.

En el caso de Aby se está revisando el tema de función, las grabaciones de clase manifiestan cuatro acciones que desarrolla durante su práctica docente. La primera acción es iniciando con el concepto de la recta numérica, para posteriormente definir el campo de los números reales, precisando las propiedades que debe de cumplir (asociativa, conmutativa, distributiva, existencia del neutro, existencia del inverso). Como segunda acción se induce el concepto de variable (incógnita) en una ecuación de primer orden con dos incógnitas, ejemplo: $y - x = 2$, se analizan las posibilidades de soluciones que tiene esta expresión, y se hace notar que si se despeja una de las variables se podrá tener todas las soluciones de la ecuación, esto es: $y= x+2$. Como tercera acción, Aby hace notar que este despeje $y = x+2$, ofrece la posibilidad de asignar nombres a las variables, siendo x la variable independiente, siendo y la variable dependiente, esto es, f (x) una función con respecto a x.

De tal forma que estos conocimientos previos ayudan para describir el concepto de función, para fines del ejemplo que se describió quedaría la función construida como $f (x) = x+2$. Estas tres acciones dan evidencia de las conexiones entre ideas asociadas al concepto de función, enmarcándolas en **conexiones intraconceptuales** que se presentan en la práctica docente de Aby. En la cuarta acción y las que pudieran continuar, sería como el concepto de función impacta en los futuros conocimientos del currículum, como lo son el concepto de límite de una función, el concepto de continuidad de una función, el concepto de la derivada de la función y el concepto de la integral de una función, en esta última acción se evidencia las conexiones entre conceptos en diferentes etapas del currículo, evidenciando las **conexiones temporales**.

Las conexiones interconceptuales, se hacen presente en la práctica docente de Aby, dado que está estableciendo conexiones con diferentes conceptos, en el ejemplo señalado $y - x = 2$, Aby sugiere que se despeje una de las variables, esto es; $y = x + 2$, donde al asignar valores controlados a la variable x, podemos observar que se encuentra un valor para y, es decir, se están formando pares ordenados con estas posibilidades, en el cual se visualiza a esta expresión como una recta numérica, compuesta de pares ordenados (x, y). Estas conexiones posibilitan estudiar otras propiedades de un concepto o procedimiento, o aplicar conocimiento aprendido a situaciones nuevas y/o más complejas.

4.2.11.- Análisis de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio CHM del modelo CME donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 17

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 2. [2.3] Descripción del episodio (1-14) **Objetivo general:** Analizar las condiciones que cumple una función para ser continua. **Evento desencadenante:** Aby inicia la clase analizando un ejemplo de una función racional recordado la primera de las tres condiciones para que una función sea continua, está condición establece la existencia de la función en algún punto a. Aby hace referencia que en las funciones racionales es muy común tener asíntotas verticales. [A, 1.14] Aby presenta un ejemplo de una función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, analizando la primera propiedad que describe que “la función evaluada en a exista”, hace uso

de la pizarra, para posteriormente describir una Tabla de valores y dar cuenta que en -2 y 2 la función no cumple está propiedad. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **i) Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con el concepto de función, para posteriormente llegar al cálculo del límite de una función.** **ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema del límite de una función.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer las tres condiciones que implica el discernimiento de la función continua.

Tabla 17

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con el concepto de función, para posteriormente llegar al cálculo del límite de una función.** **ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema del límite de una función.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de límite de una función, dado que la conexión que guardan las condiciones para que sea una

<table>
<tr><td></td><td>función continua permite ver las formas de como indagar el concepto de límite.</td></tr>
<tr><td>Indicio</td><td>Se da indicio que Aby conoce y sabe usar ejemplos asociados a las condiciones para discernir si existe o no el límite de una función. Ya que en las transcripciones de clase de Aby se describe el ejemplo $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$. Dando indicio a que hará uso de las fórmulas de los productos notables y factorización, aunque en las grabaciones de clase no se tenga evidencia de ello.</td></tr>
<tr><td>Oportunidad</td><td>Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe ubicar que contenido matemático se hace uso para poder simplificar expresiones matemáticas. En el ejemplo del límite de la función $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$ se hace uso del producto notable de diferencia de cuadrados, en donde aplicado al denominador de está expresión se reducen los términos semejantes, se muestra una imagen de los registros más relevantes de este caso.
<table>
<tr><td colspan="2">primer término   segundo término
$\underset{\downarrow}{a^2} - \underset{\downarrow}{b^2}$</td></tr>
<tr><td>1) Raíz cuadrada del 1er y 2ª. término</td><td>$\sqrt{a^2} = a$
$\sqrt{b^2} = b$</td></tr>
<tr><td>2) Verificar que está presente el signo -</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>3) Acomodar</td><td>$(a + b)\ (a - b)$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Conocimiento emergente</td><td>Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar otros ejemplos donde se haga uso de otros productos notables, factorización y racionalización de radicales.</td></tr>
</table>

Ilustración 18

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 2.

[2.3] Descripción del episodio (1-14)

Objetivo general: Analizar las condiciones que cumple una función para ser continua.

Evento desencadenante: Aby inicia la clase analizando un ejemplo de una función racional recordado la primera de las tres condiciones para que una función sea continua, esta condición establece la existencia de la función en algún punto a. Aby hace referencia que en las funciones racionales es muy común tener asíntotas verticales.

[A, 1.14] Aby presenta un ejemplo de una función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, analizando la primera propiedad que describe que "la función evaluada en a exista", hace uso de la pizarra, para posteriormente describir una Tabla de valores y dar cuenta que en -2 y 2 la función no cumple esta propiedad.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores;

- **i)** **Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto del límite de una función.**
- **ii)** **Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de límite de una función.**

Evento de término: Aby termina de explicar la importancia de reconocer las tres condiciones que implica el discernimiento de la función continua.

Tabla 18

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto del límite de una función.** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de límite de una función.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y la relación que tiene con el concepto de límite de una función, dado que hace uso adecuado del lenguaje Álgebraico en las expresiones Álgebraicas, dado que hace distinciones entre producto notable y factorización.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y sabe usar estrategias entre los conceptos que se usan en inducción matemática y los conceptos de límite de una función. Dado que algunos de los conceptos que se presentarán fuerón expresiones Álgebraicas, racionalización y simplificación de términos.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias de cómo se simplifican expresiones Álgebraicas en un término Álgebraico, muy comúnmente justificados en libros de Álgebra Básica. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias de valoración y validación de fórmulas Álgebraicas. Dado que es un conocimiento matemático necesario y útil para el desarrollo de una simplificación Álgebraica.
	En la siguiente imagen se presenta este conocimiento emergente propio del ejemplo que hizo uso Aby en su práctica docente:

Multiplicación algebraica	Fórmula
$\begin{array}{lrrrr} & a & +b & & \\ por & a & -b & & \\ \hline a^2 & + & \cancel{ab} & & \\ & - & \cancel{ab} & - & b^2 \\ \hline a^2 & + & 0 & + & b^2 \end{array}$	primer término $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ segundo término El cuadrado del primer término El cuadrado del segundo término
Son dos binomios iguales, pero uno con signo + y el otro -	

Ilustración 19

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 2.

[2.3] Descripción del episodio (1-14)

Objetivo general: Analizar las condiciones que cumple una función para ser continua.

Evento desencadenante: Aby inicia la clase analizando un ejemplo de una función racional recordado la primera de las tres condiciones para que una función sea continua, esta condición establece la existencia de la función en algún punto a. Aby hace referencia que en las funciones racionales es muy común tener asíntotas verticales.

[A, 1.14] Aby presenta un ejemplo de una función $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$, analizando la primera propiedad que describe que "la función evaluada en a exista", hace uso de la pizarra, para posteriormente describir una Tabla de valores y dar cuenta que en -2 y 2 la función no cumple esta propiedad.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)**

Subdescriptores;

i)	**Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental del límite de una función, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.**
Evento de término: Aby termina de explicar la importancia de reconocer las tres condiciones que implica el discernimiento de la función continua.	

Tabla 19

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

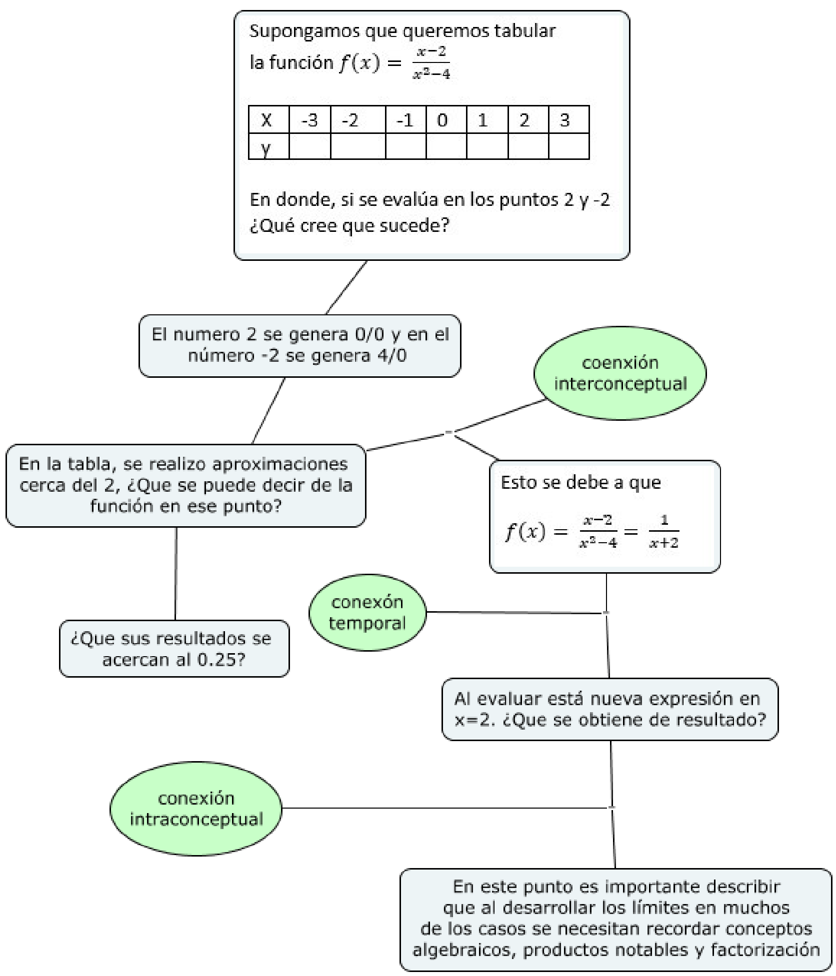
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental del límite de una función, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y la relación que tiene con el concepto de límite de una función, dado que hace uso de fórmulas Álgebraicas para simplificar la expresión matemática.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar estrategias entre los conceptos que se usan en inducción matemática y los conceptos de límite de una función. Dado que algunos de los conceptos que se utilizan en la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, que son expresiones racionales, leyes de los exponentes, factorización y simplificación da indicio del cuidado del lenguaje matemático que se utiliza.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias de cómo se resuelve el límite de una función, muy comúnmente justificados en libros de Álgebra Superior. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.

Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias de reforzamiento de conocimientos previos al tema que se está tratando, tales como productos notables y factorización.

4.2.12.- Análisis de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio CHM del modelo CME donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales

Esquema 6

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 3 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT



En este bloque se describen las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 2 de la clase 3 de la práctica docente de Aby. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Aby se está revisando el tema de límite de una función, las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión Álgebraica $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ se hace uso de conceptos asociados al tema de expresiones Álgebraicas lo que evidencia conexiones entre el concepto de producto de “binomios conjugados” con el concepto de “diferencia de cuadrados”.

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** pues la expresión $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ hace uso del concepto de factorización. Pero si se tiene la función $f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$, se tendría que racionalizar el denominador, que son conceptos que no son revisados en este momento, pero en temas posteriores es común abordarlos.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que en la expresión $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ muestra la esencia de la aplicación de estas tres propiedades para saber si es o no continua.

4.2.13.- Análisis de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 20

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 3. [3.1] Descripción del episodio (1-22) **Objetivo general:** Desarrollar el concepto de la derivada de una función, haciendo uso de la relación que tiene con el límite de la función, partiendo de la conexión hecha con el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando la fórmula de la derivada por medio de la regla conocida “la regla de los cuatro pasos”, aplicada en el ejercicio f(x) = x+2, para poder calcular la derivada de esta función tomando como referencia las transcripciones de clase. [A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio de la regla de los cuatro pasos describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los cuatro pasos que deben realizarse, que son paso 1.- f(x+h), paso 2.- f(x+h)-f(x), paso 3.- $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Paso 4.- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **i) Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de derivada.** **ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de la derivada.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los cuatro pasos para calcular la derivada de una función. Para posteriormente mostrar un método alternativo por medio de las fórmulas básicas de derivación.

Tabla 20

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de derivada.** **ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de la derivada.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de la derivada de una función, dado que la conexión que guardan la regla de los cuatro pasos con las fórmulas básicas de derivación, permite ver las formas de encontrar la derivada por dos rutas distintas.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar ejemplos asociados para encontrar la derivada de una función. Ya que en las transcripciones de clase de Aby se describe el ejemplo f(x) = x+2. Dando indicio a que es importante saber plantear en ese orden los cuatro pasos. Paso 1.- f(x+h), paso 2.- f(x+h)-f(x), paso 3.- $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, paso 4.- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del concepto de la derivada de una función, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores,

	se pueden propiciar otros ejemplos para verificar aplicar la regla de los cuatro pasos, como, por ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$ donde se tiene que hacer uso del desarrollo binomial para poder aplicar f(x+h).

Ilustración 21

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 3.

[3.1] Descripción del episodio (1-22)

Objetivo general: Desarrollar el concepto de la derivada de una función, haciendo uso de la relación que tiene con el límite de la función, partiendo de la conexión hecha con el concepto de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando la fórmula de la derivada por medio de la regla conocida "la regla de los cuatro pasos", aplicada en el ejercicio f(x) = x+2, para poder calcular la derivada de esta función tomando como referencia las transcripciones de clase.

[A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio de la regla de los cuatro pasos describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los cuatro pasos que debe cumplirse, que son paso 1.- f(x+h), paso 2.- f(x+h)-f(x), paso 3.- $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Paso 4.- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores;

i) **Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de la derivada, estableciendo las conexiones entre los temas.**

ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la derivada, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente. **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los cuatro pasos para calcular la derivada de una función. Para posteriormente mostrar un método alternativo por medio de las fórmulas básicas de derivación.

Tabla 21

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de la derivada, estableciendo las conexiones entre los temas.** **ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la derivada, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y la relación que tiene con el concepto de la derivada de la función, dado que en el desarrollo de los pasos para encontrar la derivada de la función. El primer paso f(x+h) hace uso de procedimientos Álgebraicos para poder encontrar el valor. Esto permite evidenciar conocimientos matemáticos previos y futuros tales como las leyes de los signos, las leyes de las potencias, las reglas de racionalización entre otros.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar estrategias entre los conceptos que se usan en inducción matemática y los conceptos de

	la derivada de una función. Dado que algunos de los conceptos que se utilizaron para este ejemplo en particular f(x) = x+2, se da indicio del conocimiento matemático $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para este ejemplo su resultado fue 1, pero para otros ejemplos es necesario hacer uso de fórmulas vistas en anteriores temas, tal como $f(x)=\sqrt{x}$ se hace uso del desarrollo binomial $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ para encontrar f(x+h)
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias de cómo se calcula la derivada de una función por medio de la regla de os cuatro pasos, muy comúnmente justificados en libros de Cálculo. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias tales como ejercicios donde se tenga que encontrar la derivada de una función por medio de la regla de los cuatro pasos haciendo uso de inducción matemática. Por ejemplo, supongamos que tenemos $f(x)=x*e^x$, entonces $f^n(x)=x^n\,e^{n\,x}$, se tiene que demostrar por inducción matemática que se cumple para $f^{n+1}(x)=x^{n+1}e^{(n+1\,)x}$

Ilustración 22

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 3. [3.1] Descripción del episodio (1-22)

Objetivo general: Desarrollar el concepto de la derivada de una función, haciendo uso de la relación que tiene con el límite de la función, partiendo de la conexión hecha con el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando la fórmula de la derivada por medio de la regla conocida "la regla de los cuatro pasos", aplicada en el ejercicio f(x) = x+2, para poder calcular la derivada de esta función tomando como referencia las transcripciones de clase. [A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio de la regla de los cuatro pasos describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los cuatro pasos que debe cumplirse, que son paso 1.- f(x+h), paso 2.- f(x+h)-f(x), paso 3.- $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Paso 4.- $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; **i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la derivada.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la derivada.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer los cuatro pasos para calcular la derivada de una función. Para posteriormente mostrar un método alternativo por medio de las fórmulas básicas de derivación.

Tabla 22

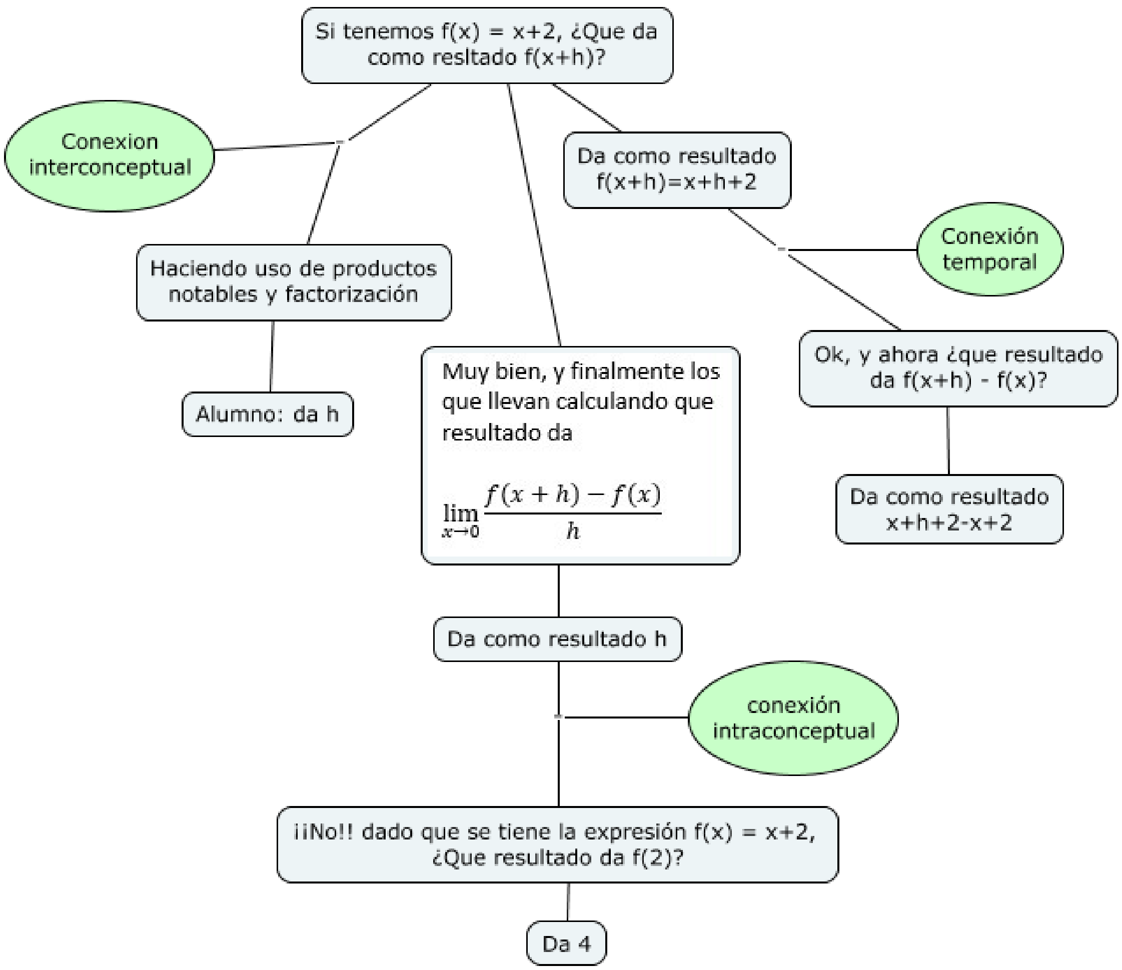
Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la derivada.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la derivada.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce el concepto de la derivada de una función, ya que se establece una relación entre el concepto de inducción matemática y el método de la regla de los cuatro pasos para determinar la derivada y las fórmulas básicas de derivación. Se considera que está asocian se establece ya que el valor principal es el mismo "derivada de una función", pero las propuestas son distintas, por un lado, se usa la regla de los cuatro pasos $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y por otro lado se utilizan las fórmulas básicas de derivación.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa el uso y manejo de la regla de los cuatro pasos para determinar la derivada.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que está usando para encontrar la derivada de alguna función, brindando la oportunidad de indagar en ejercicios más complejos, tales como $f(x) = x^{x^x}$
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de procedimientos Álgebraicos para determinar el valor de la derivada por medio de la regla de los cuatro pasos. Pero determina que es necesario y suficiente hacer uso de las fórmulas básicas de derivación, para hacer más eficiente los resultados en ejercicios más complejos.

4.2.14.- Análisis de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales

Esquema 7

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales de la clase 1 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En el esquema anterior se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 3 de la clase 1 de la práctica docente de Aby. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Aby se está revisando el tema de la regla de los cuatro pasos para calcular la derivada de una función, las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión Álgebraica $f(x) = x + 2$ se hace uso de conceptos asociados al tema de expresiones Álgebraicas lo que evidencia conexiones entre el concepto de "factorización" con el concepto de "productos notables".

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en la expresión $f(x) = x + 2$ se hace uso del concepto de factorización, para poder desarrollar y aplicar la regla de los cuatro pasos. En lo que compete a la función $f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$, se tendría que utilizar el teorema binomial para poder aplicar esta regla.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que en la expresión $f(x) = x + 2$ se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ muestra la esencia de la aplicación de estas propiedades para encontrar la derivada.

4.2.15.- Análisis de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 23

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase de la sesión 3.

[3.2] Descripción del episodio (1-13)

Objetivo general: Desarrollar el concepto de la derivada de una función, presentando en la pizarra las fórmulas básicas de derivación, partiendo de la conexión hecha con el concepto de inducción matemática en las clases anteriores.

1) $\frac{d}{dx} \quad (k) = 0$ Derivada de una constante	2) $\frac{d}{dx} \quad (x) = 1$ Derivada de una variable con respecto de ella misma
3) $\frac{d}{dx} \quad (u \pm v) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v)$ Derivada de una suma-resta	4) $\frac{d}{dx} \quad (u * v) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$ Derivada de un producto
5) $\frac{d}{dx} \quad \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d(u)}{dx} - u\frac{d(v)}{dx}}{v^2}$ Derivada de un cociente	6) $\frac{d}{dx} \quad (u^n) = nu^{n-1}\frac{d}{dx}(u)$ Derivada de una potencia

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando las fórmulas básicas de derivación aplicándolo en el ejercicio f(x) = x+2.

[A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio de las fórmulas básicas de derivación describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en las seis fórmulas estableciendo relaciones entre los conceptos.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)**

Subdescriptores;

i) **Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de la derivada Álgebraica.**

ii) **Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la del concepto de la derivada Álgebraica.**

Evento de término: Aby termina de explicar la importancia de aplicar las fórmulas básicas de derivación para calcular la derivada de una función.

Tabla 23

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de la derivada Álgebraica.** **ii) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la del concepto de la derivada Álgebraica.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce la relación matemática del concepto de la regla de los cuatro pasos con el concepto de la derivada de una función, dado que la conexión que guardan la regla de los cuatro pasos con la fórmulas básica de derivación, permite ver las formas de encontrar la derivada por dos rutas distintas, siendo está segunda la más útil.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y sabe usar ejemplos asociados para encontrar la derivada de una función. Ya que en las transcripciones de clase de Aby se describe el ejemplo f(x) = x+2. Dando indicio a que es importante reconocer cuál de las seis fórmulas de derivación aplica para determinar el resultado.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del concepto de la derivada de una función, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar otros ejemplos para verificar aplicar las fórmulas

	básicas de derivación, como, por ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$ donde se tiene que hacer uso de la derivada de una potencia.

Ilustración 24

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 3.

[3.2] Descripción del episodio (1-13)

Objetivo general: Desarrollar el concepto de la derivada de una función, presentando en la pizarra las fórmulas básicas de derivación (derivada de una constante, derivada de la literal x, derivada de una suma o resta, derivada del producto, derivada del cociente, derivada de la potencia), partiendo de la conexión hecha con el concepto de inducción matemática en las clases anteriores.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando las fórmulas básicas de derivación aplicándolo en el ejercicio f(x) = x+2.

[A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio de las fórmulas básicas de derivación describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en las seis fórmulas estableciendo relaciones entre los conceptos.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores;

i) **Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la derivada Álgebraica.**

ii) **Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la derivada Álgebraica.**

Evento de término: Aby termina de explicar la importancia de aplicar las fórmulas básicas de derivación para calcular la derivada de una función.

Tabla 24

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la derivada Álgebraica.** **ii) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la derivada Álgebraica.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de la derivada de una función y las fórmulas básicas de derivación, dado que en el desarrollo del ejemplo f(x) = x+2, hace uso de la fórmula de la derivada de una suma, la derivada de una variable y la derivada de una constante.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar estrategias entre los conceptos de la derivada de una función y las fórmulas básicas de derivación. Dado que algunos de los conceptos que se utilizaron para este ejemplo en particular f(x) = x+2, se da indicio del conocimiento matemático de las derivadas básicas de derivación, pero las mismas fórmulas aplican para ejemplos como f(x) = x – 3π
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias de cómo se calcula la derivada de una función por medio de las fórmulas básicas de derivación, muy comúnmente justificados en libros de Cálculo. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias tales como ejercicios donde se tenga que

	encontrar la derivada de una función por medio de las fórmulas básicas de derivación haciendo uso de inducción matemática. Por ejemplo, supongamos que tenemos $f(x) = x * e^{x}$, entonces $f^{n}(x) = x^{n}\, e^{n\,x}$, se tiene que demostrar por inducción matemática que se cumple para $f^{n+1}(x) = x^{n+1}e^{(n+1\,)x}$

Ilustración 25

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 3.

[3.2] Descripción del episodio (1-13)

Objetivo general: Desarrollar el concepto de la derivada de una función, presentando en la pizarra las fórmulas básicas de derivación (derivada de una constante, derivada de la literal x, derivada de una suma o resta, derivada del producto, derivada del cociente, derivada de la potencia), partiendo de la conexión hecha con el concepto de inducción matemática en las clases anteriores.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando las fórmulas básicas de derivación aplicándolo en el ejercicio f(x) = x+2.

[A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio de las fórmulas básicas de derivación describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en las seis fórmulas estableciendo relaciones entre los conceptos.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)**

Subdescriptores;

i) **Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la derivada Álgebraica.**

ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la derivada Álgebraica.
Evento de término: Aby termina de explicar la importancia de aplicar las fórmulas básicas de derivación para calcular la derivada de una función.

Tabla 25

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

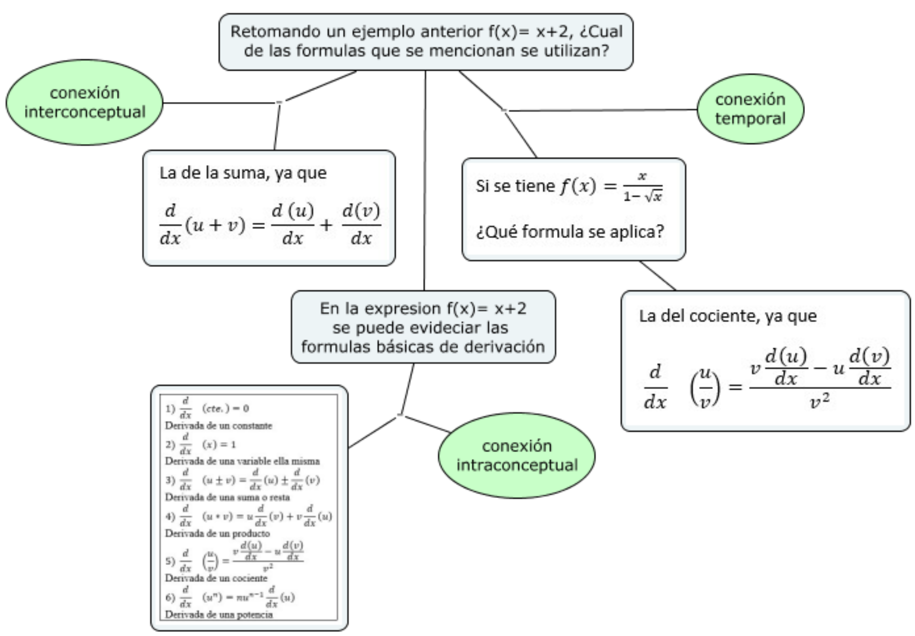
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la derivada Álgebraica.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la derivada Álgebraica.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce el concepto de la derivada de una función, ya que se establece una relación entre el concepto de inducción matemática y el método de la regla de los cuatro pasos para determinar la derivada y las fórmulas básicas de derivación. Se considera que se relacionan ya que el valor principal es el mismo “derivada de una función”, pero las propuestas son distintas, por un lado, se usa la regla de los cuatro pasos $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y por otro lado se utilizan las fórmulas básicas de derivación.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa el uso y manejo de las fórmulas básicas de derivación.

Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que está usando para encontrar la derivada de alguna función, brindando la oportunidad de indagar en ejercicios más complejos, tales como $f(x) = x^{x^x}$.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de procedimientos Álgebraicos para determinar el valor de la derivada por medio de las fórmulas basicas de derivación. Pero determina que es necesario y suficiente hacer uso de las fórmulas básicas de derivación, para hacer más eficiente los resultados en ejercicios más complejos.

4.2.16.- Análisis de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales

Esquema 8

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 2 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En este bloque se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 3 de la clase 2 de la práctica docente de Aby. En el esquema anterior se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 3 de la clase 2 de la práctica docente de Aby. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Aby se está revisando el tema de las reglas básicas de derivación para calcular la derivada de una función, las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión Álgebraica $f(x) = x + 2$ se hace uso de fórmulas básicas de derivación lo que evidencia conexiones entre el concepto de producto “regla de los cuatro pasos” con el concepto de “fórmulas básicas de derivación”.

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en la expresión $f(x) = x + 2$ se hace uso de más de una fórmula básica de derivación, para poder desarrollar y simplificar la expresión a su mínima representación. En lo que compete a la función $f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$, se tendría que aplicar la derivada de un cociente, y se tendría que utilizar las reglas de racionalización para poder simplificar.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que en la expresión $f(x) = x + 2$ se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas y de derivación, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación con la identificación de las fórmulas básicas.

4.2.17.- Análisis de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 26

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 3. [3.3] Descripción del episodio (1-22) **Objetivo general:** Desarrollar el concepto de la derivada de una función, haciendo uso de las fórmulas básicas de derivación y de la derivada de las funciones especiales. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando las fórmulas básicas de derivación, así como las fórmulas las funciones especiales, aplicada en el ejercicio $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x}\cos(\mathrm{e^x})$, para poder calcular la derivada de la función tomando como referencia las transcripciones de clase. [A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x}\cos(\mathrm{e^x})$. Se hace énfasis en la derivada de derivación básicas y la derivada de funciones especiales, tal como: $\frac{\mathrm{d(cos(x))}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{sen(x)} * \frac{\mathrm{d(x)}}{\mathrm{dx}}$, $\frac{\mathrm{d}(e^u)}{\mathrm{dx}} = e^u * \frac{\mathrm{d}(u)}{\mathrm{dx}}$ **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **i) Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con el concepto de la derivada, para posteriormente llegar al cálculo de la derivada trigonométrica.**

ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema de la derivada trigonométrica. **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer las fórmulas básicas de derivación para aplicarlas a la derivada de unas funciones especiales. Para posteriormente presentar otras fórmulas de derivación como consecuencia de las anteriores.

Tabla 26

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con el concepto de la derivada, para posteriormente llegar al cálculo de la derivada trigonométrica.** **ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé a tema de la derivada trigonométrica.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce la relación matemática del concepto de derivada de funciones básicas con el concepto de la derivada de funciones especiales, dado que la conexión que guardan la derivada Álgebraica con las fórmulas básicas de derivación, permite ver las formas de encontrar la derivada de funciones que impliquen funciones trigonométricas.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y sabe usar ejemplos asociados para encontrar la derivada de una función especial. Ya que en las transcripciones de clase de Aby se describe el ejemplo

	$\mathrm{f(x) = e^x \cos(e^x)}$ Dando indicio a que es importante saber plantear las fórmulas de $\frac{\mathrm{d(\cos(x))}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{sen(x)} * \frac{\mathrm{d(x)}}{\mathrm{dx}}$, $\frac{\mathrm{d}(e^u)}{\mathrm{dx}} = e^u * \frac{\mathrm{d}(u)}{\mathrm{dx}}$
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del concepto de la derivada de una función, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar otros ejemplos para verificar aplicar la derivada de funciones especiales, como, por ejemplo $f(x) = sen\,(sen(sen(x)))$ donde se tiene que hacer uso reglas muy específicas, en este caso la regla de la cadena.

Ilustración 27

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 3. [3.1] Descripción del episodio (1-22) **Objetivo general:** Desarrollar el concepto de la derivada de una función, haciendo uso de las fórmulas básicas de derivación y de la derivada de las funciones especiales. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando las fórmulas básicas de derivación, así como las fórmulas las funciones especiales, aplicada en el ejercicio $\mathrm{f(x) = e^x \cos(e^x)}$, para poder calcular la derivada de la función tomando como referencia las transcripciones de clase.

[A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x} \cos(\mathrm{e^x})$. Se hace énfasis en la derivada de funciones básicas y la derivada de funciones especiales, tal como: $\frac{\mathrm{d(\cos(x))}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{sen(x)} * \frac{\mathrm{d(x)}}{\mathrm{dx}}$, $\frac{\mathrm{d}(e^u)}{\mathrm{dx}} = e^u * \frac{\mathrm{d}(u)}{\mathrm{dx}}$ **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)** Subdescriptores; **i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la derivada trigonométrica.** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de la derivada trigonométrica** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer las fórmulas básicas de derivación para aplicarlas a la derivada de unas funciones especiales. Para posteriormente presentar otras fórmulas de derivación como consecuencia de las anteriores.

Tabla 27

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la derivada trigonométrica.** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la derivada trigonométrica.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de derivada de funciones Álgebraicas y la relación que

	tiene con el concepto de la derivada de las funciones especiales, dado que en el desarrollo de los pasos para encontrar la derivada de la función $\mathrm{f(x) = e^x \cos(e^x)}$. El primer paso es identificar la fórmula de derivación que se debe usar, en este caso la derivada de un producto posteriormente identifica la derivada de cada una de las partes, en primera instancia de derivada de $\mathrm{e^x}$ y posteriormente la derivada de $\mathrm{\cos(e^x)}$. Esto permite evidenciar conocimientos matemáticos presentes y futuros que se están revisando en el tema.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber usar los conceptos que se usan en la derivada de funciones Álgebraicas y la derivada de funciones especiales. Dado que algunos de los conceptos que se utilizaron para este ejemplo en particular $\mathrm{f(x) = e^x \cos(e^x)}$ da indicio del manejo de fórmulas, que en futuros ejemplos se utilizarán, por ejemplo $\mathrm{f(x) = e^x \tan{(e^x)}}$.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce las estrategias de cómo se calcula la derivada de funciones Álgebraicas y funciones especiales, muy comúnmente justificados en libros de Cálculo.
	Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Aby.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby puede propiciar estrategias tales como ejercicios donde se tenga que encontrar la derivada de una función Álgebraica por medio de la regla de la cadena. Por ejemplo, supongamos que tenemos $f(x) = x * e^x$, entonces $f^n(x) = x^n\, e^{n\,x}$, se tiene que demostrar por inducción matemática que se cumple para $f^{n+1}(x) = x^{n+1}e^{(n+1\,)x}$

Ilustración 28

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 3. [3.3] Descripción del episodio (1-22) **Objetivo general:** Desarrollar el concepto de la derivada de una función, haciendo uso de las fórmulas básicas de derivación y de la derivada de las funciones especiales. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando las fórmulas básicas de derivación, así como las fórmulas de las funciones especiales, aplicada en el ejercicio $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x} \cos(\mathrm{e^x})$, para poder calcular la derivada de la función tomando como referencia las transcripciones de clase. [A, 1.22] Aby presenta un ejemplo introductorio $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x} \cos(\mathrm{e^x})$. Se hace énfasis en la derivada de derivación básicas y la derivada de funciones especiales, tal como: $\frac{\mathrm{d(cos(x))}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{sen(x)} * \frac{\mathrm{d(x)}}{\mathrm{dx}}$, $\frac{\mathrm{d}(e^u)}{\mathrm{dx}} = e^u * \frac{\mathrm{d}(u)}{\mathrm{dx}}$ **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; **Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de la derivada trigonométrica, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.** **Evento de término**: Aby termina de explicar la importancia de reconocer las fórmulas básicas de derivación para aplicarlas a la derivada de unas funciones especiales. Para posteriormente presentar otras fórmulas de derivación como consecuencia de las anteriores.

Tabla 28

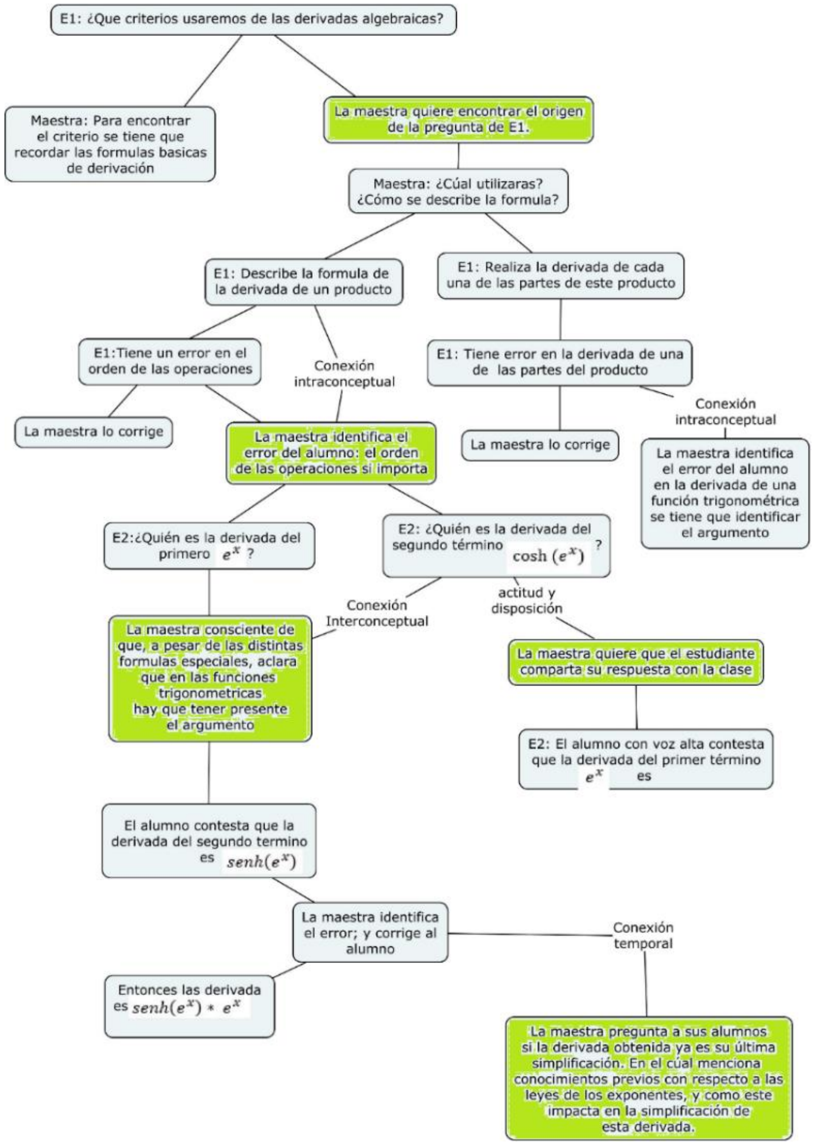
Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Subdescriptor HCK (V)	**Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de la derivada trigonométrica, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce el concepto de la derivada de una función Álgebraica, ya que se establece una relación entre la derivada y la derivada de funciones especiales.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa el uso y manejo de las derivadas de funciones Álgebraicas y de funciones especiales.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que está usando para encontrar la derivada de funciones especiales, brindando la oportunidad de indagar en ejercicios más confusos, tales como $f(x) = e^x$
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby hace uso de procedimientos Álgebraicos para determinar el valor de la derivada de funciones especiales. Pero determina que es necesario y suficiente hacer uso de las fórmulas básicas de derivación, dado que al derivar $f(x) = e^x$. Es necesario recordar la derivada de una función exponencial, la derivada de una constante.

4.2.18.- Análisis de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales

Esquema 9

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 3 de la sesión 3 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En el esquema anterior se presenta la evidencia de la clase de Aby, se manifiesta que presenta temas aplicados con el tema de inducción matemática, en este caso las derivadas de funciones trigonométricas. Dado que durante las grabaciones de sus clases se apreció que Aby sustento la importancia de usar el método de inducción matemática en el desarrollo de demostraciones de fórmulas que se usan en el concepto de cálculo diferencial. Y como se puede apreciar en esta grabación de la clase, se suscitan varios episodios que permite analizar conexiones intraconcpetuales, interconceptuales y temporales de la práctica docente de Aby.

En el episodio anterior se detectaron tres momentos críticos. El primero momento crítico se inicia con la pregunta que fórmula Aby a uno los estudiantes, "*¿qué criterio usaremos de las derivadas Álgebraicas?"* (Para la función $f(x) = e^x \cos(e^x)$), y el alumno le contesta "*el primer elemento por la derivada del segundo elemento, mas, el segundo elemento multiplicado por la derivada del primer elemento".*

En la evidencia de grabación de este episodio clave, Aby enseña a sus alumnos la aplicación de las derivadas Álgebraica en la derivada de las funciones especiales. Donde se detecta que el conocimiento previo para abordarlo es el reconocimiento de las 6 fórmulas básicas de derivación que son:

1) $\frac{d}{dx} \quad (k) = 0$ Derivada de un constante	2) $\frac{d}{dx} \quad (x) = 1$ Derivada de una variable con respecto de ella misma
3) $\frac{d}{dx} \quad (u \pm v) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v)$ Derivada de una suma o resta	4) $\frac{d}{dx} \quad (u * v) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$ Derivada de un producto
5) $\frac{d}{dx} \quad \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d(u)}{dx} - u\frac{d(v)}{dx}}{v^2}$ Derivada de un cociente	6) $\frac{d}{dx} \quad (u^n) = nu^{n-1}\frac{d}{dx}(u)$ Derivada de una potencia

Ahora bien, el conocimiento matemático que intenta enseñar es como las fórmulas básicas de derivación se utilizan para encontrar la derivada de la función: $f(x) = e^x \cos(e^x)$ [1]

La conexión que se ha identificado, fue la **conexión intraconceptual**, ya que, en la evidencia de la grabación, Aby lanza la pregunta a sus alumnos en clase; "*¿qué criterio usaremos de las derivadas Álgebraicas para derivar la función* $f(x) = e^x \cos(e^x)$ *¿*", y uno de sus alumnos contesta "*el primer elemento por la derivada del segundo elemento, mas, el segundo elemento multiplicado por la derivada del primer elemento".*

Ya que, al analizar este concepto se ha denominado como una condición suficiente, porque al derivar las expresiones en forma individual sin importar el orden, sus resultados son los mismos (aplicando la 4° fórmula de derivación).

Primer elemento	Derivada		Segundo elemento	Derivada
e^x	e^x		$\cos(e^x)$	$\mathrm{sen}(e^x)$

Si cambiáramos el orden

Primer elemento	Derivada		Segundo elemento	Derivada
$\cos(e^x)$	$\mathrm{sen}(e^x)$		e^x	e^x

Pero está se convierte en una condición necesaria, ya que al derivar la expresión $\cos(e^x)$, se contestó sen(e^x), y no es correcto. Ya que, según la evidencia de la grabación, Aby cuestiona en clase sobre la respuesta anterior:

> **"Aby**: ¡¡¡seguro!!!, ¿qué sucede con su argumento?" (señalando el pizarrón la función $\cos(e^x)$).

Se pudo observar, que el mecanismo de despliegue de Aby ante este momento suscitado en clase fue recordar y describir en el pizarrón una de las fórmulas básicas de las funciones trigonométricas, esto es:

$$\frac{d(\cos(x))}{dx} = -\,sen(x) * \frac{d(x)}{dx} \qquad [2]$$

Permitiendo que este conocimiento previo, suscite en uno de sus alumnos, el reconocimiento de su error, y expresando verbalmente su respuesta anterior.

Alumno: Entonces la derivada de $\cos(e^x)$ es $sen(e^x) * e^x$

Podemos agregar a este primer momento, que las habilidades matemáticas que tiene Aby para reconocer la importancia de un determinado contenido matemático es de vital importancia, ya que, en el contenido del tema de las derivadas (Larson, 2009) de funciones trigonométricas, se reconocen dos tipos de derivadas, que son:

Derivada de la función coseno	Derivada de la función seno
$\frac{d(\cos(x))}{dx} = -\,sen(x) * \frac{d(x)}{dx}$	$\frac{d(\text{sen}(x))}{dx} = cos(x) * \frac{d(x)}{dx}$

Donde se podría generar una confusión de los contenidos porque, aunque provienen de la misma raíz, se aplican de formas distintas.

Otro momento crítico se inicia con la pregunta que fórmula Aby a uno los estudiantes, *“¿quién es la derivada del primero e^x?”,* y el alumno contesta “e^x”. En la evidencia de grabación de este momento, Aby enseña a sus alumnos la aplicación de las derivadas de las funciones especiales en la derivada de las funciones trigonométricas. Donde se detecta que el conocimiento previo para abordarlo es el reconocimiento de las 4 fórmulas básicas de derivación que corresponde a una expresión de la forma $base^{exponente}$ que son:

1) $\frac{d}{dx} \quad (e^u) = e^u \; \frac{d\,(u)}{dx}$ Derivada de la potencia con base e (número de Euler) y potencia una variable	2) $\frac{d}{dx} \quad (a^u) = a^u \ln a \; \frac{d\,(u)}{dx}$ Derivada de una potencia con base numérica y potencia una variable
3) $\frac{d}{dx} \quad (u^v) = v\, u^{v-1} \; \frac{d\,(u)}{dx} + \ln\, u * \; u^v \frac{d\,(v)}{dx}$ Derivada de una potencia con base una variable y potencia otra variable	4) $\frac{d}{dx} \quad (u^n) = n\, u^{n-1} \; \frac{d\,(u)}{dx}$ Derivada de una potencia con base una variable y potencia un número

Ahora bien, el conocimiento matemático que intenta enseñar es como las fórmulas básicas de derivación de la forma $base^{exponente}$ se utilizan para encontrar la derivada de la función $f(x) = e^x$.

El tipo de conexión que se presento fue la **conexión interconceptual**, dado que Aby lanza la pregunta a sus alumnos en clase; *"¿quién es la derivada del primero* e^x *¿"* y uno de sus alumnos contesta "”$la\ derivada\ es\ \ e^x$”.

Al analizar este episodio se suscitan 4 fórmulas matemáticas, que pueden vincularse con la representación de este concepto, solo en 2 de ellas los estudiantes afrontan el concepto de dos formas distintas, pero obteniendo el mismo resultado. Esto es; primera fórmula:

Fórmula	Conceptos que reconocer en e^x	Resultado de la derivada
1) $\frac{d}{dx} \quad (e^u) = e^u \; \frac{d\,(u)}{dx}$	Base = e Potencia u = x Derivada de la potencia= 1	$\frac{d}{dx} \quad (e^x) = e^x.1 = e^x$

Segunda forma de ubicar el concepto

Fórmula	Conceptos que reconocer en e^x	Resultado de la derivada
$\frac{d}{dx}\quad (a^u) = a^u \ln a \, \frac{d\,(u)}{dx}$	Base a = e Potencia u = x Derivada de la potencia= 1	$\frac{d}{dx}\quad (e^x) = e^x \ln e \, \frac{d\,(x)}{dx}$
Utilizando propiedades de logaritmo natural se obtiene $\ln e = 1$		
$\frac{d}{dx}\quad (e^x) = e^x \ln e \, \frac{d\,(x)}{dx} \qquad e^x(1)\frac{d\,(x)}{dx} = \; e^x * (1) * (1) = \; e^x$		

Se puedo observar, que el mecanismo de despliegue de Aby ante este momento suscitado en clase fue recordar y describir las fórmulas básicas de las funciones con tipo $base^{exponente}$. Permitiendo que este conocimiento matemático, suscite en los alumnos, la representación de este concepto, pero confrontando la selección de la fórmula que dará la respuesta correcta. Podemos agregar a este segundo momento, que las habilidades matemáticas que tiene Aby para reconocer la importancia de un determinado contenido matemático es de vital importancia, ya que en el contenido del tema de las derivadas de la forma $base^{exponente}$, consideran propiedades que competen a las leyes de los exponentes, que son:

Leyes de los exponentes
$e^x * e^y \; = \; e^{x+y}$ $(e^x)^y = \; e^{x*y}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

$$e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$$

Donde se enriquece el contenido matemático, ya que se puede apreciar la trayectoria curricular que tienen los contenidos matemáticos a partir de denotar este momento.

Otro momento importante se inicia con la pregunta que fórmula Aby a sus alumnos con respecto de la simplificación de la expresión: $f'(x) = (e^{2x})\ (\cos\ (e^x)) + \cos\ (e^x) * e^x$, en el cual describe: *¿sería la última simplificación?, ¿Podría simplificarse más?, ¿Qué podríamos factorizar?”*. En el cual uno de los alumnos contesta; *“se factoriza e^x, más bien se factoriza el término $e^x\, cos(e^x)$”.*

En la evidencia de grabación de este episodio clave, Aby enseña a sus alumnos la aplicación de los criterios de factorización en la simplificación de términos trigonométricos y funciones especiales. Donde se detecta que el conocimiento previo para abordarlo es el reconocimiento de los 8 casos de factorización en una expresión Álgebraica que son:

1) Por término común	$a^2 + ab = a(a + b)$
2) Trinomio de la forma	$x^2 + bx + c = (x + d)(x + e)$
3) Trinomio cuadrado perfecto	$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2)$
4) Diferencia de cuadrados	$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
5) Suma de cuadrados	$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$
6) Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7) Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

8) Fórmula general	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ahora bien, el conocimiento matemático que intenta enseñar Aby es como las fórmulas básicas de factorización para la expresión de la forma $f'(x) = (e^{2x})\ (\cos\ (e^x)) + \cos\ (e^x) * e^x$ se utilizan para encontrar la simplificación de la derivada de la función f'(x). En donde al tener el reconocimiento de los términos Álgebraicos que acompañan a la expresión $(e^{2x})\ (\cos\ (e^x)$ y el término $\cos\ (e^x) * e^x$, unos de los alumnos detectan que se tiene que utilizar factorización por término común. Donde contesta la pregunta que realiza Aby diciendo, *se factoriza e^x, más bien se factoriza el término $e^x\, cos(e^x)$".* Finalmente, Aby al detectar que respondieron a la pregunta realizada, escribe en el pizarrón que el resultado simplificado de la derivada de la función es $f'(x) = (e^{2x})\ (\cos\ (e^x)) + \cos\ (e^x) * e^x = e^x\, cos(e^x)\ [e^x + 1]$.

Este último paso permite poner en evidencia las manifestaciones claves de una clase, que se identificarón en la evidencia de la grabación, de la pregunta que Aby lanza a sus alumnos en clase; *¿sería la última simplificación?, ¿Podría simplificarse más?, ¿Qué podríamos factorizar?"*.

El tipo de conexión que se suscita en este momento es la **conexión interconceptual,** ya que; de acuerdo a la evidencia de la grabación, Aby lanza la pregunta: "*¿Podría simplificarse más?* $, ¿\,Qué\ podríamos\ factorizar\ de\ la\ expresión f'(x) = (e^{2x})\ (\cos\ (e^x)) + \cos\ (e^x) * e^x$ *".* Donde uno de sus alumnos contesta en dos momentos, el primer de ellos responde "*se factoriza* e^x", y el segundo responde

“ $mas\ bien\ se\ factoriza\ el\ termino\ e^x\ cos(e^x)$”. Podemos observar que esta conexión permite conectar las ideas matemáticas en el alumno, de manera tal que afronte diferentes conceptos y pueda discernir cual es la respuesta correcta.

A partir de estos tres momentos críticos se construyeron las conexiones, resaltando vías de intervención de la maestra. El análisis de estas conexiones nos brindará un análisis de las actuaciones y verificar las conexiones matemáticas que se realizan en el aula.

4.3.- Análisis de las 9 clases correspondientes a las tres sesiones de Lore

4.3.1.- Análisis de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 29

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1.

[1.1] Descripción del episodio (1-19)

Objetivo general: Ubicar el concepto de inducción matemática, demostrando la sumatoria de las potencias del número 2.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, precisando y describiendo el uso del método de inducción matemática.

[A, 1.13] Lore presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias pares del número 2 describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciarlo con algunas reglas de factorización y productos notables, así como de potenciación.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)**

Subdescriptores;

i) **Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de las potencias del número 2.**

ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de las potencias del número 2.   **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo (en este caso la sumatoria de las potencias del número 2), parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 29

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de uno de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de las potencias del número 2.** **ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de las potencias del número 2.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática, dado que la conexión que guardan con los conocimientos previos establece las formas de como demostrar una proposición. Lore detérmino que el método inductivo sustenta tres premisas para llevar a cabo la demostración.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar ejemplos asociados al tema de inducción matemática, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de Lore se describe el ejemplo $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^{n} = 2(2^n - 1)$.

	Dando indicio a que es importante saber usar las leyes de las potencias, las leyes de los signos (suma, resta, multiplicación) para fines de la operatividad de la demostración, aunque en la práctica docente de Lore no hagan tal referencia.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de inducción matemática, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos desarrollados en otra área específica y demostralos por el principio de inducción matemática y hacer la ubicación en la materia que se está impartiendo.

Ilustración 30

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (1-19) **Objetivo general:** Ubicar el concepto de inducción matemática, demostrando la sumatoria de las potencias del número 2. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, precisando y describiendo el uso del método de inducción matemática. [A, 1.19] Lore presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias del número 2 describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método

inductivo para evidenciarlo con algunas reglas de factorización y productos notables, así como de potenciación. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)** Subdescriptores; **i) Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores al concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2, estableciendo las conexiones entre los temas.** **ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo (en este caso la sumatoria de las potencias del número 2), parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 30

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores al concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2, estableciendo las conexiones entre los temas.** **ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la representación de la**

<table>
<tr><td></td><td>suma de las potencias del número 2, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.</td></tr>
<tr><td>Evidencia</td><td><table>
<tr><td colspan="2">Leyes de los exponentes</td></tr>
<tr><td>i) $a^n = \underbrace{a * a * a * \ldots * a}_{n-veces}$</td><td></td></tr>
<tr><td>ii) $(a^n)^m = a^{n*m}$</td><td></td></tr>
<tr><td>iii) $a^n * a^m = a^{n+m}$</td><td></td></tr>
<tr><td>iv) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$</td><td></td></tr>
<tr><td>v) $a^0 = 1,$ excepto</td><td>$0^0 = Error$</td></tr>
<tr><td>vi) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$</td><td></td></tr>
</table>
Se evidencia que Lore conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y su conocimiento previo, dado que haciendo uso del ejemplo de la representación matemática de la sumatoria de las potencias del número 2, recuerda aspectos básicos de las reglas básicas de los exponentes, clave importante para entender la naturaleza del ejercicio.</td></tr>
<tr><td>Indicio</td><td>Se da indicio que Lore conoce y sabe usar conocimientos previos para ubicarlos en los conocimientos presentes. Dado que reconoce que la representación matemática de la sumatoria de las potencias del número 2 es $2(2^n -1)$. Es alusivo a poder usar conceptos de reconocimiento de las propiedades básicas de las potencias. Aunque no se tiene una prueba en la práctica docente o notas de clase de Lore que haya sido así, se intuye que debió haber sido así para entender y guiar la naturaleza de la demostración.</td></tr>
<tr><td>Oportunidad</td><td>Se da una oportunidad ya que Lore conoce las estrategias que se utilizan en la representación inductiva de la sumatoria de las potencias del número 2, probablemente justificados en libros que consideren el tema de inducción matemática. Lo que permite tener</td></tr>
</table>

	una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Lore.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore puede propiciar estrategias con este ejemplo donde se haga uso del conocimiento matemático con respecto a la representación matemática de la sumatoria de las potencias del número 3, o del número 4 o del número n. Y de esta manera validar si es cierto que se cumple que: $$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Ilustración 31

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (1-19) **Objetivo general:** Ubicar el concepto de inducción matemática, demostrando la sumatoria de las potencias del número 2. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, tomando como referencia los ejemplos anteriores, donde se describen el uso del método de inducción matemática. [A, 1.19] Lore presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias del número 2 describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciarlo con algunas reglas de factorización y productos notables, así como de potenciación. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores;

i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2. **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo (en este caso la sumatoria de las potencias del número 2), parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 31

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

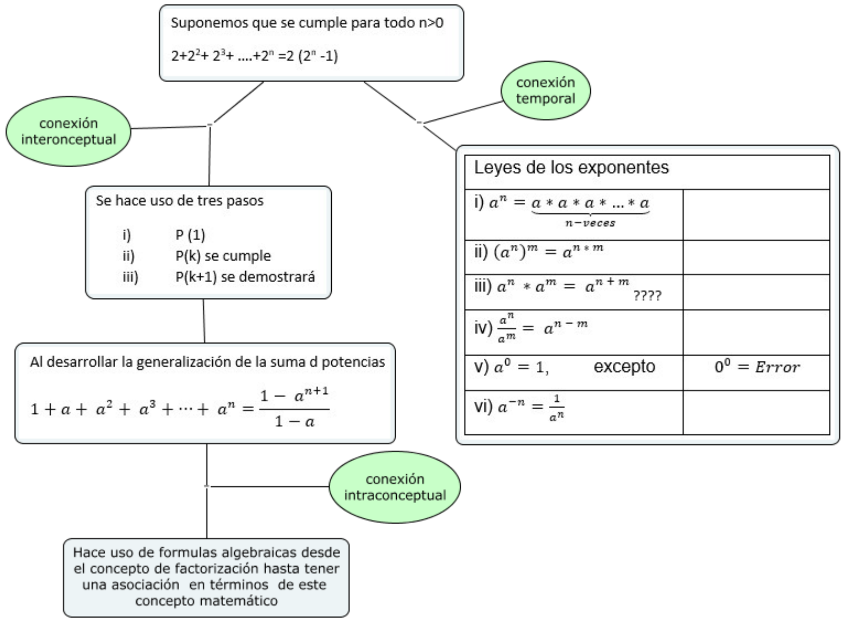
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de inducción matemática, ya que se establece una relación entre la suma de los números naturales con la representación de la suma de las potencias del número 2. Se considera que está asociación se establece ya que el tema principal es el mismo “suma de números enteros”, pero las

	propuestas son distintas, por un lado, la suma de 1+2+3+4+…+n, y por otro lado $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n.}$
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa la suma de los números naturales, así como la representación matemática de la suma de las potencias del número 2.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que está usando para demostrar el concepto de inducción matemática, brindando la oportunidad de indagar en las propuestas de las potencias de 3, o en las potencias de 4, o de las potencias de n.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de una estrategia para la representación de la suma de las potencias del número 2. Conforme al análisis se permite indagar la relación matemática que sustenta con la representación general de su sumatoria. $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = 2\ (2^n - 1)$

4.3.2.- Análisis de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales.

Esquema 10

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En el esquema anterior se describen las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 1 de la clase 1 de la práctica docente de Lore. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Lore se está revisando el tema de inducción matemática, las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión Álgebraica $2 + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} + . . . + 2^{n} = 2(2^{n} – 1)$ se hace uso de tres pasos para poder generalizar que se cumple para cualquier número natural n lo que evidencia conexiones entre el concepto de “sumatoria de potencias de número 2” con el concepto de “la generalización de una expresión matemática”.

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en la expresión $2 + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} + . . . + 2^{n} = 2(2^{n} – 1)$ se hace uso de las leyes de los exponentes, para poder desarrollar y aplicar el método inductivo. En lo que compete a la sumatoria de potencias del número 2, se hace uso de leyes de potencias, que son necesarias para entender la naturaleza matemática de la demostración.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que en la representación de la suma de potencias del número 2, se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ muestra la esencia de la aplicación de estos conceptos.

4.3.3.- Análisis de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 32

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (1-19) **Objetivo general:** Analizar el concepto de inducción matemática, partiendo de dos ejercicios, uno de sumatoria y otra del múltiplo de un número. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, precisando y describiendo el uso del método de

inducción matemática. Así como también la verificación de que $\mathrm{k}^3 - \mathrm{k} + 3$ es múltiplo de 3. [A, 1.19] Lore presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias del número 2 y la verificación de que $\mathrm{k}^3 - \mathrm{k} + 3$ es múltiplo de 3, describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciar que se cumple para n=k+1. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **i) Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de los números positivos y que $\mathbf{k}^3 - \mathbf{k} + 3$ es múltiplo 3.** **ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de los números positivos y que $\mathbf{k}^3 - \mathbf{k} + 3$ es múltiplo 3.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo, parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 32

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de los números pares y que $\mathbf{k}^3 - \mathbf{k} + 3$ es múltiplo de 3.**

	ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de los números pares y que $\mathbf{k^3 - k + 3}$ es múltiplo de 3.
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático, dado que, al plantear el ejercicio de la suma de los números pares, toma como referencia el ejemplo de la suma de los números enteros.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar estrategias para dar a conocer el conocimiento matemático. Ya que en la evidencia de su práctica docente Lore describe los pasos de la demostración: $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ Y como parte del desarrollo, hace uso de una estrategia para dar cuenta de cómo se suman los números pares
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar estrategias para sumar los números pares, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de estrategias para dar cuenta de cómo se suman los números pares, así como también la demostración de que $k^3 - k + 3$ es multiplo de 3. Estos ejercicios dan pauta a plantear otros ejemplos que fueron abordados en clase, tal y como: $3^{2n} + 7$ es divisible entre 8.

Ilustración 33

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 1.

[1.1] Descripción del episodio (1-19)

Objetivo general: Analizar el concepto de inducción matemática, partiendo de dos ejercicios, uno de sumatoria y otra del múltiplo de un número.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, precisando y describiendo el uso del método de inducción matemática. Así como también la verificación de que $\mathrm{k}^3 - \mathrm{k} + 3$ es múltiplo de 3.

[A, 1.19] Lore presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias del número 2 y la verificación de que $\mathrm{k}^3 - \mathrm{k} + 3$ es múltiplo de 3, describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciar que se cumple para n=k+1.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores;

i) **Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la representación de la suma de los números naturales pares y que $\mathbf{k}^3 - \mathbf{k} + 3$ es múltiplo de 3.**

ii) **Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la suma de los números naturales pares y que $\mathbf{k}^3 - \mathbf{k} + 3$ es múltiplo de 3.**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo, parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 33

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la representación de la suma de los números naturales pares y que $\mathbf{k^3 - k + 3}$ es múltiplo de 3.** **ii) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la suma de los números naturales pares y que $\mathbf{k^3 - k + 3}$ es múltiplo de 3.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y su conocimiento previo, ya que en los ejemplos desarrollados en clase se presenta los tres pasos inductivos para desarrollar la demostración.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar estrategias entre los conceptos que se usan en inducción matemática. Dado que algunos de los conceptos que se presenta fue número entero, número par e impar, número primo, multiplicidad, divisibilidad. Aunque no se tiene una prueba en la práctica docente o notas de clase de Lore que haya sido así, se intuye que debió haber sido así para entender la naturaleza de la demostración.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce las estrategias que se utilizan en la representación inductiva de los números pares y también multiplicidad de un número, muy comúnmente justificados en libros de Teoría de Números. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Lore.

Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore puede propiciar estrategias con este ejemplo donde se haga uso del conocimiento matemático en lo que respecta a divisibilidad (conocimientos previos). Como por ejemplo demostrar que como: $3^{2n} + 7$ es divisible entre 8.

Ilustración 34

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (1-19) **Objetivo general:** Analizar el concepto de inducción matemática, partiendo de dos ejercicios, uno de sumatoria y otra del múltiplo de un número. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, precisando y describiendo el uso del método de inducción matemática. Así como también la verificación de que $k^3 - k + 3$ es múltiplo de 3. [A, 1.19] Lore presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias del número 2 y la verificación de que $k^3 - k + 3$ es múltiplo de 3, describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciar que se cumple para n=k+1. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; **i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la suma de los números naturales pares y que $\mathbf{k^3 - k + 3}$ es múltiplo 3.**

ii)	**Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la suma de los números naturales pares y que $\mathbf{k^3 - k + 3}$ es múltiplo 3.**
Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo, parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.	

Tabla 34

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

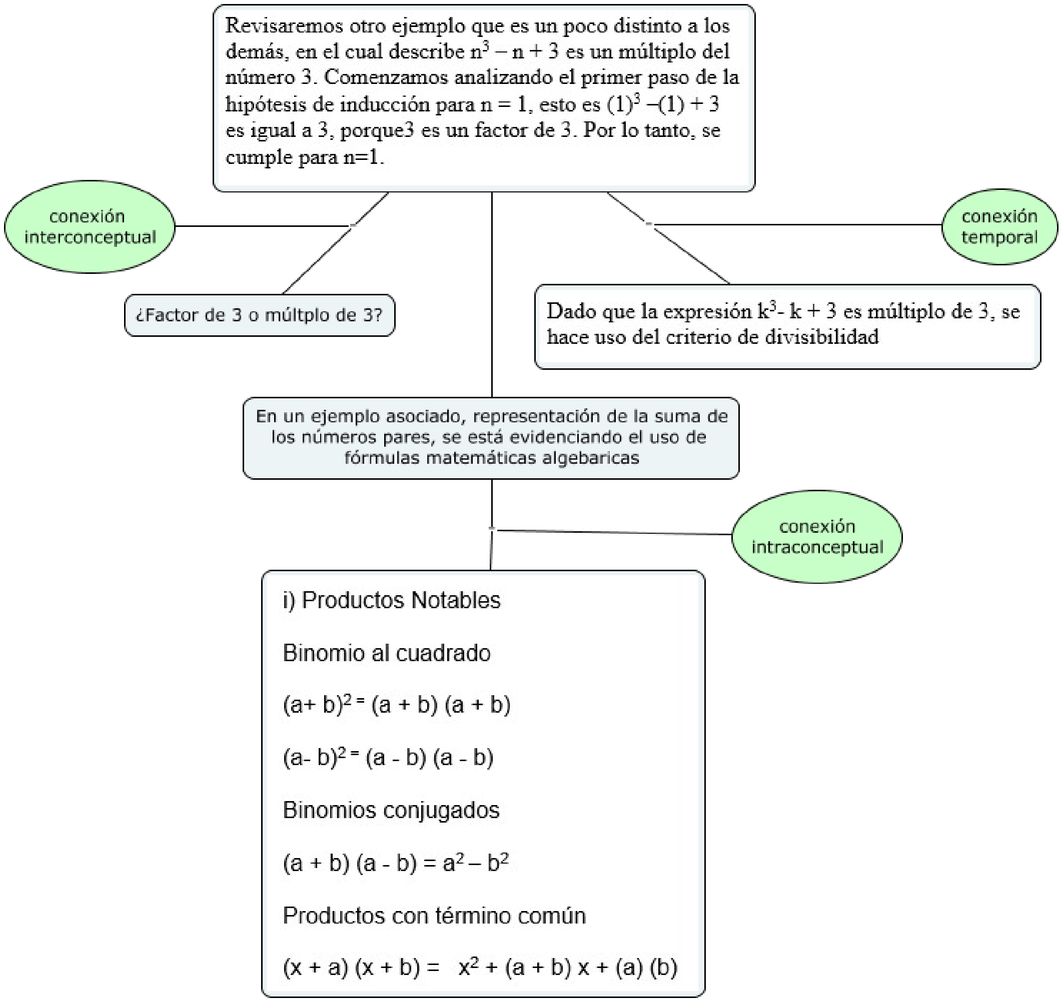
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la suma de los números naturales pares y que $\mathbf{k^3 - k + 3}$ es múltiplo de 3.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la suma de los números naturales pares y que $\mathbf{k^3 - k + 3}$ es múltiplo de 3.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de inducción matemática, ya que se utilizan dos ejemplos asociados a la clase anterior. Se evidencia el uso del lenguaje matemático, así como la coherencia en sus demostraciones. Dado que se verifica que $k^3 - k + 3$ es múltiplo de 3 para un cierto número natural k.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa el uso y manejo de los dos ejemplos de inducción matemática. Lore demuestra que $k^3 - k + 3$ es múltiplo de 3, en el cual lo describe como $k^3 - k + 3 = 3m$

Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que se está describiendo para encontrar la sumatoria de los números pares. Representado como $2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)$, brindando la oportunidad de indagar en ejercicios más confusos, tales como la sumatoria de los números primos.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de procedimientos Álgebraicos para determinar y demostrar los pasos inductivos que implica el método de inducción matemática. Pero determina que es necesario ampliar estas herramientas, dado que, en la tipificación de ejercicios de demostración de inducción matemática, se hace uso de notación matemática, tal y como $1+2n < 3^n$, para $n>2$.

4.3.4.- Análisis de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hacen presentes las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales

Esquema 11

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales de la clase 2 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En este bloque se describen las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 1 de la clase 2 de la práctica docente de Lore. En el esquema anterior se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 1 de la clase 2 de la práctica docente de Lore. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Lore se está revisando el tema de inducción matemática, las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión Álgebraica $k^3 - k + 3$ es múltiplo de 3, se hace uso de tres pasos para poder generalizar que se cumple para cualquier número natural n lo que evidencia conexiones entre el concepto de “divisibilidad” con el concepto de “la generalización de una expresión matemática”.

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en la expresión $\mathrm{k}^3 - \mathrm{k} + 3$ es múltiplo de 3 se hace uso del criterio de divisibilidad, para poder desarrollar y aplicar el método inductivo. En lo que compete al concepto de divisibilidad se hace uso del concepto de números primos, de leyes de potencias, que son necesarias para entender la naturaleza matemática de la demostración.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que, en la representación de la suma de los números pares, se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ muestra la esencia de la aplicación de estos conceptos.

4.3.5.- Análisis de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 35

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 1.

[3.1] Descripción del episodio (1-12)

Objetivo general: Analizar el concepto de inducción matemática, reforzando una sesión más de ejemplos de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando un ejemplo de la sumatoria de números enteros, Lore parte del ejemplo $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$ donde analiza los tres pasos inductivos para llegar a demostrar que se cumple para n = k+1

[A, 1.19] Lore presenta un ejemplo en la pizarra de la sumatoria de números enteros con la forma (3n-2) y verifica que la suma entre estos enteros es $\frac{n\,(3n-1)}{2}$ Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciar que se cumple para n=k+1.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)**

Subdescriptores;

i) **Conoce las formas de relacionar un ejemplo introductorio con un ejemplo secuencial, para posteriormente llegar a un ejemplo general, como la suma de los números naturales de la forma (3n-2).**

ii) **Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al conocimiento, como la suma de los números naturales de la forma (3n-2).**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo, parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 35

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de relacionar un ejemplo introductorio con un ejemplo secuencial, para posteriormente llegar a un ejemplo general, como la suma de los números naturales de la forma (3n-2).** **ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al conocimiento, como la suma de los números naturales de la forma (3n-2).**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático, dado que, al plantear el ejercicio de la suma de los números enteros de la forma (3n-2), toma como referencia el ejemplo de la suma de los números enteros.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe usar estrategias para dar a conocer el conocimiento matemático. Ya que en la evidencia de su práctica docente Lore describe los pasos para demostrar que: $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n - 1)}{2}$ Y como parte del desarrollo, hace uso de estrategias para dar cuenta de cómo se suman los números enteros de la forma (3n-2)
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar estrategias para sumar los números de la forma (3n-2), de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de estrategias para dar cuenta de cómo se suman los números enteros

	de la forma (3n-2). Este ejercicio da pauta a plantear otros ejemplos que no son abordados en clase. $N < 2^n$ para todo número natural n.

Ilustración 36

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 1.

[3.1] Descripción del episodio (1-12)

Objetivo general: Analizar el concepto de inducción matemática, reforzando una sesión más de ejemplos de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando un ejemplo de la sumatoria de números enteros, Lore parte del ejemplo $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$ donde analiza los tres pasos inductivos para llegar a demostrar que se cumple para n = k+1

[A, 1.19] Lore presenta un ejemplo en la pizarra de la sumatoria de números enteros con la forma (3n-2) y verifica que la suma entre estos enteros es $\frac{n\,(3n-1)}{2}$

Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciar que se cumple para n=k+1.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores;

i) **Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto la suma de los números naturales de la forma (3n-2).**

ii) **Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la suma de los números naturales de la forma (3n-2).**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo, parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 36

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto la suma de los números naturales de la forma (3n-2).** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la suma de los números naturales de la forma (3n-2).**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce estrategias entre las ideas principales del concepto de inducción matemática y su conocimiento previo, ya que en los ejemplos desarrollados en clase se presenta los tres pasos inductivos para desarrollar la demostración.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar estrategias entre los conceptos que se usan en inducción matemática. Dado que algunos de los conceptos que se presentarán fue número entero, número par e impar, número primo, multiplicidad, divisibilidad. Aunque no se tiene una prueba en la práctica docente o notas de clase de Lore que haya sido así, se intuye que debió haber sido así para entender la naturaleza de la demostración.

Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce las estrategias que se utilizan en la representación inductiva de los números de la forma (3n – 2), muy comúnmente justificados en libros de Teoría de Números. Lo que permite tener una oportunidad de validar el conocimiento matemático que se está presentando en la práctica docente de Lore.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore puede propiciar estrategias con este ejemplo donde se haga uso del conocimiento matemático en lo que respecta a divisibilidad (conocimientos previos). Como por ejemplo demostrar que: $25^n + 5$ es divisible entre 6.

Ilustración 37

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 1. [3.1] Descripción del episodio (1-12) **Objetivo general:** Analizar el concepto de inducción matemática, reforzando una sesión más de ejemplos de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de la sumatoria de ciertos números enteros, Lore parte del ejemplo $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$ donde analiza los tres pasos inductivos para llegar a demostrar que se cumple para n = k+1 [A, 1.19] Lore presenta un ejemplo en la pizarra de la sumatoria de números enteros con la forma (3n-2) y verifica que la suma entre estos enteros es $\frac{n\,(3n-1)}{2}$ Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciar que se cumple para n=k+1. **Conocimientos:**

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; **i) Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utiliza en la suma de los números naturales de la forma (3n-2).** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo, parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

Tabla 37

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

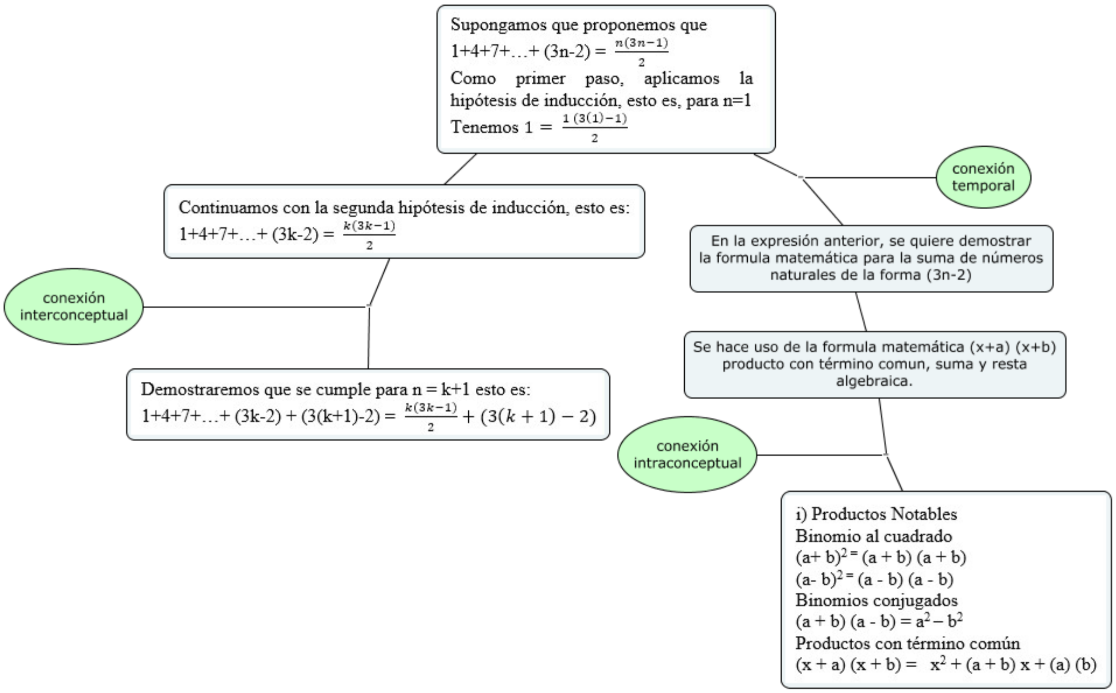
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utiliza en la suma de los números naturales de la forma (3n-2).**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de inducción matemática, ya que se utilizan ejemplos asociados a la clase anterior. Se evidencia el uso del lenguaje matemático, así como la coherencia en sus demostraciones. Dado que se verifica que $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n\,(3n-1)}{2}$ para todo número natural n.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa el uso y manejo de los ejemplos de inducción matemática. Lore demuestra que la suma de $1+4+7+\cdots+(3n-2)$ es igual a $\frac{n\,(3n-1)}{2}$

Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que se está describiendo para encontrar la sumatoria de los números enteros de la forma (3n-2). Representado como $1+4+7+\cdots+(3\mathrm{n}-2)=\frac{\mathrm{n}\,(3\mathrm{n}-1)}{2}$ brindando la oportunidad de indagar en ejercicios más confusos, tales como la sumatoria de los n números enteros positivos.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de procedimientos Álgebraicos para determinar y demostrar los pasos inductivos que implica el método de inducción matemática. Pero determina que es necesario ampliar estas herramientas, dado que, en la tipificación de ejercicios de demostración de inducción matemática, se hace uso de notación matemática, tal y como 1+ 2n < 3^n para todo número natural n >2 (con n =1 se da la igualdad)

4.3.6.- Análisis de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales

Esquema 12

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales de la clase 3 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En este esquema se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptules e temporales de la sesión 1 de la clase 3 de la práctica docente de Lore. En el esquema anterior se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptules e temporales de la sesión 1 de la clase 3 de la práctica docente de Lore. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Lore se está revisando el tema de inducción matemática, las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión Álgebraica $1 + 4 + 7 + \cdots + (3\text{n} - 2) = \frac{\text{n}\,(3\text{n}-1)}{2}$, se hace uso de tres pasos para poder generalizar que se cumple para cualquier número natural n lo que evidencia conexiones entre el concepto de “número natural” con el concepto de “la generalización de una expresión matemática”.

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en la expresión $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$ hace uso de la suma de algunos números naturales de la forma (3n-2), para poder desarrollar y aplicar el método inductivo. En lo que compete al concepto de divisibilidad se hace uso del concepto de números pares e impares, de leyes de potencias, que son necesarias para entender la naturaleza matemática de la demostración.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que, en la representación de la suma de los números naturales de la forma (3n-2) se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$ muestra la esencia de la aplicación de estos conceptos.

4.3.7.- Análisis de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

En esta sección se determinará la sesión 2 de las 3 sesiones de intervención que se tuvo en las clases de Lore. En las transcripciones de clase se evidencia que Lore establece una relación del tema de inducción matemática con el concepto de raíces de polinomios. Esto se describe dado que Lore manifiesta en su entrevista la importancia que tiene el tema de inducción matemática con otros conceptos que están presentes en la retícula de los estudiantes en particular el concepto de polinomios. Por tal motivo se describe a continuación el análisis de las tres clases donde se evidencia la práctica docente de Lore con respecto del tema de polinomios.

Ilustración 38

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 2.

[2.3] Descripción del episodio (1-11)

Objetivo general: Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones

[A, 1.11] Lore presenta un ejemplo de las soluciones de un polinomio de grado 5, haciendo uso de un cañón y laptop para mostrarlas en la pizarra las posibles soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)**

Subdescriptores;

i) **Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de polinomios.**

ii) **Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de polinomios.**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar sobre los polinomios de potencia 2.

Tabla 38

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de polinomios.** **ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de polinomios.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de polinomios, dado que la conexión que guardan la términología matemática con el proceso inductivo garantiza la vinculación. Por ejemplo, si se desea demostrar que 1+2+3+ …+ n = n (n+1) /2. Es necesario identificar que el término n(n+1) /2 es un polinomio de grado 2.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar ejemplos asociados al tema de polinomios, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de Lore analiza las posibles soluciones que tiene un polinomio de grado 5. Dando indicio a que es importante saber identificar las posibles raíces reales o complejos de un polinomio.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de polinomios, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.

Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, con está tipificación de ejercicios se puede validar el conocimiento matemático en otras áreas específicas y ubicarlo en la materia que se está impartiendo.

Ilustración 39

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 2.

[2.3] Descripción del episodio (1-11)

Objetivo general: Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones.

[A, 1.11] Lore presenta un ejemplo de las soluciones de un polinomio de grado 5, haciendo uso de un cañón y laptop para mostrarlas en la pizarra las posibles soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores;

i) **Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de polinomios, estableciendo las conexiones entre los temas.**

ii) **Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de polinomios, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases especíﬁcar sobre los polinomios de potencia 2.

Tabla 39

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de polinomios, estableciendo las conexiones entre los temas.** **ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de polinomios, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación que sustentan los conocimientos anteriores y posteriores al tema de polinomios. Dado que en las transcripciones de las clases como conocimiento anterior sustenta el concepto de los tres pasos inductivos para la demostración de inducción matemática. Y como conocimiento posterior menciona los diferentes ejemplos que se tienen para la demostración haciendo uso de la inducción matemática.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe orientar los conocimientos previos de sus estudiantes, dado que para poder dar introducción al concepto de polinomios menciona las soluciones reales o complejas que pudiera tener.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce como hacer los tipos de conexiones entre los conceptos, Lore presenta los conocimientos

	anteriores del tema de inducción matemática, y establece la conexión entre el concepto de polinomios.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos y analizar su continuidad.

Ilustración 40

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 2.

[2.3] Descripción del episodio (1-11)

Objetivo general: Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones.

[A, 1.11] Lore presenta un ejemplo de las soluciones de un polinomio de grado 5, haciendo uso de un cañón y laptop para mostrar en la pizarra las posibles soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)**

Subdescriptores;

i) **Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de polinomios.**

ii) **Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de polinomios.**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar sobre los polinomios de potencia 2.

Tabla 40

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

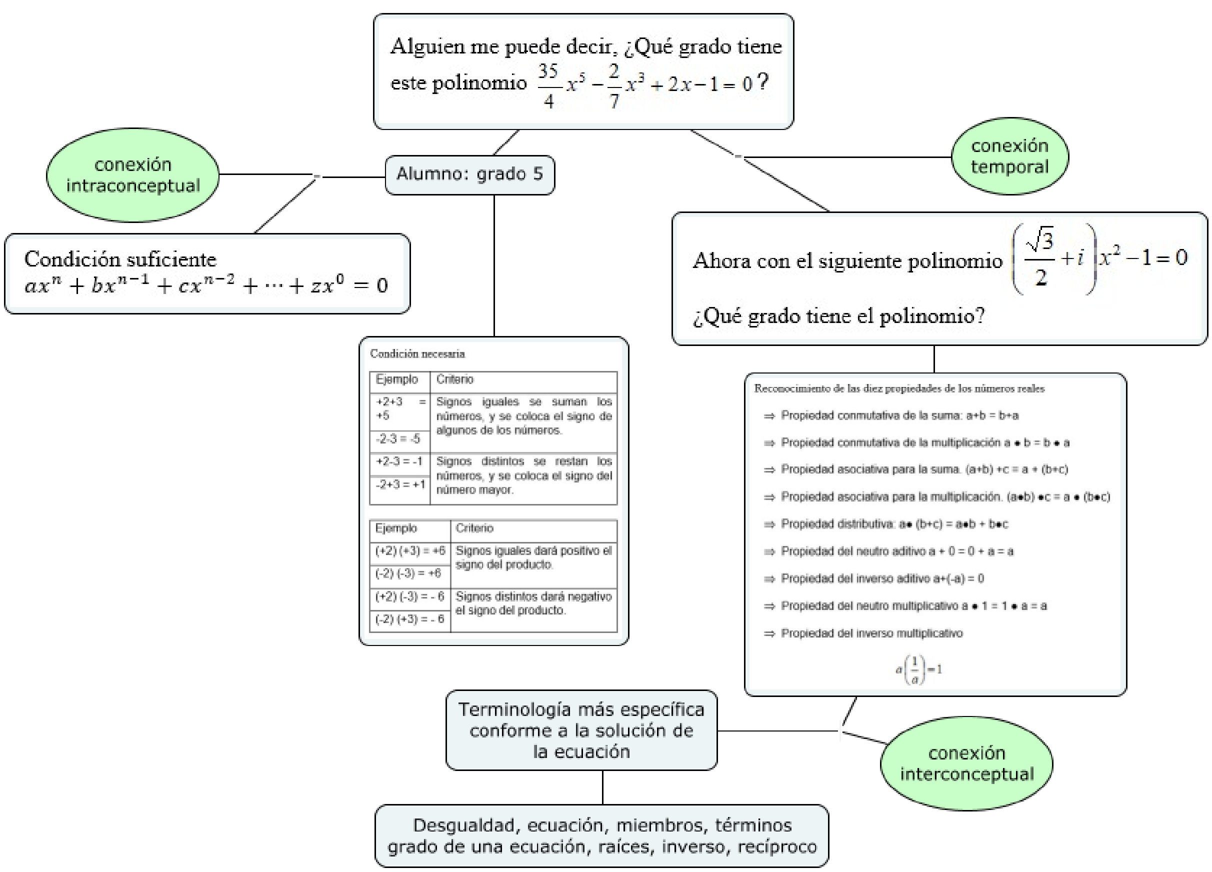
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de polinomios.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de polinomios.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de polinomios, dado que en el ejemplo $\frac{35}{4}x^5-\frac{2}{7}x^3+2x-1=0$ y el ejemplo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)x^2-1=0$, se hace uso de conocimientos previos para poder indagar en sus posibles soluciones.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita las posibles soluciones reales o complejas que puede tener el polinomio $\frac{35}{4}x^5-\frac{2}{7}x^3+2x-1=0$
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar algún tipo de software para representar la gráfica de una función. Con la garantía que le será de utilidad para representar de una forma más rápida y concreta las posibles soluciones reales que puede tener el polinomio.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de algún tipo de software para expresar las soluciones del polinomio. Con la oportunidad de compartir este conocimiento entre los

	maestros que imparten la misma materia o necesiten de algún recurso tecnológico.

4.3.8.- Análisis de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales.

Esquema 13

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales de la clase 1 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En este esquema se presenta el primero momento crítico se inicia con la pregunta que fórmula la maestra Lore a uno sus alumnos, “A partir de lo revisado en las anteriores clases, en esta semana revisaremos el concepto de polinomio y algunas técnicas de solución. Alguien me puede decir, ¿qué grado tiene este polinomio $\frac{35}{4}x^5 - \frac{2}{7}x^3 + 2x - 1 = 0$?”, en el cual uno de sus alumnos contesta “tiene grado 5”.

En la evidencia de grabación de este episodio clave, la maestra enseña a sus alumnos la importancia de tener presente el concepto de lo que es una ecuación. Donde se detecta que el tipo de conexión que se presenta en una **conexión intraconceptual,** ya que permite dar lugar a un conjunto de condiciones suficientes y necesarias a la específicación de un caso particular.

Ya que una condición suficiente para responder a los tipos de soluciones de una ecuación $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + zx^0 = 0$, es el reconocimiento de conceptos matemáticos básicos como:

i) Las operaciones aritméticas, que abordan las cuatro operaciones fundamentales de aritmética y de álgebra son:

	Signos usados	
	Aritmética	**Álgebra**
Suma o adición	+	
Resta o diferencia	-	
Multiplicación o producto	x, por	●, ( ), [ ], { }, *
División o cociente	÷, entre	/, —
Potencia	^	
Raíz cuadrada	$\sqrt{\ }$, $(\ )^{1/2}$	

ii) Las leyes de los signos para la suma y la resta, que abordan los criterios de operacionalidad de los cambios de signo:

Ejemplo	Criterio
+2+3= +5	Signos iguales se suman los números, y se coloca el signo de algunos de los números (cuando son dos números)
-2-3 = -5	
+2-3 = -1	Signos distintos se restan los números, y se coloca el signo del número mayor (cuando son dos números)
-2+3 = +1	

iii) Así como también las leyes de los signos para la multiplicación y la división:

Ejemplo	Criterio
(+2) (+3) = +6	Producto de dos números con mismo signo dará positivo.
(-2) (-3) = +6	
(+2) (-3) = - 6	Producto de dos números con distinto signo dará negativo.
(-2) (+3) = - 6	

En estos criterios, se logra detectar que está presente el "saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores". Ya que el reconocer, identificar y dominar estas leyes le permite al alumno que este conocimiento matemático sea un conocimiento común en el resto de sus compañeros y de esta manera ser capaz de desarrollar los ejercicios matemáticos con mayor fluidez.

El segundo momento crítico se inicia cuando Lore, hace la afirmación ***"***Ahora con el siguiente polinomio $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)x^2-1=0$, ¿Qué grado tiene el polinomio?"

En la evidencia de grabación de este episodio clave, se detecta que el tipo de conexión que se presenta es una **conexión temporal**, ya que permite estudiar no solo el grado del polinomio sino también el tipo de solución que se obtiene, dado que al aplicar el conocimiento aprendido a situaciones nuevas y/o más complejas, se evidencia que hay presencia de otros conceptos que posibilitan estudiar las propiedades básicas de la materia de Álgebra en una situación nueva. Ya que la implicación de las leyes de los signos tiene impacto sobre las propiedades de los números, así como el orden de jerarquía que deben efectuarse en estas operaciones.

i) Esto es, el reconocimiento de las diez propiedades de los números reales, que son:

⇒ Propiedad conmutativa de la suma: a+b = b+a

⇒ Propiedad conmutativa de la multiplicación a ● b = b ● a

⇒ Propiedad asociativa para la suma. (a+b) +c = a + (b+c)

⇒ Propiedad asociativa para la multiplicación. (a●b) ●c = a ● (b●c)

⇒ Propiedad distributiva: a● (b+c) = a●b + b●c

⇒ Propiedad del neutro aditivo a + 0 = 0 + a = a

⇒ Propiedad del inverso aditivo a+(-a) = 0

⇒ Propiedad del neutro multiplicativo a ● 1 = 1 ● a = a

⇒ Propiedad del inverso multiplicativo

$$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$$

Se logra detectar que, de las diez propiedades, la propiedad conmutativa y la del neutro multiplicativo fueron utilizadas en la observación que ofrece Lore *dado que, al permutar la ecuación, ofrece una mayor oportunidad para determinar la factorización, y con esto ver sus posibles raíces. Esto es:* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)x^2-1=-1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)x^2=0$”

ii) Otro elemento donde detectamos una **conexión temporal**, fue en la identificación de la jerarquía de las operaciones básicas, para la resolución de las ecuaciones cuadráticas, ya que este conocimiento se deriva de los conocimientos previos que debe tener el profesor, esto es:

⇒ Efectuar primero las multiplicaciones y divisiones.

⇒ Efectuar después sumas y restas de izquierda a derecha.

⇒ Si hay varios símbolos de agrupamiento, como paréntesis ( ), corchetes [] o llaves {}, uno dentro de otro, primero se efectúan las operaciones de los símbolos interiores y luego los exteriores.

En estos dos criterios, se logra detectar que está presente el “conocer las relaciones entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad”, y “conocer el tema, aunque no lo considere el programa”.

Otro momento crítico se inicia con la respuesta de uno de los alumnos de Lore, con respecto del grado del polinomio $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)x^2-1=0$, “alumno: grado 1”, en el cual Lore contesta: “Recuerde que la letra i, nos representa un número complejo. Esto es, el polinomio tiene coeficientes complejos”.

En la evidencia de grabación de este episodio clave, Lore enseña a sus alumnos la importancia de tener presente la solución de una ecuación cuadrática, no solo como un acomodo Álgebraico, sino como una raíz de la ecuación planteada. Donde se detecta que el tipo de conexión que se presenta es una **conexión interconceptual**, ya que permite afrontar los mismos y diferentes conceptos de un tema al momento de estar resolviéndolo. Ya que al resolver la ecuación del tipo $ax^2-c=0$, este implica conectarlo con cierta términología aún más específica, como lo es:

- Desigualdad: Es la expresión que representa dos cantidades con distinto valor.
- Ecuación: Es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas, y sólo se verifican para valores precisos. El objetivo de la ecuación es encontrar el o los valores de dichas incógnitas.
- Miembros: Se llama primer miembro de la ecuación o de una identidad a la expresión que está a la izquierda del signo de igualdad o identidad. Y segundo miembro a la expresión que está a la derecha de estos.
- Términos: Son cada una de las expresiones que están conectadas por los signos + o - u otra cantidad que esté sola en un miembro.
- Grado de una ecuación: Cuando la ecuación tiene una sola incógnita, el grado lo indica el exponente mayor de la incógnita. Sea $2x^2 + 3x + 1 = 0$, la ecuación es de segundo grado.
- Raíces: O soluciones de una ecuación, son los valores hallados que verifican o que al sustituirse en la ecuación se convierten en identidad.
- Inverso: Partiendo de la regla que se deriva del axioma, "si a los dos miembros de una ecuación se les suma y/o se les resta una misma cantidad la igualdad persiste"; el inverso de un término positivo es el mismo término con signo negativo y el inverso de un término negativo es un término positivo.
- Recíproco: Partiendo de la regla que se deriva del axioma, "si los dos miembros de una ecuación se multiplican y/o dividen por una misma cantidad no cero, la igualdad persiste". El recíproco de un término positivo multiplicando es el mismo término positivo dividiendo y el recíproco de un término negativo multiplicando es el mismo término negativo dividiendo.

Este saber permite identificar la importancia de un concepto, tal como lo es la ecuación y cada una de partes, ya que el hablar de las soluciones de una ecuación de un orden n, nos permite caracterizarla según la forma y esencia de su solución.

4.3.9.- Análisis de la clase 2 de la sesión 2 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 41

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 2. [2.2] Descripción del episodio (1-17) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones [A, 1.11] Lore presenta un ejemplo de las posibles soluciones de un polinomio de grado 3, tomando como referencia la clase anterior describiéndolas sobre la pizarra. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **i) Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático en los tipos de soluciones de los polinomios.**

ii) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y en los tipos de soluciones de los polinomios. **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases especíificar sobre los polinomios de grado n.

Tabla 41

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de la práctica.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático en los tipos de soluciones de los polinomios.** **ii) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y en los tipos de soluciones de los polinomios.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de polinomios, dado que la conexión que guardan la términología matemática con el proceso inductivo garantiza la vinculación. Por ejemplo, si se desea demostrar que $1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{k\,(3k-1)}{2}$Es necesario identificar que el término $\frac{k\,(3k-1)}{2}$ es un polinomio de grado 2.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar ejemplos asociados al tema de polinomios, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de Lore analiza las posibles soluciones que tiene un polinomio de grado 3. Dando indicio

	a que es importante saber identificar las posibles raíces reales o complejos de un polinomio.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de polinomios, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, con esta tipificación de ejercicios se puede validar el conocimiento matemático en otras áreas específicas y ubicarlo en la materia que se está impartiendo.

Ilustración 42

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 2. [2.2] Descripción del episodio (1-17) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones [A, 1.11] Lore presenta un ejemplo de las posibles soluciones de un polinomio de grado 3, tomando como referencia la clase anterior describiéndolas sobre la pizarra. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores; Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto en los tipos de soluciones de los polinomios **i) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y en los tipos de soluciones de los polinomios.** **ii) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros de la representación en los tipos de soluciones de los polinomios.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar sobre los polinomios de grado n.

Tabla 42

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**iii) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y en los tipos de soluciones de los polinomios.** **iv) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros de la representación en los tipos de soluciones de los polinomios.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación que sustentan los conocimientos anteriores y posteriores al tema de polinomios. Dado que en las transcripciones de las clases como conocimiento anterior sustenta el concepto de los tres pasos inductivos para la demostración usando la inducción matemática. Y como

	conocimiento posterior menciona los diferentes ejemplos que se tienen para poder discernir en las soluciones de los polinomios.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe orientar los conocimientos previos de sus estudiantes, dado que para poder dar introducción al concepto de polinomios menciona las soluciones reales o complejos que pudiera tener.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce como hacer los tipos de conexiones entre los conceptos, Lore presenta los conocimientos anteriores del tema de inducción matemática, y establece la conexión entre el concepto de polinomios.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos y analizar su continuidad.

Ilustración 43

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 2. [2.2] Descripción del episodio (1-17) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones [A, 1.11] Lore presenta un ejemplo de las posibles soluciones de un polinomio de grado 3, tomando como referencia la clase anterior describiéndolas sobre la pizarra. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución.

Conocimientos: Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto en los tipos de soluciones de los polinomios **i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto los tipos de soluciones de los polinomios** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en los tipos de soluciones de los polinomios.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar sobre los polinomios de grado n.

Tabla 43

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

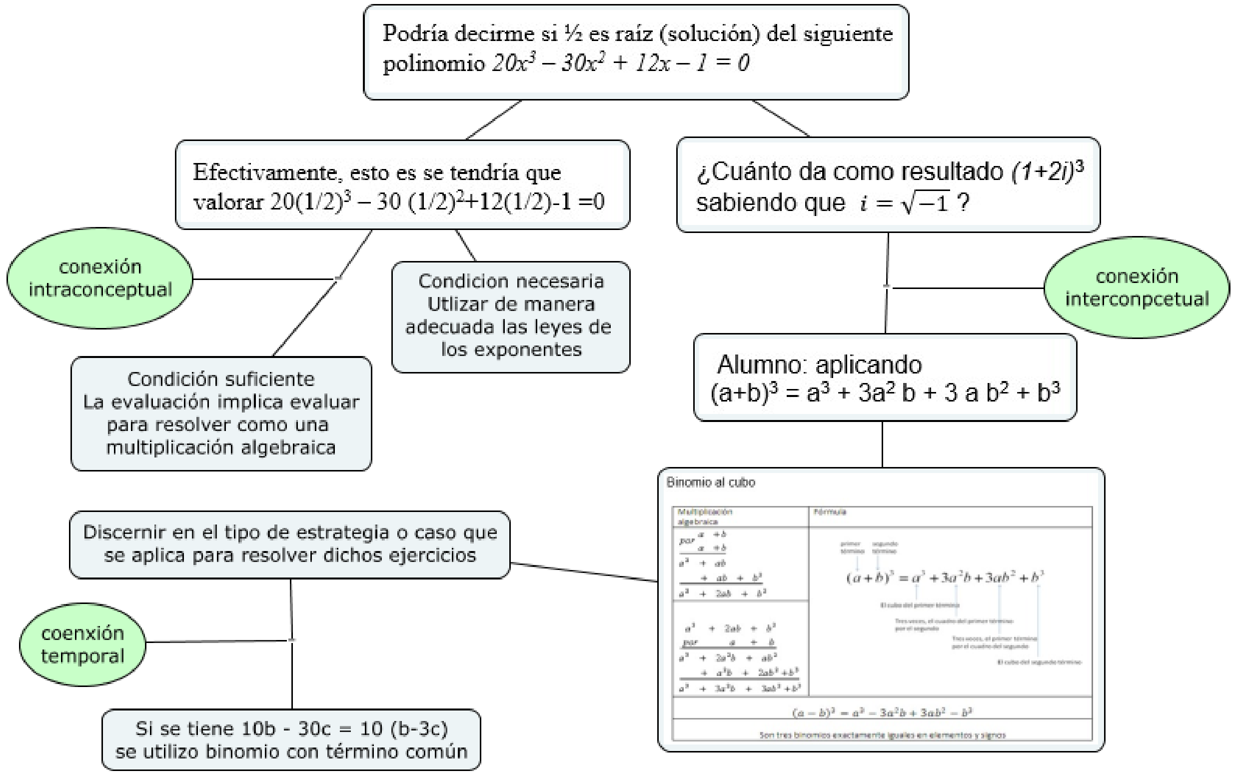
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto los tipos de soluciones de los polinomios** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en los tipos de soluciones de los polinomios.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de polinomios, dado que en el ejemplo $x^3 - 2(1 + i) x^2 - (1 - 2i) x + 2(1 + 2i) = 0$. Y el ejemplo $x^3 - 2(1 + i) x^2 - (1 - 2i) x + 2(1 + 2i) = 0$, se hace uso de conocimientos previos para poder indagar en sus posibles soluciones.

Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita las posibles soluciones reales o complejas que puede tener el polinomio $x^3 - 2(1 + i)\, x^2 - (1 - 2i)\, x + 2(1 + 2i) = 0$
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar algún tipo de software para representar la gráfica de una función. Con la garantía que le será de utilidad para representar de una forma más rápida y concreta las posibles soluciones reales que puede tener el polinomio.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de algún tipo de software para expresar las soluciones del polinomio. Con la oportunidad de compartir este conocimiento entre los maestros que imparten la misma materia o necesiten de algún recurso tecnológico.

4.3.10.- Análisis de la clase 2 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales

Esquema 14

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 2 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En este esquema se describe las transcripciones de las grabaciones de Lore, en donde se hace énfasis de los tipos de solución que tiene una ecuación cuadrática y la forma de comprobación que tiene. Durante las grabaciones en clase, se suscitan varias manifestaciones en clase, que permitieron analizar conexiones durante la clase.

En la grabación se manifiesta a Lore comenzando con la descripción de los elementos que sustentarán el tema, en este caso los casos de factorización. Posteriormente presta atención a la comprobación que implica utilizar estos casos de factorización, que es mediante el tema de los productos notables. Su cierre de esta actividad consiste en pasar al pizarrón a algunos de sus alumnos para confirmar lo ya explicado.

Un momento crítico se inicia con la pregunta que fórmula Lore a uno sus alumnos, "Dado las características y ejemplos que vimos la semana anterior, podría decirme si ½ es raíz (solución) del siguiente polinomio $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0$,
Efectivamente, esto es se tendría que valorar $20(1/2)^3 - 30(1/2)^2 + 12(1/2) - 1 = 0$"

En la evidencia de grabación de este episodio clave, Lore enseña a sus alumnos la importancia de tener presente el concepto de raíz (solución) de un polinomio y su manera de describirlos matemáticamente. Donde se detecta que el tipo de conexión que se presenta es una **conexión intraconceptual,** ya que permite dar lugar a un conjunto de condiciones suficientes y necesarias a la específicación de un caso particular.

Ya que una condición suficiente para responder es que se tendría que evaluar $20(1/2)^3 - 30(1/2)^2 + 12(1/2) - 1 = 0$ para resolverlo como una multiplicación aritmética, mientras que una condición necesaria será utilizar de manera adecuada las leyes de los exponentes.

Otro momento crítico se inicia con la pregunta que fórmula Lore a uno los estudiantes. "¿Cuánto da como resultado $(1+2i)^3$?, sabiendo que $i = \sqrt{-1}$". Y el alumno contesta "Pues aplicando $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3 a b^2 + b^3$".

En la evidencia de grabación de este episodio clave, Lore enseña a sus alumnos la importancia de tener presente el concepto de los productos notables y su manera de describirlos matemáticamente. Donde se detecta que el tipo de conexión que se presenta en una **interconceptual,** ya que permite dar lugar a un conjunto de condiciones suficientes y necesarias a la específicación de un caso particular.

Ya que una condición suficiente para responder al producto notable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, es resolverlo como una multiplicación Álgebraica, esto es:

Figura 9. *Trinomio Cuadrado Perfecto*

Multiplicación algebraica	Fórmula
$\begin{array}{llll} & a & +b & \\ por & a & +b & \\ \hline a^2 & +ab & & \\ & +ab & +b^2 & \\ \hline a^2 & +2ab & +b^2 & \end{array}$	$(a+b)(a+b) = (\overset{\text{primer término}}{a} + \overset{\text{segundo término}}{b})^2 = \underset{\text{El cuadrado del primer término}}{a^2} + \underset{\text{El doble producto del primero por el segundo}}{2ab} + \underset{\text{El cuadrado del segundo término}}{b^2}$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
Son dos binomios exactamente iguales en elementos y signos	

Y una condición necesaria es describirlo en una específicación de un caso particular, por ejemplo, el binomio $(m + 3)^{2} = (m + 3)(m + 3)$

Dicha regla dice:

El cuadrado del primero término $(m)^2 = m^2$

El doble producto del primero por el segundo $2(m)(3) = 6m$

El cuadrado del segundo término $(3)^2 = 9$

Luego entonces. La respuesta es: $(m + 3)^2 = m^2 + 6m + 9$

En la evidencia de grabación de este episodio clave, Lore les recuerda a sus alumnos los casos de productos notables. Donde se detecta que el conocimiento previo para abordarlos es el reconocimiento de la multiplicación Álgebraica de binomios específicos que son:

Figura 10. *Producto Notable Binomio al Cuadrado*

Multiplicación algebraica	Fórmula
$\begin{array}{lcccc} & a & +b & & \\ por & a & +b & & \\ \hline a^2 & + & ab & & \\ & + & ab & + & b^2 \\ \hline a^2 & + & 2ab & + & b^2 \end{array}$	primer término; segundo término $(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ El cuadrado del primer término El doble producto del primero por el segundo El cuadrado del segundo término
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
Son dos binomios exactamente iguales en elementos y signos	

Los binomios conjugados señalan la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia.

FIGURA 11. *Producto Notable Binomios Conjugados*

Multiplicación algebraica	Fórmula
$\begin{array}{lcccc} & a & +b & & \\ por & a & -b & & \\ \hline a^2 & + & \cancel{ab} & & \\ & - & \cancel{ab} & - & b^2 \\ \hline a^2 & + & 0 & + & b^2 \end{array}$	primer término $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ segundo término El cuadrado del primer término El cuadrado del segundo término
Son dos binomios iguales, pero uno con signo + y el otro -	

Los binomios con término común, como su nombre lo mencionan tienen por lo menos un elemento en común.

Figura 12. *Producto Notable Binomio con término común*

Multiplicación algebraica	Fórmula
$a \quad +m$ $por \quad a \quad +n$ $a^2 \quad + \quad am$ $+ \quad an \quad + \quad mn$ $a^2 \quad + \quad a(m+n) \quad + \quad mn$	término común $(a+m)(a+n) = a^2 + (m+n)a + (m)(n)$ término no comunes El término común al cuadrado La suma de los términos no comunes por el término común El producto de los términos no comunes
Son dos binomios con un término igual	

Figura 13. *Producto Notable Binomio al Cubo*

Multiplicación algebraica	Fórmula
$a \quad +b$ $por \quad a \quad +b$ $a^2 \quad + \quad ab$ $+ \quad ab \quad + \quad b^2$ $a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2$ $a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2$ $por \quad a \quad + \quad b$ $a^3 \quad + \quad 2a^2b \quad + \quad ab^2$ $+ \quad a^2b \quad + \quad 2ab^2 + b^3$ $a^3 \quad + \quad 3a^2b \quad + \quad 3ab^2 + b^3$	primer término segundo término $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ El cubo del primer término Tres veces, el cuadro del primer término por el segundo Tres veces, el primer término por el cuadro del segundo El cubo del segundo término
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	
Son tres binomios exactamente iguales en elementos y signos	

En estos criterios, se logra detectar que está presente el “saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores” (González, p. 302, 2018), dado que utiliza y aplica los productos notables que facilitan al alumno este conocimiento matemático sea un conocimiento común en el resto de sus compañeros y de esta manera ser capaz de desarrollar los ejercicios matemáticos con mayor fluidez.

El segundo momento crítico se inicia con la pregunta que fórmula Lore a uno los estudiantes. "*De las ecuaciones cuadráticas completas, que revisaremos el día de hoy, se revisarán tres maneras posibles, sabiendo que ya revisamos los diez casos de factorización"*, y el alumno contesta "*a cuadrado, más dos veces a por b, más b al cuadrado*".

En la evidencia de grabación Lore enseña a sus alumnos la importancia de tener presente la factorización de una ecuación cuadrática, no solo como una expresión Álgebraica, sino como un criterio de resolución de una ecuación planteada. Donde se detecta que el tipo de conexión que se presenta es una **conexión temporal,** ya que permite afrontar los mismos y diferentes conceptos de un tema al momento de estar resolviéndolo. Ya que resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, implica conectarlo con un contenido más específico, en este caso, los diez casos de factorización. Es propio describir que algunos de los conceptos que necesitará para conectar este contenido a otro más específico, son:

- Factores: Se llama factores o divisores de una expresión Álgebraica a las expresiones Álgebraicas que, multiplicadas entre sí, dan como resultado la expresión original.
- Número Primo: Es aquel que sólo acepta dos divisiones; entre sí mismo y entre la unidad. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27…, etc.
- Raíz cuadrada de un monomio: Para extraer la raíz cuadrada de un monomio, se deberá obtener a aquel número que elevado a la potencia 2, dé el coeficiente del

monomio respecto a las literales que se encuentren en dicho monomio, sus exponentes (obviamente pares) se dividen por 2.

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{m^2} = (m^2)^{\frac{1}{2}} = m^1 = m$$

$$\sqrt{m^{100}} = (m^{100})^{\frac{1}{2}} = m^{50}$$

Factorizar o descomponer una expresión (preferentemente en factores primos para tener más opciones de trabajar con dichos factores) tiene por objeto utilizar dichos factores primos a nuestra conveniencia. Esto significa que el uso de la factorización hace el trabajo más ligero. Cuando se entablece el tema de Productos Notables, se habló de la estrecha relación que hay entre los productos vistos y los casos de factorización que se describirán a continuación.

i) Factorización de un trinomio cuadrado perfecto de la forma $a^2 + 2ab + b^2$

Observar y recordar que un trinomio cuadrado perfecto es el resultado de un binomio al cuadrado; y al factorizar dicho trinomio, el resultado será el mismo binomio al cuadrado. Así se confirma lo dicho en la definición de factores.

$\overset{\text{primer término}}{a^2} + \overset{\text{segundo término}}{2ab} + \overset{\text{tercer término}}{b^2}$	
1) Raíz cuadrada del 1er y 3er término	$\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{b^2} = b$
2) Verificar que está presente el doble producto del 1er término por el 3er término	2 a b
3) Considerar el signo del segundo término	+
4) Acomodar	$(a+b)(a+b)$

ii) Factorización de una diferencia de cuadrados

Recordar y observar que una diferencia de cuadrados es el resultado del producto notable llamado binomios conjugados.

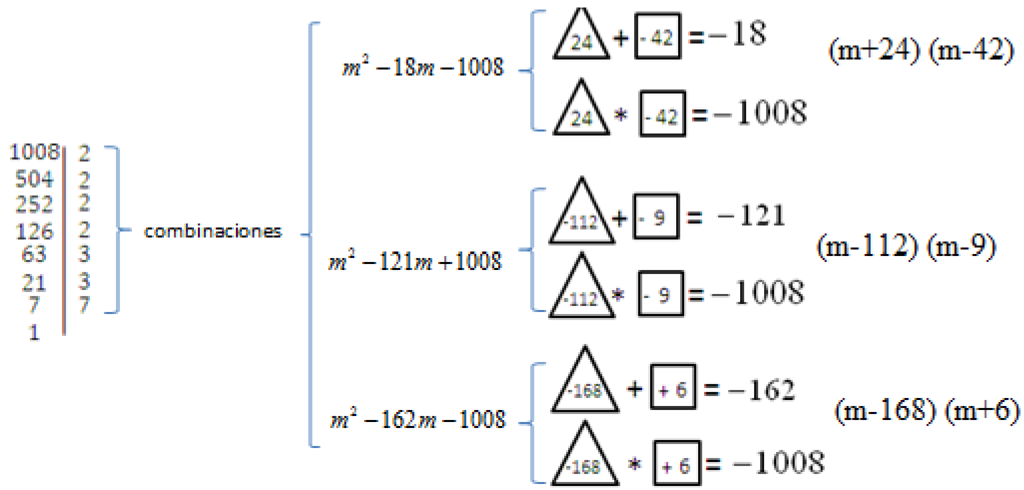
$\overset{\text{primer término}}{a^2} - \overset{\text{segundo término}}{b^2}$	
1) Raíz cuadrada del 1er y 2ª. término	$\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{b^2} = b$
2) Verificar que está presente el signo -	$-$
3) Acomodar	$(a+b)\,(a-b)$

iii) Factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Recordar y observar que una factorización de un trinomio de esta forma es el resultado del producto notable llamado binomio con término común.

Dos números que sumados den + b $\{\triangle + \square = +b$ $x^2 + bx + c$ coeficiente debe ser 1 — Dos números que multiplicados den + c $\{\triangle \cdot \square = +c$	
1) El coeficiente que acompaña a la literal elevada al cuadrado debe de ser +1.	$X^2 = 1 * X^2 = +1 * X^2$
2) Encontrar 2 números que sumados nos den +b, y esos mismos números multiplicados nos den +c	$\triangle + \square = +b$ $\triangle \cdot \square = +c$
3) Acomodar	Los signos dependerán de la condición 2). $(\mathbf{X} + \triangle)\,(\mathbf{X} + \square)$

Como encontrar los factores que nos darán la suma y el producto al mismo tiempo en un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$. Si utilizamos el hecho de la descomposición en factores primos del término independiente (+ c), tenemos, en los siguientes ejemplos:



iv) Factorización de una ecuación de segundo grado.

Sea la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la forma de resolverla es la denominada fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Sea $4x^2 - 8x + 2 = 0$, entonces:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(2)}}{2(4)} = \frac{8 \pm \sqrt{64-32}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{8} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{8}$$

$$\begin{array}{ll} x = \dfrac{8+4\sqrt{2}}{8} & \Rightarrow 8x = 8 + 4\sqrt{2} \\ x = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{8} & \Rightarrow 8x = 8 - 4\sqrt{2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(8x - \left(8 + 4\sqrt{2}\right)\right)\left(8x - \left(8 - 4\sqrt{2}\right)\right)$$

observar que al desarrollar éste último producto se obtendrá un múltiplo de la ecuación original: $64x^2 - 128x + 32 = 16\,(4x^2 - 8x + 2)$

v) Factorización por Factor Común: Para realizar una factorización por factor común, es imprescindible que todos los términos del polinomio tengan un factor común, ya sea en los coeficientes, en las literales o en ambos. Para realizar sin errores dicha factorización es necesario obtener el Máximo Común Divisor (M.C.D.) de dos o más cantidades. Esto se consigue factorizando los coeficientes de cada término en sus factores primos, luego entonces se eligen los factores comunes con su menor exponente y estos se multiplican entre sí.

Ejemplo: 10b – 30c

$$10\,b - 30\,c = 2 * 5 * b - 2 * 5 * 3 * c$$
$$2 * 5 * b - 2 * 5 * 3 * c = 2 * 5\,(b - 3 * c)$$
$$10\,(b - 3c)$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Observar que este tipo de factorización se puede presentar en binomios, trinomios o polinomios.

$$15\,y^3 + 20\,y^2 + 5y = 3 * 5 * y * y * y + 2 * 2 * 5 * y * y + 1 * 5 * y$$
$$= 3 * 5 * y * y * y + 2 * 2 * 5 * y * y + 1 * 5 * y$$
$$= 5 * y\,(3 * y * y + 2 * 2 * y + 1)$$
$$= 5y\,(3y^2 + 4y + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

En estos criterios, se logra detectar que está presente el “saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye)”, (González, p.302, 2018). Ya que el distinguir y seleccionar el caso o casos que se aplican en algún tipo de ejemplo, enfrenta al alumno a ubicar y discernir sobre la estrategia que aplicará para resolver dicho ejemplo. También se puede apreciar que está presente el "saber cómo conectar un contenido con otro más específico", dado que tener el término 10b – 30c, y llevarlo a un desglose de términos según los criterios ya revisados de descomposición Álgebraica de números primos, como 10b -30c =10 (b – 3c), nos lleva a presentar a una expresión Álgebraica como un producto Álgebraico de monomios, binomios y polinomios. Y es ahí la importancia de conocer los conceptos que anteceden a este tema, ya que esto permitirá que los alumnos puedan resolver otro tipo de ejemplos que le permitirán ver generalizaciones de los conceptos, tal y como fue dicho en $15\ y^3 + 20\ y^2 + 5y$.

4.3.11.- Análisis de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 44

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 2. [2.2] Descripción del episodio (1-12) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones tanto reales como complejas, donde si son reales indaga sobre su representación racional. [A, 1.12] Lore presenta un ejemplo de las posibles soluciones de un polinomio de grado 3, tomando como referencia la clase anterior describiéndolas sobre la pizarra. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; i) **Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con las soluciones del polinomio, para posteriormente llegar a la gráfica de un polinomio.** ii) **Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema de la gráfica de un polinomio.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar sobre los polinomios de grado n.

Tabla 44

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i)**	**Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con las soluciones del polinomio, para posteriormente llegar a la gráfica de un polinomio.**

	ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema de la gráfica de un polinomio.
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de polinomios, dado que la conexión que guardan la términología matemática con el proceso inductivo garantiza la vinculación. Por ejemplo, si se desea demostrar que: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$. Es necesario identificar que el término $n(n + 1)$ es un polinomio de grado 2.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar ejemplos asociados al tema de polinomios, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de Lore analiza las posibles soluciones que tiene un polinomio de grado 3. Dando indicio a que es importante saber identificar las posibles raíces reales o complejos de un polinomio.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de polinomios, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, con esta tipificación de ejercicios se puede validar el conocimiento matemático en otras áreas específicas y ubicarlo en la materia que se está impartiendo.

Ilustración 45

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 2.

[2.2] Descripción del episodio (1-12)

Objetivo general: Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones

[A, 1.12] Lore presenta un ejemplo de las posibles soluciones de un polinomio de grado 3, tomando como referencia la clase anterior describiéndolas sobre la pizarra. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores;

Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto en los tipos de soluciones de los polinomios

i) **Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la gráfica de un polinomio**

ii) **Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros en la gráfica de un polinomio**.

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar sobre los polinomios de grado n.

Tabla 45

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la gráfica de un polinomio** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros en la gráfica de un polinomio**.
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación que sustentan los conocimientos anteriores y posteriores al tema de polinomios. Dado que en las transcripciones de las clases como conocimiento anterior sustenta el concepto de los tres pasos inductivos para la demostración usando la inducción matemática. Y como conocimiento posterior menciona los diferentes ejemplos que se tienen para poder discernir en las soluciones de los polinomios.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe orientar los conocimientos previos de sus estudiantes, dado que para poder dar introducción al concepto de polinomios menciona las soluciones reales o complejos que pudiera tener.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce como hacer los tipos de conexiones entre los conceptos, Lore presenta los conocimientos anteriores del tema de inducción matemática, y establece la conexión entre el concepto de polinomios.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos y analizar su continuidad.

Ilustración 46

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 2.
[2.2] Descripción del episodio (1-12) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones [A, 1.12] Lore presenta un ejemplo de las posibles soluciones de un polinomio de grado 3, tomando como referencia la clase anterior describiéndolas sobre la pizarra. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto en los tipos de soluciones de los polinomios i) **Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental en la gráfica de un polinomio, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar sobre los polinomios de grado n.

Tabla 46

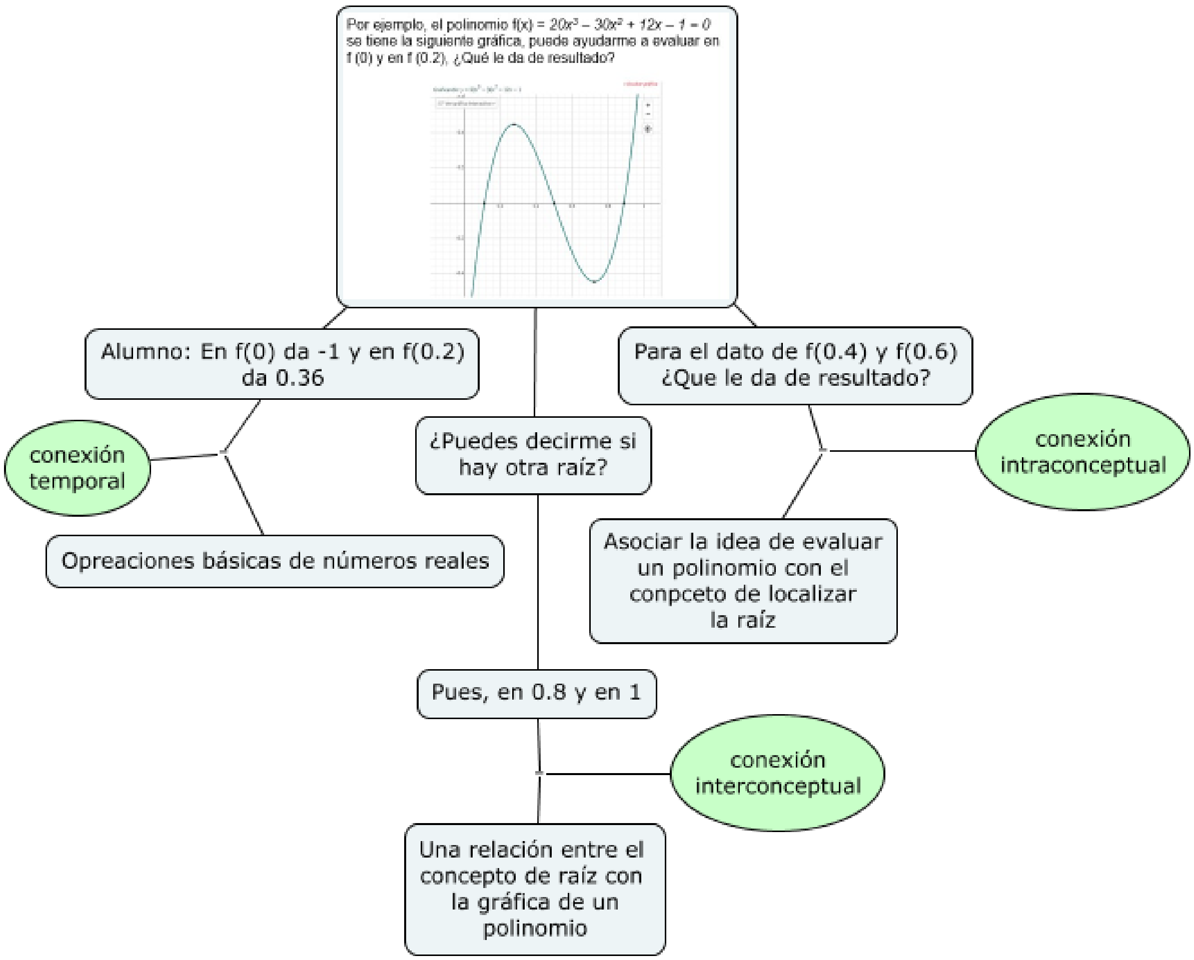
Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Subdescriptor HCK (V)	**iii) Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental en la gráfica de un polinomio, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de polinomios, dado que en el ejemplo f(x) = $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0$, se hace uso de conocimientos previos para poder indagar en sus posibles soluciones y hacer sus representaciones gráfica.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita las posibles soluciones reales o complejas que puede tener el polinomio f(x) = $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0$
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar algún tipo de software para representar la gráfica de una función. Con la garantía que le será de utilidad para representar de una forma más rápida y concreta las posibles soluciones reales que puede tener el polinomio.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de algún tipo de software para expresar las soluciones del polinomio. Con la oportunidad de compartir este conocimiento entre los maestros que imparten la misma materia o necesiten de algún recurso tecnológico.

4.3.12.- Análisis de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presentes las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales

Esquema 15

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 3 de la sesión 2 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.

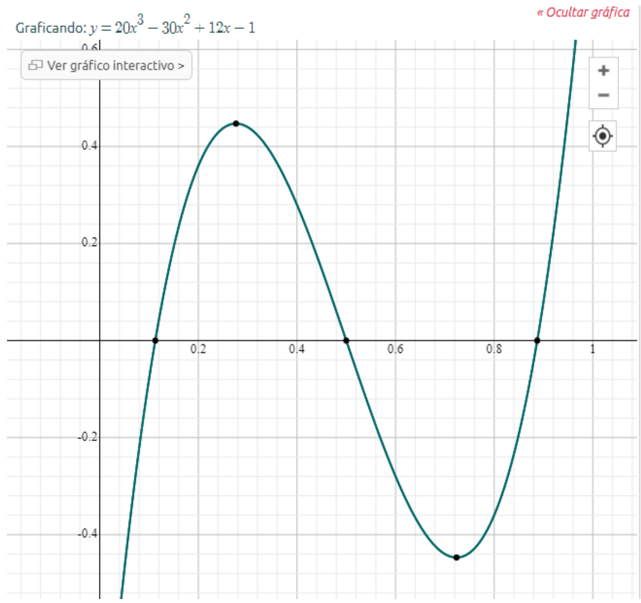


En este esquema se presenta el desarrollo de estas sesiones, Lore continúa profundizando el tema de las soluciones de polinomios y como se pudo evidenciar durante las grabaciones en clase, se suscita varias manifestaciones, que permitieron analizar las conexiones entre el docente y los alumnos, y se desatan nuevamente conexiones que dan esencia al conocimiento del horizonte matemático.

En la continuidad de estos acercamientos, Lore enfatiza la representación gráfica de un polinomio, pero ahora determinando sus soluciones por medio de las evaluaciones.

Un primer momento crítico se inicia con la pregunta que fórmula Lore a uno de los estudiantes. “Por ejemplo, el polinomio f(x) = $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0$ se tiene la siguiente gráfica, puede ayudarme a evaluar en f (0) y en f (0.2), ¿Qué le da de resultado?

Figura 15. *Grafica del polinomio* $f(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$



Alumno: En f (0) da como resultado -1 y en f (0.2) da como resultado 0.36.

Donde se detecta que el tipo de conexión que se presenta es una **conexión temporal**, ya que permite afrontar otras propiedades de un concepto o procedimiento, para poderlo aplicar al conocimiento nuevo a otras situaciones más complejas. El hecho de confrontar un concepto ya visto en niveles educativos anteriores, tal y como lo son las operaciones básicas entre decimales, nos permite revisar las operaciones que lo distingue según su naturaleza de sus operaciones.

Otro momento crítico se presenta cuando Lore, solicita evaluar a sus alumnos en el polinomio otros registros “Para el dato de en f (0.4) y en f (0.6), ¿Qué le da de resultado?”, donde el alumno le contesta: “En f (0.4) da como resultado 0.28 y en f (0.6) da como resultado -0.28”, se presenta una **conexión intraconceptual** ya que asocia la idea de evaluar un término en un polinomio con el concepto de localizar la raíz.

Finalmente, otro momento crítico, se evidencia cuando Lore hace la siguiente pregunta “De acuerdo a la gráfica, ¿puedes decirme si hay otra raíz?”, el alumno contesta: Pues, en 0.8 y en 1. Se presenta una **conexión interconceptual** dado que establece una conexión entre el concepto de raíz de un polinomio con la gráfica de un polinomio.

4.3.13.- Análisis de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

En esta sección se determinó la sesión 3 de las 3 sesiones de intervención que se tuvo en las clases de Lore. En las transcripciones de clase se evidencia que Lore establece una relación del tema de inducción matemática con el concepto de raíces de polinomios, en específico para esta sección los polinomios de orden 2. Esto se describe dado que Lore manifiesta en su entrevista la importancia que tiene el tema de inducción matemática con otros conceptos que están presentes en la retícula de los estudiantes en particular el concepto de polinomios. Por tal motivo se describe a continuación el análisis de las tres clases donde se evidencia la práctica docente de Lore con respecto del tema de polinomios.

Ilustración 47

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 3. [3.1] Descripción del episodio (1-18) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones [A, 1.18] Lore presenta un ejemplo de las soluciones de un polinomio de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza los tipos de soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **i) Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de la ecuación cuadrática.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar las estrategias y tipos de solución que tiene ecuación de orden 2.

Tabla 47

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de la ecuación cuadrática.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de polinomios de orden 2, dado que la conexión que guardan la términología matemática con el proceso inductivo garantiza la vinculación. Por ejemplo, si se desea demostrar que 1+2+3+ …+ n = n (n+1) /2. Es necesario identificar que el término n(n+1) /2 es un polinomio de grado 2.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar ejemplos asociados al tema de polinomios, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de Lore analiza las posibles soluciones que tiene un polinomio de grado 2. Dando indicio a que es importante saber identificar las posibles raíces complejas y las incompletas reales de un polinomio de grado 2.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de polinomios, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.

Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, con está tipificación de ejercicios se puede validar el conocimiento matemático en otras áreas específicas y ubicarlo en la materia que se está impartiendo.

Ilustración 48

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 3.

[3.1] Descripción del episodio (1-18)

Objetivo general: Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones

[A, 1.18] Lore presenta un ejemplo de las soluciones de un polinomio de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza los tipos de soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)**

Subdescriptores;

- **i) Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto el concepto de la ecuación cuadrática, estableciendo las conexiones entre los temas.**
- **ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la ecuación cuadrática, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases específicar las estrategias y tipos de solución que tiene una ecuación de orden 2.

Tabla 48

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de la ecuación cuadrática, estableciendo las conexiones entre los temas.** **ii) Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la ecuación cuadrática, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación que sustentan los conocimientos anteriores y posteriores al tema de polinomios. Dado que en las transcripciones de las clases como conocimiento anterior sustenta el concepto de los tres pasos inductivos para la demostración de inducción matemática. Y como conocimiento posterior menciona los diferentes ejemplos que se tienen para poder discernir en las soluciones de los polinomios de grado 2.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe orientar los conocimientos previos de sus estudiantes, dado que para poder dar introducción al concepto de polinomios de grado 2 menciona las soluciones completas e incompletas que pudiera tener.

Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce como hacer los tipos de conexiones entre los conceptos, Lore presenta los conocimientos anteriores del tema de inducción matemática, y establece la conexión entre el concepto de polinomios de grado 2.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos y analizar su continuidad.

Ilustración 49

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 3.

[3.1] Descripción del episodio (1-18)

Objetivo general: Ubicar el concepto polinomios, partiendo de la relación que tiene con el concepto de inducción matemática.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando algunos ejemplos de polinomios en donde indaga la opción de sus soluciones

[A, 1.18] Lore presenta un ejemplo de las soluciones de un polinomio de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza los tipos de soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución.

Conocimientos:

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)**

Subdescriptores;

i) **Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la ecuación cuadrática**

ii) **Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la ecuación cuadrática.**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio, para en próximas clases especíﬁcar las estrategias y tipos de solución que tiene una ecuación de orden 2.

Tabla 49

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

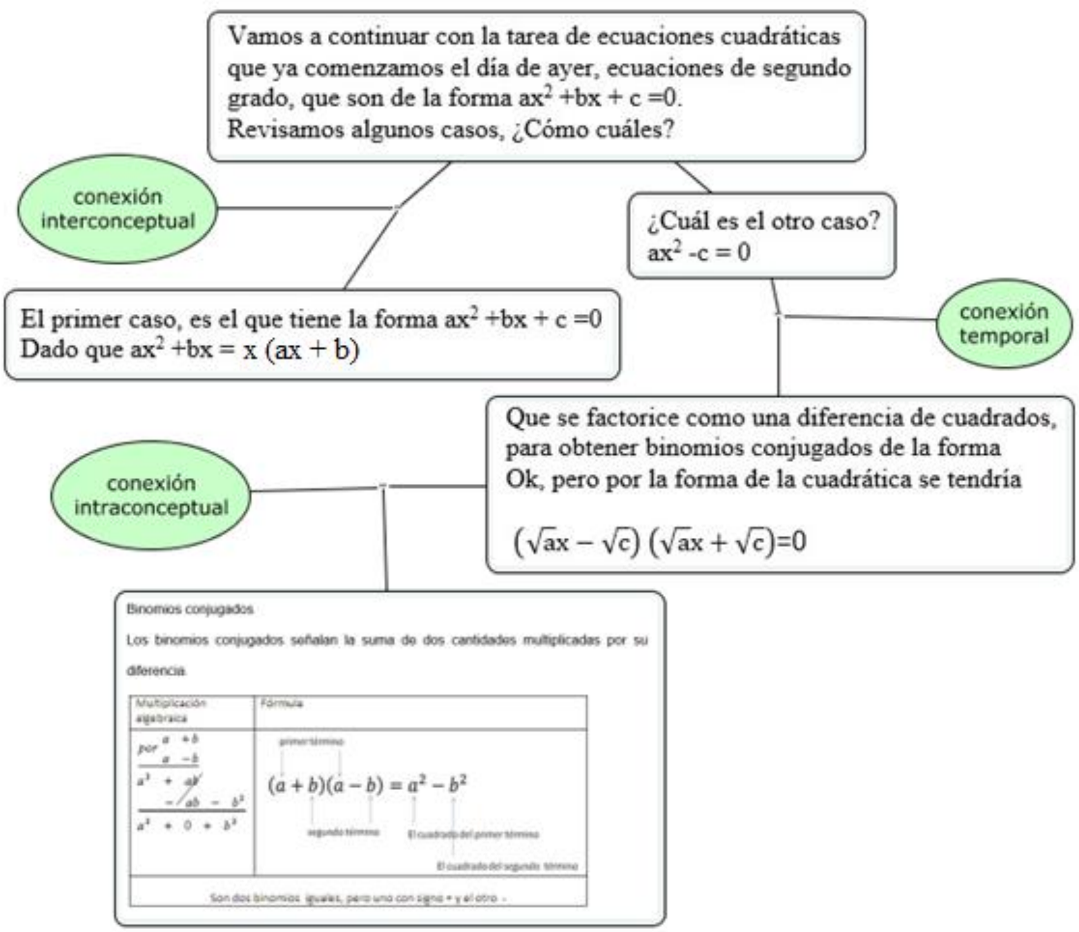
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la ecuación cuadrática** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la ecuación cuadrática.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de polinomios de grado 2, dado que en la forma de la ecuación cuadrática $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} = 0$ y $\mathrm{ax}^2 - \mathrm{c} = 0$, se hace uso de conocimientos previos para poder indagar en sus posibles formas o casos que tiene que son las completas y las incompletas.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita las posibles formas o casos que puede tener el polinomio de grado 2 de la forma $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} = 0$ y $\mathrm{ax}^2 - \mathrm{c} = 0$
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar algún tipo de estrategia para representar la factorización de los polinomios de grado 2, en los casos de completa e incompleta. Con la garantía que le será de utilidad para representar de una forma más rápida y concreta las posibles soluciones reales que puede tener el polinomio.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de estrategias Álgebraicas para simplificar los polinomios de grado 2.

	Con la oportunidad de compartir este conocimiento entre los maestros que imparten la misma materia o necesiten de algún recurso tecnológico.

4.3.14.- Análisis de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hacen presentes las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales

Esquema 16

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 1 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En este esquema se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 3 de la clase 1 de la práctica docente de Lore. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Lore se está revisando el tema de las soluciones completas e incompletas de la ecuación cuadrática, en las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión Álgebraica $ax^2 + bx + c = 0$ se hace uso de factorización, ya que una de las formas que se abordan $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} = 0$ se factorizan como $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} = \mathrm{x}(\mathrm{ax} + \mathrm{b})$

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en la expresión $\mathrm{ax}^2 - \mathrm{c} = 0$ se hace uso del concepto de factorización. En este caso diferencia de cuadrados, queda expresado como $(\sqrt{\mathrm{a}}\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{c}})(\sqrt{\mathrm{a}}\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{c}})$ estableciendo conexiones entre conceptos del currículo tal como productos notables y factorización. En específico diferencia de cuadrados y binomios conjugados.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que en la expresión$(\sqrt{\mathrm{a}}\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{c}})(\sqrt{\mathrm{a}}\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{c}})$ se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de producto notable hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $\mathrm{ax}^2 - \mathrm{c} = 0$ muestra la esencia de la aplicación de estas propiedades.

4.3.15.- Análisis de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 50

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 3. [3.2] Descripción del episodio (1-10) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios de grado 2, partiendo de la relación que tiene con el concepto de polinomios de grado n. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando el análisis de la forma general de polinomios de grado 2, esto es $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$, resueltos por tres formas distintas: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, y factorización. [A, 1.10] Lore presenta la forma general de los polinomios de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza los tipos de soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **iii) Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.** **iv) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.**

Evento de término: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio de grado 2, para en próximas clases específicar algunos ejemplos específicos.

Tabla 50

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación matemática del concepto de polinomios de orden n con el concepto de polinomios de orden 2, dado que la conexión que guardan la términología matemática con el proceso inductivo garantiza la vinculación. Por ejemplo, en las estrategias para resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, una de las posibles formas de determinarla es por medio de la fórmula general. Esto es: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y saber usar ejemplos asociados al tema de polinomios, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de Lore analiza las posibles soluciones que tiene un polinomio de grado 2. Dando indicio a que es importante saber identificar las posibles formas de obtener

	las soluciones, como lo es trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, y factorización.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de polinomios, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, con está tipificación de ejercicios se puede validar el conocimiento matemático en otras áreas específicas y ubicarlo en la materia que se está impartiendo.

Ilustración 51

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 3. [3.2] Descripción del episodio (1-10) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios de grado 2, partiendo de la relación que tiene con el concepto de polinomios de grado n. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando el análisis de la forma general de polinomios de grado 2, esto es $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$, resueltos por tres formas distintas: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, y factorización. [A, 1.10] Lore presenta la forma general de los polinomios de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza los tipos de soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:**

Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (T)** Subdescriptores; **i) Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio de grado 2, para en próximas clases especíﬁcar algunos ejemplos especíﬁcos.

Tabla 51

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación que sustentan los conocimientos anteriores y posteriores al tema de polinomios. Dado que en las transcripciones de las clases como conocimiento anterior sustenta el concepto de factorización y productos notables. Y como conocimiento posterior menciona los diferentes formas o estilos para resolver los polinomios de grado 2.

Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe orientar los conocimientos previos de sus estudiantes, dado que para poder dar solución a los polinomios de grado 2 es necesario identificar los procesos Álgebraicos que se necesitan utilizar.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce como hacer los tipos de conexiones entre los conceptos, Lore presenta los conocimientos anteriores del tema de inducción matemática, y establece la conexión entre el concepto de polinomios de grado 2.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos y analizar su continuidad.

Ilustración 52

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 2 de la sesión 3. [3.2] Descripción del episodio (1-10) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios de grado 2, partiendo de la relación que tiene con el concepto de polinomios de grado n. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando el análisis de la forma general de polinomios de grado 2, esto es $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=0$, resueltos por tres formas distintas: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, y factorización. [A, 1.10] Lore presenta la forma general de los polinomios de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza los tipos de soluciones que tiene. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores;

i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática. **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las raíces de un polinomio de grado 2, para en próximas clases especíificar algunos ejemplos específicos.

Tabla 52

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

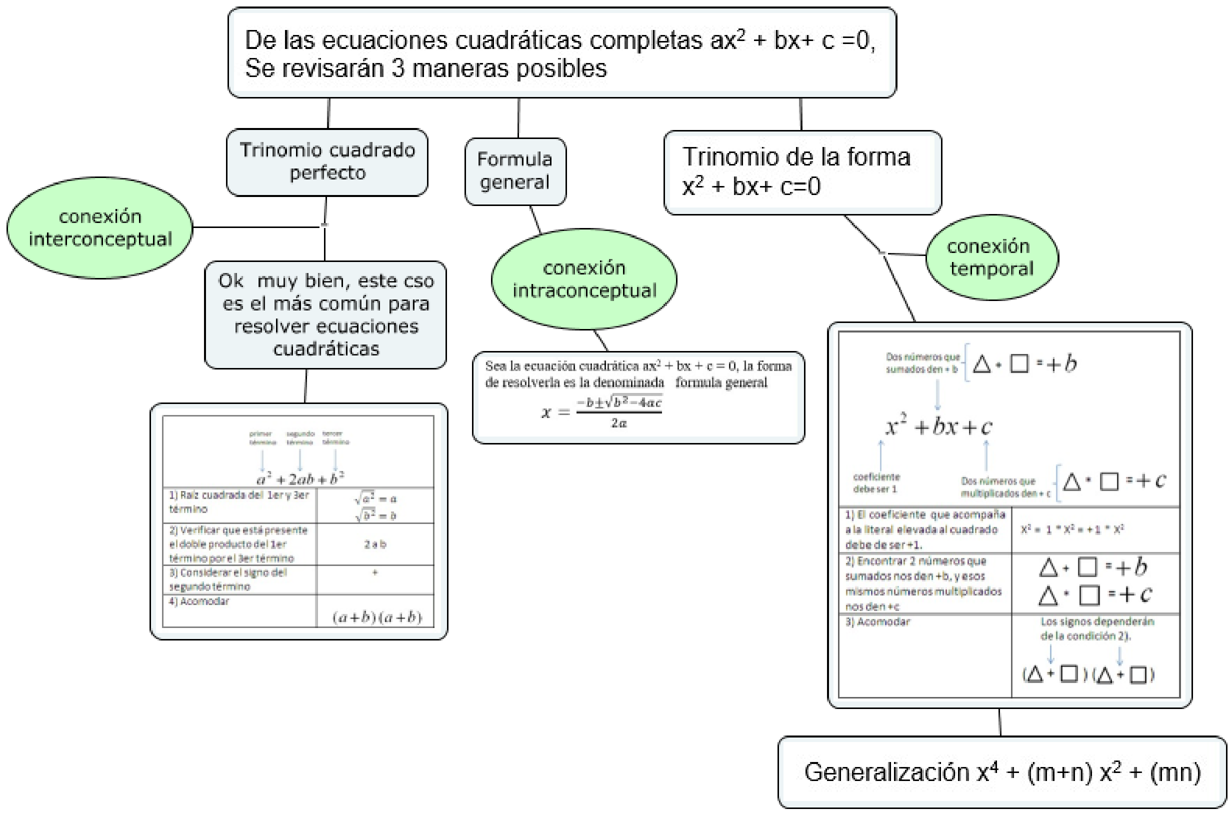
Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de polinomios de grado 2, dado que en la forma de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se hace uso de conocimientos previos para poder indagar en sus posibles formas o casos que tiene para resolver un polinomio de grado 2, esto es: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, factorización.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita las posibles formas

	o casos que puede tener el polinomio de grado 2 que son: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, factorización.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar algún tipo de estrategia para representar la factorización de los polinomios de grado 2, haciendo uso de los conocimientos previos de factorización. Con la garantía que le será de utilidad para representar de una forma más rápida y concreta las posibles soluciones reales que puede tener el polinomio.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de estrategias Álgebraicas para simplificar los polinomios de grado 2. Con la oportunidad de compartir este conocimiento entre los maestros que imparten la misma materia o necesiten de algún recurso tecnológico.

4.3.16.- Análisis de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hacen presentes las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales

Esquema 17

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales de la clase 2 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En el esquema anterior se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 3 de la clase 2 de la práctica docente de Lore. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Lore se está revisando el tema de las soluciones completas e incompletas de la ecuación cuadrática, en las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión Álgebraica $ax^2 + bx + c = 0$ se hace uso de factorización, ya que una de las formas que se abordan $ax^2 + \mathrm{bx} + \ \mathrm{c} = 0$ se soluciona como $\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en las ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$ se hace uso del concepto de factorización. En este caso el binomio al cuadrado, el cual esta expresado como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ estableciendo conexiones entre conceptos del currículo tal como productos notables y factorización. En específico trinomio cuadrado perfecto y la fórmula general.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que en la expresión (x + m) (x + n), se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de producto notable hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $x^2 + bx + \ c = 0$ muestra la esencia de la aplicación de estas propiedades.

4.3.17.- Análisis de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente las tres dimensiones (temas, prácticas y valores)

Ilustración 53

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Descripción del análisis del HCK (P) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 3. [3.3] Descripción del episodio (1-24) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios de grado 2, partiendo de la relación que tiene con el concepto de polinomios de grado n.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando un ejemplo de un polinomio de grado 2, esto es $4x^2 + 3x - 22 = 0$, indagando que tipo de estrategia es más útil para este ejemplo, esto es: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, y factorización. [A, 1.24] Lore presenta la forma general de los polinomios de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza que tipo de estrategia de solución tienen $4x^2 + 3x - 22 = 0$ .Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; i) **Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática de la ecuación cuadrática, para posteriormente llegar al concepto de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.** ii) **Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las posibles estrategias para resolver un polinomio de grado 2, para en próximas clases indagar sobre su representación gráfica y visualizar las soluciones.

Tabla 53

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de las prácticas.

Subdescriptor HCK (P)	**i) Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática de la ecuación cuadrática, para posteriormente llegar al concepto de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la**

	dirección que se le dé al tema de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación matemática del concepto de polinomios de grado n con el concepto de polinomios de grado 2, dado que la conexión que guardan la términología matemática con el proceso inductivo garantiza la vinculación. Por ejemplo, en las estrategias para resolver una ecuación de la forma $4x^2 + 3x - 22 = 0$ una de las posibles formas de determinarla es por medio de la fórmula general. Esto es: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, teniendo en muchos de sus casos soluciones racionales.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe usar ejemplos asociados al tema de polinomios, favoreciendo la comunicación matemática que guardan. Ya que en las transcripciones de clase de Lore analiza las posibles soluciones que tiene un polinomio de grado 2, en específico $4x^2 + 3x - 22 = 0$. Dando indicio a que es importante saber identificar las posibles formas de obtener las soluciones, por medio de alguno de los métodos: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, y factorización.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar una tipificación de ejercicios del tema de polinomios, de la misma forma que otros profesores que imparten la misma materia y poder constatar que en las áreas de ciencias exactas el conocimiento del horizonte matemático en lo que corresponde a las prácticas son muy similares.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, con está tipificación de ejercicios se puede validar el conocimiento matemático en otras áreas específicas y ubicarlo en la materia que se está impartiendo.

Ilustración 54

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Descripción del análisis del HCK (T) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 3. [3.3] Descripción del episodio (1-24) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios de grado 2, partiendo de la relación que tiene con el concepto de polinomios de grado n. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de un polinomio de grado 2, esto es $4x^2 + 3x - 22 = 0$, indagando que tipo de estrategia es más útil para este ejemplo, esto es usar: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, y factorización. [A, 1.24] Lore presenta la forma general de los polinomios de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza que tipo de estrategia de solución tienen $4x^2 + 3x - 22 = 0$ .Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (P)** Subdescriptores; **i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las posibles estrategias para determinar las soluciones de un polinomio de grado 2, para en próximas clases indagar sobre la representación gráfica de dichas soluciones.

Tabla 54

Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los temas.

Subdescriptor HCK (T)	**i) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.** **ii) Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros la representación gráfica de la ecuación cuadrática.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce la relación que sustentan los conocimientos anteriores y posteriores al tema de polinomios. Dado que en las transcripciones de las clases como conocimiento anterior sustenta el concepto de factorización y productos notables. Y como conocimiento posterior menciona los diferentes formas o estilos para resolver los polinomios de grado 2.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe orientar los conocimientos previos de sus estudiantes, dado que para poder dar solución a los polinomios de grado 2 es necesarios identificar los procesos Álgebraicos que se necesitan utilizar.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce como hacer los tipos de conexiones entre los conceptos, Lore presenta los conocimientos anteriores del tema de inducción matemática, y establece la conexión entre el concepto de polinomios de grado 2.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de ejemplos tomados de bibliografías sustentadas por algunos autores, se pueden propiciar ejemplos y analizar su continuidad.

Ilustración 55

Análisis haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 3 de la sesión 3. [3.3] Descripción del episodio (1-24) **Objetivo general:** Ubicar el concepto polinomios de grado 2, partiendo de la relación que tiene con el concepto de polinomios de grado n. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de un polinomio de grado 2, esto es $4\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 22 = 0$, indagando que tipo de estrategia es más útil usar para este ejemplo, esto es: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, y factorización. [A, 1.24] Lore presenta la forma general de los polinomios de grado 2, haciendo uso de la pizarra donde analiza que tipo de estrategia de solución tienen $4\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 22 = 0$. Se hace énfasis en la condición que debe de cumplir para que sea solución. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; **i) Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de la representación gráfica de la ecuación cuadrática, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.** **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer las posibles estrategias para resolver un polinomio de grado 2, para en próximas clases indagar sobre la representación gráfica de sus soluciones.

Tabla 55

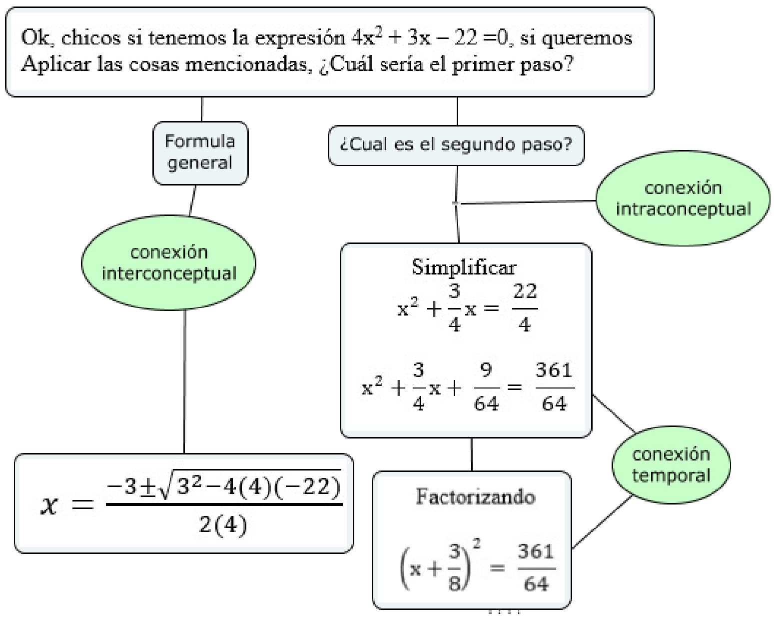
Evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de otro de los subdescriptores de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Subdescriptor HCK (V)	**i) Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de la representación gráfica de la ecuación cuadrática, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.**
Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el concepto de polinomios de grado 2, dado que en la forma de la ecuación cuadrática $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$ se hace uso de conocimientos previos para poder indagar en sus posibles formas o casos que tiene para resolver un polinomio de grado 2, esto es: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, factorización.
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita las posibles formas o casos que pueden usarse para resolver el polinomio de grado 2 que son: trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, factorización.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar algún tipo de estrategia para representar la factorización de los polinomios de grado 2, haciendo uso de los conocimientos previos de factorización. Con la garantía que le será de utilidad para representar de una forma más rápida y concreta las posibles soluciones reales que puede tener el polinomio.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de estrategias Álgebraicas para simplificar los polinomios de grado 2. Con la oportunidad de compartir este conocimiento entre los maestros que imparten la misma materia o necesiten de algún recurso tecnológico.

4.3.18.- Análisis de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hacen presentes las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales

Esquema 18

Mapa conceptual de las conexiones temporales, intraconceptuales y interconceptuales de la clase 3 de la sesión 3 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En este bloque se describen las conexiones intraconceptuales, interconceptuales y temporales de la sesión 3 de la clase 3 de la práctica docente de Lore. En el esquema anterior se describe las conexiones intraconceptuales, interconceptuales y temporales de la sesión 3 de la clase 3 de la práctica docente de Lore. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se está relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Lore se está revisando el tema de las soluciones de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas en las grabaciones de clase se manifiestan una

conexión interconceptual dado que la expresión Álgebraica $4x^2 + 3x - 22 = 0$ se resuelve haciendo por factorización, y otra forma de abordar la solución de la ecuación $4x^2 + 3x - 22 = 0$ es usar la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en la expresión $4x^2 + 3x - 22 = 0$ se hace uso del concepto de simplificación,quedando expresado como $x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{22}{4}$ esto es $x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \frac{361}{64}$ estableciendo conexiones entre conceptos del currículo tal como simplificación y factorización.

También se hizo presente una **conexión intraconceptual** dado que en la expresión $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{361}{64}$, se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de producto notable hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $4x^2 + 3x - 22 = 0$ muestra la esencia de la aplicación de estas propiedades para encontrar la solución.

En el caso de Lore se está revisando el tema de las soluciones de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas, en las grabaciones de clase se manifiesta una conexión interconceptual dado que la expresión Álgebraica $4x^2 + 3x - 22 = 0$ se resuelve haciendo uso de la factorización, simplificación y completar el trinomio además otra forma de resolver la ecuación cuadrática $4x^2 + 3x - 22 = 0$ es usar la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

4.3.19.- Análisis de las respuestas de las entrevistas semiestructurada de Aby y Lore con respecto del HCK

Está sección tiene la finalidad de justificar el papel que cumplio la entrevista con respecto de los objetivos de investigación, en el cual tiene por objetivo analizar los saberes evidenciados en términos del Conocimiento del Horizonte Matemático que se reconocen en la práctica docente de dos profesoras de nivel superior en el concepto de Inducción Matemática. Para tal fin hemos seleccionado algunas de las respuestas realizadas en la entrevista semiestructurada de Aby y Lore, y se determinarón indicadores con respecto de las tres dimensiones del HCK (HCK(P), HCK (T), HCK (V)).

Análisis de la entrevista a Aby

Pregunta 1

- Maestra podría decirnos ¿Por qué es importante revisar el concepto de inducción matemática?

Respuesta: Bueno es un tema que los hace pensar, entender la lógica, los chicos de ahora tienden a querer las cosas fáciles y rápidas, sin pensar, sin entender. Inducción matemática les permite tener lógica al hacer, empiezan a tomar los números y empiezan a ver cuál es la serie, cual es la sucesión. También es importante mencionar que el tema de inducción matemática es el tema de mayor dificultad en la materia de Álgebra A, porque no tiene un paso específico cuando llegas a la comprobación, cada uno lo puede abordar como quiera, además se tiene que entender lo que se está haciendo, para después poder resolverlo.

Indicadores reflejados:

HCK (P)

Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática

HCK (T)

Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores al concepto de inducción matemática, estableciendo las conexiones entre los temas.

HCK (V)

Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de inducción matemática.

Pregunta 2

- Maestra podría decirme, ¿Que conocimientos previos necesita el alumno para entender el concepto de inducción matemática?

Respuesta: Un elemento importante es lo que es Álgebra Básica. Conocer cómo se resuelven los binomios, trinomios, productos notables, factorización. En donde si no tuviera dominado lo anterior va a batallar mucho en comprender el concepto de inducción matemática.

<u>Indicadores reflejados:</u>

HCK (P)

Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que asocian a inducción matemática.

HCK (T)

Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática.

HCK (V)

Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de inducción matemática.

Pregunta 3

- Maestra podría decirme, ¿Porque es relevante para futuras materias revisar el tema de inducción matemática?

Respuesta: Por la lógica, para mí lo más importante, ya que necesitan utilizar su lógica para el abortamiento de los ejercicios, porque si resuelven un desarrollo y te das cuenta que no, entonces te regresas desde un principio y vuelves nuevamente a generarlo. Es un tema que les permite ver que deficiencias tienen en la materia de Álgebra, y aparte desarrollar su parte lógica.

Indicadores reflejados:

HCK (P)

Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que asocian a inducción matemática con la lógica.

HCK (T)

Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de inducción matemática con la lógica

HCK (V)

Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de inducción matemática con la lógica.

Pregunta 4

- Maestra, si se pudiera realizar un comparativo entre temas, ¿Con que tema considera usted pudiera compararse el tema de inducción matemático?

Respuesta: Bueno, considero que se pueden comparar con matrices, con la materia de Álgebra B. Porque el tema de matrices es exactamente igual a inducción matemática, tal vez no utilicen binomios, trinomios, pero necesitan utilizar su lógica para llegar de la matriz a la matriz identidad. Para mí es el mismo concepto, para las matrices es igual, no hay un procedimiento específico, cada quien aplica alguna operación entre matrices para llegar a la matriz identidad. De esta manera inducción los prepara para de esta manera este tema de matrices.

<u>Indicadores reflejados:</u>

HCK (P)

Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que asocian a inducción matemática a la materia Álgebra B.

HCK (T)

Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de inducción matemática asociadas a la materia de Álgebra B.

HCK (V)

Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de inducción matemática en la materia de Álgebra B.

Pregunta 5

- Maestra podría decirme, ¿Qué tipo de estrategia evaluativa utiliza usted para verificar que el alumno ha aprendido el tema de inducción matemática?

Respuesta: Bueno lo primero que siempre hago, es que les cuento la historia de cómo surgió la inducción matemática, a través del personaje de Gauss, para que vean el tema de una forma más tranquila, al segundo día que explico este tema, siempre traigo una hoja, que yo misma diseñe, con Homero Simpson, donde explica paso a paso, el proceso de inducción, entonces ellos lo ven de una manera más relajada, y la entienden mejor, entonces es todo un proceso donde Homero explica a su manera, con monitos y frases de homero. Y de esta manera ellos lo ven más sencillo, y de acuerdo a su contexto, en su mismo idioma, por decirlo de otra manera.

Indicadores reflejados:

HCK (P)

Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que asocian a inducción matemática con las notas de clase.

HCK (T)

Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática con las notas de clase

HCK (V)

Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de inducción matemática con las notas de clase

Pregunta 6

- Maestra podría describirme algunas de las bibliografías que usted utiliza para desarrollar su planeación de la clase.

Respuesta: Para el tema de inducción, ya tengo un material que yo misma diseñé mi libreta, donde planteé mi ejercicios, problemas y ejemplos. Pero llegue a utilizar un libro de Álgebra del autor Britton Vélez, explica un poco sobre inducción. Por lo que la mayoría del resto de la bibliografía la siento muy compleja, porque se las explican de una manera muy rígida, y porque algunos de mis alumnos han utilizado bibliografía, pero la mayoría de ellos al leerlo los confunde más de lo que les pudiera auxiliar a sus dudas. En este tema de inducción le dedico más de una semana, porque me gusta proporcionarles varios ejemplos, en donde ellos vean varias formas de abordamiento de este tema, y evitar este tipo de dificultades.

<u>Indicadores reflejados:</u>

HCK (P)

Conoce las formas de relacionar un ejemplo introductorio con un ejemplo secuencial, para posteriormente llegar a un ejemplo general.

HCK (T)

Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática.

HCK (V)

Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

<u>Análisis de la entrevista a Lore:</u>

Pregunta 1:

Maestra podría decirnos ¿Por qué es importante revisar el concepto de inducción matemática?

Bueno primero lo que yo observo es que la ingeniería es de mucha práctica, entonces el alumno por lo general lo que hace es descubrir cosas, esto es, si yo hago esto entonces pasa esto, y si yo lo vuelvo a repetir entonces también pasara, entonces ellos descubren que hay una relación. Entonces lo que se hace en este tema de inducción matemática, es hacer un acercamiento de como demostrar de aquello que ellos tienen duda, de continuar o no. Esto es nadamos es el concepto de descubrir y demostrar, si ellos demuestran que pasa para esto, entonces la necesidad es demostrar para el siguiente movimiento que yo haga. Es decir, generalizar un concepto particular a un concepto más general, esto es más abstracto.

Indicadores reflejados:

HCK (P)

Conoce los aspectos de la comunicación matemática en lo que corresponde al tema de inducción matemática.

HCK (T)

Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática.

HCK (V)

Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

Pregunta 2:

Maestra podría decirme, ¿Que conocimientos previos necesita el alumno para entender el concepto de inducción matemática?

Bueno para el tema de inducción matemática, se necesita un poco de aritmética y álgebra básica. Porque en este tema se ve un poco de desigualdades, propiedades de los números. Y una parte fundamental la necesidad de descubrir cosas nuevas, ya que, si el alumno no tiene esa necesidad o ese enfoque, por más que uno se lo explique no lo va a entender.

Indicadores reflejados:

HCK (P)

Conoce las formas de relacionar un concepto básico con un concepto general, para posteriormente establecer el conocimiento matemático que va a necesitar.

HCK (T)

Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática.

HCK (V)

Conoce la forma específica de utilizar el lenguaje matemático en los conceptos matemáticos necesarios en el tema de inducción matemática

Pregunta 4:

Maestra podría decirme, ¿Porque es relevante para futuras materias revisar el tema de inducción matemática?

Si el tema de inducción matemática es relevante en el tema de Series de Taylor, porque en algunas situaciones las series satisfacen algunas propiedades, entonces si el alumno conoce las sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas, tienen ciertos pasos a seguir, y en determinado ejercicio se puede concluir, que la suma n-enésima de cierta serie a que es igual. Y eso lo puedo concluir porque se utiliza inducción matemática. Y el alumno puede asegurar que cierta sucesión converge siempre y cuando satisface ciertas propiedades.

También el tema de inducción matemática impacta sobre el tema de integración, porque hay integrales que no se pueden integrar, más sin embargo puedo hacer un acercamiento con las series de Taylor, y eso lo que permite encontrar la respuesta, si el alumno conoce el concepto de inducción matemática entonces podrá presentar un criterio para saber si la integral converge o diverge.

Indicadores reflejados:

HCK (P)

Conoce las formas de relacionar un ejemplo básico con un ejemplo general, dado que sustenta un conocimiento matemático.

HCK (T)

Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y fututos del concepto de inducción matemática.

HCK (V)

Conoce la forma de considerar los valores centrales de la disciplina, la precisión y el cuidado de conocer el tema de inducción matemática.

Pregunta 6:

Maestra considera, ¿Qué el tema de inducción matemática puede ser revisado en otro orden de contenido?

No recuerdo muy bien cómo va el orden del programa, pero lo que se ve son lo que lo que son los conjuntos numéricos, se revisa las propiedades de los números reales, se revisa lo que son los conjuntos y su clasificación, se revisa también el campo de los números complejos, se revisan desigualdades y posteriormente inducción matemática, yo propongo que sea en ese orden, el más correcto para la revisión del tema que estamos argumentando.

Porque en el tema de inducción matemática se espera que el alumno tenga visualización de los temas, por ejemplo, en el caso de desigualdades, si yo dijo que $n^2 < n^3$, y lo traslado al tema de funciones, se pueden considerar aproximaciones mediante la generalización, ya que se logra apreciar una mejor visualización de lo que sucede y es mucho más interesante que verlo para casos en donde n es un valor numérico. Ya que la mayoría de los alumnos son más visuales (haciendo énfasis en los estilos de aprendizaje).

<u>Indicadores reflejados:</u>

HCK (P)

Conoce las formas de conocer, crear y producir matemáticas, dado que hace uso de un ejemplo donde muestra la relación de los conceptos

HCK (T)

Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos, ideas y estructuras del tema de inducción matemática.

HCK (V)

Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

Pregunta 8:

Maestra podría decirme, ¿Qué tipo de estrategia evaluativa utiliza usted para verificar que el alumno ha aprendido el tema de inducción matemática?

Una de las estrategias que aplico en clase, es el desarrollo de ejercicios, porque si no verifican ejercicios no pueden verificar el concepto tal y cual es, como este tema de inducción matemática es la primera vez que se les da, entonces los alumnos lo revisan de una forma muy parcial, entonces lo que ellos necesitan es hacer un acercamiento de como ellos acercar aquello que ellos tienen duda, si continuara o no, entonces lo que refuerzo en esta estrategia es el concepto de descubrir y demostrar, es una estrategia de reforzamiento para que ellos pasen al descubrimiento.

En donde selecciono una serie de ejercicios en donde se refuerza el tema de inducción matemática, en donde coloco varias categorías de complejidad, para que ellos valoren los elementos que se necesitarán en cada uno. Es decir, a partir de la ejercitación de ejemplos ellos van dominando el concepto. Porque al no visualizar pierden el punto detonante del ejercicio.

Pero de principio de arranque del tema les presento una serie de ejercicios, para que ellos vayan visualizándolos, y ya después se los voy clasificando de acuerdo si es una desigualdad, sumatoria o producto. Por lo general les presento los ejercicios en el pizarrón, no utilizo el software hasta no asegurarme que ya dominen el tema, como lo es el tema de funciones que no es muy claro al momento de abordarlo. Tales funciones como la recta, la cuadrada, la cubica, la raíz cuadrada, etc.

<u>Indicadores reflejados:</u>

HCK (P)

Conoce los aspectos de la comunicación matemática el razonamiento y la prueba derivado del uso del concepto de inducción matemática.

HCK (T)

Conoce estrategias para establecer relaciones entre ideas, estructuras y conexiones entre diferentes entes matemáticos.

HCK (V)

Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

<u>Pregunta 9:</u>

Maestra podría describirme algunas de las bibliografías usted utiliza para desarrollar su planeación de la clase.

Utilizo el libro de Matemáticas Simplificadas de Prelaman, el libro de Pre calculó de James Stewart. Álgebra Superior de la Serie Shaum, Teoría de Conjuntos y temas afines de la Serie Shaum.

<u>Indicadores reflejados:</u>

HCK (P)

Conoce la ubicación temática de los conceptos matemáticos que se están desarrollando en el tema de inducción matemática.

HCK (T)

Conoce el conocimiento de las principales ideas sustentadas de forma bibliográfica.

HCK (V)

Conoce la forma específica para sustentar la coherencia argumental de una demostración matemático.

Capítulo 5

Resultados y conclusiones de la investigación

En el siguiente apartado damos respuesta a la pregunta de investigación que es: ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto matemático de Inducción Matemática?, y damos fe del cumplimiento del objetivo general: analizar los saberes adquiridos en términos del Conocimiento del Horizonte Matemático que se reconocen en la práctica docente de dos profesoras de nivel superior en el concepto de inducción matemática. Y del objetivo específico que es analizar el subdominio del Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK) proveniente del modelo teórico Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) con la finalidad de describir puntualmente las conexiones matemáticas que se ejecutan en un contexto de nivel superior.

En un primer momento, la organización de este apartado atiende al análisis de la práctica docente de dos profesoras de nivel superior del área de matemáticas, Aby y Lore, respectivamente 3 sesiones para cada una, y cada sesión con 3 clases, dando un total de 18 acercamientos, esto es 9 para cada una. En el cual consistió en la identificación de indicadores con respecto del conocimiento del horizonte matemático en tres vertientes: con respecto de los temas, con respecto de las prácticas y con respecto de los valores, a esta sección le llamaremos “El Conocimiento del Horizonte Matemático: indicadores de la práctica docente de Aby y Lore”

Posteriormente en un segundo momento el análisis de la representación esquemática de la identificación de las conexiones en tres vertientes: conexión intraconceptual, conexión interconceptual y conexión temporal, a esta sección le llamaremos: “El conocimiento del horizonte matemático: conexiones de las prácticas docentes de Aby y Lore”.

Como tercer momento se presentan los resultados del análisis crítico de estas acciones, que respondieron y dieron fundamento a la pregunta de investigación, y de esta forma justificar como el Conocimiento del Horizonte Matemático es un marco de referente teórico idóneo para este nivel educativo, a esta sección le llamaremos “El conocimiento del horizonte matemático: similitudes y diferencias conceptuales de las prácticas docentes de Aby y Lore”

5.1.- El conocimiento del horizonte matemático: indicadores de la práctica docente de Aby y Lore.

En este bloque se presentan los indicadores que se obtuvieron y se identificaron con respecto del conocimiento del horizonte matemático en tres vertientes: con respecto de los temas (T), con respecto de las prácticas (P) y con respecto de los valores (V). Estos elementos son colocados en una Tabla donde la primera columna indica el rubro de la sesión y clase correspondiente, representado como SX, CX, la segunda columna indica una de las tres categorías del conocimiento del horizonte matemático (HCK(P), HCK(T), HCK(V)), la tercera columna indica el indicador asociado a la práctica docente que fue evidenciada. Como primer paso presentaremos los indicadores de Aby y posteriormente lo de Lore.

5.1.1- Indicadores del conocimiento del horizonte matemático encontrados en la sesión1, de la clase 1, 2 y 3 de Aby

Se considera que S1-C1 representa sesión 1- clase 1, S1-C2 representa sesión 1- clase 2, S1-C3 representa sesión 1- clase 3.

Tabla 56

Tabla de indicadores del conocimiento del horizonte matemático con respecto de las prácticas HCK (P), conocimiento del horizonte matemático con respecto de los temas HCK (T) y conocimiento del horizonte matemático con respecto de los valores HCK (V) de la sesión 1, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Aby.

Sesión – Clase	**Categoría**	**Indicador**
S1-C1	HCK (P)	Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática
	HCK(P)	Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de inducción matemática.
	HCK(T)	Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores al concepto de inducción matemática, estableciendo las conexiones entre los temas.
	HCK(T)	Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de inducción matemática, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.
	HCK(V)	Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de inducción matemática.
	HCK (V)	Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de inducción matemática.
S1-C2	HCK (P)	Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de inducción matemática.

	HCK (P)	Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que se asocian a la inducción matemática.
	HCK(T)	Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de inducción matemática.
	HCK(T)	Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de inducción matemática.
	HCK(V)	Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de inducción matemática.
	HCK(V)	Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de inducción matemática.
S1-C3	HCK (P)	Conoce las formas de relacionar un ejemplo introductorio con un ejemplo secuencial, para posteriormente llegar a un ejemplo general.
	HCK (P)	Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al conocimiento.
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de inducción matemática.
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de inducción matemática.
	HCK(V)	Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

5.1.2.- Indicadores del conocimiento del horizonte matemático encontrados en la sesión 2, de la clase 1, 2 y 3 de Aby.

Se considera que S2-C1 representa sesión 2- clase 1, S2-C2 representa sesión 2- clase 2, S2-C3 representa sesión 2- clase 3.

Tabla 57

Tabla de indicadores del conocimiento del horizonte matemático con respecto de las prácticas HCK (P), conocimiento del horizonte matemático con respecto de los temas HCK (T) y conocimiento del horizonte matemático con respecto de los valores HCK (V) de la sesión 2, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Aby.

Sesión – Clase	**Categoría**	**Indicador**
S2-C1	HCK (P)	Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de función.
	HCK(P)	Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de función.
	HCK(T)	Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de funciones, estableciendo las conexiones entre los temas.
	HCK(T)	Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de función, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.
	HCK(V)	Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de función.
	HCK (V)	Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de función.

S2-C2	HCK (P)	Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático de la representación gráfica de una función
	HCK (P)	Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la representación gráfica que asocian al concepto de función.
	HCK(T)	Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la representación gráfica de una función.
	HCK(T)	Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros de la representación gráfica de una función.
	HCK(V)	Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la representación gráfica de una función.
	HCK(V)	Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la representación gráfica de una función.
S2-C3	HCK (P)	Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con el concepto de función, para posteriormente llegar al cálculo del límite de una función.
	HCK (P)	Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema del límite de una función.
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto del límite de una función.
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de límite de una función.

	HCK(V)	Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental del límite de una función, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

5.1.3- Indicadores del conocimiento del horizonte matemático encontrados en la sesión 3, de la clase 1, 2 y 3 de Aby.

Se considera que S3-C1 representa sesión 3- clase 1, S3-C2 representa sesión 3- clase 2, S3-C3 representa sesión 3- clase 3

Tabla 58

Tabla de indicadores del conocimiento del horizonte matemático con respecto de las prácticas HCK (P), conocimiento del horizonte matemático con respecto de los temas HCK (T) y conocimiento del horizonte matemático con respecto de los valores HCK (V) de la sesión 3, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Aby.

Sesión – Clase	**Categoría**	**Indicador**
S3-C1	HCK (P)	Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de derivada.
	HCK(P)	Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de la derivada.
	HCK(T)	Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de la derivada, estableciendo las conexiones entre los temas.

	HCK(T)	Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la derivada, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.
	HCK(V)	Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la derivada.
	HCK (V)	Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la derivada.
S3-C2	HCK (P)	Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de la derivada Álgebraica.
	HCK (P)	Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la del concepto de la derivada Álgebraica.
	HCK(T)	Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la derivada Álgebraica.
	HCK(T)	Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la derivada Álgebraica.
	HCK(V)	Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la derivada Álgebraica.
	HCK(V)	Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la derivada Álgebraica.
S3-C3	HCK (P)	Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con el concepto de la derivada, para posteriormente llegar al cálculo de la derivada trigonométrica.
	HCK (P)	Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema de la derivada trigonométrica.

	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la derivada trigonométrica.
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la derivada trigonométrica.
	HCK(V)	Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de la derivada trigonométrica, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

5.1.4.- Indicadores del conocimiento del horizonte matemático encontrados en la sesión1, de la clase 1, 2 y 3 de Lore.

Se considera que S1-C1 representa sesión 1- clase 1, S1-C2 representa sesión 1- clase 2, S1-C3 representa sesión 1- clase 3.

Tabla 59

Tabla de indicadores del conocimiento del horizonte matemático con respecto de las prácticas HCK (P), conocimiento del horizonte matemático con respecto de los temas HCK (T) y conocimiento del horizonte matemático con respecto de los valores HCK (V) de la sesión 1, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Lore.

Sesión – Clase	**Categoría**	**Indicador**
S1-C1	HCK (P)	Conoce las formas de crear aspectos de la comunicación matemática del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de las potencias del número 2.

	HCK(P)	Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de inducción matemática en la representación de la suma de las potencias del número 2
	HCK(T)	Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores al concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2, estableciendo las conexiones entre los temas.
	HCK(T)	Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.
	HCK(V)	Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2.
	HCK (V)	Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2.
S1-C2	HCK (P)	Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático de la representación de la suma de los números naturales pares.
	HCK (P)	Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos que asocian a la representación de la suma de los números naturales pares.
	HCK(T)	Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la representación de la suma de los números naturales pares.
	HCK(T)	Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la suma de los números naturales pares.

	HCK(V)	Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de la suma de los números naturales pares.
	HCK(V)	Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en el concepto de la suma de los números naturales pares.
S1-C3	HCK (P)	Conoce las formas de relacionar un ejemplo introductorio con un ejemplo secuencial, para posteriormente llegar a un ejemplo general, como la suma de los números naturales de la forma (3n-2).
	HCK (P)	Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al conocimiento, como la suma de los números naturales de la forma (3n-2).
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto la suma de los números naturales de la forma (3n-2).
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de la suma de los números naturales de la forma (3n-2).
	HCK(V)	Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de una demostración cuidando el lenguaje matemático que se utiliza en la suma de los números naturales de la forma (3n-2).

5.1.5.- Indicadores del conocimiento del horizonte matemático encontrados en la sesión2, de la clase 1, 2 y 3 de Lore

Se considera que S2-C1 representa sesión 2- clase 1, S2-C2 representa sesión 2- clase 2, S2-C3 representa sesión 2- clase 3.

Tabla 60

Tabla de indicadores del conocimiento del horizonte matemático con respecto de las prácticas HCK (P), conocimiento del horizonte matemático con respecto de los temas HCK (T) y conocimiento del horizonte matemático con respecto de los valores HCK (V) de la sesión 2, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Lore.

Sesión – Clase	**Categoría**	**Indicador**
S2-C1	HCK (P)	Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de polinomios.
	HCK(P)	Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de polinomios.
	HCK(T)	Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de polinomios, estableciendo las conexiones entre los temas.
	HCK(T)	Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de polinomios, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.
	HCK(V)	Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de polinomios.
	HCK (V)	Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de polinomios.
S2-C2	HCK (P)	Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático en los tipos de soluciones de los polinomios.

	HCK (P)	Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y en los tipos de soluciones de los polinomios.
	HCK(T)	Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto en los tipos de soluciones de los polinomios.
	HCK(T)	Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros de la representación en los tipos de soluciones de los polinomios.
	HCK(V)	Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de los tipos de soluciones de los polinomios.
	HCK(V)	Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental en los tipos de soluciones de los polinomios.
S2-C3	HCK (P)	Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática con las soluciones del polinomio, para posteriormente llegar a la gráfica de un polinomio.
	HCK (P)	Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema de la gráfica de un polinomio
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de la gráfica de un polinomio
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros en la gráfica de un polinomio
	HCK(V)	Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental en la gráfica de un polinomio, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

5 .1.6.- Indicadores del conocimiento del horizonte matemático encontrados en la sesión 3, de la clase 1, 2 y 3 de Lore.

Se considera que S3-C1 representa sesión 3- clase 1, S3-C2 representa sesión 3- clase 2, S3-C3 representa sesión 3- clase 3

Tabla 61

Tabla de indicadores del conocimiento del horizonte matemático con respecto de las prácticas HCK (P), conocimiento del horizonte matemático con respecto de los temas HCK (T) y conocimiento del horizonte matemático con respecto de los valores HCK (V) de la sesión 3, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Lore.

Sesión – Clase	Categoría	Indicador
S3-C1	HCK (P)	Conoce las formas de crear una relación matemática del concepto de inducción matemática con el concepto de la ecuación cuadrática.
	HCK(P)	Conoce la forma de saber definir, y usar definiciones del concepto de la ecuación cuadrática.
	HCK(T)	Conoce la relación entre las principales ideas entre contenidos anteriores y posteriores del concepto de la ecuación cuadrática, estableciendo las conexiones entre los temas.
	HCK(T)	Conoce la conexión entre diferentes entes matemáticos del concepto de la ecuación cuadrática, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente.

	HCK(V)	Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la ecuación cuadrática.
	HCK (V)	Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la ecuación cuadrática.
S3-C2	HCK (P)	Conoce las formas de crear y producir conocimiento matemático del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.
	HCK (P)	Conoce la forma de saber establecer relaciones o equivalencias entre los conceptos matemáticos y la del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.
	HCK(T)	Conoce estrategias para desarrollar las principales ideas y estructuras claves del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.
	HCK(T)	Conoce estrategias para establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.
	HCK(V)	Conoce estrategias específicas de sus valores principales para desarrollar el concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.
	HCK(V)	Conoce la precisión y el cuidado del uso de estrategias para propiciar una coherencia argumental del concepto de las soluciones de la ecuación cuadrática.
S3-C3	HCK (P)	Conoce las formas de relacionar el concepto de inducción matemática y el de la ecuación cuadrática, para posteriormente llegar al concepto de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.
	HCK (P)	Conoce la forma de saber seleccionar ejemplos para poderlos relacionar, generalizar o explorar según la dirección que se le dé al tema de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.

	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder desarrollar las principales ideas y estructuras claves de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.
	HCK(T)	Conoce la forma de elegir ejemplos para poder establecer relaciones entre conocimientos previos y futuros de la representación gráfica de la ecuación cuadrática.
	HCK(V)	Conoce la forma específica para exponer la coherencia argumental de la representación gráfica de la ecuación cuadrática, cuidando el lenguaje matemático que se utiliza.

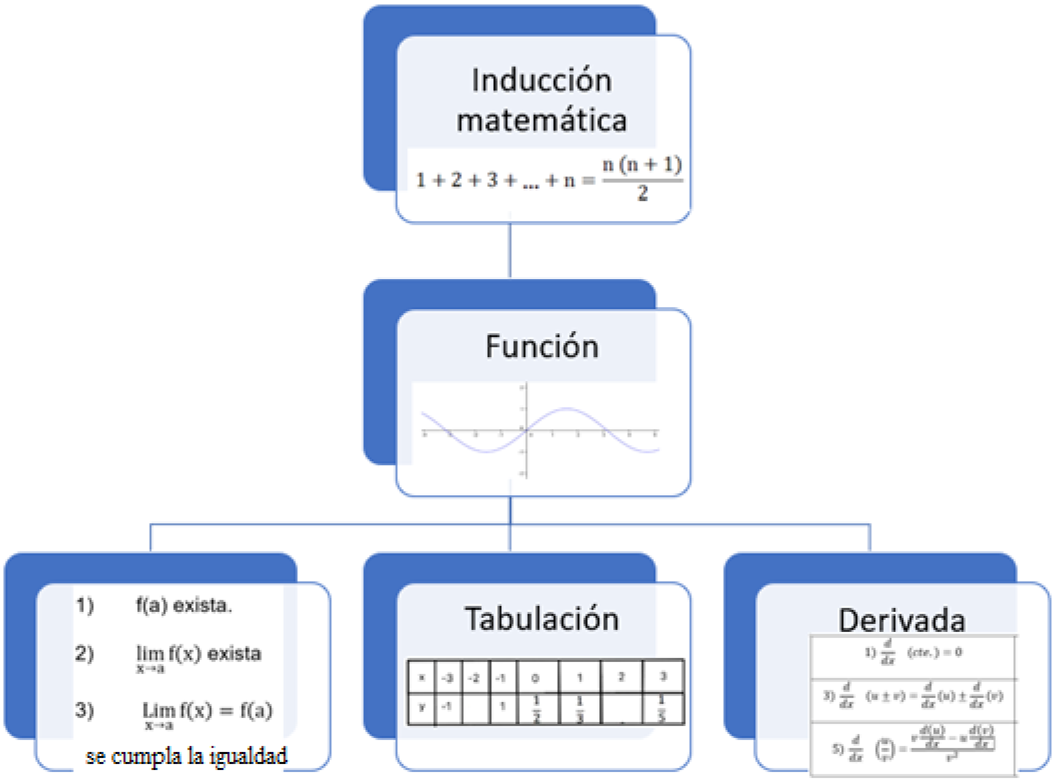
5.2.- El conocimiento del horizonte matemático: conexiones de la práctica docente de Lore y Aby".

En este bloque se presentan los momentos críticos que se evidenciaron de las grabaciones de clase, que se obtuvieron y se identificaron de las conexiones con respecto del conocimiento del horizonte matemático en tres vertientes: conexiones intraconceptuales, conexiones interconceptuales y conexiones temporales. Estos elementos son colocados en una Tabla donde la primera columna indica el rubro de la sesión y clase correspondiente, representado como SX, CX, la segunda columna indica una de las tres conexiones (intraconceptual, interconceptual y temporal), la tercera columna indicara el momento asociado a la práctica docente que fue evidenciada. Como primer paso presentaremos las conexiones de Aby y posteriormente las de Lore.

5.2.1.- El conocimiento del horizonte matemático: conexiones de la práctica docente de Aby.

Esquema 19

Mapa conceptual de los conceptos más relevantes de las conexiones de la práctica docente de Lore.



Como primer punto de partida, se esquematiza los conceptos más relevantes de los temas abordados en las tres semanas que se grabaron de la práctica docente de Aby, se puede evidenciar que el tema principal que es inducción matemática, presentó conexiones con otros conceptos que están dentro y fuera de la retícula de la materia. Se hacen presentes varias conexiones intraconceptuales, interconceptuales y temporales. Dentro de las más sobresalientes las conexiones intraconceptuales se ubicaron entre los conceptos de inducción matemática, función, límite y derivada. Dado que en la práctica docente de Aby se evidencia que, durante el desarrollo de la sumatoria de los números naturales, se específica que la suma total de ellos es n (n+1) /2.

Esto permite asegurar que la forma matemática obtenida puede ser representada como una ecuación de orden 2. Lo que hace presentar conexiones entre conceptos tal como función, límite y derivada, tal y como se evidenciaron en las transcripciones de clases. Este elemento nos permite presentar las conexiones (intraconceptuales, interconceptuales y temporales) del análisis crítico de estas acciones, que respondieron y dieron fundamento a la pregunta de investigación, y de esta forma justificar como el conocimiento del horizonte matemático es un marco de referente teórico idóneo para este nivel educativo.

Se considera que S1-C1 representa sesión 1- clase 1, S1-C2 representa sesión 1- clase 2, S1-C3 representa sesión 1- clase 3.

Tabla 62

Tabla de las conexiones Intraconceptual, interconceptual y temporal del conocimiento del horizonte matemático de la sesión 1, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Aby.

Sesión – Clase	**Conexión**	**Momento crítico**
S1-C1	Intraconceptual	Aby en la pizarra anota los números naturales del 1, 2, 3…,100. Y realizó la pregunta ¿Y cuánto dará la suma de los primeros 100 números naturales?
	Interconceptual	Durante el desarrollo de la demostración de 1 +2 +3 + ... + η = η(η+1) /2. Aby corrige a sus estudiantes de los errores cometidos durante el proceso de ejecución de la demostración que van desde errores de forma (operatividad en cuando se le agrega el (k+1) - término).

	Temporal	Aby propone cuanto dará la suma de los 25 mil primeros números naturales. Esperando suscitar en los alumnos la necesidad de utilizar la fórmula matemática: $1 + 2 + 3 + \ldots + \eta = \eta(\eta+1)/2$.
S1-C2	intraconceptual	Aby, específica la relación. Podemos contestar a la pregunta, ¿Cuántos vasos hay?”. Uno de los alumnos contesto “Alumno 4: Pues, se ve que hay un patrón de filas, esto es 1 impar,1 impar,2 impares ,2 impares, 3 impares, 3 impares, 4 impares, 4 impares, 5 impares, 5 impares…etc”. Otro de los alumnos contesto: “Y en la otra fila es: 1 par, 1 par, 2 pares, 2 pares, 3 pares, 3 pares, 4 pares, 4, pares…etc.”
	Interconceptual	Aby hace uso de un acomodo de ristra de vasos. Y describe: el haber asignado una correspondencia de un número a cada uno de los vasos por medio del conjunto de los números enteros, nos permite ver un comportamiento más tacitó de estos números. ¿Cuál es?”, uno de los alumnos le contesta: Alumno: Los números se presentan como un número par y después otro número impar.
	Temporal	Aby distingue y selecciona el caso o casos que se aplicarán en algún tipo de ejemplo, o lo que se estudiará en un futuro, enfrente al alumno a ubicar y discernir sobre la estrategia que aplicará para resolver dicho ejemplo.
S1-C3	Intraconceptual	Aby evidencia un conocimiento previo, el cual necesita para contestar a la pregunta $2(2^k - 1) + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$, conocimiento matemático que hace uso del concepto de producto Álgebraico y leyes de las potencias.

	Interconceptual	Aby sabe cómo un contenido; lo que son las leyes de los exponentes, está relacionado con otro más general; en nuestro caso el proceso de la hipótesis en la inducción matemática.
	Temporal	Aby específica los conocimientos previos que necesitan para contestar a la simplificación *$2(2^n – 1)$* que se logra contestar gracias a los conceptos de las leyes de los exponentes. Un conocimiento suficiente de este concepto es el reconocimiento de lo que es una base y una potencia de una expresión matemática.

Se considera que S2-C1 representa sesión 2- clase 1, S2-C2 representa sesión 2- clase 2, S2-C3 representa sesión 2- clase 3.

Tabla 63

Tabla de las conexiones Intraconceptual, interconceptual y temporal del conocimiento del horizonte matemático de la sesión 2, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Aby.

Sesión – Clase	**Conexión**	**Momento crítico**
S2-C1	Intraconceptual	Aby comenzó revisando el tema de inducción matemática, y en clases posteriores lo asocio al tema de funciones continuas, dado que una de las aplicaciones que menciono Aby en su entrevista, es encontrar la derivada de una función por medio de la regla de los cuatro pasos.
	Interconceptual	Aby describe en el pizarrón seis gráficas de funciones. Y a partir de estas les pregunta, ¿Está

		función es continua?, en el cual se identifica una idea errónea, dado que el estudiante contesta que la función es continua en el valor de x=1, ya que su valor es igual a 2.
	Temporal	Aby realiza preguntas a sus alumnos con respecto de lo que es una función continua en varias graficas. En el cual hace reiterativo las propiedades que debe de cumplir, y el impacto que tendrá en las aplicaciones.
S2-C2	intraconceptual	Aby hace notar que este despeje y = x+2, ofrece la posibilidad de asignar nombres a las variables, siendo x la variable independiente, siendo y la variable dependiente, esto es, f (x) una función con respecto a x
	Interconceptual	Aby establece conexiones con diferentes conceptos, en el ejemplo señalado y – x = 2, Aby sugiere que se despeje una de las variables, esto es; y = x + 2, donde al asignar valores controlados a la variable x, podemos observar que se encuentra un valor para y, es decir, se están formando pares ordenados con estas posibilidades, en el cual se visualiza a esta expresión como una línea recta, compuesta de pares ordenados (x, y).
	Temporal	Aby evidencia que el concepto de función impacta en los futuros conocimientos del currículum, como lo son el concepto de límite de una función, el concepto de continuidad de una función, el concepto de la derivada de la función y el concepto de la integral de una función.
S2-C3	Intraconceptual	Aby hace uso de la expresión Álgebraica $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ donde asociado al tema de expresiones Álgebraicas

		evidencia conexiones entre el concepto de producto "binomios conjugados" con el concepto de "diferencia de cuadrados".
	Interconceptual	Aby, evidencia en la expresión $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ la esencia de la aplicación de las tres propiedades para saber si es o no continua, esto es: f(a) exista. $\operatorname*{Lim}_{x\to a} f(x)$ exista $\operatorname*{Lim}_{x\to a} f(x) = f(a)$ se satisfaga la igualdad
	Temporal	Aby, evidencia que dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una conexión temporal pues la expresión $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, ,se simplifica y hace uso del concepto de factorización quedando representado como: $f(x) = \frac{1}{x+2}$

Se considera que S3-C1 representa sesión 3- clase 1, S3-C2 representa sesión 3- clase 2, S3-C3 representa sesión 3- clase 3.

Tabla 64

Tabla de las conexiones Intraconceptual, interconceptual y temporal del conocimiento del horizonte matemático de la sesión 3, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Aby.

Sesión – Clase	**Conexión**	**Momento crítico**
S3-C1	Intraconceptual	Aby hace presente una conexión intraconceptual dado que en la expresión $f(x) = x + 2$ se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta

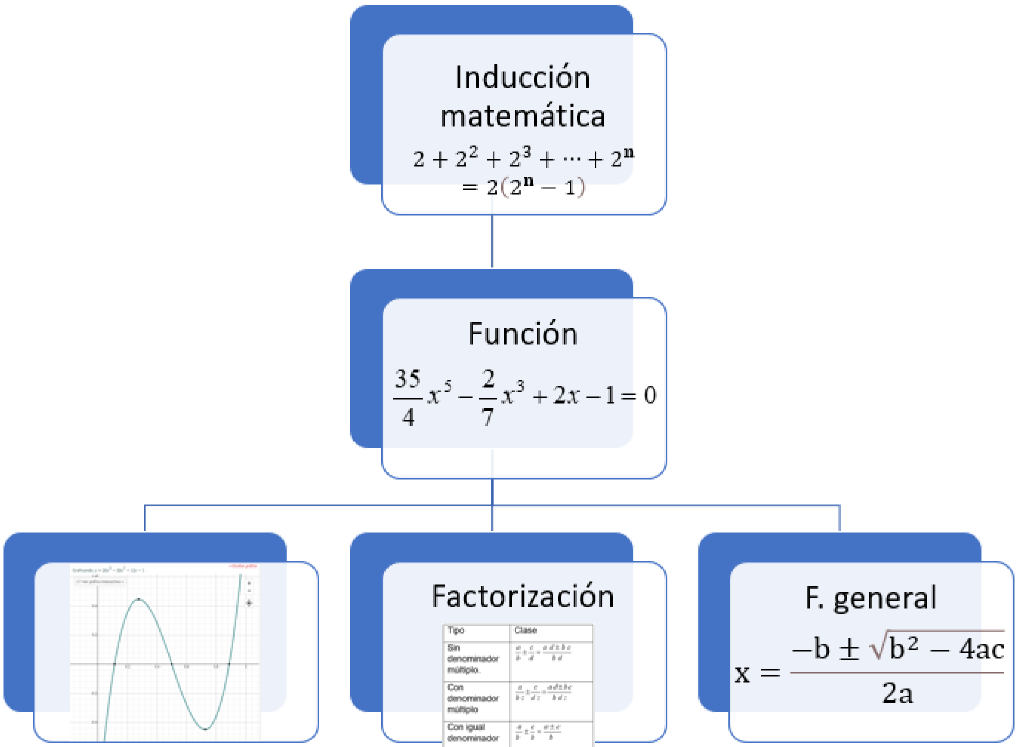
		tener una asociación en términos de este concepto matemático.
	Interconceptual	Aby está revisando el tema de la regla de los cuatro pasos para calcular la derivada de una función, las grabaciones de clase manifiestan una conexión interconceptual dado que en la expresión Álgebraica $f(x) = x + 2$ se hace uso de conceptos asociados al tema de expresiones Álgebraicas lo que evidencia conexiones entre el concepto de "factorización" con el concepto de "productos notables".
	Temporal	Aby hace presente una conexión temporal dado que en la expresión $f(x) = x + 2$ se hace uso del concepto de factorización, para poder desarrollar y aplicar la regla de los cuatro pasos. En lo que compete a la función $f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$, se tendría que utilizar el teorema binomial para poder aplicar esta regla.
S3-C2	intraconceptual	Aby, describe la expresión $f(x) = x + 2$ en donde se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas y de derivación, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación con la identificación de las fórmulas básicas.
	Interconceptual	Aby está revisando el tema de las reglas básicas de derivación para calcular la derivada de una función, las grabaciones de clase manifiestan una conexión interconceptual dado que en la expresión Álgebraica $f(x) = x + 2$ se hace uso de fórmulas básicas de derivación lo que evidencia conexiones entre el concepto de "regla de los cuatro pasos" con el concepto de "fórmulas básicas de derivación".

	Temporal	Aby hace presente una conexión temporal dado que en la expresión $f(x) = x + 2$ se hace uso de más de una fórmula básica de derivación, para poder desarrollar y simplificar la expresión a su mínima representación.
S3-C3	Intraconceptual	Aby lanza la pregunta a sus alumnos en clase; "¿qué criterio usaremos de las derivadas Álgebraicas para derivar la función $f(x) = e^x \cos(e^x)$ ¿", y uno de sus alumnos contesta "el primer elemento por la derivada del segundo elemento, mas, el segundo elemento multiplicado por la derivada del primer elemento".
	Interconceptual	Aby lanza la pregunta a sus alumnos en clase; "¿quién es la derivada del primero e^x ¿" y uno de sus alumnos contesta ""$la\ derivada\ es\ \ e^x$". Al analizar este episodio se suscitan 4 fórmulas matemáticas, que pueden vincularse con la representación de este concepto, solo en 2 de ellas los estudiantes afrontan el concepto de dos formas distintas, pero obteniendo el mismo resultado
	Temporal	Aby lanza la pregunta: "*¿Podría simplificarse más?,* $¿Qué\ podríamos\ factorizar\ de\ la\ expresión f'(x) = (e^{2x})\ \ (\cos\ (e^x)) + \cos\ (e^x) * \ e^x$ *"*. Donde uno de sus alumnos contesta en dos momentos, el primer de ellos responde "*se factoriza* e^x".

5.2.2.- El conocimiento del horizonte matemático: conexiones de la práctica docente de Lore".

Esquema 20

Mapa conceptual de los conceptos más relevantes de las conexiones de la práctica docente de Lore.



Se esquematiza los conceptos más relevantes de los temas abordados en las tres semanas que se grabaron de la práctica docente de Lore, se puede evidenciar que el tema principal que es inducción matemática, presentó conexiones con otros conceptos que están dentro y fuera de la retícula de la materia. Se hacen presentes varias conexiones intraconceptuales, interconceptuales y temporales. Dentro de las más sobresalientes las conexiones intraconceptuales se ubicaron entre los conceptos de inducción matemática, función, ecuaciones y polinomios. Dado que en la práctica docente de Lore se evidencia que, durante el desarrollo de la sumatoria de los primeros n números naturales, se específica que la suma total de ellos es $\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.

Esto permite asegurar que la forma matemática obtenida puede ser representada como una ecuación de grado 2. Lo que hace presentar conexiones entre conceptos tal como ecuación, función, polinomios, representación gráfica y fórmula general, tal y como se evidenciaron en las transcripciones de clases. Este elemento nos permite presentar las conexiones (intraconceptuales, interconceptuales y temporales) del análisis crítico de estas acciones, que respondieron y dieron fundamento a la pregunta de investigación, y de esta forma justificar como el conocimiento del horizonte matemático es un marco de referente teórico idóneo para este nivel educativo.

Se considera que S1-C1 representa sesión 1- clase 1, S1-C2 representa sesión 1- clase 2, S1-C3 representa sesión 1- clase 3.

Tabla 65

Tabla de las conexiones Intraconceptual, interconcpetual y temporal del conocimiento del horizonte matemático de la sesión 1, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Lore.

Sesión – Clase	**Conexión**	**Momento crítico**
S1-C1	Intraconceptual	Lore representa la suma de potencias del número 2, se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la

		expresión $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1- a^{n+1}}{1-a}$ muestra la esencia de la aplicación de estos conceptos.
	Interconceptual	Lore describe la expresión Álgebraica $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^n = 2(2^n – 1)$ donde hace uso de tres pasos para poder generalizar que se cumple para cualquier número natural n lo que evidencia conexiones entre el concepto de “sumatoria de potencias de número 2” con el concepto de “la generalización de una expresión matemática”.
	Temporal	Lore hace uso de la expresión $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^{n =} 2(2^n – 1)$ donde manifiesta el uso de las leyes de los exponentes, para poder desarrollar y aplicar el método inductivo. En lo que compete a la sumatoria de potencias del número 2, se hace uso de leyes de potencias, que son necesarias para entender la naturaleza matemática de la demostración.
S1-C2	intraconceptual	Lore representa la suma de los números pares, se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático.
	Interconceptual	Lore hace uso de la expresión Álgebraica $\mathrm{k}^3 - \mathrm{k} + 3$ y mostrar que es múltiplo de 3, se hace uso de tres pasos para poder generalizar que se cumple para cualquier número natural n lo que evidencia conexiones entre el concepto de “divisibilidad” con el concepto de “la generalización de una expresión matemática”.

	Temporal	Lore hace uso de la expresión $k^3 - k + 3$ y muestra que es múltiplo de 3 haciendo uso del criterio de divisibilidad, para poder desarrollar y aplicar el método inductivo. En lo que compete al concepto de divisibilidad se hace uso del concepto de números primos, de leyes de potencias, que son necesarias para entender la naturaleza matemática de la demostración.
S1-C3	Intraconceptual	Lore hace uso de la representación de la suma de los números pares, se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $2 + 4 + 6 + \cdots 2n$ muestra la esencia de la aplicación de estos conceptos.
	Interconceptual	Lore hace uso de la expresión Álgebraica $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$, se hace uso de tres pasos para poder generalizar que se cumple para cualquier número natural n lo que evidencia conexiones entre el concepto de “número natural” con el concepto de “la generalización de una expresión matemática”.
	Temporal	Lore hace uso de la expresión $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$ se hace uso del criterio de número natural, para poder desarrollar y aplicar el método inductivo. En lo que compete al concepto de divisibilidad se hace uso del concepto de números primos, de leyes de potencias, que son necesarias para entender la naturaleza matemática de la demostración

Se considera que S2-C1 representa sesión 2- clase 1, S2-C2 representa sesión 2- clase 2, S2-C3 representa sesión 2- clase 3

Tabla 66

Tabla de las conexiones Intraconceptual, interconceptual y temporal del conocimiento del horizonte matemático de la sesión 2, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Lore.

Sesión – Clase	**Conexión**	**Momento crítico**
S2-C1	Intraconceptual	Lore indaga sobre las condiciones suficientes y necesarias a la específicación de un caso particular. Ya que una condición suficiente para responder a los tipos de soluciones de una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, es el reconocimiento de conceptos matemáticos y una condición necesaria sería el saber cómo encontrar las soluciones.
	Interconceptual	Lore en los ejemplos descritos afronta los mismos y diferentes conceptos de un tema al momento de estar resolviéndolo. Ya que resolver la ecuación $ax^2 + c = 0$, implica conectarlo con un contenido más específico, en este caso, los diez casos de factorización
	Temporal	Lore aplica el conocimiento aprendido a situaciones nuevas y/o más complejas. Cuando se analizó la evidencia de este momento crítico, se logra apreciar que hay presencia de otros conceptos que posibilitan estudiar las propiedades básicas de la materia de Álgebra en una situación nueva. Ya que la implicación de las leyes de los signos tiene impacto sobre las propiedades de los

		números, así como el orden de jerarquía que deben efectuarse en estas operaciones.
S2-C2	Intraconceptual	Lore indaga sobre las condiciones suficientes y necesarias a la específicación de un caso particular. Ya que una condición suficiente para usar las expresiones $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, es el reconocimiento de conceptos matemáticos y una condición necesaria sería el saber cómo encontrar las soluciones aplicando los productos notables.
	Interconceptual	Lore en los ejemplos descritos afronta los mismos y diferentes conceptos de un tema al momento de estar resolviéndolo. Ya que resolver la ecuación $ax^2 - c = 0$, implica conectarlo con un contenido más específico, en este caso, los diez casos de factorización
	Temporal	Lore aplica el conocimiento aprendido a situaciones nuevas y/o más complejas. Cuando se analizó la evidencia de este momento crítico, se logra apreciar que hay presencia de otros conceptos que posibilitan estudiar las propiedades básicas de la materia de Álgebra en una situación nueva. Ya que la implicación de las leyes de los signos tiene impacto sobre las propiedades de los números, así como el orden de jerarquía que deben efectuarse en estas operaciones.
S2-C3	Intraconceptual	Lore muestra en la grabación de su clase, la necesidad de recordar los conceptos previos para poder identificar errores comunes entre sus estudiantes.
	Interconceptual	Lore muestra en la grabación de su clase, el buen manejo de operaciones básicas entre fracciones Álgebraicas, elementos que denota conexiones entre conceptos básicos.

	Temporal	Lore evidencia en la grabación de este episodio clave, que enseña a sus alumnos la importancia de distinguir las operaciones básicas entre fracciones, lo que es la suma, resta, multiplicación y división. $\frac{3}{4}\div\frac{5}{8}\div\frac{-2}{3}=\left(\frac{3}{4}\div\frac{5}{8}\right)\div\frac{-2}{3}=\left(\frac{24}{20}\right)\div\frac{-2}{3}=\left(\frac{6}{5}\right)\div\frac{-2}{3}=\frac{18}{-10}=\frac{9}{-5}$

Se considera que S3-C1 representa sesión 3- clase 1, S3-C2 representa sesión 3- clase 2, S3-C3 representa sesión 3- clase 3.

Tabla 67

Tabla de las conexiones Intraconceptual, interconceptual y temporal del conocimiento del horizonte matemático de la sesión 3, la clase 1, 2 y 3 de las sesiones de Lore.

Sesión – Clase	**Conexión**	**Momento crítico**
S3-C1	Intraconceptual	Lore manifiesta en la expresión$\left(\sqrt{a}x-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}x+\sqrt{c}\right)$ el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de producto notable hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $ax^2-c=0$ muestra la esencia de la aplicación de estas propiedades.
	Interconceptual	Lore utiliza la expresión Álgebraica ax^2 + bx+ c =0 donde se hace uso de factorización, ya que una de las formas que se abordan $ax^2+bx=0$ se factorizan como $ax^2+bx=x(a\,x+b)$
	Temporal	Lore hace uso de la expresión $ax^2-c=0$. En este caso diferencia de cuadrados, quedando expresado

		como $\left(\sqrt{a}x-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}x+\sqrt{c}\right)$ estableciendo… conexiones entre conceptos del currículo tal como productos notables y factorización.
S3-C2	intraconceptual	Lore hace uso de la expresión (x + m) (x + n), se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de producto notable hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático.
	Interconceptual	Lore hace uso de la expresión Álgebraica ax^2 + bx+ c =0 donde aplicando conceptos de factorización, aborda una de las formas $ax^2+bx+\ c=0$ donde se soluciona usando la fórmula $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
	Temporal	Lore hace uso de la expresión $x^2+bx+c=0$ así como el uso del concepto de factorización. En este caso binomio al cuadrado, expresado como $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ estableciendo conexiones entre conceptos del currículo tal como productos notables y factorización. En específico trinomio cuadrado perfecto y la fórmula general de la solución de una cuadrática.
S3-C3	Intraconceptual	Lore hace uso de la expresión $\left(x+\frac{3}{8}\right)^2=\frac{361}{64}$, se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas Álgebraicas, considerando desde el concepto de producto notable hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático.
	Interconceptual	Lore hace uso de la expresión Álgebraica $4x^2$ + 3x-22=0 donde aplicando conceptos de factorización, aborda una de las formas $ax^2+bx+\ c=0$ donde se soluciona usando la fórmula $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

	Temporal	Lore hace uso de la expresión $4x^2 + 3x - 22 = 0$ donde aplicando el proceso de simplificación, queda la expresión como $x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{22}{4}$ y completando el trinomio queda $x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \frac{361}{64}$ estableciendo conexiones entre conceptos del currículo tal como simplificación y factorización

5.3.- El conocimiento del horizonte matemático: similitudes y diferencias conceptuales de las prácticas docentes de Aby y Lore.

En este tercer momento se presenta los resultados del análisis crítico de estas acciones, que respondieron y dieron fundamento a la pregunta de investigación, y se justifica como el conocimiento del horizonte matemático es un marco de referente teórico idóneo para este nivel educativo.

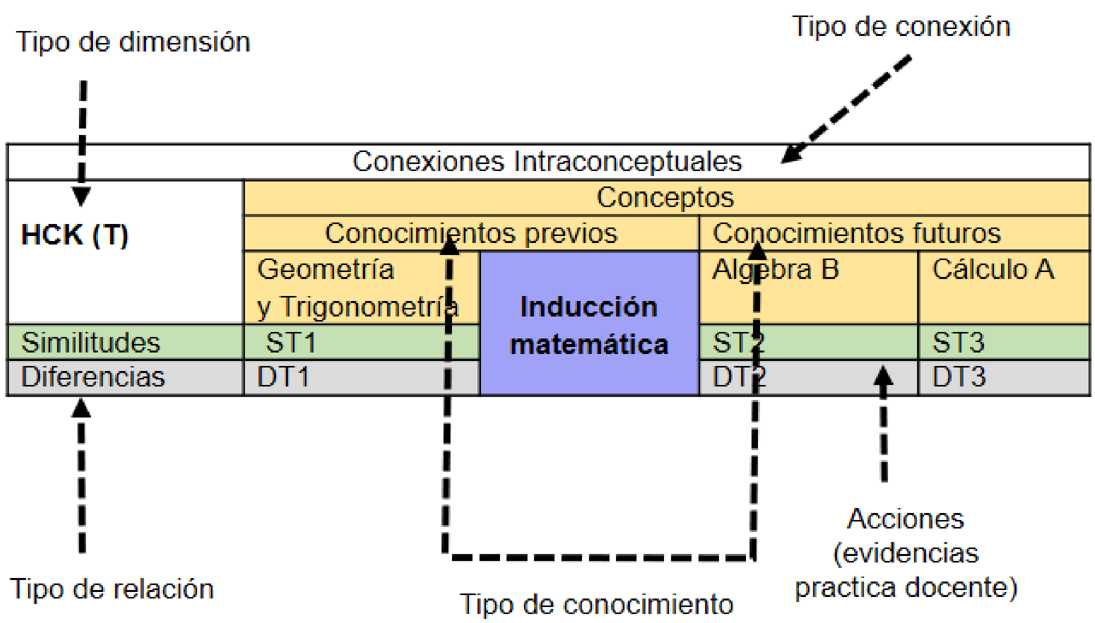
En los esquemas que se presentan a continuación, se muestran tres mapas conceptuales de los conceptos comunes (similares) que evidenciaron en su práctica docente de Aby y Lore. Donde el tema principal fue Inducción matemática, se evidencia que se generan conexiones interconceptuales entre los conceptos que se revisan en las materias de Álgebra B, Cálculo A y Geometría y Trigonometría (Esquema 21). Así como también se generan conexiones temporales entre las ideas de los conceptos, tales como; expresión Álgebraica, las leyes de los signos para la suma y resta, las leyes de los signos para la multiplicación, las leyes de los exponentes (Esquema 22). Y también se hicieron hizo presente las conexiones intraconceptuales dado el concepto de término Álgebraico, constituye un punto esencial del tema de inducción matemática (Esquema 23).

Inmediato a estos esquemas, se hacen presentes tres Tablas que describen las conexiones interconceptuales, las conexiones intraconceptuales y las conexiones temporales de los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática, considerando en cada uno de ellos las similitudes y las diferencias de la práctica docente de Aby y Lore. Pero dado que se tienen 18 grabaciones ya transcritas de la práctica docente de Aby y Lore (9 para cada una), y se tienen 54 análisis de las 3 dimensiones del conocimiento del horizonte matemático (HCK(T), HCK(P), HCK(V)) con 27 para cada profesora. Se presenta la relación (similitud, diferencia) que guarda las conexiones del conocimiento del horizonte matemático con las 3 dimensiones del conocimiento del horizonte matemático. Esta relación descrita en estas Tablas tendrá la característica principal de seleccionar las prácticas docentes más representativas de Aby y Lore, de forma tal que se pueda evidenciar la relación que guarda las conexiones del HCK con las 3 dimensiones del HCK.

La Tabla de resultado del análisis que se utilizará para hacer estas relaciones tendrá la siguiente forma (Tabla 68).

Tabla 68

Tabla de resultados de análisis de la práctica docente de Aby y Lore.



En donde se considera que el tipo de dimensión será: HCK(T), HCK (P), HCK (V), el tipo de conexión será: intraconceptual, interconceptual y temporal, el tipo de relación será: similitudes y diferencias, el tipo de conocimiento será: previos y futuros, el tipo de acciones será: las evidencias de la práctica docente de Aby y Lore.

Cada una de estas Tablas presenta los resultados y conclusiones del esquema y Tabla de las relaciones (similitud y diferencia) de la práctica docente de Aby y Lore en lo que corresponde a la conexión interconceptual, y cada una de las dimensiones le denominaremos a esta sección:

"5.3.1.- Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión interconceptual y las dimensiones del HCK (T), HCK(P), HCK(V)"

Posteriormente presentaremos los resultados y conclusiones con respecto a la conexión intraconceptual y se llamo:

"5.3.2.- Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión intraconceptual y la dimensión del HCK (T), HCK(P), HCK(V)"

Por último, presentaremos los resultados y conclusiones con respecto a la conexión temporal y se llamo:

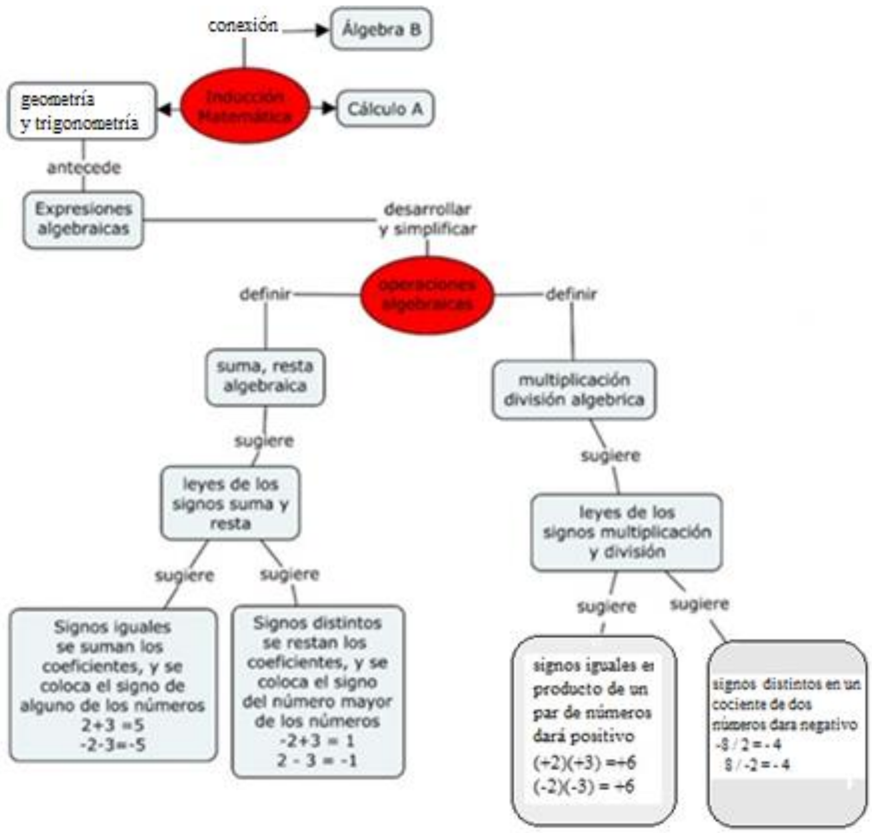
“5.3.3.- Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión temporal y la dimensión del HCK (T), HCK(P), HCK(V)”

5.3.1.- Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión interconceptual y las dimensiones del HCK (T), HCK(P), HCK(V)

En este bloque se presentará los resultados y conclusiones más representativos de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión interconceptual y las dimensiones del HCK (T), HCK(P), HCK(V). Donde el tema principal fue Inducción Matemática, se evidencia que se generan conexiones interconceptuales entre los conceptos que se revisan en las materias de Álgebra B, Cálculo A y Geometría y Trigonometría como lo describe el siguiente esquema.

Esquema 21

Conexiones interconceptuales de la relación (similitud) de la práctica docente de Aby y Lore.



En el esquema 21 se hace la descripción de las relación de los conceptos del conocimiento del horizonte matemático en las dimensiones HCK (T), HCK(P), HCK(V) . Donde en las grabaciones ya transcritas de la práctica docente de Aby y Lore manifiestan conexiones similares entre las ideas principales del concepto de inducción matemática, tal como el uso frecuente del concepto de expresiones Álgebraicas, operaciones Álgebraicas, que incluye la suma, resta, multiplicación y division Álgebraica de términos. Así como tambien conocimientos previos básicos similares como las leyes de los signos para la multiplicación y división, asi como las leyes de los signos para la suma o resta.

Ahora bien, dado la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados más representativos en la Tabla 69 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 21 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de los temas HCK(T).

Tabla 69

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 21 con respecto del HCK(T).

Conexiones Intraconceptuales				
HCK (T)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Similitudes	Aby y Lore manifiestan la utilidad de expresiones Álgebraicas para llegar a la demostración inductiva para n=k+1.		Aby y Lore manifiestan el uso del tema de polinomios de segundo grado para enTablar el uso de la factorización y producto notable.	Aby y Lore manifiestan el uso del concepto ecuación y su representación gráfica.

Dado que Aby hace uso del concepto producto Álgebraico para demostrar que se cumple 1+2+3+…+n = n(n+1) /2. También hace uso del concepto de ecuación de orden 2 en la expresión n(n+1)/2 que es igual a (n^2 + n) / 2.

Dado que Lore hace uso del concepto leyes de las potencias para demostar que se cumple $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^n = 2(2^n – 1)$. También hace uso del concepto de leyes de los exponentes en la expresión $2(2^n – 1) = 2^{n+1} -2$.

Conexiones Intraconceptuales				
HCK (T)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Diferencias	Aby y Lore manifiestan formas distintas de abordar el conocimiento matemático, dado que la primera lo hace mediante una estrategia de acomodo de vasos, la segunda lo hace evidenciando el uso de las leyes de las potencias		Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente como continuidad del tema de inducción, la primera lo hace orientado al tema de funciones de grado 2 y su representación gráfica, la segunda lo orienta a las soluciones reales o	Aby y Lore manifiestan conocimiento distinto como aplicación del tema de inducción, la primera lo hace orientado al tema de funciones de grado 2 y posteriormente el uso de límites y derivadas, y la segunda lo orienta a las

		complejas de los polinomios	soluciones de los polinomios

Dado que Aby hace uso de estrategias ludicas para introducir el concepto de inducción matemática, utilizando material didáctico para para demostrar el conteo de los primeros 100 números naturales. Aprovecha este recurso para asociarlo al tema de funciones de orden 2 en la expresión n(n+1) / 2, y posteriormente vincularlo al concepto de límites de una función en la expresión f(n) = n(n+1)/2.
Dado que Lore hace uso del concepto leyes de las potencias en la expresión $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^n = 2(2^n – 1)$. Aprovechando este recurso para orientarlo al concepto de soluciones de reales o complejas de la expresión $2(2^n – 1)$, para posteriormente considerar otras opciones y establecer soluciones para polinomios de grado n.

Ahora bien, dada la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados mas representativos en la Tabla 70 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 21 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de las prácticas HCK(P).

Tabla 70

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 21 con respecto del HCK(P).

Conexiones Intraconceptuales				
HCK (P)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría		Álgebra B	Cálculo A

Similitudes	Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos del razonamiento y la prueba del metodo de induccion matematica. Asi como el buen uso de las definiciones.	**Inducción matemática**	Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos de razonamiento del tema de polinomios de segundo grado, asi como el uso de la factorización y producto notable.	Aby y Lore manifiestan similitudes en la comunicación matemática del uso del concepto ecuación y su representación gráfica.

Dado que Aby hace uso de un buen manejo de la notación matemática para verificar que 1+2+3+…+n = n(n+1) /2 estableciendo los tres pasos inductivos. EnTablando un aspecto conceptual radicado en polinomios de grado dos.

Dado que Lore hace uso de conceptos como las leyes de los exponentes, las leyes de los signos para la multiplicación y división para verificar el proceso inductivo de $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^n = 2(2^n – 1)$, para utilizar los posibles casos de factorización.

Conexiones Intraconceptuales				
HCK (P)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría		Álgebra B	Cálculo A

	y Trigonometría	**Inducción matemática**		
Diferencias	Aby y Lore manifiestan formas distintas en los aspectos de la comunicación, dado que la primera aborda ejercicios básicos del tema y la segunda considera ejemplos con un poco más de dificultad.		Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente en la selección de ejemplos, ya que algunos de ellos le permite generalizar mientras otros solo le permite explorar.	Aby y Lore manifiestan conocimiento distinto en la forma de conocer, crear o producir conocimiento matemático.

Dado que Aby aborda un ejemplo introductorio propio del tema de inducción matemática, que consiste en la representación matemática de la sumatoria de los primeros 100 números naturales, esto es: 1+2+3+..+n = n (n+1) /2
Dado que Lore aborda un ejemplo más complejo en la introducción del tema de inducción matemática, dado que requiere que manipule aspectos Álgebraicos propios a hacer recordados, esto es: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^n = 2(2^n – 1)$

Ahora bien, dada la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados más representativos en la Tabla 71 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 21 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de los valores HCK(V).

Tabla 71

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 1 con respecto del HCK(V).

<table>
<tr><td colspan="5">Conexiones Intraconceptuales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">HCK (V)</td><td colspan="4">Conceptos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conocimientos previos</td><td colspan="2">Conocimientos futuros</td></tr>
<tr><td>Geometría y Trigonometría</td><td rowspan="2">Inducción matemática</td><td>Álgebra B</td><td>Cálculo A</td></tr>
<tr><td>Similitudes</td><td>Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos del buen uso del lenguaje matemático y la coherencia en el uso del método de inducción matemática.</td><td>Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos de la consistencia en la simbología y notación matemática.</td><td>Aby y Lore manifiestan similitudes en la comunicación matemática del uso del concepto ecuación y su representación gráfica.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Dado que Aby y Lore hace uso de lenguaje matemático durante el desarrollo de la demostración tal como productos notables y factorización, y leyes de los exponentes. Aby hace uso del concepto del producto notable “producto de monomio con binomio” en la expresión n(n+1)/2 , y lo verifica con el caso de factorización “factorización por término común”</td></tr>
</table>

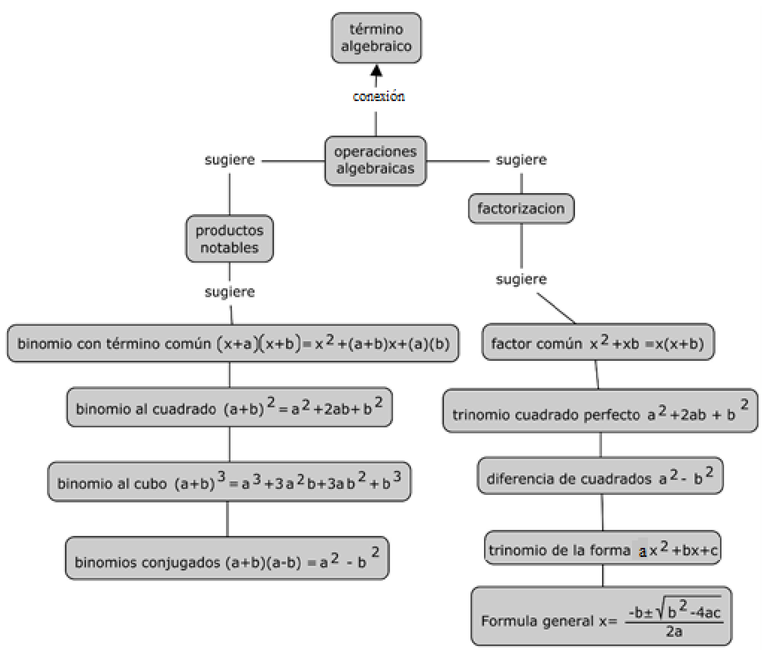
<table>
<tr><td colspan="5">Lore hace uso del concepto “producto de potencias cuando tienen la misma base” esto es $a^n * a^m = a^{n+m}$, donde lo implementa en la expresión $2(2^n - 1)$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Conexiones Intraconceptuales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">HCK (V)</td><td colspan="4">Conceptos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conocimientos previos</td><td colspan="2">Conocimientos futuros</td></tr>
<tr><td>Geometría y Trigonometría</td><td>Inducción matemática</td><td>Álgebra B</td><td>Cálculo A</td></tr>
<tr><td>Diferencias</td><td>Aby y Lore manifiestan formas distintas en las correcciones y argumentaciones matemáticas</td><td></td><td>Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente en la selección de ejemplos, porque cada una de ellas le dio una aplicación diferente</td><td>Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente en la selección de ejemplos, porque cada una de ellas le dio una aplicación diferente.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Por la propuesta de los ejemplos introductorios utilizados por Aby y Lore. Aby hace correcciones dentro de la índole Álgebraica, esto es n(n+1)/2 tiene como resultado $(n^2 + n) / 2$, pero se cometen errores Álgebraicos presentando respuestas como $n^2 + n / 2$, o también (2n + n) /2
Mientras Lore hace correcciones en la utilidad de la fórmula para reducir potencias, dado que $a^n * a^m$ que suele escribirse de manera equivocada como a^{n*m}</td></tr>
</table>

5.3.2.- Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión intraconceptual y la dimensión del HCK (T), HCK(P), HCK(V)

En este bloque se presentá los resultados y conclusiones más representativos de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión intraconceptual y las dimensiones del HCK (T), HCK(P), HCK(V). Donde el tema principal fue Inducción matemática, se evidencia que se genera conexiones intraconceptuales entre los conceptos término Álgebraico, operaciones Álgebraicas, productos notables y factorización como lo describe el siguiente esquema.

Esquema 22

Conexiones interconceptuales de la relación de la práctica docente de Aby y Lore.



En el esquema 22 se hace la descripción de la relación de los conceptos del conocimiento del horizonte matemático HCK (T), HCK(P), HCK(V). Donde en las grabaciones ya transcritas de la práctica docente de Aby y Lore manifiestan conexiones similares entre las ideas principales del concepto de inducción matemática, tal como el uso frecuente del concepto de expresiones Álgebraicas, operaciones Álgebraicas, leyes de los signos y leyes de las potencias. Así como tambien conocimientos previos similares tal como la identificación de nombre y fórmula de los casos posibles de productos notables (binomio con término común, binomio al cuadrado, binomio al cubo, binomios conjugados), así como los casos posibles de factorización (factor común, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrático general, fórmula general).

Ahora bien, dada la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados mas representativos en la Tabla 72 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 22 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de los temas HCK(T).

Tabla 72

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 22 con respecto del HCK(T).

Conexiones Interconceptuales				
HCK (T)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Similitudes	Aby y Lore manifiestan la utilidad del tema de productos notables y factorización		Aby y Lore manifiestan el uso del tema de término algebráico para enTablar	Aby y Lore manifiestan el uso del concepto operaciones algebráicas.

	para llegar a la manipulación adecuada del método inductivo.		el uso de la factorización y producto notable.	

Dado que Aby hace uso del concepto Álgebraico binomio con término común (x+a) (x+b) = x^2 + (a+b) x + (a)(b) en la expresión matemática n (n+1) /2 .

Dado que Lore hace uso del concepto Álgebraico $a^n * a^m$ durante el proceso de la demostración para el elemento k+1-esimo $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^k = 2(2^k – 1) + 2^{k+1}$ que resolviendo matemáticamente se obtiene $2^k *4 -2$.

Conexiones Interconceptuales				
HCK (T)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Diferencias	Aby y Lore manifiestan formas distintas de abordar el conocimiento matemático, dado que consideran ejemplos de diferente grado de dificultad.		Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente con respecto de la manipulación de alguna fórmula, ya sea en forma descrita como enunciado o	Aby y Lore manifiestan conocimiento distinto como aplicación del tema de inducción, , la primera lo hace orientado al tema de funciones de orden 2 y, la segunda lo orienta a las

		descrita como fórmula.	soluciones de los polinomios

Dado que Aby hace uso del ejemplo del conteo de los primeros números naturales, haciendo enfasis en la historia del personaje Gauss y su forma de como él detérmino la suma total de los primeros 100 números naturales.
Dado que Lore hace uso del comportamiento que tendrá la suma de las potencias de los números pares, ejemplo detonante para indagar la suma de las pontencias del número 3, 4 o n-ésimo.

Ahora bien, dada la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados mas representativos en la Tabla 73 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 22 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de las prácticas HCK(P).

Tabla 73

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 22 con respecto del HCK(P).

Conexiones Interconceptuales				
HCK (P)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Similitudes	Aby y Lore manifiestan similitudes en		Aby y Lore manifiestan similitudes en los	Aby y Lore manifiestan similitudes en

	los aspectos del razonamiento y la prueba del metodo de induccion matematica. Asi como el buen uso de las definiciones.		aspectos de razonamiento del tema de polinomios de segundo grado, así como el uso de la factorización y producto notable.	la comunicación matemática del uso del concepto ecuación y su representación gráfica.

Dado que Aby y Lore hacen uso adecuado de las tres premisas que se necesitan para demostrar por medio del método de inducción matemática. Enfatizando en sus ejemplos que primero se debe verificar para el caso n =1, y afirmando que se cumple para n =k. Y demostrando matemáticamente que se cumple para n =k+1.

Conexiones Interconceptuales				
HCK (P)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Diferencias	Aby y Lore manifiestan formas distintas en los aspectos de la comunicación, dado que la primera aborda ejercicios básicos del		Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente en la selección de ejemplos, ya que algunos de ellos les permite generalizar mientras otros	Aby y Lore manifiestan conocimiento distinto en la forma de conocer, crear o producir conocimiento matemático

	tema y segunda considera ejemplos con un poco más de dificultad.		solo les permite explorar.

Dado que Aby y Lore manifiestan diferencias notarias en su abordamiento de las clases, se logra apreciar en sus prácticas propuestas formativas una linea de grado de dificultad ascendiente. Por un lado Aby propone ejercicios de indole básico, esto es: 1+2+3+…+n = n (n+1)/2 para posteriormente llegar a aplicaciones relacionadas con el tema de Cálculo, como obtener el límite de la función f(n) = = n(n+1)/2. Por otro lado Lore propone ejercicios de indole dificil, esto es: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^k = 2(2^k – 1)$ para posteriormente llegar a índole básico, como verificar los tipos de solución de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c=0$.

Ahora bien, dada la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados más representativos en la Tabla 74 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 22 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de los valores HCK(V).

Tabla 74

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 22 con respecto del HCK(V).

Conexiones Interconceptuales		
HCK (V)	Conceptos	
	Conocimientos previos	Conocimientos futuros

	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Similitudes	Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos del buen uso del lenguaje matemático y la coherencia en el desarrollo de la prueba del método de inducción matemática.		Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos de la consistencia en la simbología y notación matemática	Aby y Lore manifiestan similitudes en la comunicación matemática del uso del concepto ecuación y su representación gráfica.

Dado que Aby hace uso pertinente de la notación matemática que de debe utilizar en la demostración de inducción matemática, tomando en cuenta que cuando ya se generaliza la expresión matemática 1+2+3+…+n = n(n+1)/2 se debe utilizar la constate k, esto es: 1+2+3+ …+k = k(k+1)/2 sería muy ambiguo dentro del referente matemático que omitiera está representación.

Dado que Lore manifiesta un uso adecuado de la simbología y notación matemática en el ejemplo : $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^k = 2(2^k – 1)$ durante la demostración se hace uso de reglas de expontes, asi como de productos Álgebraicos, tales como: $2+2^2+2^3+\cdots+2^k+2^{k+1}=2\left(2^k-1\right)+2^{k+1}$ que es igual a $2^{k+1}-2+2^{k+1}$ quedando como $2*4^k-2$

Conexiones Interconceptuales				
HCK (V)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría		Álgebra B	Cálculo A

	y Trigonometría	**Inducción matemática**		
Diferencias	Aby y Lore manifiestan formas distintas en las correcciones y argumentaciones matemáticas		Aby Lore manifiestan conocimiento diferente en la selección de ejemplos, porque cada una de ellas le dio una aplicación diferente.	Aby Lore manifiestan conocimiento diferente en la selección de ejemplos, porque cada una de ellas le dio una aplicación diferente.

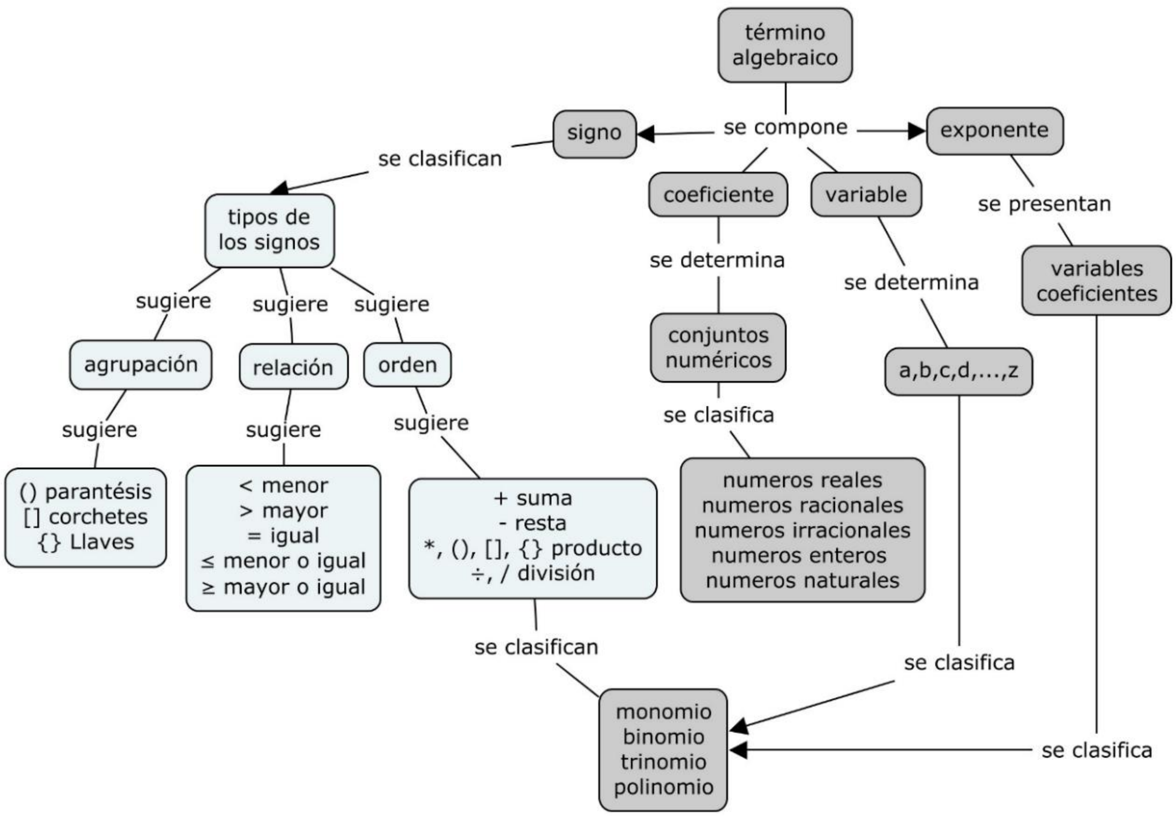
Dado que Aby en su ejemplo introductorio 1+2+3+…+n = n(n+1)/2 hace uso frecuente de correciones dentro de la línea procedimental, enfatizando los nombres y formas de la fórmulas matemáticas, tal y como indica el esquema 22.
Dado que Lore en su ejemplo introductorio : $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^k = 2(2^k – 1)$ hace uso frecuente de fórmulas matemáticas para precisar los pasos que está marcando. Tal y como la ley de mutltiplicación de potencias con la misma base $a^n * a^m = a^{n+m}$ que es distinto a la fórmula de potencia tras potencia $(a^n)^m = a^{n*m}$

5.3.3.- Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión temporal y la dimensión del HCK (T), HCK(P), HCK(V)

En este bloque se presento los resultados y conclusiones más representativos de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión temporal y las dimensiones del HCK (T), HCK(P), HCK(V). Donde el tema principal fue Inducción matemática, se evidencia que se genera conexiones temporales entre los conceptos término Álgebraico, operaciones Álgebraicas, productos notables y factorización como lo describe el siguiente esquema.

Esquema 23

Conexiones temporales de la relación de la práctica docente de Aby y Lore.



En el esquema 23 se hace la descripción de la relación de los conceptos del conocimiento del horizonte matemático HCK (T), HCK(P), HCK(V). Donde en las grabaciones ya transcritas de la práctica docente de Aby y Lore manifiestan conexiones entre conceptos matemáticos en diferentes etapas del currículo. Dado que los conocimientos que ya han enfocado Aby y Lore son: signo, coeficiente, variable y exponente. En el concepto de signo se tiene los tipos de signo que son por agrupación, por relación y por orden. En el concepto de variable se sabe que hay variables semejantes y no semejantes. En el concepto de coeficiente se determinan los conjuntos númericos, donde se hace enfasis en el conjunto de números naturales (tema principal de estudio de Aby y Lore). Por otra parte hay conocimientos que están por revisar que son el conjunto de números racionales, el conjunto de números irracionales, el conjunto de números enteros, el conjunto de reales. Estos conjuntos mencionados son los que darán puerta a una infinitud de conceptos por relacionar.

Ahora bien, dada la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados más representativos en la Tabla 75 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 23 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de los temas HCK(T).

Tabla 75

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 23 con respecto del HCK(T).

Conexiones Temporales				
HCK (T)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Similitudes	Aby y Lore manifiestan la utilidad del tema de término Álgebraico para llegar a la manipulación		Aby y Lore manifiestan el uso del tema de término Álgebraico para enTablar el uso de tipos de	Aby y Lore manifiestan el uso del concepto términos Álgebraicos.

	adecuada del método inductivo.		signos, tipos de coeficientes, tipos de variables.	

Dado que Aby hace uso frecuente de conceptos (esquema 23) esenciales para ubicar la demostración, esto es: 1+2+3+..+n = n(n+1)/2 donde manipula el concepto de los signos de orden, en este caso la suma, hace uso del concepto de monomios y binomios.

Dado que Lore hace uso frecuente de conceptos (esquema 23) esenciales para ubicar la demostración, esto es: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^k = 2(2^k – 1)$ donde manipula el conpceto de los signos de agrupación, en este caso el paréntesis, hace uso del concepto de exponentes en lo que corresponde al prefijo de variables y coeficientes.

Conexiones Temporales

HCK (T)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Diferencias	Aby y Lore manifiestan formas distintas de abordar el conocimiento matemático futuro, dado que consideran ejemplos distintos en su aplicación.		Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente con respecto de la manipulación que le dan a los ejemplos donde se hace uso de los conjuntos numéricos.	Aby y Lore manifiestan conocimiento distinto como aplicación del tema de inducción, la primera lo hace orientado al tema de funciones de grado 2 y, la

			segunda lo orienta a las soluciones de los polinomios

Dado que Aby aprovecha el conocimiento presente en el ejemplo 1+2+3+..+n = n(n+1)/2 para ubicarlo en otras materias que están cursando en el semestre, tal y como se describio en el capítulo 3, en este caso la materia de Cálculo A, donde lo aplica en el concepto de límite de una función. Dado que Lore aprovecha el conocimiento presente en el ejemplo $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^k = 2(2^k – 1)$ para ubicarlo en otras materias que están cursando en el semestre, tal y como se describio en el capítulo 3, en este caso la materia de Geometría y Trigonometrá, donde lo aplica en el concepto de ecuaciones cuadráticas.

Ahora bien, dada la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados mas representativos en la Tabla 76 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 23 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de las prácticas HCK(P).

Tabla 77

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 23 con respecto del HCK(P).

Conexiones Temporales				
HCK (P)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría		Álgebra B	Cálculo A

	y Trigonometría	**Inducción matemática**		
Similitudes	Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos del razonamiento y la prueba del método de inducción matematica. Asi como el buen uso de las definiciones con respecto a término Álgebraico		Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos del buen uso en la aplicación de algunos de los conjuntos núméricos.	Aby y Lore manifiestan similitudes en la comunicación matemática del uso del concepto signo, coeficiente, variable y exponente.

Dado que Aby y Lore en sus ejemplos introductorios de inducción matemática hacen uso frecuente de definiciones en el ambito Álgebraico, tal y como lo describe el esquema 23 en lo que compete a : término Álgebraico, leyes de los signos para la suma,resta, multiplicación y división. Signos de agrupación, de relación y de orden. Conjuntos numericos (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales).

Conexiones Temporales				
HCK (P)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Diferencias	Aby y Lore manifiestan formas distintas		Aby Lore manifiestan conocimiento	Aby y Lore manifiestan conocimiento

	en los aspectos de la comunicación, dado que la primera aborda ejercicios básicos del tema y la segunda considera ejemplos con un poco más de dificultad.		diferente en la selección de ejemplos, ya que algunos de ellos le permite generalizar mientras otros solo le permite explorar.	distinto en la forma de plantear ejemplos en en el concepto de los conjuntos numericos.

Dado que Aby aborda una comunicación matemática habitual, dado que el concepto de conteo de números naturales es un proceso cognitivo nato propio del ser humano, y Aby aprovecha ese recurso para poder llamar la atención del estudiante y llevarlo a una complejizacion matemática del concepto de inducción matemática.
Dado que Lore aborda una comunicación matemática más conceptual (propia del contexto de nivel superior), ya que arranca con un ejercicio más complejo que compete a la manipulación de potencias y producto Álgebraica, ejemplo que no podría ser abordado en un contexto básico de la metamática.

Ahora bien, dada la propuesta de la Tabla 68 se presentan los resultados mas representativos en la Tabla 77 en donde se generaron similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 23 en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de los valores HCK(V).

Tabla 77

Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el esquema 23 con respecto del HCK(V).

Conexiones Temporales				
HCK (V)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Similitudes	Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos del buen uso del lenguaje matemático y la coherencia en el concepto de término Álgebraico.		Aby y Lore manifiestan similitudes en los aspectos de la consistencia en la simbología y notación matemática	Aby y Lore manifiestan similitudes en la comunicación matemática del concepto de término Álgebraico.

Dado que Aby y Lore hacen un uso adecuado del lenguaje matemático con respecto de los ejemplos introductorios que cada una de ellas manipula.

Por un lado Aby parte del ejemplo introductorio $1+2+3+..+n = n(n+1)/2$ donde utiliza lenguaje aritmetico y Álgebraico, esto es manipula el concepto de la suma de números naturales, omitiendo por el momento, la suma de números irracionales. Ya que aunque conforman el mismo campo numerico, su resultado matemático no es el mismo.

Por otro lado Lore del ejemplo introductorio $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^k = 2(2^k – 1)$ donde utiliza el lenguaje Álgebraico, esto es manipula el concepto de la suma de potencias de números 2, que no es lo mismo a considerar la suma de número pares, ya que el número 6 es un número par, pero no forma una potencia con el número 2.

Conexiones Temporales				
HCK (V)	Conceptos			
	Conocimientos previos		Conocimientos futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A
Diferencias	Aby y Lore manifiestan formas distintas en las correcciones y argumentaciones matemáticas en los ejemplos planteados donde se hace uso del término Álgebraico.		Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente en la selección de ejemplos, donde se hace uso del término algebráico.	Aby y Lore manifiestan conocimiento diferente en la selección de ejemplos, porque cada una de ellas le dio una aplicación diferente.

Por un lado Aby parte del ejemplo introductorio 1+2+3+..+n = n(n+1)/2 donde utiliza lenguaje aritmetico y Álgebraico, donde hace correcciones frecuentes con respecto de lo rodea al concepto de término Álgebraico, tal y como el uso adecuado de las leyes de los signos, esto es (-2)(+3) = -6, que suele confundirse por la manipulación de los términos con -2 +3 = +1. En las transcirpciones de clase de Aby se evidencia estas acciones.

Por otro lado Lore del ejemplo introductorio $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^k = 2(2^k – 1)$ donde utiliza el lenguaje Álgebraico, hace correciones frecuencias con respecto de las leyes de los exponentes que suelen confundirse con las leyes de los radicales. Ya que si se tiene $\left(\frac{x}{y^2}\right)^2$ su respuesta correcta es $\left(\frac{x^2}{y^4}\right)^1$ que suelen equivocarse y escribirlo como $\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^1$. Omitiendo que la ley de los signos se aplica en ambas partes tanto para numerador como para el denominador.

Se concluye entonces que se realizó el análisis de 54 transcripciones de clases de dos profesoras Aby y Lore con respecto del horizonte matemático en sus tres dimensiones (HCK(P), HCK(T), HCK(V)) en el concepto de inducción matemática. Se realizarón 18 mapas conceptuales con respecto de las tres conexiones del conocimiento del horizonte matemático (intraconceptuales, interconceptuales y temporales). Se realizarón 54 relaciones (27 similitudes- 27 diferencias) entre las conexiones del conocimiento del horizonte matemático y sus tres dimensiones (HCK(P), HCK(T), HCK(V)), brindando un corpus de análisis basto para contestar la pregunta de investigación ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto matemático de Inducción matemática?

5.3.4.- Aporte de la investigación en el contexto del modelo MTK

Si bien estas evidencias obtenidas con la metodología aplicada son muy útiles para responder a la pregunta de investigación que sustenta este artículo, con respecto de los conocimientos profesionales que se reflejan y se reconocen en la práctica docente de la profesora, que son muy útiles para la enseñanza, pero esto confiere de un sentido más profundo de la misma. Tal y como lo describen Zazkis y Mamolo.

> “Eso compromete aquellos aspectos de las matemáticas que, mientras quizás no estén contenidas en el currículo, sin embargo, son útiles para el aprendizaje de los alumnos, que ilumina y confiere un sentido comprensible de la importancia más grande de lo que puede ser solo parcialmente revelado en el matemático del momento” (traducido, Ball & Bass, 2009, p.5; citado por Zazkis y Mamolo, 2011, p.8)

Esta exigencia nos permite abrir un abanico de argumentaciones con respecto de los alcances que puede tener este conocimiento del horizonte matemático, ya que su naturaleza implica tener un dominio general de la matemática avanzada, así como de los conceptos puntuales y suficientes para poder abordar un conocimiento específico del contenido, así lo declaran Jakobsen, Thames, Ribeiro y Delaney

> "Otra característica del conocimiento del contenido del horizonte es la comprensión de la matemática avanzada pertinentes a la enseñanza escolar, se trata de captar estructuras matemáticas importantes de la disciplina, específicamente aquellas que están estructuralmente relacionados con el contenido en la escuela en su plan de estudios" (traducido, Jakobsen, Thames, Ribeiro y Delaney, 2014, p.7)

Se considera que una de las principales aportaciones de este trabajo de investigación es la obtención de indicadores que determinen el estudio del conocimiento del horizonte matemático en el contexto de nivel superior, ya que como lo describen Jakobsen, Thames, Ribeiro y Delaney, "El ejercicio de expresar un contenido avanzado en contextos elementales no es nuevo, pero no se ha desarrollado específicamente en contextos de la enseñanza y el aprendizaje de un contenido elemental" (Jakobsen, Thames, Ribeiro y Delaney , 2014, p.10).

Es pertinente describir que existen variadas investigaciones que hay tratado el subdominio del conocimiento del horizonte matemático, pero dentro de la literatura hay pocas tesis doctorales que realicen propuestas de indicadores en este subdominio, tal es el caso de la tesis doctoral de Sosa (2011), que describe dos indicadores para el CHK, los cuales son:

i) Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo bloque o unidad (cuando la relación es entre conceptos de una misma unidad o bloque el HM es muy cercano al CEC).

ii) Saber que un contenido está relacionado con otro más general (aunque no aborde esa forma más general en este grupo porque el programa no lo incluye) (Sosa, 2011, p.64).

Y la tesis doctoral de González (2018), que describe seis indicadores, los cuales son:

KH1.- Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad.

KH2.- Saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye).

KH3.- Saber la aplicación del contenido en otras áreas.

KH4.- Saber cómo conectar un contenido con otro más específico.

KH5.- Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores.

KH6.- Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos posteriores (González, 2018, p.302).

En donde ambas investigaciones doctorales fueron punto de partida para proponer los indicadores del conocimiento del horizonte matemático en la práctica docente de dos profesoras de nivel superior en el concepto de inducción matemática. Es importante mencionar que durante el análisis también se hicieron presentes algunos otros subdominios del modelo del MKT, pero dado las características del contexto, se presentó con mayor predominancia el subdominio del conocimiento del horizonte matemático.

5.3.5.- Limitaciones de esta investigación.

En esta investigación se avanzó en el análisis a profundidad del conocimiento del horizonte matemático, obteniendo de ello una lista amplia de nuevos indicadores en el concepto de inducción matemática, tópico el cual se encuentra ubicado en el semestre básico de un estudiante de la carrera de ingeniería.

Sin embargo, se considera dos limitaciones en esta investigación, la primera de ellas, la garantía de la permanencia en la transversalidad de este tópico en materias posteriores (esto es fuera del semestre básico), dado que la mayoría de las carreras de la Facultad de Ingeniería considera este tópico en los cursos iniciales de un estudiante de ingeniería, pero ya saliendo de su tronco común, cada estudiante cursa materias que ya competen a su perfil.

Otra limitación de esta investigación, se debe al poco tiempo que brindan los profesores a esté concepto de inducción matemática, dado que el concepto se ubica en la materia de Álgebra A, y hay más tópicos que el profesor debe abarcar.

Referencias

Agencia Andaluza de Evaluación Educativa. 2012. Guía de Buenas Prácticas Docentes. Primera edición, Junta de Andalucía. Consejería de Educación.

Avalos y Nordenflycht. 1999. *La formación de Profesores. Perspectiva y experiencias*. Santillana. pp. 115-136.

Baldor J. A. 2004. *Álgebra*. Publicaciones Cultural. México.

Ball, D. L. 2000. Bridging practices. Interwininig content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*. 51 (3). pp. 241-247.

Ball, D.L. 2002. Knowing mathematics for teaching: Relations between research and practice. *Mathematics and Education Reform Newsletter*. 14 (3). 1-5.

Ball, D.L. 2003. What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics? *Paper present at the U.S. Department of Education, Secretary's Mathematics Summit, Washington, DC*. Recuperado de: http://www-personal.umich.edu/dball/presentations/index.html [Visitado el 10 de mayo de 2008].

Ball, D.L., Hill, H.C. y Bass, H. 2005. Knowing Mathemtics for Teaching: Who knows 341ágs.341atics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*. pp. 14-46.

Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. 2008. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*. 59 (5), 389-407.

Casás N. 2007. Deducción por inducción. *SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid. 55. p. 55-60.

Caro, L. 2021. 7 Técnicas e Instrumentos para la Recolección de Datos. *Lifeder*. Recuperado de https://www.lifeder.com/tecnicas-instrumentos-recoleccion-datos/

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. 2013. Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas. J. Gutiérrez. M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Comares. pp. 193-200.

Casabón, A., Agustín Lacruz, M., Velasco, E., Manero, A., Molins, P., Orera, L., Olivan, J. A., Tramullas, J., y Ubieto-Artur, M. 2009. *Código de buenas prácticas docentes en el título de Grado en Información y Documentación.*

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. 2017. Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación matemática*. 29(1). pp.141-170.

Davini, M. 2015. *La Formación en la práctica docente. Presidencia de la Nación.* Paidós. pp. 1-41.

De Miguel, M. 1988. Paradigmas de la investigación educativa española. En I, Dendaluce (Coord.), *Aspectos metodológicos de la investigación educativa*. Madrid: Narcea. pp. 60-77.

Espinoza Freire, E. E. 2018. El problema de investigación. *Revista Conrado*. 14(64). pp. 22-32. Recuperado de http:// conrado.ucf.edu.cu/index.php/Conrado

Facultad de Ingeniería. 2014. Carrera de Ingeniero Geologo de la Universidad Autonoma de San Luis Potosí. Recuperado:http://cienciastierra.ing.uaslp.mx/geologo/documentos/planDeEstudios_ing_geologo.pdf

Fernández, S. y Figueiras, L. 2010. El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida: SEIEM. pp. 291-301.

Flores, E. 2020. *Conocimiento de la estructura de las matemáticas*. [Diapositiva de PowerPoint]. Repositorio del Seminario en Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIDM) llevado a cabo el día 16 de octubre de 2020.

Gamboa, G. D., & Figueiras L. 2014. *Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis*.

Gomez y Planchart. 2005. Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica. *HumanitarianNet.*

García, J. 2019. Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 100. Pp. 129-133.

González, J. 2018. Conocimiento Matemático y didáctico del estudiante para profesor de educación primaria sobre fracciones y decimales. Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Aguascalientes, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Educación.

Knobel, M. y C. Lankshear. 2002. *Maneras de saber: tres enfoques para la investigación educativa*.

Larson R., Hostetler R. 2009. *Cálculo y Geometría Analítica*. Volumen 1. 6° Edición. Madrid: McGraw Hill.

López, A. 2018. Johann Carl Friedrich Gauss, el niño prodigio que supo de todas las matemáticas. *El País.* Recuperado: https://elpais.com/elpais/2018/04/30/ciencia/1525069233_387473.html

Martínez M., Giné C., Fernández S., Figueiras L., Deulofeu J. 2011. *El conocimiento del Horizonte matemático; más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. Investigación en Educación Matemática XV*. pp. 429-438.

Martínez-Rizo, F. 2012. Procedimientos para el estudio sobre las prácticas docentes. *Revisión de la literatura. RELIEVE*. 18(1). http://www.uv.es/RELIEVE/v18n1/RELIEVEv18n1_1.htm

Mora Vargas, A. I. 2005. Guía para elaborar una propuesta de investigación. *Revista Educación*. 29 (2). pp. 67-97. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44029206

Muñoz Catalán, M.C., Contreras, L.C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M.Á. y Climent, N. 2015. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. 18 (3). Pp. 1801-1817.

Narváez S. 2002. Apuntes de I.Q. Salvador Narváez Rentería. *Lógica Matemática*. pp. 40-42.

Ozámiz, M.D. 1995. *Aventuras matemáticas: Una ventana hacia el caos y otros episodios.*

Pambudi, D. S., Budayasa, I. K., Lukito, A. 2020. The Role of Mathematical Connections in Mathematical Problem Solving. *Journal Pendidikan Matematika*. 4(2). pp. 129-144. DOI: https://doi.org/10.22342/jpm.14.2.10985.129-144 Website: https://ejournal.unsri.ac.id/index.php/jpm

Park, S. y Oliver, J.S. 2008. Revisiting the conceptualization of pedagogical content knowledge (PCK): PK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Sciences Education*. 38. pp. 261-284.

PISA. 2018. Resultados de México del informe PISA 2018. Recuperado de: https://www.compareyourcountry.org/pisa/country/MEX?lg=es

Pérez R. (2015). Investigación con estudio de casos, Robert E. Stake. *Revista Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias.* 10(2). pp. 99-104. Recuperado de: https://www.academia.edu/24305009/Rese%C3%B1a_libro_Investigaci%C3%B3n_con_estudio_de_casos_de_Robert_E_Stake

Proyecto Prometeo-ELC. 2012. Simbología Matemática. http://proyecto-prometeo.blogspot.com/2012/05/simbologia-matematica.html

Reyes A. M. 2018. *Conocimiento especializado de profesores en formación de primaria. Enseñanza del significado razón*. Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica Nacional Unidad 321 Zacatecas, Zacatecas.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. 2022. Diccionario de la lengua española. Recuperado de: https://dle.rae.es/conocimiento?m=form

Ribeiro, C.M. 2008. From modeling the teacher practice to the establishment of relations between the teacher actions and cognitions. In M. Joubert (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics November 2008*, 28(3), (pp. 102-107) Londres**:** British Society for Research into Learning Mathematics.

Ribeiro M. 2022. Acerca de Miguel Ribeiro. Recuperado: https://www.researchgate.net/profile/Miguel-Ribeiro-11

Rosa, M. y Caldeira, J. 2018. Conexões Matemáticas entre Professores em Cyber formação Mobile: como se mostram? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1068-1091. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62al6

Stake R.E. 2007. *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S.L.

Sosa, L. 2011. Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos. Tesis de Doctorado, Universidad de Huelva, Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía, Huelva, España.

Sosa L. 2013. Semblanza (breve). Recuperado: https://studylib.es/doc/8302493/leticia-sosa-guerrero-unidad-acad%C3%A9mica-de-matem%C3%A1ticas--uaz

Shulman, L.S. 1986. Those who understand knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*. 15(2), pp. 4-14.

TALIS. 2018. The Experience of new teachers, results from Talis 2018. Recuperado de: http://www.oecd.org/edu/school/talis.htm

Spivak M. 1992. *Cálculo Infinitesimal*. Barcelona, España: Editorial Reverté, S.A.

Sominskii I. S. 1959. *El método de la inducción matemática*. México: Editorial Limusa.

Temas de Ciencia y Tecnología. 2013. Metodologías para la identificación y valoración de impactos ambientales. 17(50). pp. 37-42.

Zazkis, R. y Mamolo, A. 2011. Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon*. For the Lerning of Mathematics 31(2):* 8-13*.* DOI:10.2307/41319556.

ANEXO A. Transcripciones

Como parte de la estrategia metodológica que se empleó en esta investigación educativa, se considera pertinente mencionar que el paradigma que se utilizó es el interpretativo, ya que este paradigma comprende e interpreta la realidad educativa, buscando analizar los significados de las personas, las percepciones, intenciones y acciones que ejecutan en un acto educativo.

Por lo cual en base a esta estrategia metodológica que se aplicó en este estudio de caso, la técnica para obtener la información fue mediante grabaciones en el aula, notas de campo y entrevista. En este apartado se colocan las transcripciones de estas evidencias observadas en dos profesoras Aby y Lore. Dando un total de 18 transcripciones de clases, 2 entrevistas y 2 evidencias de clases, representadas en la siguiente Tabla.

Tabla 78

Tabla de organización de las transcripciones de las secciones y clases correspondientes a las secciones del análisis de la práctica docente de Aby y Lore.

Transcripción	sesión	Clase
8 de octubre de 2018	1	1
9 de octubre de 2018	1	2
10 de octubre de 2018	1	3
15 de octubre de 2018	2	1
16 de octubre de 2018	2	2
Transcripción	sesión	Clase

17 de octubre de 2018	2	3
22 de octubre de 2018	3	1
23 de octubre de 2018	3	2
24 de octubre de 2018	3	3
Transcripción	sesión	Clase
8 de octubre de 2018	1	1
9 de octubre de 2018	1	2
10 de octubre de 2018	1	3
15 de octubre de 2018	2	1
16 de octubre de 2018	2	2
17 de octubre de 2018	2	3
22 de octubre de 2018	3	1
23 de octubre de 2018	3	2
24 de octubre de 2018	3	3

Todos estos resultados aportarán aproximarnos al objeto de estudio, y contestar a la pregunta de investigación que es: ¿Cuál es el Conocimiento del Horizonte Matemático de dos profesoras del Departamento Físico Matemático en el concepto matemático Inducción Matemática? A continuación, se describe las transcripciones de estas grabaciones de clase.

Transcripción de la sesión 1 de la clase 1 de la clase de Aby

Transcripción de la clase 1 del día 8 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	**P**	**Descripción**
1	Aby	A ver dejen de escribir un poquito, necesito que me pongan atención. Entonces la inducción matemática comenzó cuando Gauss, cuando era chiquito, comento que un día en clase, la maestra no tenía nada que ponerle en clase, y entonces les dijo sumen el 1, más 2, más 3 hasta el cien (El País, 2018)
2		entonces los niños comenzaron a sumar 1+2 es 3, 3 + 3 es 6, y así sucesivamente.
3		entonces Gauss observo el primero y el último número y los sumo y esto le daba 101, y si sumaba el 2 y el 99 (penúltimo) le daba 101, y si sumaba 3 y el 98 (antepenúltimo) le daba 101, y así sucesivamente.
4		entonces se dijo entonces voy a formar parejas, si tengo 100 números, entonces ¿cuántas parejas serán?
5	Alumno 1	50
6	Aby	¿Y cuánto dará la suma de todos los números?
7	Alumno 2	50 por 101
8	Aby	¿Por qué?
9	Alumno 3	Porque son 50 parejas y son 101 números los que tenemos que sumar

10	Aby	(la maestra continua con la historia que inicio) Entonces la maestra (la maestra de Gauss), comenzó ella solita a contar 1 + 2 + 3 + 4 +… hasta 100 y se dio cuenta que le daba lo mismo que había obtenido este Gauss.
11		Y ahí empezó la inducción matemática, encontrar un patrón una fórmula para saber la suma completa sin necesidad de estar haciéndolo número tras número.
13		Por ejemplo, en el examen psicométrico que les realizaron en la UASLP para ingresar les pusieron un sinónimo de ello, al solicitarles que encontraran el comportamiento de algunos números, como sucesiones, por ejemplo, si ustedes tenían unos ciertos números, ¿ustedes que buscaban?
14	Alumno 4	Encontrábamos un patrón, una fórmula.
15	Aby	Esto nos indica que una fórmula, nos dará un comportamiento más rápido para encontrar un número más grande
16		Por ejemplo, si usted quiere encontrar el número en la posición 25mil, entonces la fórmula le ayudara para que localice a ese número en esa posición.
17		Así aplicando la fórmula $1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)}{2}$ ¿Y se desea la posición 25 mil, que valor le dará?
18	Alumno 4	$\frac{25000\ \ (25000+1)}{2} = 312{,}512{,}500$

19	Aby	Entonces para eso nos sirve la fórmula, para encontrar la suma de todos los números que están en esta secuencia.
20		Ahora bien, cuáles son los pasos de la inducción, y como queremos que lo hagan aquí. Muchos lo hacen de manera distinta, yo lo haré por medio de tres pasos.
21		Se verifica para el caso de n = 1, algunos no realizan este primer paso, pero hay algunos ejercicios, porque sucede que algunas fórmulas se cumplen en el primer caso, pero para el resto de los casos ya no da, por lo que verificaremos para el caso 1, 2 y 3.
22		$$1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{k} = \frac{\mathrm{k}\,(\mathrm{k} + 1)}{2}$$
23		n = 1, tendremos $1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$ para n = 2, tendremos $1 + 2 = \frac{2\,(2+1)}{2}$ para n = 3, tendremos $1 + 2 + 3 = \frac{3\,(3+1)}{2}$ Esto es; podemos ver que se cumple en ambos lados.
24		Aquí hay que tener mucho cuidado, ya que algunos no suman la cantidad anterior, y por consecuencia la igualdad no da el resultado. ¡OJO!, siempre hay que sumar los datos anteriores
25		Después el siguiente paso, es que se sustituyen n = k en ambos lados. $1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{k} = \frac{\mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)}{2}$ Donde k representa cualquier número natural, que se considera fijo que se cumple para ese número.

26	Aby	Ahora, el tercer paso será sustituir el elemento n=k+1, en ambos lados, es decir: $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k\,(k+1)}{2}+$ (k+1). ¿Por qué lo van a hacer así?
27		Es como las ecuaciones en química si usted agrega algo de un extremo, se lo debe de agregar de la misma manera en el otro extremo para que este balanceada.
28		Sería el mismo proceso, si queremos agregar el elemento k+2. Entonces nos quedaría $$1+2+3+\cdots+k+(k+1)+(k+2)=\frac{k\,(k+1)}{2}+(k+2)$$
29		Pero por el momento no lo haremos de esta forma, consideraremos el caso de n = k+1, esto es: $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k\,(k+1)}{2}$ + (k+1)
30		En este tercer paso, se puede ver que tenemos una igualdad, pero por lo general el lado que se va a desarrollar es el lado derecho. $$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k\,(k+1)}{2}+(k+1)$$
31		Ahora bien, en este tercer paso se tiene que demostrar, que lo que se le agrego a la igualdad (k+1) de la izquierdo tiene que darnos lo mismo del otro lado derecho, esto es: $\frac{(k+1)\,((k+1)+1)}{2}$

32		Ahora bien, el lado que se tiene que desarrollar es el lado derecho, ya que el lado izquierdo se tiene una infinitud de números que no se conocen, pero sabemos que tienen que llegar a (k+1),
33		Ahora bien, del lado derecho tenemos $\frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2+k}{2} + (k+1)$.
34		Estamos de acuerdo. ¿Entonces si queremos sumar ambas expresiones, que tenemos que hacer?
35	Alumno 1	Calcular un común denominador
36	Aby	¿Cuál es el común denominador?
37	Alumno 2	Es el número 2
38	Aby	Y después de calcular el común denominador, ¿Qué se hace?, ¡Sumar fracciones!, ¿Y que se obtiene?
39	Alumno 3	$\frac{k^2+k}{2} + (k+1) = \frac{k^2+k+2(k+1)}{2}$
40	Aby	Y de lo que se tiene en el numerador, se obtiene $k^2 + k + 2k + 2$.
41	Alumno 4	¿Por qué se obtiene 2k +2?, no debería de dar k + 1
42	Aby	Porque acuérdese, estamos sumando dos fracciones, pero el (k+1), no tiene forma de fracción, por eso se le coloca el número 1 como factor común.

43		Y cuando se suman las fracciones nos queda en el numerador $k^2 + k + 2(k+1) = k^2 + k + 2k + 2$. Estamos de acuerdo.
44	Aby	Ahora que más tendríamos que hacer con los términos $k^2 + k + 2k + 2$
45	Alumno 5	Sumar k y 2k
46	Aby	Y que nos queda
47	Alumno 6	$k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2$
48	Aby	Y con el trinomio que se obtiene, ¿Cómo se factoriza?
49	Alumno 7	Se factoriza como (k+1) (k+2)
50	Aby	Es correcto, pero ahora como vamos a verificar que lo que se obtiene $\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ es igual a $\frac{(k+1)\ ((k+1)+1)}{2}$
51	Alumno 1	Multiplicando nuevamente
52	Aby	Puede ser una alternativa, pero observen que el término que se obtuvo $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, se puede separar como (k+1) (K+1+1), ya que el número 2 se puede escribir como 1+1, estamos deacuerdo.
53		Esto es (K+2) es lo mismo tener como (k+1+1). ¿Porque lo separe así?
54	Alumno 2	¿Porque se quiere demostrar para n= k+1?

55	Aby	Si, efectivamente porque en el paso tres, se planteó demostrarlo para este caso. Ya que n = K+1. Y el ejercicio principal se busca que se cumpla $1+2+3+\cdots+\mathrm{n}=\frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)}{2}$
56		Y podemos ver qué es exactamente lo mismo que $\frac{(\mathrm{k}+1)\,((\mathrm{k}+1)+1)}{2}$ ¡Estamos de acuerdo!, ¡Preguntas!

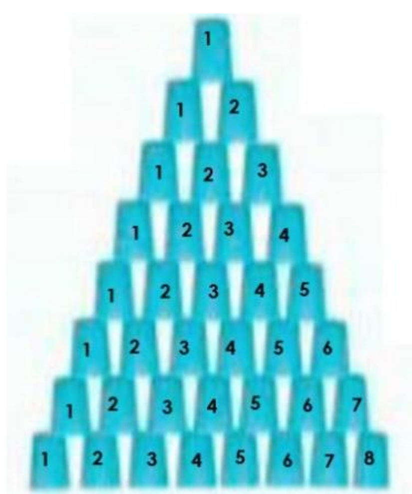
Transcripción de la clase 2 de la sesión 1 del día 9 de octubre de 2018

N = número de episodio

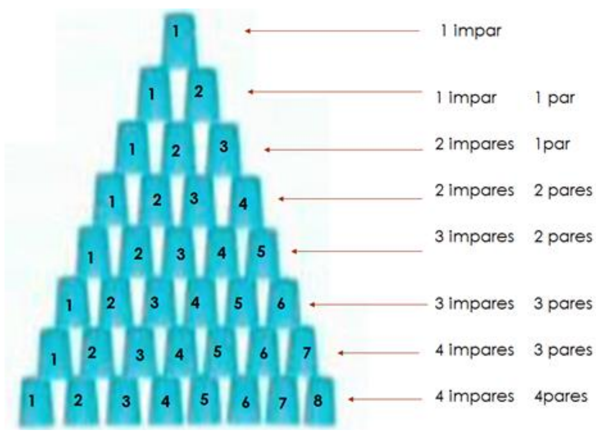
P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	**P**	**Descripción**
1	Aby:	Hemos estado revisando el tema de inducción matemática, en donde vimos un ejemplo preliminar de la forma $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$ Demostramos que se cumple para un k+1. ¿Lo recuerdan?
2	Alumno 1:	Si, pero sucede lo mismo si se demuestra para n = k+2
3	Aby:	Se le suma k+1, porque es el siguiente término que prosigue después de k, pero también después se encuentra k+1, esto es; k+2, k+3, k+4. Esto es, pudimos haber demostrado para n = K+2, pero tendríamos que tener como hipótesis $$1 + 2 + 3 + \cdots k + (k+1) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$ Y llegar a demostrar para n = k+2. Esto es: $$1 + 2 + 3 + \cdots k + (k+1) + (k+2) = \frac{(k+2)\,(k+3)}{2}$$ Donde k + 3 = k + 1 + 2.
4	Alumno 2	¿Porque se tiene que demostrar para ese k?
5	Aby:	Ah, porque, el valor de k nos representa un número cualquiera, dado que es una generalización del …

5	Aby:	…concepto de inducción matemática. Hay que tener un poco de cuidado, ya que este tema es uno de los más difíciles de esta materia, ya que se pueden utilizar muchos conceptos de matemáticas, como factorización, binomios, trinomios, productos notables, suma o resta Álgebraica, desigualdades, sumatorias, fracciones, etc.
6	Alumno 3:	¿Por qué del lado derecho no sumamos k + (k+1)? Debería quedarnos 2k + 1, en vez de (k+1).
7	Aby:	Porque el lado izquierdo no se toman los términos, ya que hay una infinitud de términos que terminan en k, como se describió en clases anteriores.
8	Aby:	Para comprender mejor esta idea haremos lo siguiente:
9		Aby saca de su mochila una tira de vasos y los empieza a acomodar en forma de pirámide sobre su escritorio. 
10	Aby:	Ahora bien, en este desorden de conteo de vasos, se puede establecer un orden entre ellos, supongamos que se etiquetan

		cada uno de los vasos que están presente en cada una de las filas, esto es; la fila n-enésima tendrá n número de vasos, como se muestra en la siguiente imagen (anterior imagen).
11	Aby:	El haber asignado una correspondencia de un número a cada uno de los vasos por medio del conjunto de los números enteros positivos, nos permite ver un comportamiento más tacito de estos números. ¿Cuál es?”,
12	Alumno1:	Los números se presentan como un número par y después otro número impar
13	Aby:	Entonces bajo esta relación. Podemos contestar a la pregunta, ¿Cuántos vasos hay?”.
14	Alumno2:	Pues, se ve que hay un patrón de filas, esto es 1 impar,1 impar,2 impares ,2 impares, 3 impares, 3 impares, 4 impares, 4 impares, 5 impares, 5 impares…etc.”.
15	Alumno3:	1 par, 1 par, 2 pares, 2 pares, 3 pares, 3 pares, 4 pares, 4, pares…etc.”
16	Aby:	Pero se puede contestar a la pregunta ¿Cuántos vasos hay?
17	Alumno4:	Si solo tenemos esa tira de vasos, con ese acomodo, si se puede.
18	Aby:	¿Cuántos vasos hay con la condición de que establece?
20	Alumno4:	Pasa al frente del escritorio de Aby, y menciona: Si en cada una de las filas se procede a realizar una clasificación de números pares e impares, podemos darnos cuenta de un patrón de

		comportamiento. Primera fila tiene un vaso impar, fila dos tiene un vaso impar y un vaso par, fila tres tiene 2 vasos impares y 1 vaso par, cuarta fila tiene 2 vasos impares y 2 vasos pares, quinta fila tiene 3 vasos impares y 2 vasos pares, y así sucesivamente: 
21	Alumno 4:	Si sumamos la cantidad de impares y pares obtenidos, tendremos la cantidad de vasos que existen en ese momento.
22	Aby:	Muy bien, se pueden determinar varias técnicas para sumar una cantidad de números vasos, que, transcrito a lenguaje matemático, es sumar una cantidad de números naturales. Pero es importante enfatizar que la fórmula matemática para sumar los primeros n números naturales es: $1+2+3+\cdots+\mathrm{n}=\frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)}{2}$ Donde se demostró que se cumple para un k+1. ¿Lo recuerdan?
23	Alumno 1:	Si, pero sucede lo mismo si se demuestra para n = k+2
24	Aby:	Se le suma k+1, porque es el siguiente término que prosigue después de k, pero también después se encuentra k+1, esto es; k+2, k+3, k+4. Esto es, pudimos

		haber demostrado para n = K+2, pero tendríamos que tener como hipótesis. $$1+2+3+\cdots k+(k+1)=\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$ Y llegar a demostrar para n = k+2. Esto es: $$1+2+3+\cdots k+(k+1)+(k+2)=\frac{(k+2)\,(k+3)}{2}$$ Donde k + 3 = k + 1 + 2.
25	Alumno 2:	¿Porque se tiene que demostrar para ese k?
26	Aby:	Ah, porque, el valor de k nos representa un número cualquiera, dado que es una generalización del concepto de inducción matemática. Hay que tener un poco de cuidado, ya que este tema es uno de los más difíciles de esta materia, ya que se pueden utilizar muchos conceptos de matemáticas, como factorización, binomios, trinomios, productos notables, suma o resta Álgebraica, desigualdades, sumatorias, fracciones, etc.
27	Aby:	¿Y de lo que se tiene en el numerador en el lado derecho de la igualdad $\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$ es $k^2+k+2k+2$?
28	Alumno:	¿Por qué se obtiene 2k +2?, no debería de dar k + 1?
29	Aby:	Porque acuérdese, estamos sumando dos fracciones, pero el (k+1), no tiene forma de fracción, por eso se le coloca el número 1 como factor común. Y cuando se suman las

		fracciones nos queda en el numerador $\mathrm{k}^2 + \mathrm{k} + 2(\mathrm{k} + 1) =$ $\mathrm{k}^2 + \mathrm{k} + 2\mathrm{k} + 2$. Estamos de acuerdo.
30	Aby:	Ahora que más tendríamos que hacer con los términos $\mathrm{k}^2 + \mathrm{k} + 2\mathrm{k} + 2$.
31	Alumno:	Sumar k y 2k", esto es, "$\mathrm{k}^2 + \mathrm{k} + 2\mathrm{k} + 2 = \mathrm{k}^2 + 3\mathrm{k} + 2$
32	Aby:	Y con el trinomio que se obtiene, ¿Cómo se factoriza?
33	Alumno:	Se factoriza como (k+1) (k+2)".

Transcripción de la clase 3 de la sesión 1 del día 10 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	**P**	**Descripción:**
1	Aby:	Bueno chicos, en base a lo anterior visto, les voy a presentar otro ejemplo similar para saber si entendieron, y les revisare en su cuaderno lo que hayan trabajado. Demostrar por inducción matemática que: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^n = 2(2^n – 1)$ Como se puede apreciar ahora se propone el caso para las sumas de las potencias del número 2, y se pide verificar que es igual a $2(2^n – 1)$
2	Alumno 5:	Si se tiene $2(2^n – 1)$ es lo mismo tener $2^{n+1} – 1$
3	Aby:	Verifique sus productos, multiplique bien la expresión, es una multiplicación de un monomio por un binomio, ¿Qué se obtiene?
4	Alumno 5:	Ah… $2^{n+1} – 2$
5	Aby:	El siguiente paso, recuerde es verificar que se cumple para n =1 Esto es: $2^1 = 2(2^1 – 1)$ $2 = 2(2 – 1)$ $2 = 2(1)$ $2 = 2$ ¿Cuál es el siguiente paso?

6	Alumno 6:	Verificar para n = 2 y 3.
7	Aby:	¿Cuál es su propuesta?
8	Alumno 7:	$2^1 + 2^2 = 2(2^2 - 1)$ $= 2(4 - 1)$ $= 2(3)$ $2^1 + 2^2 + 2^3 = 2(2^3 - 1)$ $= 2(8 - 1)$ $= 2(7)$
9	Aby:	Proponiendo para k, tendremos P(k): $2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^k = 2(2^k - 1)$ Demostraremos para k+1 esto es: P(k+1): $2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^k + 2^{k+1 =} 2(2^k - 1) + 2^{k+1}$ Teniendo la anterior propuesta, que paso tenemos que hacer
10	Alumno 8:	Simplificar el lado derecho Esto es $2(2^k - 1) + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$, y después sacar como factor común el 2.
11	Aby:	Verifique bien la propuesta, ya que, aunque los tres términos tienen al número 2 como base, no significa que sea un factor común.
12	Alumno 8:	Entonces, solo se juntan 2^{k+1} y se tiene $2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = 2(2^{k+1}) - 2$
13	Aby:	Ok, y posteriormente ya se puede calcular el factor común que es 2, y se tendría $2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = 2(2^{k+1}) - 2 = 2[(2^{k+1}) - 1]$. Que es la misma forma que la propuesta original sólo que para el siguiente de k, por lo tanto, lo podemos aceptar válido para cualquier valor n.

Transcripción de la sesión 2 de la clase de Aby

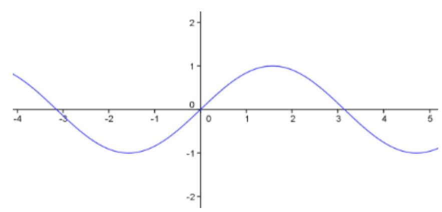
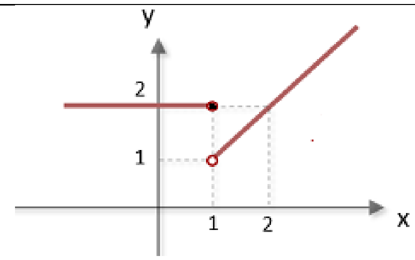
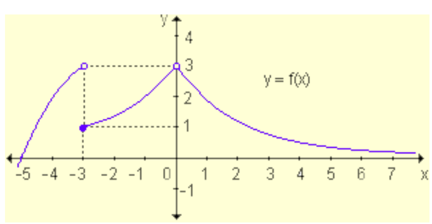
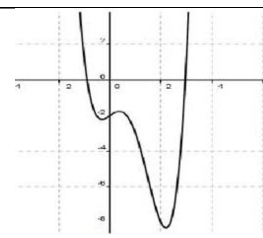
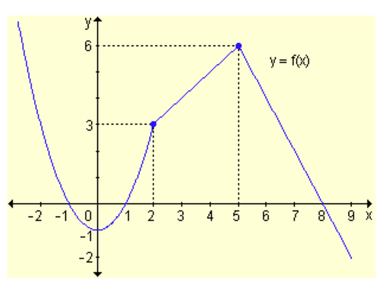
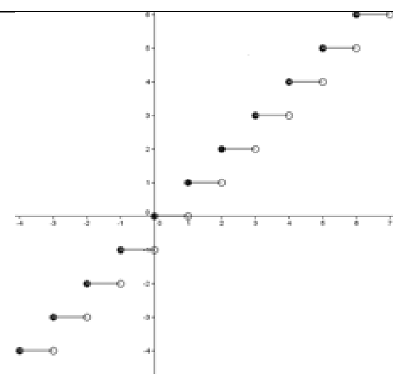
Transcripción de la clase 1 de la sesión 2 del día 15 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Aby:	Bueno vamos a empezar, para revisar el concepto de función, primero lo que tenemos que tomar en cuenta es que una función sea continua. Entonces antes de comenzar esto necesitamos ver…. ¿Qué significa que una función sea continua?
2	Alumno 1:	que no se corta
3	Alumno 2:	que no tiene un punto de discontinuidad
4	Aby:	¿Cuál otra?
5	Alumno 3:	la función está definida
6	Alumno 4:	La función se dibuja de forma constante
7	Aby:	Entonces como definición formal, mi función es continua en un punto cuando x = a, si se cumplen estas tres condiciones. La primera, que la función evaluada en a exista. ¿Estamos de acuerdo? como dijo su compañera, que no tenga puntos discontinuos. La segunda que debe cumplirse es que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista

		La tercera condición es que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ se cumpla la igualdad en ese punto
8	Aby:	Esta es la parte formal, ahora la parte informal es lo que ustedes describieron, pero también es lo mismo decir que es trazar la función sin necesidad de despegar el lápiz. Entonces les voy a colocar varias graficas:
9		  Figura 1 Figura 2
10		  Figura 3 Figura 4
11		  Figura 5 Figura 6

12	Aby:	Ok, entonces tengo estas funciones, ¿Está función es continua? (señala la Figura 1)
13	Alumno 5:	Sí, porque no está cortada.
14	Alumno 6:	Sí, miss, ya que se ve que es la función seno, y por lo que ya nos dijo en temas anteriores esta es una función continua
15	Aby:	¿Ok, ahora está es continua? (señalando la figura 2)
16	Alumnos:	No…. (contestan algunos de los alumnos en forma grupal)
17	Aby:	¿Porque no es continua?
18	Alumno 5:	No, si es continua, porque en el valor de x = 1, su valor es igual a 2.
19	Alumno 6:	Pero no es continua, porque se ve que tuvo que levantar el lápiz para graficarla.
20	Aby:	¿Y qué pasa si esto sucede?
21	Alumno 7:	la gráfica no cumple, pero la gráfica 4 si es continua, porque si lo cumple.
22	Aby:	¿Entonces es continua? (la maestra señala nuevamente la figura 2)
23	Alumnos:	No es continua…. (contestan algunos de los alumnos en forma grupal)
24	Aby:	¿Está función es continua? (Aby señala la figura 3)
25	Alumno 7:	no es, ya que sucede lo mismo que la anterior.
26	Aby:	¿Ok, ahora esta función es continua? (Aby señala la figura 4)
27	Alumno 8:	Sí, es continua, no se despega el lápiz.
28	Aby:	¿muy bien, esta? (Aby señala la figura 5)

29	Alumno 9:	Si, es continua, pero no sé qué tipo de función es, parece que es una cuadrática.
30	Aby:	Por el momento, no se está definiendo que tipo de función es, únicamente revisamos si es continua o no, esto lo veremos más adelante.
31	Aby:	¿Y esta última? (Aby señala la figura 6).
32	Alumno 10:	no, no es continua.
33	Aby:	0k, entonces gráficamente nosotros decimos que una función es continua, si no se despega el lápiz, en la gráfica 2, 3 y 6 si despegamos el lápiz, entonces eso sucede gráficamente. Para demostrar que una función es continua se tienen que demostrar los tres pasos 1) f(a) exista. 2) $\lim_{x \to a} f(x)$ exista 3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ la igualdad se cumpla en ese punto Si no se cumplen estos tres, entonces yo puedo decir que la función es discontinua. Bien, basta con que uno no se cumpla para que la función sea discontinua.

Transcripción de la clase 2 de la sesión 2 del día 16 de octubre de 2018

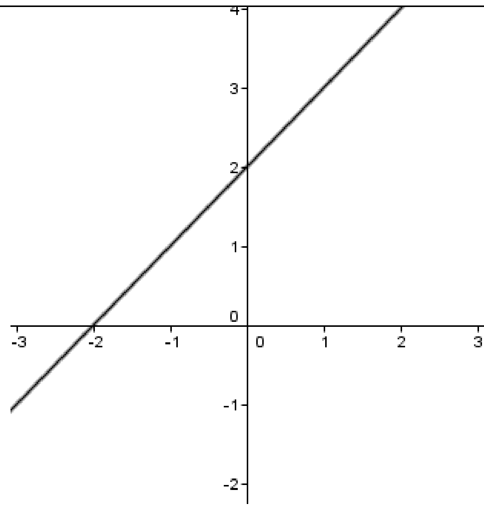
N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Aby	Ahora bien, en la clase anterior se describió que una función es continua en un punto x = a, si cumple tres condiciones. La primera, que la función evaluada en a exista. La segunda que debe cumplirse es que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista. La tercera condición es que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ se cumpla en ese punto. Dado lo anterior hoy vamos a desarrollar la primera condición y la siguiente clase la segunda y tercera.
2		¿Bueno, alguien me puede decir que es un plano cartesiano?
3	Alumno:	Aquel que tiene cuatro cuadrantes
4	Aby:	¿Qué significa tener un punto en el plano cartesiano?
5	Alumno:	Indica la posición de x, y
6	Aby:	Ahora bien, si se tiene por ejemplo una función lineal f(x) = x+2, ¿qué significa que la función evaluada en x = 3 exista?
7	Alumno:	Que al evaluar x = 3 tenga un resultado.
8	Aby:	Muy bien, esto es que existe, el par (3,5), ya que f(3) =3+2 = 5. ¿Y podremos decir lo mismo de x = 4?
9	Alumno:	Si, porque en x = 4, da como resultado f (4) = 4+2=6
10	Aby:	Podremos tener más funciones donde existe su par ordenado, pero hay funciones que no es así, por ejemplo ¿f(x) = 1/x existe en x = 0?

<table>
<tr><td>11</td><td>Alumno:</td><td>No, ya que se obtiene indeterminado.</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Aby:</td><td>Entonces dado lo anterior hay tres formas de representar una función, que es mediante una Tabla de valores, mediante una ecuación y mediante una gráfica.</td></tr>
<tr><td>13</td><td></td><td>Si se tiene f(x) = x+ 2, me puede describir la siguiente Tabla de valores.
<table>
<tr><td>x</td><td>f(x)</td></tr>
<tr><td>-2</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>14</td><td>Alumno:</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>f(x)</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>15</td><td>Aby:</td><td>¿Puede graficarla?</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Alumno:</td><td>(Uno de los alumnos pasa al pizarrón y hace la siguiente representación).</td></tr>
</table>

		 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -2 -1 0 1 2 3

Transcripción de la clase 3 de la sesión 2 del día 17 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

<table>
<tr><th>N</th><th>P</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Aby:</td><td>Ahora bien, dados los temas de la clase anterior, en específico el concepto de función. Es interesante averiguar el comportamiento de una determinada función cuando la variable independiente x, se aproxima a un determinado valor L.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Aby:</td><td>Podría pensarse que para averiguar esa cuestión bastaría con calcular el valor de la función en el punto que se está considerando, esto es f(a). Sin embargo, en muchos casos ese cálculo no responde a la pregunta de la existencia de f(a)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Aby:</td><td>Supongamos que queremos tabular la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$
<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>-</td><td>$\frac{1}{5}$</td></tr>
</table>
En donde, si se evalúa en los puntos 2 y -2, ¿Qué cree que sucede?</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Alumno:</td><td>Se genera en 2, 0/0 y en el -2, se genera -4/0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Aby:</td><td>¿Son el mismo resultado 0/0 y -4/0?</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Alumno:</td><td>Sí, creo que ninguno existe.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>7</td><td>Aby:</td><td>Si bien 0/0 es ∞, pero -4/0 da ∄ (indeterminación). Más adelante abordaremos estos elementos que tienen que ver con infinito.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Aby:</td><td>Pero ahora, supongamos que fijamos nuestra mirada en 2 alrededor de la función f(x), y en esta mirada hacemos aproximaciones más cercanas, por medio de la siguiente Tabla. Puede alguien a ayudar a completarla.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Alumno:</td><td><table><tr><td>x</td><td>1.9</td><td>1.99</td><td>1.999</td><td>2</td><td>2.001</td><td>2.01</td><td>2.1</td></tr><tr><td>y</td><td>0.2564</td><td>0.2506</td><td>0.25001</td><td></td><td>0.2499</td><td>0.2493</td><td>0.2439</td></tr></table>
(Pasa un alumno al pizarrón a desarrollar el siguiente esquema)</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Aby:</td><td>En la Tabla, se han realizado aproximaciones cerca del 2, ¿Que se puede decir de la función en ese punto?</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Alumno:</td><td>Que sus resultados se acercan al 0.25</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Aby:</td><td>Esto se debe a que $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$ al momento de evaluar esta nueva expresión simplificada en x= 2. ¿Que se obtiene de resultado?</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Alumno</td><td>Se obtiene 1/4, ya que 1 / (2+2)</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Aby:</td><td>En este punto es importante describir que al desarrollar los límites en muchos de los casos se necesita recordar conceptos Álgebraicos, esto es productos notables y factorización, más adelante reforzaremos este punto.</td></tr>
</table>

15	Aby:	Lo anterior es representado de la siguiente forma: $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$, que aplicando algunos procedimientos Álgebraicos resulta ser $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

Transcripción de la sesión 3 de la clase de Aby

Transcripción de la clase 1 de la sesión 3 del día 22 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Aby:	En esta semana de trabajo, ubicaremos la relación que tiene el concepto de función, con el concepto de la derivada. Como primer punto, daremos la siguiente definición.
2	Aby:	La derivada de una función en un punto dado representa una razón de cambio, el cual está determinada por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
3	Aby:	Si tenemos f(x)= x+2, ¿Qué da como como resultado f(x+h)?
4	Alumno;	Da h
5	Aby:	A ver si tenemos f (0), ¿Qué resultado da en la función?
6	Alumno:	Da como resultado 2
7	Aby:	¿Por qué?
8	Alumno:	Ya que f (0) = 0+2 y da como resultado 2
9	Aby:	Muy bien entonces, ¿que da como resultado f(x+h)?
10	Alumno:	Da como resultado f(x+h) = x+h+2
11	Aby:	Ok, Y ahora ¿qué resultado da f(x+h) – f(x)?
12	Alumno:	Da como resultado x+h+2-x+2

13	Aby:	¡Seguro!, recuerda que los signos afectan, quedando x+h+2- (x+2) quedando x+h+2-x-2 esto es h
14	Aby:	Ahora que da como resultado $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. ¿Tú me puedes decir?
15	Alumno:	Da como resultado 1, ya que lo anterior fue h
16	Aby:	Muy bien, y finalmente, los que llevan Cálculo que resultado da $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$
17	Alumno:	Da como h, ya que se evalúa en h
18	Aby:	¡¡No!!, dado que si tienen la expresión f(x) = 2x, ¿Qué resultado da f (2)?
19	Alumno:	Da 4
20	Aby:	Y si tiene f(x) = 2, ¿Qué resultado da f (2)?
21	Alumno:	Sera 2
22	Aby:	Correcto, dado que es una función constante.

Transcripción de la clase 2 de la sesión 3 del día 23 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Aby:	Como parte de los temas que se tienen que revisar de la derivada, ahora les presento el concepto de las fórmulas básicas de derivación, los cuales son cinco.
2	Aby:	La derivada de una constante es cero. la derivada de x es 1, la derivada de una suma es la derivada de cada una de las partes, la derivada de un producto es el primero por la derivada del segundo más el segundo por la derivada del primero, la derivada del cociente es el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador entre el denominador al cuadrado.
3	Aby:	Retomando un ejemplo anterior f(x) = x+2, ¿Cuál de las fórmulas que se mencionaron se utiliza?
4	Alumno:	La de la suma, ya que la función tiene el símbolo de suma.
5	Aby:	Ok, si vemos cada parte de la suma, ¿Cuál es la derivada de x?
6	Alumno:	Es 1.
7	Aby:	Ok, y ¿Cuál es la derivada de 2?
8	Alumno:	Es 2
9	Alumno:	No existe.

N	P	Descripción:
10	Aby:	¿Qué tipo de función es g(x) = 2?
11	Alumno:	Es una constante
12	Aby:	Ahhh, entonces su derivada es cero.
13	Aby:	Cualquier función que sea una constante su derivada es cero.

Transcripción de la clase 3 de la sesión 3 del día 24 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Aby:	Bien chicos, vamos a comenzar el siguiente tema de funciones especiales. Recuerden que ahorita lo que me interesa es que cómo se derivan, revisar cada una de sus definiciones y ver sus gráficas, y algunas de sus características. Entonces estas funciones especiales, de igual manera hablo de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Ahora resolveremos el siguiente ejercicio $$f(x) = e^x \cos(e^x)$$ De manera general, ¿qué criterio usaremos de las derivadas Álgebraicas?
2	Alumno 1:	una multiplicación
3	Aby:	muy bien, y ¿Cómo se describe la fórmula?
4	Alumno 1:	el primer elemento por la derivada del segundo elemento, más, el segundo elemento multiplicado por la derivada del primer elemento
5	Aby:	ok, y ¿quién es la derivada del primero e^x?
6	Alumno 2:	e^x
7	Aby:	¡correcto!, y ¿quién es la derivada del segundo término $\cos(e^x)$
8	Alumno 3:	$\mathrm{sen}(e^x)$
9	Aby:	¡¡¡seguro!!!, ¿qué sucede con su argumento?, recuerde que

		$$\frac{d(\cos(x))}{dx} = -\operatorname{sen}(x) * \frac{d(x)}{dx}$$
10	Alumno 3:	Entonces la derivada de $\cos(e^x)$ es $-\operatorname{sen}(e^x) * e^x$
11	Aby:	muy bien, quedando mi primera derivada como $$f'(x) = e^x(-\operatorname{sen}\ (e^x))\, e^x + \cos\ (e^x) * e^x$$
12	Aby:	Hasta aquí hay alguna duda.
13	Alumno 4:	Sí, en el resultado anterior, la primera parte se puede escribir como $(e^x)^2\,(-\operatorname{sen}(e^x))$?
14	Aby:	Si, $(e^x)^2$, y al momento de simplificarlo, como tengo potencia de potencia, sus exponentes se multiplican, x por 2, quedaría 2x, y de esta manera nos quedaría de la forma. $$f'(x) = (e^{2x})\ \ (-\operatorname{sen}\ (e^x))\ + \cos\ (e^x) * e^x$$
15	Aby:	¿sería la última simplificación?, ¿Podría simplificarse más?, ¿Qué podríamos factorizar?
16	Alumno 5:	se podría factorizar el término e^x
17	Aby:	¡Sólo se factoriza ese término!
18	Alumno 5:	Más bien se factoriza el término e^x
19	Aby:	Finalmente nos queda, la función $$f'(x) = e^x\,[-e^x(\operatorname{sen}\ (e^x) + \cos(e^x)]$$
20	Aby:	Hasta aquí hay alguna duda, ¡¡¡no!!! o si!!!, ok no!!, entonces cual es el siguiente ejercicio que sugieren hacer.

Transcripción de la sesión 1 de la clase de Lore

Transcripción de la clase 1 de la sesión 1 del día 8 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Lore:	Inducción Matemática es una forma de razonamiento que relaciona proposiciones, que dependerá de una variable. Tú sabes que algo pasa para una cantidad de elementos, y deseas saber si va a pasar para una cantidad grande de ellos, como sabes si eso sucederá, a eso se le llama Principio de Inducción Matemática.
2	Alumno1:	¿Es una proposición?
3	Lore:	Ahhh, ¡Proposición! Quiere decir, por ejemplo, si tengo una pieza y la aviento, digo ¡Hay se va a caer! Si tengo dos y la aviento digo, ¡Ah, también, se van a caer! Entonces supongo la hipótesis de inducción que describe, que se cumple para una cierta cantidad de objetos, que, al aventarlos, ¡ahhhh! se van a caer. Entonces la hipótesis de inducción supone que se cumple para una cierta cantidad, y lo que se demuestra es que se cumple para el que le sigue. Y eso se demuestra, y si se demuestra se concluye que se cumple para una cierta cantidad. ¡Y ya, eso es todo!
4	Lore:	Suponemos que se cumple para todo $n > 0$, que:

		$$\mathbf{2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2(2^n-1)}$$ Primero verifico que se cumple para n =1 Dos, asumo que se cumple para n =k Tres, ¿Que quiero hacer?, quiero demostrar que para un valor de k+1 se cumple también, esto es: $$\mathbf{2+2^2+2^3+\cdots+2^k+2^{k+1}=2\left(2^{k+1}-1\right)}$$ Se checa que el valor de n es el que cambia, primero fue 1, después 2, después 3 y después n.
5	Alumno2:	¿El valor de la n se tiene que cambiar por el valor de K?
6	Lore:	Si y después cambiar al valor de k+1
7	Alumno3:	¿Hasta cuantos valores debe de llegar el valor de K?, ¿Son números infinitos?, ¿Son reales?
8	Lore:	No son números enteros, y se llega hasta k+1
9	Lore:	Buena para poderlo demostrar, se realiza por pasos. Paso 1.- Se cumple para n=1, esto es: $$2=2(2^1-1)$$ Después para n=k; esto es: $$2+2^2+2^3+\cdots+2^k=2\left(2^k-1\right)$$ Hasta aquí, yo utilice la hipótesis de inducción que es el paso 2. Si yo no utilizo mi hipótesis de inducción, significa que mi demostración no está correcta. Hasta aquí, ya la utilicé.
10	Lore:	De aquí quiero llegar a esta parte

		$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2\left(2^{k+1} - 1\right)$$ Entonces tomamos esta parte; (señala la hipótesis de inducción) $$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2\left(2^k - 1\right) + 2^{k+1}$$ Y empezamos a multiplicar. Encontrando $2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$
11	Alumno4:	Porqué queda $2^{k+1} - 2$, debería ser $4^k - 2$, se supone que estamos multiplicando.
12	Lore:	¡Mande!
13	Alumno4:	2 no tiene potencia, entonces el 2 multiplica a 2^k, y nos queda 4^k
14	Lore:	¡No!, Porqué si se tiene misma base, por consecuencia se suman los exponentes, $a^n * a^m = a^{n+m}$ Esto es: $2 * 2^k = 2^{k+1}$. ¡Va!
15	Alumno5:	¿Cuándo se multiplican las bases, entonces se suman los exponentes?
16	Lore:	Por ejemplo, si tienes $a^2 * a^3 = a^{2+3}$. Se suman las potencias, porque tienen misma base, en este caso a. Lo mismo sucede con 2 y 2^k, uno tiene potencia 1 y el otro tiene potencia k, por consecuencia se suma 1 + K, quedando 2^{k+1}. ¡Va!
17	Lore:	Entonces $2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$ es igual a $2\left(2^{k+1}\right) - 2$ Ahora, en estos términos se puede factorizar el número 2, quedando $2(2^{k+1} - 1)$ y me queda a lo que quería llegar.
18	Alumno6:	¿Por qué maestra?, ¿No tienen la misma potencia?
19	Lore:	Porque, se tienen dos términos y el término común es el número 2 en ambas partes.

Transcripción de la clase 2 de la sesión 1 del día 9 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	**P**	**Descripción**
1	Lore:	A ver jóvenes, de este ejercicio, que vamos a hacer primero
2	Alumno1:	sumar los términos
3	Lore:	¡No!, tenemos que demostrar que la suma de $$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$$ Es decir, tenemos que verificar que el lado izquierdo $2+4+6+\cdots+2n$ es igual al lado derecho $n(n+1)$. En que más quedamos…
4	Alumno2:	tenemos que evaluar para n = 1
5	Alumno3:	es decir, el número 2.
6	Lore:	Como sus dos lados son iguales, podemos decir que la hipótesis de inducción se cumple.
7	Alumno4:	Porque no sumamos todos los demás términos.
8	Lore:	Si, se va a verificar que la suma de todos los múltiplos de 2, esto es, 2 por 1, 2 por 2, 2 por 3, 2 por 4, 2 por n es igual a n(n+1), pero ahorita se está verificando para el caso n=1.
9	Alumno5:	¡Ahh!, se hace para el primer elemento que vemos que es 2 o se hace para el primer número que ocupa la primera posición.
10	Lore:	Se establece para n=1 que es la primera posición, ya que por hipótesis de inducción se utiliza el primer conteo de los números

		naturales. Por eso es el número 2. Siguiendo el siguiente número que es 4, que ocupa la segunda posición, y así hasta el elemento K.
11	Lore:	Ahora bien, dada la proposición, demostraremos para un n = k+1.
12	Lore:	Revisaremos otro ejemplo que es un poco distinto a los demás, en el cual describe que $\mathrm{n}^3 - \mathrm{n} + 3$ es un múltiplo del número 3 Comenzamos analizando el primer paso de la hipótesis de inducción para n=1, esto es: $(1)^3 - (1) + 3$ es igual a 3, porque 3 es un factor de 3. Por lo tanto, se cumple para n=1.
13	Alumno1:	¿factor de 3 o múltiplo de 3? Es lo mismo, ya que 3 es igual a 3*1, y 3 es factor y múltiplo de sí mismo, Ok!
14	Alumno2:	Si, miss.
15	Lore:	siguiente, asumimos que se cumple para n = k, hipótesis de inducción. Esto es: $\mathrm{k}^3 - \mathrm{k} + 3$ = 3p donde p es un número natural cualquiera.
16	Alumno2:	¿la n la cambiamos por la k?
17	Lore:	Si cambiamos la n por la letra k, por la hipótesis de inducción.
18	Alumno3:	¿Cómo?, ¿Cómo?, p es un factor de k.
19	Lore:	El que sea factor de algo, significa que lo multiplica un p a el número 3. Ese alguien, ¿quién es?, quien sabe, pero es un factor de 3. Pero nos detona que ese p es divisible entre 3, tiene un factor de 3.

Transcripción de la clase 3 de la sesión 1 del día 10 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	**P**	**Descripción**
1	Lore:	Revisaremos otro ejemplo, supongamos que proponemos que $$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n\,(3n-1)}{2}$$ Como primer paso, aplicamos la hipótesis de inducción, esto es; para n=1, tenemos: $$1=\frac{1\,(3(1)-1)}{2}$$
2	Lore:	Vemos que el lado izquierdo, es lo mismo que el lado derecho. Continuamos con la segunda hipótesis de inducción, que se cumple para n=k, esto es: $$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{k\,(3k-1)}{2}$$ Demostraremos que se cumple para n= k+1, esto es: $$1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3(k+1)-2)=\frac{k\,(3k-1)}{2}+(3(k+1)-2)$$
3	Alumno1:	Miss, se agrega k+1, porque lo que indica la hipótesis de inducción, ¿porque coloca usted (3 (k+1) - 2)?
4	Lore:	Se agregará el elemento que tiene la forma de los demás, esto es: 1, 4, 7…. hasta (3n-2). Ya que 1 es igual a 3(1)-2, el 4 es igual a 3(2)-2, el 7 es igual a 3(3)-2, el número 10 es igual a 3(4)-2, y así hasta el elemento

		k que tiene la forma de 3k-2. Y para el elemento (k+1) se tiene la forma 3(k+1)-2.
5	Lore:	Ahora bien, al resolver la fracción Álgebraica $\frac{K\,(3k-1)}{2}+(3(k+1)-2)$ ¿alguno quiere pasar al pizarrón a resolverlo?, ¡a ver pásale tú!
6	Alumno2:	Al resolver el común es 2, quedando $\frac{k\,(3k-1)}{2}+(3(k+1)-2)=\frac{k(3k-1)+(\,3(k+1)-2)\,2}{2}$
7	Lore:	Efectivamente, sucede lo mismo que con el primer ejemplo que vimos de inducción matemática, pero ahora en esta expresión hay que resolver algunas expresiones Álgebraicas.
8	Lore:	Obteniendo $\frac{k(3k-1)+(3(k+1)-2)2}{2}=\frac{3k^2-k+6k+2}{2}=\frac{(k+1)(3k+2)}{2}$
9	Alumno2:	Mmmm, ¡pero me lo podría repetir por favor!
10	Lore:	Si mira, en este punto hay que tener bien presente todo lo que corresponde a productos notables y factorización, ya que muchos de los ejercicios consisten en simplificar y operar.
11	Alumno:	Si miss, el primer paso si lo entiendo, pero que paso en la parte de arriba.
12	Lore:	Si mire, en el numerador $\frac{3k^2-k+6k+2}{2}$, se realizo la suma de términos semejantes, y posteriormente haciendo uso de la fórmula general se factorizo como (k+1) (3k+2). En clases posteriores reforzaremos este tema.

Transcripción de la <u>sesión 2</u> de la clase 1 de Lore

Transcripción de la clase 1 de la sesión 2 del día 15 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Lore:	A partir de lo revisado en las anteriores clases, en esta semana revisaremos el concepto de polinomio y algunas técnicas de solución. Alguien me puede decir, ¿qué grado tiene este polinomio $\frac{35}{4}x^5-\frac{2}{7}x^3+2x-1=0$?
2	Alumno:	Tiene grado 5.
3	Lore:	Muy bien, ¿Cuántas soluciones creen que tenga?
4	Alumno:	Son solo 5
5		Ahora con el siguiente polinomio $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)x^2-1=0$, ¿Qué grado tiene el polinomio?
6	Alumno:	Tiene grado 1.
7	Lore:	¡Seguro!, ¿Cuál crees que sea la variable dominante?
8	Alumno:	La letra i
9	Lore:	Recuerde que la letra i, nos representa un número complejo. Esto es, el polinomio tiene coeficientes complejos.
10	Alumno:	¡Pero los complejos están solo en las soluciones!

N	P	Descripción:
11	Lore:	No necesariamente, también están presente en los coeficientes de un polinomio, en temas posteriores verificaremos el teorema fundamental del Álgebra, y ahí determinaremos los tipos de solución que tiene un polinomio.

Transcripción de la clase 2 de la sesión 2 del día 16 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Lore:	Dado las características y ejemplos que vimos la semana anterior, podría decirme si ½ es raíz (solución) del siguiente polinomio $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$
2	Alumno:	Para que sea considerada como raíz, debe dar cero en su resultado.
3	Lore:	Efectivamente, esto es se tendría que valuar $20(1/2)^3 - 30(1/2)^2 + 12(1/2) - 1$
4	Lore:	Alguien con ayuda de su calculadora, me podría decir, ¿Cuál es el resultado?
5	Alumno:	Da como resultado el número cero
6	Lore:	Ahora bien, que pasa con el siguiente polinomio $x^3 - 2(1 + i)\, x^2 - (1 - 2i)\, x + 2(1 + 2i)$ ¿Alguien podría decirme si $1 + 2i$ es raíz?
7		Se genera un gran silencio en el salón de clase, Lore al darse cuenta procede a escribir en el pizarrón.
8	Lore:	Si bien el siguiente polinomio $x^3 - 2(1 + i)\, x^2 - (1 - 2i)\, x + 2(1 + 2i)$ tiene coeficientes complejos, con mucha paciencia se debe hacer lo mismo que en los anteriores ejercicios, esto es:

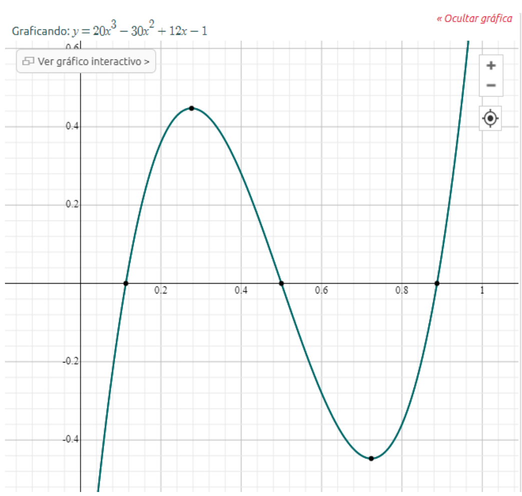
		(1+2i)^3 – 2(1 + *i*) (1+2i)^2 – (1 – 2*i*) (1+2i) + 2(1 + 2*i*)
9	Lore:	¿Cuánto da como resultado *(1+2i)*^{3}?, sabiendo que $i = \sqrt{-1}$
10	Alumno:	Pues aplicando (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3 a b^2 + b^3, es decir daría, 1^3 + 3 *1^2 *2i + 3*1 *2i^2 + 2i^3
11	Lore:	Su propuesta es correcta, pero debe tener cuidado con los paréntesis que coloca en su binomio, esto es: (1)^3 + 3 (1)^2 (2i) + 3 (1) (2i)^2 + (2i)^3
12	Lore:	Alguien me puede decir, ¿qué solución da (2i)^2 y (2i)^3?
13	Alumno:	Da como resultado (2i)^2 = 4i^2 y (2i)^3 = 8i^3
14	Lore:	Es correcto, pero de acuerdo con que $i = \sqrt{-1}$, entonces ¿cuánto da como resultado (2i)^2 = 4i^2?
15	Alumno1:	Da como resultado -4, porque i^2 = -1
16	Lore:	¿Y cuánto da como resultado (2i)^3 = 8i^3?
17		(2i)^3 = 8i^3 da como resultado i^3 = -i. Esto es -8i.

Transcripción de la clase 3 de la sesión 2 del día 17 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	**P**	**Descripción**
1	Lore:	Bueno, chicos en la clase de hoy, revisaremos el método gráfico de un polinomio. Donde partiremos en considerar que si $f(x) = 0$, se pueden obtener unos valores aproximados de sus raíces reales trazando la curva $y = f\ (x)$ y hallando los valores de x correspondientes a los puntos de intersección con el eje x $(y = 0)$. Un hecho fundamental en este método es que si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo contrario, $f(x) = 0$ tiene por lo menos una raíz comprendida entre $x = a$ y $x = b$.
2	Lore:	Por ejemplo, el polinomio f(x) = $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$ se tiene la siguiente gráfica. Donde se tiene que f (1/2) = $20(1/2)^3 - 30(1/2)^2 + 12(1/2) - 1 = 0$ 
3	Lore:	Puede ayudarme a evaluar en f (0) y en f (0.2), ¿Qué le da de resultado?

4	Alumno:	En f (0) da como resultado -1 y en f (0.2) da como resultado 0.36.
5	Lore:	¿Qué puede decir de estos resultados?
6	Alumno:	Se presenta una solución.
7	Lore:	Para el dato de en f (0.4) y en f (0.6), ¿Qué le da de resultado?
8	Alumno:	En f (0.4) da como resultado 0.28 y en f (0.6) da como resultado -0.28.
9	Lore:	Nuevamente, ¿Qué puede decir de estos resultados?
10	Alumno:	Se presenta una raíz.
11	Lore:	De acuerdo a la gráfica, ¿puedes decirme si hay otra raíz?
12	Alumno:	Pues, en 0.8 y en 1.

Transcripción de la sesión 3 de la clase 1 de Lore

Transcripción de la clase 1 del día 22 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Lore:	Vamos a continuar con el tema de ecuaciones cuadráticas, que ya comenzamos el día de ayer, ecuaciones de segundo grado, que son de la forma $ax^2 + bx + c=0$. Revisamos algunos casos, ¿cómo cuáles?
2	Alumno1:	las completas y las incompletas
3	Lore:	El día de ayer vimos las incompletas, y con respecto a lo que revisamos, ¿cuántos casos teníamos?
4	Alumno2:	dos
5	Lore:	El primer caso, ¿Cuál era?
6	Alumno3:	Es el que tenía la forma de $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} = 0$
7	Lore:	¿Y qué característica tenía esta ecuación?
8	Alumno4:	Que solo puede ser factorizada la variable x.
9	Lore:	Esto es, $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} = \mathrm{x}(\ \mathrm{ax} + \mathrm{b})$ se determina un factor común, en este caso el factor es la letra x. ¿Qué se puede decir de sus raíces?
10	Alumno4:	que una de sus raíces siempre debe de ser 0.
11	Lore:	¿Cuál es el otro caso?
12	Alumno5:	cuando se tiene el caso $\mathrm{ax}^2 - \mathrm{c} = 0$
13	Lore:	¿Cómo se puede resolver?

14	Alumno6:	Despejando la letra x.
15	Alumno7:	Pero su respuesta sería como dos binomios, uno con signo negativo, y otro con signo positivo.
16	Lore:	Ahora bien, ¿Qué características se había descrito de sus raíces?
17	Alumno8:	que se factorizaba como diferencia de cuadrados, para obtener binomios conjugados de la forma $(ax - c)\ (ax + c)$
18	Lore:	Ok, pero por la forma de la cuadrática se tendría $\left(\sqrt{a}x - \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}x + \sqrt{c}\right)=0$

Transcripción de la clase 2 de la sesión 3 del día 23 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	**P**	**Descripción**
1	Lore:	De las ecuaciones cuadráticas completas, $ax^2 + bx + c = 0$, que revisaremos en estos días, se revisarán tres maneras posibles, sabiendo que ya revisamos los diez casos de factorización. La primera manera se revisará utilizando el trinomio cuadrado perfecto. La segunda manera será revisando la fórmula general. Y la última será revisando la factorización, la factorización es la que estuvimos viendo cuando teníamos trinomios de segundo grado.
2	Lore:	Ahora bien, para revisar el primer caso, recordamos lo siguiente, si tenemos $(a + b)^2$, ¿cuál es la respuesta?
3	Alumno1:	a al cuadrado, más dos veces a por b, más b al cuadrado.
4	Lore:	Se describió en este caso, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, que, si se encontraba la raíz cuadrada del primero y tercer término, y si se verificaba que estaba presente la raíz cuadrada de la primera y segunda raíz, se tenía un trinomio cuadrado perfecto, posiblemente este sea un caso no tan común en la factorización.
5	Lore:	Ahora bien, la segunda forma tiene que ver con respecto a la fórmula general, ¿Cómo se describe la fórmula?

6	Alumno2:	menos b más menos la raíz cuadrada de b al cuadrado menos cuatro por a por c, entre 2 por a. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
7	Lore:	Ok, muy bien, este caso es el más común para resolver ecuaciones cuadráticas.
8	Lore:	Hay otra tercera forma que es importante recordar que tiene la forma $x^2 + bx + c = 0$ Recuerdas como se dice, de acuerdo a los visto del tema de factorización.
9	Alumno3:	cuando se tiene que encontrar dos números que multiplicados nos den c y sumados nos den b.
10	Lore:	En este paso hay que tener en cuenta que el primer término es la raíz cuadrada del primer término, y su resultado es el producto de dos binomios (x + m) (x + n), donde m y n denotarán los números que encontraste (c y d).

Transcripción de la clase 3 de la sesión 3 del día 24 de octubre de 2018

N = número de episodio

P = personaje del episodio

D = descripción del episodio

N	P	Descripción
1	Lore:	bueno chicos, lo que ahora vamos a realizar, será explicar algunos ejemplos, para después dar ejercicios que ustedes van a resolver. Ok, chicos si tenemos la expresión $4x^2 + 3x - 22 = 0$, recuerden que la expresión es de segundo grado y esta me dará dos valores para equis, x_1, x_2 . Si queremos aplicar algunos de los casos mencionados, ¿Cuál sería el primer paso?
2	Alumno4:	Dividir todo entre 4
3	Lore:	Y cómo quedaría la expresión.
4	Alumno5:	$x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{22}{4} = 0$
5	Lore:	¿Cuál es el segundo paso?
6	Alumno6:	Pasar el número $\frac{22}{4}$ del otro lado
7	Lore:	Quedando la expresión $x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{22}{4}$. ¿Hasta aquí vamos bien? Ok, nuestro siguiente paso, es encontrar el término independiente, que se agregara en ambos lados de la igualdad. En donde en nuestra primera parte se busca tener que completar el trinomio cuadrado perfecto.
7	Lore:	Para encontrar a ese término entonces determinaremos el tercer paso que tiene una regla. El cual consiste en considerar el término que

		acompaña a la literal elevada a la potencia lineal, y dividirle entre dos, y lo que se obtenga se elevará al cuadrado. ¿qué expresión nos quedaría?
8	Alumno4:	Al dividir entre 2 se tiene que aplicar la regla del sándwich $$\frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$$
9	Lore:	A esta regla se le llama también la ley de los medios y de los extremos, ¿Y al elevarlo al cuadrado, ¿Que se obtiene?
10	Alumno5:	Al elevar al cuadrado nos quedaría $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ $$\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$
11	Lore:	El cuarto paso será agregar este término en ambos lados de la ecuación. Esto se hace para que exista equilibrio en la expresión que tiene una igualdad $$\mathrm{x}^2 + \frac{3}{4}\mathrm{x} = \frac{22}{4}$$ $$\mathrm{x}^2 + \frac{3}{4}\mathrm{x} + \frac{9}{64} = \frac{22}{4} + \frac{9}{64}$$ $$\mathrm{x}^2 + \frac{3}{4}\mathrm{x} + \frac{9}{64} = \frac{22}{4} + \frac{9}{64}$$ $$\mathrm{x}^2 + \frac{3}{4}\mathrm{x} + \frac{9}{64} = \frac{361}{64}$$
12	Alumno5:	¿El resultado de $\frac{361}{64}$, es porque se suman las fracciones?
13	Lore:	Recuerden que se tiene tres tipos de fracciones, según el denominador que tenga, esto es:

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Tipo</th><th>Clase</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Sin denominador múltiplo.</td><td>$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\,d \pm b\,c}{b\,d}$</td><td>$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{(3)\,(5) + (4)\,(2)}{(4)\,(5)} = \frac{23}{20}$</td></tr>
<tr><td>Con denominador múltiplo</td><td>$\frac{a}{b\,z} \pm \frac{c}{d\,z} = \frac{a\,d \pm b\,c}{b\,d\,z}$</td><td>$\frac{3}{4} + \frac{5}{12} = \frac{(3)\,(3) + (5)\,(1)}{12} = \frac{14}{12}$</td></tr>
<tr><td>Con igual denominador</td><td>$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$</td><td>$\frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{3+5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Lore:</td><td>
El quinto paso es determinar la raíz cuadrada del primer término y del tercer término de la ecuación. Esto es:

$$\sqrt{x^2} = x$$
$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$$

Aplicando algunos de los criterios ya de las propiedades de los radicales

<table>
<tr><th colspan="2">Propiedades</th></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$</td><td>La raíz de un producto de factores es igual al producto de las raíces de los factores, con n distinto de cero.</td></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$</td><td>La raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador, con n distinto de cero.</td></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$</td><td>Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando, con n y m distintos de cero.</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Lore:</td><td>
Finalmente, como nos quedaría la expresión.

$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{361}{64}$. ¿Hasta aquí los pasos son claros chicos?
</td></tr>
</table>

16	Alumno4:	Sí
17	Lore:	Nuestro siguiente paso será despejar el valor de la literal x, ¿Cuál paso consideran que se deba hacer primero, teniendo la expresión anterior?
18	Alumno7:	Aplicar la raíz cuadrada en ambos lados
19	Lore:	¿Y cómo quedaría los resultados?
20	Alumno6:	$\mathrm{x}+\frac{3}{8}$
21	Lore:	Y el otro lado ¿Cómo nos quedaría como chicos?
22	Alumno8:	quedaría como $\frac{19}{8}$
23	Lore:	Muy bien, finalmente el último paso teniendo lo anterior, se obtiene: $\mathrm{x}+\frac{3}{8}=\frac{19}{8}$ ¿Y cómo despejamos esta expresión?
24	Alumno5:	quedaría como $\mathrm{x}=\frac{19}{8}-\frac{3}{8}$ Esto es: $\mathrm{x}=2$

ANEXO B. Glosario

CCC. Conocimiento común del contenido

CEC. Conocimiento especializado del Contenido

HCK / HM. Conocimiento del Horizonte Matemático

CC-Es. Conocimiento del contenido y estudiantes

CC-En. Conocimiento del Contenido y Enseñanza

CC. Conocimiento Curricular

CCK. El conocimiento común del contenido

SCK. El conocimiento especializado del contenido

HCK. El conocimiento del horizonte matemático

KCS. El conocimiento del contenido y estudiantes

KCT. El conocimiento del contenido y enseñanza

KCC. El conocimiento curricular

EXCALE. Exámenes de Calidad y el Logro Educativos.

HM. Horizonte Matemático

HCK. Horizon Content Knowledge

INEE. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

MKT. Conocimiento matemático para la enseñanza.

MTSK. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

KSM. El conocimiento de la estructura de la matemática.

PCK. El Conocimiento Didáctico del Contenido.

S.L.P. San Luis Potosí.

SIDM. Seminario de Investigación en didáctica de las matemáticas.

SMK. El Conocimiento de la materia.

PISA. Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes.

OCDE. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico

UASLP. Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

U.P.N. Universidad Pedagógica Nacional

ECH. Episodios claves en el Horizonte Matemático

DFM. Departamento Físico Matemático

HCK. Conocimiento del Horizonte Matemático

MKT. Conocimiento Matemático para la enseñanza

MEJOREDU. Comisión Nacional para la mejora continua de la educación