SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE GOBIERNO
DEL ESTADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL, UNIDAD 241

“EL ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES MULTIGRADO: UNA EXPERIENCIA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LOS TRIÁNGULOS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTORA
EN DESARROLLO EDUCATIVO CON ÉNFASIS EN FORMACIÓN DE PROFESORES

PRESENTA

GRISELDA GONZÁLEZ ARRIAGA

DIRECTOR DE TESIS

DR. LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P. ENERO 2021

Doctorado Regional en Desarrollo Educativo

con Énfasis en

Formación de Profesores

Estados que integran la Región:

Coahuila

Nuevo León

Tamaulipas

San Luis Potosí

Zacatecas

SLP PROSPEREMOS JUNTOS Gobierno del Estado 2015-2021 | Secretaría de Educación de Gobierno del Estado

UPN Universidad Pedagógica Nacional | Unidad UPN 241 San Luis Potosí, S.L.P.

DICTAMEN DE TRABAJO DE TESIS

San Luis Potosí, S.L.P. 15 de diciembre de 2020.

C. MTRA.
GRISELDA GONZÁLEZ ARRIAGA
P R E S E N T E . –

En mi calidad de Coordinador Regional del programa del Doctorado Capítulo Noreste, de la Universidad Pedagógica Nacional, y después de haber sido analizado el **TRABAJO DE TESIS** titulado: ***"EL ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES MULTIGRADO: UNA EXPERIENCIA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LOS TRIÁNGULOS"***, encuentro que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos en vigor para ser presentado ante el H. Jurado del examen para la obtención de Grado, por lo que deberá entregar los 9 ejemplares y 4 Cd´s requeridos como parte de su expediente institucional.

A T E N T A M E N T E
"Educar para Transformar"

Vo. Bo.

S.E.G.E.
UNIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 241
SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

DR. LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN
Coordinador Regional del Doctorado

DR. JOSÉ JAVIER MARTÍNEZ RAMOS
Director de UPN, Unidad 241

D'LMAR/D'JJMR/I'RELD

"2020, año de la cultura para la erradicación del trabajo infantil".

Calle Italia No. 903, Fracc. Providencia C.P. 78390, Tels. 822-10-25 y 822-09-27, Fax 822-08-97, San Luis Potosí, S.L.P., México
www.upnslp.edu.mx, e-mail: upnunidad241slp@yahoo.com.mx

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón por su dirección en esta investigación; agradezco infinitamente su apoyo no solamente en el ámbito académico, sino en lo personal, por brindarme sus consejos cuando más los necesitaba, además de mantener su fe en mí en cada momento de este proceso.

A mis profesores del doctorado, en particular al Dr. Jaime Calderón, la Dra. Yolanda López y la Dra. Luz Jiménez, quienes contribuyeron ampliamente en mi formación académica.

A mis compañeras y compañeros del doctorado, por brindarme su amistad y compartir momentos de convivencia que atesoraré siempre.

A los profesores y futuros profesores que colaboraron en este trabajo, gracias por su tiempo y dedicación.

A la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez, a la Dra. Yolanda Chávez Ruiz, a la Dra. Maricela Soto Quiñones, al Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís y al Dr. Andrés Vázquez Faustino, por las observaciones realizadas y dedicar tiempo a la lectura de esta tesis.

A mis estudiantes, compañeros docentes y cuerpo directivo de la Escuela Normal de San Marcos, agradezco su apoyo y palabras de aliento, motivándome siempre a culminar esta tesis.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La formación de profesores se ha convertido en objeto recurrente de investigación en las últimas décadas, particularmente en el campo de la didáctica de las matemáticas; los diversos estudios inscritos en esta temática han permitido caracterizar las prácticas de enseñanza y los procesos de aprendizaje sobre distintas ramas: álgebra, aritmética, estadística, geometría; por tanto, podemos señalar que este campo es el que se encuentra más consolidado en la investigación educativa. En este tenor, particularmente las indagaciones sobre la enseñanza de la geometría iniciaron en México a partir de los años ochenta, a pesar de que se continuó profundizando en ello en los siguientes años, los estudios sobre el nivel de educación básica siguen siendo escasos, a diferencia de la educación media superior donde se incrementaron. De igual manera, en el país ya mencionado, las investigaciones básicamente atañen a los estudiantes y sus procesos de aprendizajes, aquellas que refieren a la formación del profesor para la enseñanza de la geometría destacan por su ausencia, por lo tanto es importante contribuir sobre este aspecto.

Los estudios más recientes de la formación de profesores fundamentalmente en el contexto mexicano, subrayan el interés por indagar y contribuir en la formación inicial de los docentes, sin embargo, centran más su mirada en aquellos profesores en servicio y lo concerniente a las acciones que realizan en la práctica educativa, lo anterior se expone con mayor profundidad en el capítulo I, además se enfatiza en que los resultados que se obtienen en la educación, tanto en México como a nivel internacional, se obtienen asociando este factor a la formación del profesorado. Razón por la cual se encuentra una diversidad de perspectivas teóricas que han profundizado en las investigaciones sobre este tópico (la formación del profesor).

Por otra parte, uno de los ámbitos que cobra particular atención en México en los últimos años, es el contexto multigrado, tanto por los resultados educativos que en este medio se obtienen de acuerdo a las evaluaciones nacionales realizadas en el país, como por las particularidades y necesidades de formación que requieren los profesores que laboran en él. Hasta el momento, los estudios más comunes sobre este tema versan sobre las prácticas de enseñanza que se desarrollan en el aula, caracterizando las estrategias usuales a las que recurren los docentes para su práctica así como indagaciones respecto a las condiciones estructurales y sociales que tienen estas escuelas; las investigaciones se encuentran en un nivel incipiente pues este tema es foco de atención hasta los años más recientes, por lo que se considera relevante centrar la mirada en configurar una propuesta de trabajo para este contexto, así como ahondar en diversos factores involucrados en la formación como lo curricular y lo didáctico.

Por lo expuesto, resulta evidente que la investigación sobre la formación de profesores requiere de probar dispositivos de formación, especialmente en geometría y al contexto multigrado, no solamente para la formación inicial sino también para la formación continua. Asimismo, podemos señalar que compartir y documentar experiencias de los docentes de multigrado, así como la comparación entre el trabajo en el aula de un profesor con experiencia en escuelas de esta modalidad y futuros profesores, puede generar una visión distinta de la didáctica en las escuelas multigrado al contrastar la formación con la que se cuenta para laborar en este contexto y la experiencia que mediante la práctica cotidiana se ha adquirido, además de que al desarrollarse propuestas de trabajo en conjunto, pueden identificarse elementos que aportan a la formación de los profesores.

Derivado de las reflexiones anteriores y con base en la revisión de literatura expuesta en el capítulo I, nos planteamos la pregunta central que permitió guiar el rumbo de la investigación: ***¿Cuáles son los saberes geométricos y didácticos que se propician en un Espacio de Trabajo Geométrico en la formación del profesor multigrado, para la configuración del espacio idóneo en la enseñanza del triángulo?***; a partir de lo anterior, se plantea como objetivo central lo siguiente:

Analizar los saberes geométricos y didácticos que brinda una propuesta de formación en el marco de un Espacio de Trabajo Geométrico para profesores de multigrado, en la configuración del espacio idóneo en la enseñanza del triángulo.

Es así, que esta tesis propone el diseño de un dispositivo didáctico que integre una formación geométrica y didáctica de los profesores de multigrado, específicamente para la enseñanza del triángulo, por lo que de inicio fue preciso analizar una perspectiva de formación que permitiera lo anterior. Bajo esta mirada, en las investigaciones más actuales, encontramos una serie de estudios que se basan en la conformación de *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) para la enseñanza de la matemática y la formación de profesores, en geometría, lo relacionado a los *Espacios de Trabajo Geométrico* (ETG), en ellos se considera como una posibilidad formar a los docentes bajo esta perspectiva teórica[1].

Los estudios que se sustentan en este marco teórico, suponen que con el ETM se aborda el proceso de transposición que realiza el profesor de los saberes adquiridos en la formación, para configurar su trabajo en el aula, construyendo un espacio de trabajo idóneo que posibilita atender las necesidades tanto de los estudiantes como del profesor (Montoya, Mena, & Mena, 2016). Lo anterior, sugiere la posible efectividad de formar a los futuros profesores en el marco de análisis y reflexión mediante el espacio personal y la forma en que lo transpone a partir del espacio idóneo que construye para llevar a cabo su práctica, retomando esta idea, es que el dispositivo de formación de esta tesis, toma esta perspectiva como fundamento teórico.

[1] En el capítulo I, se describen los estudios que proponen esta perspectiva de formación de profesores sobre geometría. Dentro de los estudios que se consideraron fundamentales en el desarrollo de esta investigación, ya sea por el objeto matemático que se estudia o por la similitud de lo que se pretende, podemos señalar el de Pizarro (2018); Henríquez (2016); Verdugo (2017); entre otros que se puntualizan en el documento. Cabe mencionar, que el objetivo de esta investigación no coincidió plenamente con alguno de ellos, por lo cual se tomaron solamente algunos de los aportes.

Los Espacios de Trabajo Geométrico. Una perspectiva teórica para la investigación

Para desarrollar los conocimientos tanto disciplinares como didácticos, especialmente para la enseñanza de la geometría, Houdement y Kuzniak (2006), han construido la noción de Espacio de Trabajo Geométrico, en la cual, cuando el sujeto resuelve una tarea geométrica, la acción forma parte de la naturaleza del trabajo geométrico. Con las reflexiones sobre este tema se constituyen las bases de investigaciones relacionadas con la didáctica de la geometría, que en un inicio fue conocida como *Paradigmas Geométricos* y *Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG), estas nociones han permitido avanzar en la noción general de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak A. , 2011).

El trabajo matemático es producto de la activación de varias génesis que permiten una articulación entre los planos epistemológico y cognitivo, el primer plano corresponde al saber en juego y tiene tres componentes: *representamen (en el subdominio de geometría se denomina espacio real y local), artefactos y referencial*; el segundo plano, el cognitivo, se refiere a los procesos que atraviesa el individuo para apropiarse del saber, tiene también tres componentes: *visualización, construcción y prueba*. Dichos componentes, son articulados entre sí por medio de génesis que deben desarrollarse en el trabajo matemático: *semiótica (figural), instrumental y discursiva*, siendo fundamental la activación de estas tres génesis para el logro del razonamiento matemático.

De acuerdo con Henríquez y Montoya (2016) un ETM puede definirse como un ambiente que se organiza para permitir el trabajo de personas que habrán de resolver tareas matemáticas, y la estructura de este escenario se encuentra mediada por los objetos matemáticos que forman parte del saber en juego (en el interés de esta tesis, la geometría). Podemos entender entonces, que en el ETM, el profesor resolverá problemas, construyendo y analizando los saberes que están involucrados en ellos, por esta razón y al interesarnos el estudio del subdominio de geometría, nos referimos al ETG, debido a que permitirá analizar el espacio personal del profesor al enfrentarse a tareas geométricas y la manera como transforma los saberes adquiridos mediante tareas didácticas, que se concretizan en el trabajo didáctico del profesor durante las prácticas en el aula.

Ruta metodológica para la investigación

El proceso metodológico de esta investigación está orientado fundamentalmente por los principios teóricos de la perspectiva de los *Espacios de Trabajo Matemático*, caracterizando lo que acontece en el trabajo matemático y didáctico del profesor, particularmente en lo que concierne al subdominio geométrico, dada la naturaleza del objeto matemático en que se centra la investigación; por lo anterior, se ubica en un enfoque de corte cualitativo. Respecto al diseño de la investigación, está definido por un esquema experimental, con base en el estudio de los saberes geométricos y didácticos que despliega el docente durante la resolución de problemas geométricos, así como durante la configuración y aplicación del trabajo en el aula, el proceso de transposición de los saberes adquiridos. Por las razones expuestas, se ha considerado como propuesta metodológica la Ingeniería Didáctica de Artigué (1995), articulando lo que plantea el marco teórico del ETM, dando respuesta a los objetivos que dan rumbo a esta investigación[2].

La noción de Ingeniería Didáctica de Artigué (1995), surge en la didáctica de las matemáticas, en los primeros años de la década de los ochentas y se refirió al trabajo didáctico. Su denominación obedece a la comparación con la forma de trabajar de un ingeniero que debe realizar un proyecto, el cual está basado en el dominio de los conocimientos científicos sobre dicho proyecto, pero que a su vez, acepta someterlo a un control de tipo científico. A la par, trabaja con objetos complejos y depurados, con los medios disponibles y los problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. No obstante, esta visión varía en los años siguientes y se percibe como un medio para abordar dos cuestiones en relación con lo que se ha desarrollado en la didáctica de las matemáticas, la primera sobre *Las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza*; y la segunda en *El papel que conviene*

[2] En el último apartado del capítulo I, se describen las preguntas y objetivos de esta investigación.

hacerle tomar a las "realizaciones didácticas" en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica (Artigué, 1995, pág. 34).

En este mismo tenor, derivado de una serie de discusiones respecto a las cuestiones que aborda la Ingeniería en función de los avances en la didáctica y de las posibles contradicciones generadas de las dos cuestiones antes mencionadas, concluye destacar la importancia que generan las realizaciones didácticas en la clase como una práctica investigativa, en gran parte porque esta cuestión permite resolver las necesidades que se presentan al poner en práctica teorías elaboradas. Y es precisamente en la cuestión de las *realizaciones didácticas* que se circunscribe el interés en esta tesis, pues para edificar la didáctica, la noción de ingeniería didáctica considera una doble función, es decir, "llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica" (Artigué, 1995, pág. 36).

Dado lo anterior, la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, está basada en un esquema experimental sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza que suceden en las clases. Otra característica es el registro de casos particulares y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, a decir de Douady (1987, citado en Artigué (1995), "…la ingeniería didáctica, es un instrumento privilegiado para tener en cuenta la complejidad de la clase…" (Artigué, 1995, pág. 37). Como se mencionó, se recurre a dicha metodología, porque los objetivos de la investigación se encuentran vinculados con lo que la perspectiva teórica de los ETM considera de los procesos de trasposición didáctica, esto es, vinculados a los tres niveles del espacio de trabajo matemático, Kuzniak (2011), citado en Pizarro (2018), refiere a tres niveles del profesor y del alumno: ETM de Referencia; ETM Idóneo; y ETM Personal.

Diseño de la investigación.

En cuanto a las dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica que conllevan el diseño de las situaciones didácticas que sirvieron de referencia para la experimentación; se encuentran inscritas a lo largo de la investigación; además, se contemplan las fases que la Ingeniería Didáctica propone, articulando lo concerniente a los espacios de referencia, idóneo y personal. Enseguida, se describen dichas fases y los elementos que en ellas se incluyen:

- *Los Análisis preliminares:* Análisis epistemológico asociado a las peculiaridades del saber en juego (en este caso el objeto geométrico triángulo); Análisis cognitivo respecto a las características del geómetra en el proceso resolución de las tareas (plano cognitivo para el aprendizaje de la geometría); Análisis de las tareas geométricas y didácticas de los planes de estudio de formación de profesores (*Espacio de Referencia*); Análisis de las orientaciones didácticas propuestas para los profesores y de las tareas geométricas propuestas por los libros de texto de educación primaria para la enseñanza del triángulo (*Espacio Idóneo*); Análisis didáctico de la práctica de futuros profesores en relación a la enseñanza del triángulo (*ETG Espontáneo*).
- *La Concepción y Análisis a priori:* Diseño de situaciones de referencia integrando tareas geométricas y didácticas (*Espacio Idóneo para la formación*); Análisis y validación sobre la potencialidad de las mismas con relación a los elementos teóricos del ETG (aplicación de tareas geométricas a futuros profesores). Esta fase también se encuentra presente, cuando los docentes reconstruyen y modifican las situaciones de referencia en función de los grupos que atienden (*Espacio Idóneo*).
- *Experimentación:* Aplicación de las tareas geométricas y didácticas incluidas en las situaciones de referencia en el contexto de la configuración del dispositivo de formación denominado Espacio de Trabajo Geométrico Didáctico, organizado en tres momentos fundamentales del rol del profesor: Aprendiz (*Espacio Personal*), Analista y Diseñador (Ambos *Espacio Idóneo*).

- *Análisis a posteriori:* Análisis de resultados de las situaciones de referencia que componen el dispositivo de formación y saberes adquiridos por los profesores (*Espacio Personal*); Caracterización de la pertinencia del dispositivo a partir de la caracterización del trabajo en el aula del profesor. (*Espacio Idóneo*).

Las técnicas, instrumentos y documentos para la recolección de datos que se consideraron los siguientes:

1. Mediante la observación se recuperaron informaciones sobre las estrategias de resolución en las tareas geométricas durante las sesiones destinadas para ello, utilizando videograbaciones y audios, sobre la resolución de las actividades en las sesiones en colectivo, retomamos los conceptos del ETG. Además en la observación en el aula para caracterizar las prácticas de los profesores, se recurrió también a las videograbaciones y registros, así como a las planificaciones elaboradas en las sesiones en colectivo y de forma individual. Los guiones de observación para las prácticas en el aula y de análisis de los planes de clase, incluyeron una clasificación de las tareas propuestas por el profesor en geométricas y didácticas; para las primeras se consideraron los conceptos centrales de la perspectiva teórica del ETG y en lo relacionado a lo didáctico se integraron nociones desde la teoría de situaciones didácticas. Finalmente, para el registro de información durante las sesiones dirigidas a documentar las experiencias y prácticas diferenciadas de los profesores, se contrastaron los conocimientos que poseían los profesores desde su formación inicial, así como las reflexiones que surgieron en el desarrollo de las sesiones y su relación con la posible modificación de su trabajo en el aula. Una vez que se obtuvieron las transcripciones completas de las sesiones en colectivo y las prácticas en el aula, el criterio fundamental para la selección de los fragmentos, se sustentó en la identificación de los elementos más sobresalientes que permitieran profundizar en el análisis de las tareas geométricas y didácticas, contrastando lo mencionado en la perspectiva teórica.

2. Análisis de producciones de los profesores. Se recuperaron los productos y evidencias de la resolución de las situaciones de referencia que los profesores realicen durante las sesiones en que resuelvan los problemas (Espacio Personal) y las modificaciones que efectúen en la realización de la tarea didáctica (Espacio Idóneo).
3. Análisis de los libros de texto y programas de estudio. Se analizaron los libros de texto de primero a sexto grado de educación primaria, al ser el saber de referencia de los profesores. Los programas de estudio correspondientes al plan 97 y el 2012, al ser el saber textualizado[3] con el que tuvieron acercamiento los profesores en servicio y los futuros profesores durante su formación inicial respectivamente. En ambos se analizaron específicamente las tareas matemáticas y didácticas propuestas para la enseñanza de la geometría.

Los momentos de la fase de experimentación.

Una vez que se han descrito las fases que comprenden el diseño de la investigación, es preciso mencionar los momentos fundamentales que se llevan a cabo durante la fase de experimentación, ya que se basa en los elementos que constituyen el dispositivo didáctico puesto a prueba. El primer momento denominado el profesor como *Aprendiz*, se realizó en sesiones colectivas donde se resolvían las tareas geométricas incluidas en las situaciones de referencia, para ello, se combinó el trabajo de los profesores en modalidades individuales, en equipos y grupales.

[3] En la enseñanza, podemos suponer que el proceso de transposición didáctica de los saberes a enseñar, se encuentra mediada por los textos curriculares que incluyen los conceptos científicos los cuales habrán de estudiarse en un determinado grado escolar, en este caso, de acuerdo al programa de estudios en la formación inicial de los profesores. A decir de Chevallard (1991), en la transposición didáctica se cumplen ciertos requisitos sobre el saber enseñar, que "se encuentran tendencialmente satisfechos a través de un proceso de *preparación didáctica* que he denominado la puesta en texto del saber [..] la *textualización* del saber conduce primeramente a la delimitación de saberes parciales" (1991, pág. 69), además expresa que "La producción de un sistema didáctico a partir de un proyecto social de enseñanza previo supone la producción de un texto del saber" (1991, pág. 75). Razones por la cuales consideramos importante hacer un análisis de los programas de estudio en la formación inicial.

Durante el segundo momento, el profesor como *Analista*, los profesores se apropiaron de la perspectiva teórica del ETG, a partir de ello, examinar el nivel de comprensión tuvo que ver con el análisis de los textos escolares de la educación primaria, vinculando los elementos teóricos revisados con identificar el potencial de las tareas propuestas en los materiales y en las situaciones de referencia.

El rol del profesor como *Diseñador*, fue el tercer y último momento de esta experimentación, en él los profesores configuraron el espacio idóneo para la enseñanza del triángulo que desarrollarían en los grupos que atienden, en este caso, se diseñaron inicialmente dos situaciones didácticas (en equipos de acuerdo a los grados escolares), las cuales se modificaron y ampliaron en lo particular, por cada uno de los profesores, en relación al nivel cognitivo y las características que tenían sus grupos.

Contexto del estudio.

La presente investigación considera a profesores que laboran en el contexto multigrado, el interés surge inicialmente de sesiones de Consejo Técnico Escolar con profesores en servicio, así como con estudiantes de la licenciatura en educación primaria del estado de Zacatecas en México. Posteriormente, en tanto uno de los objetivos era propiciar el trabajo colaborativo entre futuros profesores y maestros en servicio que contaran con experiencia en el contexto multigrado, delimitamos los sujetos participantes de la investigación, las características se describen a continuación:

a) Dos profesores con una experiencia mínima de 8 años de servicio en escuelas multigrado del nivel primaria que laboran en la región de Loreto, Zacatecas, México.
b) Tres estudiantes de la Escuela Normal Rural *Gral. Matías Ramos* de San Marcos, Loreto Zacatecas, México, que cursan el cuarto grado de la Licenciatura en Educación Primaria, quienes han recibido el curso optativo para la enseñanza en multigrado (*Planificación*

de ambientes de aprendizaje para grupos multigrado) y en semestres previos cursado la asignatura de *Geometría su aprendizaje y enseñanza*.

Los cinco profesores forman parte activa del proceso de experimentación en las sesiones programadas para la resolución de tareas geométricas y didácticas, sin embargo, para determinar la pertinencia de la configuración del dispositivo de formación, se consideró necesario caracterizar la práctica de dos profesoras, ambas atendían grupos multigrado con niños de primero, segundo y tercer grados.

Por otra parte, uno de los momentos de la investigación consideró poner a prueba tareas geométricas para validar la pertinencia de las mismas en cuanto a la activación de los elementos del ETG, para ello, se pusieron a prueba con dos grupos de estudiantes que cursaban el tercer semestre de la licenciatura en educación primaria, en el marco de las sesiones clase del curso de Geometría, su Aprendizaje y Enseñanza.

Otro rasgo incluido en el estudio fue caracterizar el trabajo en el aula de cuatro futuros profesores que cursaban el quinto semestre de la licenciatura durante el curso de Planificación de ambientes de aprendizaje para grupos multigrado, con el fin de recuperar insumos sobre el trabajo didáctico y conocimiento geométrico que reflejaban en sus clases. Ambos resultados (tareas geométricas y análisis de la práctica) no se incluyeron en su totalidad en esta tesis, pero sirvieron como herramientas esenciales en el diseño de las situaciones de referencia.

Estructura del documento.

Derivado de la ruta metodológica antes expuesta, los hallazgos que surgieron fueron dando contenido a la tesis que aquí se presenta, la cual se encuentra estructurada en ocho capítulos, así como un apartado que en el que se incluyen las conclusiones de la investigación.

El capítulo uno, *Formación de profesores y enseñanza de la geometría*, se expone el resultado de la revisión de la situación actual en la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas (específicamente en geometría) y lo concerniente a las investigaciones sobre el contexto multigrado. En este capítulo se intenta poner de manifiesto una problemática ligada a los dispositivos didácticos efectivos que permitan integrar la formación geométrica y didáctica de los profesores. Se organiza en tres bloques, el primero describe las coordenadas que delimitan este estudio, el segundo es revisión de literatura en torno a la formación de profesores y la enseñanza de la geometría, y un tercer bloque que incluye las preguntas y objetivos de investigación.

En el segundo capítulo, *El Espacio de Trabajo Geométrico: Perspectiva teórica de la investigación,* se describen las características de la perspectiva teórica del ETG, como modelo de formación centrado en la investigación, lo que permite comprender los elementos que lo conforman y sus posibilidades como herramienta para la formación de profesores.

El capítulo tres, *Saber geométrico y formación del profesor. El espacio de referencia,* da cuenta del análisis geométrico y didáctico respecto a lo adquirido por el profesor como aprendiz de geometría y sobre su eventual papel como profesor durante la formación inicial. Por tanto, en este capítulo se delimita el saber en juego, el triángulo, objeto matemático que se encuentra en los programas de estudio de nivel primaria. Posteriormente, se analizan las tareas geométricas y didácticas que se incluyen en los planes de estudios 1997 y 2012 de la licenciatura en educación primaria, la selección de estos programas se relaciona con el hecho de que los profesores que participan en la investigación, fueron formados bajo estos planes.

En el capítulo cuatro, *Los textos escolares, la enseñanza espontánea (ETG Idóneo) y el ETG para la formación*, el objetivo es dar cuenta de las dos dimensiones que forman parte del ETG Idóneo. La primera dimensión incluye el análisis de las tareas geométricas y orientaciones didácticas contenidas en los textos escolares, explorando su potencialidad para la configuración de un ETG Idóneo del profesor, también se caracteriza la práctica en el aula de una profesora en formación y se analiza la relación entre los ETG de referencia, el de su formación y el de la escuela primaria (programas de estudio y textos escolares). En la dimensión de la formación, se integran las dos situaciones de referencia que conforman el ETG en la formación, y se describe cada uno de los momentos que integran el proceso de experimentación de este dispositivo.

El capítulo cinco, *El ETG personal de los profesores. El aprendiz de geómetra*, presenta el análisis del espacio personal del profesor en la resolución de las tareas geométricas, por ello se denomina "el profesor como aprendiz". En éste se describen los conocimientos disciplinares que poseen los profesores que son esenciales para lograr una adecuada transposición didáctica.

En el capítulo seis, *El espacio idóneo del profesor*. *El conocimiento didáctico en el diseño de la clase,* se da cuenta del rol que desempeña el profesor cuando se convierte en "analista" de las situaciones de referencia a partir de la revisión teórica que hace del marco teórico del ETG, además del papel como "diseñador" de situaciones de enseñanza para desarrollarlas en su grupo multigrado, en otras palabras, cuando configura su espacio idóneo.

El capítulo siete, *La transición del ETG Personal al ETG Idóneo. El predominio de la visualización y la construcción*, presentamos la caracterización del trabajo que realiza en el aula la profesora María, lo que permite visualizar el proceso de transposición didáctica y el tránsito entre lo adquirido en los ETG personal y el idóneo que ha diseñado. Fundamentalmente, este capítulo y el siguiente, tienen como finalidad, determinar el nivel de pertinencia de esta propuesta de formación que puede ser aplicable en formación inicial y formación continua, por lo que se distinguen dos cuestiones centrales para el análisis: ¿De qué manera se activan los distintos componentes del ETG en las tareas implementadas para la enseñanza de los triángulos?; y ¿Cuáles son las acciones didácticas que se despliegan en el ETG del profesor?, con base en ello, también permite identificar la acción del profesor y cómo puede obstaculizar o potencializar la actividad geométrica de los niños.

El capítulo ocho, *La transición del ETG Personal al ETG Idóneo. De las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales*, describe la práctica la profesora Daniela, a la que también se le dio seguimiento en la última fase de la propuesta de formación. Al igual que en el caso anterior, este análisis se centra en la movilización de los componentes del ETG, particularmente en la activación de la génesis discursiva en el aula multigrado, así como en las intervenciones didácticas de la profesora.

El apartado de C*onclusiones*, contiene los razonamientos emanados de las preguntas y objetivos de investigación. Se organiza en dos bloques, el primero describe las conclusiones sobre la propuesta de formación desde dos dimensiones generales: los saberes geométricos y didácticos que los profesores han adquirido en el proceso de formación inicial y en la propuesta de formación; y sobre la pertinencia de configurar un Espacio de Trabajo Geométrico como dispositivo en la formación de profesores para la enseñanza de la geometría en grupos multigrado. En el segundo bloque se incluyen las limitaciones, los obstáculos y futuras líneas de investigación que se desprenden de este estudio.

CAPÍTULO I
FORMACIÓN DE PROFESORES Y ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA.

Actualmente se espera la generación de procesos sociales cuyas interacciones entre sujetos permitan modificar situaciones de interés colectivo, tal es el caso de la presente tesis en que se aborda la enseñanza de la geometría en el contexto multigrado, sin embargo la preocupación por resolver dichas situaciones no surge de manera espontánea, como lo señala Shütz (1972, citado en Nuñez (2012) esa inquietud nace de la reflexión sobre la situación actual, de una consciencia acerca de la biografía y la experiencia inmediata. Es importante mencionar que a partir de la experiencia personal al laborar en escuelas primarias donde se atienden dos o más grados escolares a la vez, surgen las primeras inquietudes respecto a este tema. De manera general, una dificultad es organizar los contenidos de las asignaturas de los distintos grados para lograr optimizar el tiempo y favorecer avances en los aprendizajes esperados, en lo correspondiente a matemáticas, a pesar de que el programa de estudios presenta una secuencia de los temas por cada grado, se complejiza en la puesta en práctica pues el objetivo es profundizar sobre el conocimiento de los temas con los estudiantes, especialmente en la enseñanza de la geometría. La formación inicial con la que se contaba acerca de los saberes matemáticos y la didáctica particular de los mismos, no era suficiente para llevar a cabo esta tarea, además de que la formación continua aportaba escasas herramientas para el desarrollo de la práctica en el aula multigrado.

Otra de las actividades que personalmente se realizaron fue la función de Asesor Técnico Pedagógico teniendo a cargo escuelas multigrado de una misma zona escolar, este hecho contribuyó a identificar que las dificultades que a nivel personal se experimentaban, eran compartidas por otros compañeros docentes, siendo matemáticas una asignatura de complejidad al realizar la práctica en el aula, se pudo observar también que las diversas propuestas de formación continua para el aula multigrado eran escasas, por lo que el trabajo en colectivo y el intercambio de experiencias en los equipos de trabajo multigrado, era una de las acciones implementadas como asesor técnico y que mayor favorecía a los profesores.

Además, al laborar en la formación de docentes (función que se desempeña actualmente) fue posible conocer los programas de estudio que la licenciatura en educación primaria (Planes 97 y 2012) proponen para el trabajo en el aula multigrado, fue posible identificar las necesidades y fortalezas de los futuros profesores cuando asisten a las jornadas de prácticas, encontrando que existen similitudes con los profesores en servicio en cuanto a las inquietudes sobre la forma de trabajar en estos contextos, particularmente en matemáticas y diferencias significativas para abordarlos, podemos concluir que cuando el sujeto percibe la realidad con base en sus vivencias se pone en el lugar del otro y reconoce que existen analogías entre los fenómenos que él observa y lo que piensan los demás, es en ese momento que el individuo es capaz de construir categorías de investigación.

Bajo esta idea surge la premisa fundamental de esta tesis, ya que se reconoce la brecha entre los saberes (relativos a la didáctica de la geometría) que los profesores adquieren en su formación inicial y los que construye en su trayecto profesional, particularmente cuando requieren ser desplegados en escuelas primarias multigrado[4] Los saberes con los que cuenta el profesor pueden resultar insuficientes para atender las necesidades de una escuela multigrado, entre otras cosas porque al parecer, el Sistema Educativo Nacional no siempre proporciona una formación adecuada para trabajar en escuelas de ese tipo, pues los programas de formación inicial consideran en la mayor parte del proceso formativo lo relacionado al trabajo en grupos unigrado, razón por la que se observan grandes diferencias entre los objetivos de la educación básica y de las escuelas normales, un ejemplo de ello (y que analizaremos más adelante) es el plan 2012 de la licenciatura de educación primaria, donde el contexto multigrado se aborda en un solo

[4] En las escuelas primarias de México estudian los niños de 6 a 12 años de edad, en las llamadas “multigrado” un solo profesor atiende a más de un grupo de alumnos de grados diferentes. Generalmente son escuelas públicas y se ubican en el medio rural o bien en las zonas marginales de las ciudades.

semestre, quinto para ser más precisos, además de ser generalizado sin diferenciar en el contexto de los distintos estados o zona de influencia de las instituciones formadoras.

Por las razones expuestas, el presente capítulo centra su atención en la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas en escuelas multigrado (formación inicial y continua)[5] para la enseñanza de la geometría, ya que se reconoce que los docentes presentan necesidades particulares para desarrollar sus prácticas de enseñanza en este tipo de escuelas y con este tipo de contenidos. Se intenta poner de manifiesto la existencia de una problemática ligada a dichos procesos de formación de los profesores para la enseñanza de la geometría, ya que al parecer sigue pendiente de resolver, siendo entonces necesarios dispositivos didácticos efectivos que permitan integrar la formación geométrica y didáctica de los profesores.

Para ello, el capítulo se organiza en tres bloques, el primero tiene que ver con las coordenadas que limitan este estudio, el segundo, revisión de literatura sobre la formación de profesores en que la información se ha sistematizado en categorías como: formación de profesores de matemáticas (en particular la geometría), investigaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría y prácticas en las escuelas multigrado. Posteriormente, y con base en el análisis expuesto, en un tercer bloque se incluyen las preguntas y objetivos de investigación que orientan esta tesis.

1.1. ALGUNAS COORDENADAS QUE (DE) LIMITAN AL CAMPO DE ESTUDIO

En el ámbito de la investigación, las escuelas multigrado han sido regularmente estudiadas, se han indagado las prácticas de enseñanza, las interacciones de sus agentes, las políticas públicas y la formación de profesores para este contexto. La enseñanza en escuelas multigrado fue una

---

[5] En México la formación inicial se encuentra definida por el tiempo que un estudiante para profesor cursa su preparación en la escuela normal y que tiene una duración de cuatro años. Lo que concierne a la formación continua es considerada cuando se inicia en el ejercicio de la docencia una vez que se ha concluido la preparación inicial.

práctica común en México durante siglos a partir del énfasis por la alfabetización y aunque más adelante se implementó el modelo graduado donde se destinaba un profesor para cada grado escolar, siguieron existiendo escuelas de esta modalidad (Rockwell & Rebolledo, 2016). De acuerdo con Rockwell y Rebolledo (2016) algunas escuelas formadoras de maestros, en particular las escuelas normales rurales, incluían elementos para formar a los estudiantes considerando a los alumnos de primaria que habitaran en el medio rural, es decir,

> Durante los años 1950 y 1960, contribuyeron a la pedagogía de la escuela rural unitaria varias Normales, en particular la de Veracruz, el Instituto Federal de Capacitación del Magisterio con la edición de libros sobre el tema y el crefal con talleres impartidos por expertos internacionales (pág. 13).

En décadas posteriores hubo otros proyectos para los mismos fines y aunque actualmente las escuelas normales rurales han ampliado su campo de inmersión laboral, siguen siendo las escuelas multigrado del medio rural donde fundamentalmente los egresados trabajan en sus primeros años de servicio, por esta razón la formación para el ámbito multigrado es fundamental para los estudiantes de estas normales, ya que, como se mencionó, en la ruralidad es donde se encuentra la mayoría estas escuelas.

En México las modalidades de la escuela multigrado se identifican de acuerdo al número de maestros: Unitarias (un solo maestro); Bidocente (dos profesores); Tridocente (tres profesores); Tetra y Penta docente (con cuatro y cinco profesores), en este último caso ya no se consideran propiamente escuelas multigrado pero se siguen considerando así para el sistema educativo. Además, se organizan en dos subsistemas, las escuelas regulares atendidas por las autoridades estatales o federales, y las comunitarias que dependen del Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE[6]). De acuerdo con las cifras del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) de 2017, "en el ciclo escolar 2014-2015, el 27.5% de los planteles preescolares es unitario; lo mismo que el 43.8% de las escuelas primarias (unitarias, bidocentes

[6] De acuerdo a Juárez (2009, citado en INEE 2017), en esta institución se atiende a las poblaciones rurales con una metodología pedagógica diseñada para los grupos multigrado.

y tridocentes) y el 19.5% de las escuelas telesecundarias (unitarias o bidocentes)" (INEE, 2017, pág. 20). Más adelante,

> Para el ciclo escolar 2014-2015, las 43,289 escuelas primarias multigrado (unitarias, bidocentes y tridocentes) representaban 43.8% de las primarias del país, las cuales atendían a 1, 297, 491 estudiantes, es decir, al 9% de la matrícula. De este porcentaje (43.8%), 59% correspondía a las primarias generales, 15% indígenas y 26% comunitarias. En relación con el total nacional de escuelas por tipo de servicio, 32.9% de las primarias generales es multigrado, 66% del total de las escuelas indígenas y todas las primarias comunitarias trabajan con la modalidad multigrado (INEE, 2017, pág. 21).

Ahora bien, más allá de la cantidad de escuelas, resulta importante hacer énfasis en el papel del profesor en las escuelas multigrado, ya que su trabajo enfrenta una serie de particularidades derivadas principalmente del planteamiento curricular.

En los últimos años el Sistema Educativo mexicano ha transitado por una serie de reformas que consideran que es en la actividad del docente donde recae la responsabilidad de concretizar las expectativas de los cambios propuestos. No es extraño entonces que se considere al profesor como responsable de los resultados obtenidos en el aprendizaje sin tomar en cuenta las cambiantes disposiciones curriculares para cuya comprensión ha habido muy poca o nula capacitación al magisterio. Prueba de esta dinámica es que aún no culminaba la implementación de la *Reforma Integral de Educación Básica* del 2011, cuando ya estaba en marcha el nuevo modelo educativo que, a pesar de intentar mejorar la propuesta curricular anterior, llega demasiado pronto como para identificar y evaluar los resultados obtenidos con la propuesta anterior. En este contexto, el profesor se encuentra ante una encrucijada, ¿cómo desarrollar el trabajo en el aula y favorecer el aprendizaje de los alumnos (sobre todo en el contexto multigrado) en esta dinámica de constante cambio?

Por otra parte, las opiniones de los profesores sobre la reforma educativa se cruzan con la de otros agentes, porque no es igual la visión del docente a la de los especialistas que la diseñaron, o de aquellos cuya responsabilidad es la de dar seguimiento a su implementación (autoridades regionales, asesores técnico pedagógicos y/o supervisores escolares). Los partidarios de la reforma (OCDE, SEP, INEE[7]) consideran que responde al reclamo social de mejorar la calidad de la educación y que para hacerla realidad es fundamental centrarse solamente en la profesionalización, por ello la evaluación de los profesores ha pasado de ser un medio para producir conocimiento a considerar como un fin único este aspecto, haciendo menor énfasis en el sentido formativo que la evaluación debe tener.

Como fase previa a la investigación, con la finalidad de conocer las percepciones de los docentes multigrado acerca de la reforma actual, se organizaron dos grupos focales (Hamui-Sutton & Varela-Ruiz, 2012) para discutir sobre la relación entre la reforma a la educación básica,[8] la formación para la enseñanza en multigrado y las dificultades para la enseñanza de las matemáticas en el aula multigrado. La selección de los grupos fue a conveniencia de la investigadora, con relación al grupo de maestros en servicio los factores que incidieron fueron la cercanía y zona de influencia con la escuela normal en que gira la investigación, es decir, es una zona escolar en donde año con año, asisten jóvenes de diversos semestres a realizar sus prácticas profesionales, por lo tanto, el trabajo en conjunto e intercambio de conocimientos son constantes, asimismo, se encontró que el total de los 14 profesores son egresados de la misma institución, existiendo una variación considerable en años de servicio lo cual permitía identificar planes de formación distintos (Planes 84 y 97), finalmente también se contaba con amplia experiencia en la mayoría de los docentes con relación al trabajo en escuelas multigrado, pues el promedio de años laborando en instituciones de este contexto oscilaba entre los 8 y 15 años de servicio. Las discusiones se llevaron a cabo en cuatro sesiones de los Consejos Técnicos Escolares durante el ciclo escolar 2016-2017 e integraron a los 14 profesores de escuelas primarias multigrado y el supervisor de la zona escolar. Otro grupo de discusión se formó con 15 estudiantes que en ese mismo ciclo cursaban el quinto semestre de la Licenciatura en

[7] OCDE: Organización para la Cooperación y Desarrollos Económicos; SEP: Secretaría de Educación Pública; INEE: Instituto Nacional para la Evaluación Educativa.
[8] En ese momento se encontraban vigentes los planes 2011

Educación Primaria en la Escuela Normal.[9] El criterio fundamental de selección es que hubieran tenido acercamiento durante sus prácticas profesionales a escuelas multigrado, en el caso del plan de estudios 2012, es en el quinto semestre en que los estudiantes llevan a cabo sus jornadas de práctica en grupos multigrado y tienen acercamiento a diversas metodologías para el trabajo en este contexto; al ser 4 grupos de quinto semestre con un promedio de 35 jóvenes por grupo, se optó por reducir el número de participantes en el grupo focal, haciendo la invitación de manera voluntaria y con preferencia a los que efectuaron sus prácticas en escuelas unitarias y bidocentes. En el caso de este grupo focal, las discusiones se realizaron durante el semestre de febrero a agosto del ciclo 2016-2017 en horarios extra clase, haciendo énfasis en el desarrollo de temas que comprende el programa del curso y los periodos cercanos a las jornadas de prácticas, siendo en total 10 sesiones.

Ambos grupos concluyeron que el planteamiento curricular de la reforma es una propuesta elaborada sin un diagnóstico de las necesidades educativas ya que no considera el contexto (rural o urbano) en que se encuentra cada escuela, además señalan que se hacen modificaciones al programa de estudios pensado sólo en grupos unigrado[10], por estas razones, dicen, no es posible dominar los aprendizajes esperados de cada grado porque hay poca capacitación sobre las metodologías de enseñanza para el multigrado. También consideran que existe desarticulación entre los conocimientos adquiridos en la formación inicial (en las escuelas normales) y el currículo de educación básica. Otros puntos que subrayan son el exceso de contenidos, la defectuosa articulación de los contenidos de cada grado, el escaso apoyo por parte de las autoridades, la inadecuada capacitación para aplicar metodologías nuevas y falta de tiempo para completar lo que pide el currículum.

[9] Las discusiones se dieron de manera separada, esto es, no hubo una discusión donde profesores en formación y maestros en servicio dialogaran juntos.
[10] Se denominará así a aquellos grupos en donde se atiende solamente un grado escolar.

Lo anterior proporcionó una serie de referentes para la presente investigación y permitió reflexionar sobre la dificultad de trabajar en una escuela multigrado con un currículum diseñado para otro tipo de institución, así como el reconocimiento de los profesores sobre la carencia de una formación inicial y continua que proporcione elementos específicos para el trabajo en el aula multigrado, además de que se tome en cuenta la experiencia que se adquiere al trabajar en este contexto, encontramos también que la mayoría de las opiniones vertidas se centraron en el diseño de cursos o talleres desde la Escuela Normal y cuando los profesores ya se encuentren en servicio, de dichas reflexiones surgieron preguntas iniciales de investigación como: ¿qué sucedería si en la discusión participaran juntos profesores y estudiantes de la normal?, ¿qué propuestas de formación inicial y continua surgirían?, ¿qué diferencias o similitudes existen en sus conocimientos para la enseñanza de las matemáticas en multigrado?, ¿cómo ha sido la formación inicial de los sujetos de interés en estos tópicos y qué elementos les ha proporcionado para el trabajo en el aula multigrado?

1.1.1. Las mediciones estandarizadas. Un referente del logro educativo en multigrado.

En México, como seguramente sucede en otros países, las evaluaciones nacionales (PLANEA) e internacionales (PISA[11]), son un referente que permite conocer el nivel de logro de los aprendizajes esperados señalados en el currículum.

[11] A partir del año 2000 México participó por primera vez en el proyecto PISA de la OCDE que permite conocer el logro de aprendizajes en alumnos de quince años en lectura, matemáticas y ciencias. De igual manera, las evaluaciones estandarizadas a nivel nacional Excale y Enlace surgen en 2005 y 2006 en este orden, diseñadas con el propósito de contar con mediciones que permitieran conocer el estado del sistema educativo y su evolución en el tiempo, sin embargo, posterior a un estudio de validación de las mismas el Sistema Educativo propone un cambio, se implementa a partir del 2015 la evaluación PLANEA que tiene como propósito general conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes esenciales en diferentes momentos de la educación obligatoria.

Según el Instituto de Evaluación Educativa de México (INEE)[12], "de acuerdo con los resultados de las pruebas estandarizadas nacionales (EXCALE, ENLACE y PLANEA) e internacionales (PISA), los estudiantes que residen en localidades rurales con menos de 2 500 habitantes obtienen menores puntajes que los que viven en ciudades" (2017, pág. 24), como se ha mencionado las escuelas multigrado se encuentran en estas zonas.

La prueba PLANEA tiene como propósito conocer la medida en que se han logrado los aprendizajes esperados del currículo, pero establece que el análisis de esos resultados no tiene el objetivo de juzgar el desempeño de los docentes, sin embargo sí se considera como un estándar para determinar el nivel en que se encuentra la educación en México (INEE, 2015). De acuerdo a lo que pretende medir y la información que se pretende obtener, esta prueba tiene tres modalidades:

1) Evaluación del Logro Referida al SEN (Sistema Educativo Nacional). Se aplica a muestras representativas en ciclos de cuatro años y su meta es contribuir a la construcción de directrices para el sistema educativo;
2) La evaluación del Logro de los Centros Escolares. Ofrece información a las escuelas sobre los aprendizajes clave para posibilitar la mejora de los procesos de enseñanza.
3) La evaluación Diagnóstica Censal. Brinda información basada del diagnóstico de todos los alumnos para identificar áreas de oportunidad en cada escuela (INEE, 2015).

En la Evaluación del Logro de los Centros Escolares de 2018 para sexto grado de primaria, se consideraron los campos formativos de Matemáticas y Lenguaje y Comunicación, se tomó una muestra de 3 573 escuelas con un total 104 973 alumnos. Se evaluaron conocimientos y

[12] En el 2019 asumió la presidencia de México el Lic. Andrés Manuel López Obrador y entre las acciones para transformar al Sistema Educativo se decidió la desaparición del INEE.

habilidades derivados del programa de estudios 2011, en el caso de Matemáticas se incluyeron 147 reactivos distribuidos como se presenta en la figura 1.

Unidad de evaluación	Número de reactivos
Sentido numérico y pensamiento algebraico	71
Forma, espacio y medida	51
Manejo de la información	25
Total de reactivos	147

Figura 1. Contenidos Generales de la prueba Planea 2018. Fuente: INEE *(2018)*

Los resultados de esta prueba se describen a partir de una escala de 200 a 800 puntos con una media de 500 establecida a partir de la evaluación aplicada en el 2015. En el eje de Forma, espacio y medida, se incluyen tres aspectos esenciales del estudio de la geometría y la medición, la exploración de las características y propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos; los principios básicos de la ubicación espacial y; el cálculo geométrico. Se muestran a continuación los niveles de este eje por ser el objeto de saber de este trabajo (figura 2).

Forma, espacio y medida

Nivel I	Nivel II	Nivel III	Nivel IV
Los estudiantes logran identificar las características y propiedades básicas de triángulos, prismas y pirámides. Sin embargo, se les dificulta identificar características geométricas como tipo de ángulos, alturas, rectas paralelas y perpendiculares en figuras y cuerpos geométricos; interpretar la descripción de una trayectoria; identificar la unidad de medida más adecuada para longitudes y áreas.	Los estudiantes logran identificar elementos geométricos como alturas, líneas paralelas y ángulos rectos en figuras simples; resolver problemas utilizando las características y propiedades de cuadriláteros, prismas y pirámides; identificar unidades de medida en áreas, y resolver problemas de cálculo de perímetros; ubicar lugares usando sistemas de referencia convencionales en planos o mapas; resolver problemas de conversión en el Sistema Internacional de Unidades (SI).	Los estudiantes logran resolver problemas utilizando las características y propiedades de ángulos agudos, líneas rectas, figuras y cuerpos geométricos; distinguir situaciones donde se utiliza el concepto de perímetro o área; calcular la distancia real de un punto a otro en mapas; ubicar puntos y coordenadas en el plano cartesiano; resolver problemas directos de conversión de unidades de medida (SI e inglés).	Los estudiantes logran resolver problemas de cálculo de áreas y de conversión de unidades de medida con una operación adicional; y describir rutas usando sistemas de referencia convencionales en planos o mapas.

Figura 2. Niveles de logro de Matemáticas en la prueba PLANEA. Fuente: INEE *(2018)*

La organización de resultados es en cuatro niveles de logro, estos niveles son acumulativos, es decir, para que un estudiante logre el máximo nivel debe cumplir con los requerimientos de los niveles anteriores. El nivel I es insuficiente y refleja carencias fundamentales para seguir aprendiendo, en el nivel II se tiene un logro apenas indispensable, los del nivel III cuentan con un logro satisfactorio y los del nivel IV tienen un logro sobresaliente (INEE, 2015). Ahora bien, los reactivos de la prueba se ubican en los ejes temáticos (Forma espacio y medida: Figuras y cuerpos; Medida; y Ubicación espacial) y los contenidos del programa de estudios, también se clasifican de acuerdo al dominio cognitivo,[13] esto es, según la manera como se solucionaron, Dichos niveles se describen en la figura 3.

Dominio cognitivo	Descripción
Reconocimiento de objetos y elementos matemáticos	Este proceso comprende el conocimiento de hechos, la retención memorística de objetos y propiedades matemáticas, la ejecución de algoritmos y la realización de cálculos.
Resolución de problemas simples	Este proceso comprende el uso de información matemática explícita en el enunciado, y el establecimiento de relaciones directas necesarias para llegar al resultado.
Resolución de problemas complejos	Este proceso comprende la reorganización de la información matemática presentada en el enunciado y la estructuración de una propuesta de solución, a partir de relaciones no explícitas.

Figura 3. Niveles de dominio cognitivo de Matemáticas en la prueba PLANEA. Fuente: INEE *(2018)*

El INEE señala que los promedios de las evaluaciones 2018 y 2015 a nivel nacional (que antecede a la información actual y en la cual se basa el comparativo que realiza) son similares, aunque es importante resaltar que en la información que dicho documento respecto al estado de Zacatecas, puede observarse que la puntuación obtenida en los campos formativos de lenguaje y comunicación y matemáticas, en el contexto multigrado ha disminuido en el 2018 en relación

[13] El dominio cognitivo es el nivel que refiere a los procesos cognitivos implicados en los reactivos. Se utiliza como indicador de la adquisición, por parte de los estudiantes, de los aprendizajes clave del currículum.

a la que se obtuvo en 2015[14]. De acuerdo con lo publicado por el INEE en noviembre de ese año, la diferencia entre los resultados en matemáticas y la media estipulada es más estrecha en las escuelas multigrado, el contexto multigrado tiene un total de 471 puntos mientras que las escuelas de organización completa reflejan un puntaje de 507 en total (INEE, 2018). Los resultados nacionales de los campos formativos evaluados en escuelas completas y de organización multigrado del año 2018 pueden apreciarse en la figura 4,

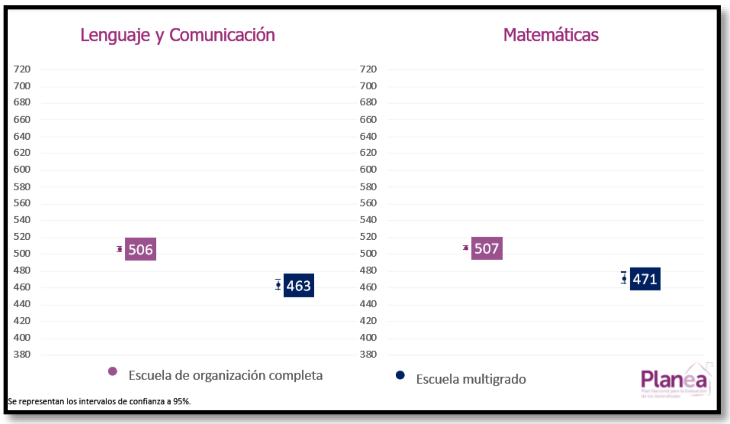


Figura 4. Resultados nacionales de la prueba PLANEA 2018. Fuente: INEE *(2018)*.

No obstante que los resultados son genéricos y por disciplina, lo que es importante subrayar es la diferencia entre contextos y la complejidad de articular los contenidos matemáticos en un grupo multigrado. Tal como se pudo apreciar en la figura 4, los puntajes de diferencia entre ambos contextos reflejan una diferencia significativa, por lo tanto, se considera necesario contribuir en los procesos de formación particularmente en el campo formativo de matemáticas. Además, una diferencia interesante entre las dos evaluaciones mencionadas (2015 y 2018) y que sustentan el interés del objeto matemático de esta tesis, es que en la de 2015 se describen con mayor especificidad los resultados en geometría, por ejemplo, se dice que en el primer nivel se consideran desarrollos en el plano de cuerpos geométricos y en él se ubica el 60.5% de los

[14] En Lenguaje y comunicación el puntaje del 2015 fue de 493 y en 2018 de 482; en el campo formativo de Matemáticas el resultado del año 2015 fue de 505, y en 2018 de 490 (INEE, 2018, págs. 31, 33)

alumnos. En el segundo se deben obtener áreas a partir de un problema, el 18.9% de los estudiantes se ubica en éste. En el tercer nivel se deben describir las características de figuras, resolver problemas de áreas y perímetros, calcular la distancia real entre dos puntos en el plano, reconocer tipos de ángulos y rectas, en éste se ubica 13.8% de los estudiantes. En el cuarto nivel se pide que sean capaces de obtener áreas y perímetros en problemas más complejos y describir rutas usando sistemas de referencia convencionales, en él se ubica el 6.8% de los estudiantes (INEE, 2015). En este sentido en los resultados que arrojó la evaluación aplicada en junio de 2015 a nivel nacional se obtuvo que un 60.5% se encuentra en el nivel I, y en el estado de Zacatecas el 58.1% de los alumnos evaluados están en el primer nivel, lo que indica que sus conocimientos no son suficientes para continuar aprendiendo y lograr los niveles subsecuentes, es decir, no se han podido lograr los aprendizajes esenciales que marca el programa de estudios 2011.

Al parecer, en lo que se refiere a la enseñanza de la geometría, el INEE reconoce la complejidad de esta tarea, pues ha difundido diversos materiales en los que se describen diferentes perspectivas sobre la geometría y si bien es cierto, que dichas consideraciones son publicadas luego de las evaluaciones de Excale (2006), actualmente sigue siendo una preocupación, sobre este tópico García y López (2008) señalan que:

> Muchas de las limitaciones que nuestros alumnos manifiestan sobre su comprensión acerca de temas de Geometría se deben al tipo de enseñanza que han tenido. Asimismo, el tipo de enseñanza que emplea el docente depende, en gran medida, de las concepciones que él tiene sobre lo que es Geometría, cómo se aprende, qué significa saber esta rama de las Matemáticas y para qué se enseña [...] Es importante reflexionar sobre las razones para enseñar Geometría. Si el maestro tiene claro el porqué, estará en condiciones de tomar decisiones más acertadas acerca de su enseñanza (pág. 27).

Resulta claro que los resultados de las evaluaciones estandarizadas no son un señalamiento al profesor, sino un punto de partida para identificar las características de la enseñanza de la geometría en las escuelas multigrado. Por otra parte es fundamental tener claridad de que los alumnos de educación básica habrán de desarrollar como parte de su razonamiento geométrico, la trascendencia de explicar, probar, argumentar los diversos procedimientos que han efectuado lo que conlleva la construcción de argumentos lógicos como una habilidad esencial de la geometría (García & López, 2008). Sin embargo, ésta es sólo una primera aproximación pues es importante reflexionar acerca de interrogantes como: ¿qué tratamiento didáctico se sugiere para la geometría en los programas de formación inicial de los profesores?, ¿cuál es la importancia de desarrollar el razonamiento geométrico en los alumnos de educación primaria y cuál es el rol del profesor en ello?, ¿qué saberes requiere el profesor enseñar geometría en grupos multigrado?

1.1.2. Reformas educativas y formación inicial.

Sin duda, en todas las reformas educativas se incluyen ideas sobre los saberes del profesor. En la formación inicial se han considerado conocimientos sobre la matemática, su aprendizaje y enseñanza, además de la enseñanza en escuelas multigrado. En México, en marzo de 1984 se estableció que la formación de profesores en su nivel inicial y en cualquiera de sus tipos y especialidades, tendría el grado académico de licenciatura (DOF, 1988), en el acuerdo oficial en que se enuncia lo anterior se expone el Plan de estudios, a partir de la revisión a este documento, se observó que pretendía formar docentes reflexivos, analíticos y críticos con habilidades para ejercer la docencia y la investigación, pero presentaba brechas entre las teorías que se revisaban y el conocimiento sobre la enseñanza, incluso no se planteaba un estudio amplio del currículum de educación básica, además, fue difícil que los estudiantes se apropiaran de las herramientas investigativas adecuadas para enfrentar la práctica profesional. En las asignaturas relacionadas con las matemáticas (Matemáticas y Estadística) se planteaban los contenidos como herramientas de la investigación no como insumos para un profesor. Tampoco se incluía el análisis del trabajo multigrado, no se contemplaba este tipo de escuelas, ni sus condiciones de organización o pedagógicas, además, los espacios para la práctica profesional no consideraban el acercamiento a las escuelas multigrado, por lo general se daba hasta el momento en que se incursionaba en el ejercicio profesional.

Posteriormente, en 1997 se implementa el *Plan de Transformación a las Escuelas Normales* bajo el argumento que los egresados del Plan 84 contaban con escasos elementos para la práctica profesional. El nuevo Plan (97) proponía la formación de un profesor enseñante, en la malla curricular se incluían las asignaturas *Matemáticas y su enseñanza I y II*, donde el profesor en formación consolidaría los conocimientos básicos de la disciplina y aprendería las formas de enseñarla. Por otra parte, la flexibilidad de la malla curricular proponía que cada escuela normal diseñara la *Asignatura Regional I y II* y no fue raro ver que muchas escuelas normales las orientaron hacia el dominio de contenidos específicos y la aplicación de estrategias adecuadas para atender a los niños de poblaciones rurales. Como tema fundamental se proponía la enseñanza en grupos multigrado para que los estudiantes normalistas identificaran modalidades

Luego, el Plan de Estudios de 2012 se propuso articular la formación de profesores con la educación básica de la reforma del 2011. Bajo un enfoque centrado en competencias incluye un trayecto de preparación para la enseñanza y el aprendizaje y en lo que toca a la didáctica de las matemáticas se incluyen cuatro cursos: *Aritmética su aprendizaje y enseñanza; Álgebra su aprendizaje y enseñanza; Geometría su aprendizaje y enseñanza y; Procesamiento de Información Estadística*, ésta última contribuye además a la formación del profesor investigador que también tiene presencia en dicho plan. El propósito fundamental de estos cursos es situar al estudiante como aprendiz de matemáticas para que logre un dominio de la disciplina a enseñar y sólo en un último momento de los cursos se aborda el conocimiento didáctico, es decir, enfatiza la apropiación de los contenidos matemáticos y considera que la enseñanza de los mismos se dará por añadidura.

En el Plan 2012 desaparecen las asignaturas regionales y en su lugar se incluye el *Curso Optativo* en el que se propone estudiar las características de la entidad (Zacatecas), pero no supone la enseñanza en grupos multigrado. Como respuesta a esta ausencia y considerando las características geográfico sociales del estado de Zacatecas, en el 2015 las escuelas normales de esta entidad diseñan el curso optativo *Planificación de ambientes de aprendizaje para grupos* *multigrado*, cuyo propósito era consolidar las competencias para organizar ambientes de aprendizaje con saberes de complejidad creciente por campo formativo y/o familia de saberes. Entre sus propósitos se incluye: la planificación desde las didácticas específicas y el enfoque globalizador para identificar las implicaciones de la práctica profesional en grupos multigrado y el diseño de proyectos de innovación para transponer los saberes de primaria en grupos multigrado (DGESPE, 2015).

1.1.3. Propuestas curriculares para el profesor de multigrado.

La organización de las actividades para el aula multigrado es diferente a la del aula unigrado, no obstante, el plan de estudios de educación básica organiza los contenidos y aprendizajes generalizando los horarios de atención y los procesos de enseñanza y aprendizaje por lo que el profesor debe adaptar el programa de estudios para los grupos multigrado. Por esta razón, resulta relevante analizar las propuestas y recursos que se proporcionan al profesor para el trabajo en escuelas multigrado.

Si bien es cierto que existen propuestas curriculares que ofrecen una organización de contenidos pertinentes para el multigrado, no lo es menos que la ausencia de una propuesta curricular nacional que especifique la forma de trabajo en estas escuelas sigue siendo el problema fundamental. Un ejemplo de esos esfuerzos es la *Propuesta para las Escuelas Multigrado 2005*, modelo pedagógico que se estructura por contenidos comunes de cada nivel, es decir se sugiere organizar secuencias didácticas con un tema común y que consideren en el desarrollo de la clase las fases de inicio, desarrollo y cierre. Para facilitar su comprensión se ofrecen fichas y guiones de trabajo.[15] Sin embargo a nivel nacional aún no se percibe la intención de unificar estos elementos, pues a decir de Arteaga (citado en Rockwell y Rebolledo (2016),

[15] Cuando se consolidó la reforma del 2011, no se consideró necesario que esta propuesta se integrara en el currículum oficial de las escuelas normales, por esta razón en el estado de Zacatecas se elabora la *Propuesta de trabajo en multigrado 2012*, con el fin apoyar la formación de profesores para el multigrado. En la propuesta se articulan las “familias de saberes” por ciclos.

> Se han impulsado algunas propuestas educativas dirigidas a las primarias multigrado del país, al parecer tales proyectos, en menor o mayor medida, se han desarrollado con un apoyo limitado en los recursos humanos y económicos. Condiciones que en parte responden a la idea de que las escuelas con grupos multigrado son una modalidad transitoria y compensatoria tendiente a desaparecer (pág. 8).

Entre algunos de los proyectos actuales para las escuelas multigrado en México, se encuentran la *Estrategia de mejora de la educación multigrado en comunidades chiapanecas*[16] mediante la cual se capacitó a docentes, asesores técnico pedagógicos y supervisores con el fin de desarrollar métodos y técnicas de enseñanza culturalmente pertinentes para escuelas multigrado indígenas (UNICEF, 2012). Por otra parte, en 2018 se presentó un compendio de estrategias didácticas derivas del Curso-Taller *Estrategias Didácticas para Escuelas Multigrado* realizado en Tlaxcala, México entre enero y abril del 2016 (Rockwell & Rebolledo, 2018). En dicho compendio se incluyen estrategias relativas a los campos formativos de Lenguaje y comunicación y Pensamiento Matemático. También han existido otros esfuerzos por apoyar al profesor multigrado como las *Guías didácticas de Multigrado* (Popoca, et. al., (2008), los *Manuales del Instructor Comunitario* (CONAFE, 1986, 1992, citados en (INEE, 2017)) y diferentes talleres de actualización y capacitación.

Asimismo, entre los cursos de formación para el profesor multigrado está el *Curso nacional de Didáctica para Ambientes Multigrado 2016*, en modalidad e-learning su propósito es que los profesores y técnicos docentes desarrollen habilidades necesarias para mejorar la tarea docente y enfrentar el reto que representa el trabajo en el aula multigrado. Para lograrlo se analizan conceptos cómo: planeación, intervención, alfabetización inicial, evaluación y aprendizaje del alumno. Respecto del currículum, entre los proyectos más relevantes están las propuestas del INEE que, a partir del análisis del contexto multigrado, diseña adecuaciones curriculares o modelos curriculares para multigrado (INEE, 2017).

[16] Es una estrategia desarrollada por la UNICEF, La Secretaría de Educación de Chiapas y el DIF Chiapas.

Sin lugar a dudas en la actualidad han surgido cambios y mejoras en algunos aspectos del currículum para la formación de profesores, pero no existe una propuesta curricular que considere las características del trabajo en las escuelas multigrado y contribuya a acercar la acción docente con los objetivos del programa de estudios. Ante esta situación cabe cuestionarse sobre ¿cuáles son los saberes necesarios para formar al profesor multigrado en la enseñanza de la geometría?, ¿de qué forma el profesor podrá apropiarse de ellos de tal manera que sean funcionales en su práctica cotidiana?, estas interrogantes permiten centrar la atención en la formación de profesores para la enseñanza de la geometría en escuelas multigrado

1.2. FORMAR PROFESORES PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN MULTIGRADO

La formación de profesores ha constituido un foco de atención dentro del ámbito educativo y un objeto de estudio recurrente en el campo de la investigación. Específicamente en lo que concierne a las investigaciones en el campo de la Educación Matemática en México, a decir de Ávila (2016) se ha observado que a partir de los años setenta del pasado siglo surgieron investigaciones que principalmente analizaban los procesos cognitivos de los estudiantes y los conceptos matemáticos desde una visión histórica. No obstante, en las décadas siguientes se suscitó un avance significativo, se diversificaron las áreas de investigación hasta llegar a temas como la formación de profesores. Continuando con los hallazgos de las indagaciones realizadas hasta el momento en México, lo que respecta a los procesos de enseñanza en las escuelas de organización multigrado, los estudios resultan escasos, lo mismo pasa en lo que respecta a la enseñanza de la geometría, principalmente en lo concerniente al nivel de educación primaria. Es decir, en los diversos ámbitos como la formación y los procesos de enseñanza y/o aprendizaje, la geometría ha tenido un volumen de producción modesto, por ello el interés por indagar estos tópicos.

Las matemáticas forman parte esencial en la vida cotidiana, existe una relación casi imperceptible entre las acciones de los sujetos y las actividades relacionadas con ellas, una sencilla transacción monetaria en el comercio, la apreciación de construcciones arquitectónicas o el reparto de porciones de tierra del agricultor, son situaciones en que la relación sujeto-matemáticas se hace presente; en este sentido, desde los años sesentas, para la enseñanza de las matemáticas se han planteado diversos elementos que facilitan su estudio e investigación, estos elementos han surgido de la disciplina que se ha dado en llamar Educación Matemática, Didáctica de las Matemáticas o Matemática Educativa.

En este campo de investigación, se estudian diversos fenómenos como la historia de los conceptos, las prácticas de enseñanza o los procesos de aprendizaje que han sido analizados de acuerdo a las necesidades, intereses y características de la sociedad. Es por esta razón que resulta importante definir primeramente qué es la didáctica, perspectiva donde se ubica esta tesis y que Brousseau (2014) describe de la siguiente manera:

> La Didáctica es la ciencia que estudia la difusión de los conocimientos útiles a los hombres que viven en sociedad. Se interesa por la producción, la difusión y el aprendizaje de los conocimientos, así como por las instituciones y actividades que los facilitan. De este modo, la didáctica, como actividad social o profesional, es todo aquello que tiende a la enseñanza de un conocimiento, de una ciencia, de un arte o de una lengua. (pág. 9).

Al hablar de didáctica entonces se está hablando de una relación entre un aprendiz y un objeto debe ser aprendido (un saber) mediante la guía de alguien (el profesor) y un medio que propicia este aprendizaje. Aunado a ello, se debe aclarar que ningún fenómeno relativo a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede ser analizado sin tener en cuenta la especificidad del saber matemático, es decir, se deben investigar las relaciones que suceden entre el sujeto que aprende, lo que debe ser aprendido y el medio que provoca el aprendizaje. Dado lo anterior, la didáctica de la matemática tiene como objeto de estudio las condiciones de creación, difusión y adquisición provocada de saberes de matemática. La aventura que debe vivir una persona para comprender la geometría no es la misma que la del álgebra o del análisis (Brousseau, 1998).

En el proceso de aprender matemáticas, surge la actividad de enseñar las matemáticas (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997), y siguiendo esta lógica, luego de las primeras etapas en las que la preocupación se centraba en el alumno o la clase, en la investigación surgió el interés en países como Francia, por la formación del profesorado. Este tema ha formado parte de la investigación a partir de la década de los sesentas, su precursor Brousseau (2014), afirma que la escuela no tenía ninguna función de formación de profesores por lo cual se centraban en observar una pequeña parte de sus enseñanzas, este hecho condujo a la construcción de dispositivos para la observación y análisis de la enseñanza, como la Ingeniería Didáctica y la Teoría de las Situaciones Didácticas. Centrados en el interés por las matemáticas que se enseñan y se aprenden en la escuela, por comprender el qué y el cómo de las matemáticas que deberían aprenderse y enseñarse, podemos señalar que dichos fenómenos son aspectos que conforman el propósito que orienta la presente investigación, a saber, analizar el trabajo del alumno y el del profesor, independientemente si se trata de *utilizar las matemáticas, aprenderlas, crearlas o enseñarlas* (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

1.2.1. Los saberes en la formación.

Respecto a lo que un docente en matemáticas debe saber, es preciso señalar que desde la perspectiva didáctica el maestro domina un saber al utilizarlo cuando desarrolla su práctica, y a su vez, se requiere del acompañamiento de distintos actores como la comunidad escolar, los supervisores y los formadores (Brousseau, 1998); en el sentido de estas ideas es preciso hablar de formación del profesorado, pues existe el saber cultural definido por los matemáticos y que el profesor deberá introducir al aula mediante situaciones que les den sentido. En la formación de profesores se acepta la existencia de al menos tres saberes que un docente requiere dominar: uno son los saberes que permiten entender los conocimientos de los niños; el segundo lo relacionado con los conocimientos, las prácticas y las relaciones institucionales; y el tercero respecto a los saberes matemáticos que le permitan ajustar las nociones que enseña (Fregona, 1999).

De acuerdo con Brousseau (2000), la parte medular de la enseñanza se centra en el saber que se estudiará y el proceso de su modificación para poder ser enseñado (transposición didáctica) y la didáctica proporciona al docente la posibilidad de reflexionar sobre los fenómenos suscitados en las aulas. En este tenor, Aguayo (2005) describe la relación problemática entre formación de profesores y didáctica señalando la dificultad de transponer el alto volumen de saberes didácticos que se transforman de forma rápida en consideración al tiempo que dura la formación del profesor, por tanto, en la formación inicial dicha transposición resulta compleja. Reconoce también lo que Brousseau ha denominado una "didáctica para principiante" que garantiza un comportamiento profesional mínimo, y puntualiza que en esta propuesta no se especifica qué saberes se habrán de incluir en dicho proceso de formación (Aguayo, 2005). Este punto deja claro que es preciso analizar otra perspectiva de formación para tener lucidez respecto a lo que el profesor en multigrado requiere para la enseñanza de las matemáticas en la formación continua, además de la formación inicial.

También sobre el profesor de matemáticas, Kuzniak (1994) afirma que los conocimientos que se deben adquirir en la formación son los teóricos (matemáticos y didácticos), el saber-hacer y el saber de la experiencia (pedagógico). Los dos primeros pueden ser definidos claramente a partir de lo que un profesor de matemáticas habrá de conocer, en cuanto al último, Kuzniak lo describe a partir de una dualidad entre los saberes procedimental (obtenido de la observación de la práctica) y el proposicional (que se ofrece en la escuela)[17]; ambos saberes situados entre práctica y teoría.

> Estos últimos son ejemplos de actividades de clase, es decir de ingenierías preparadas para ser efectuadas; los saberes procedimentales, por otro lado, buscan volver a las personas formadas más conscientes, gracias a una reflexión más metodológica. La naturaleza exacta y los contenidos de este saber pedagógico se clarifican con el estudio de las estrategias puestas en ejecución en la formación de los maestros. De hecho, de un cierto modo, el objeto principal de los centros de formación es la transmisión a los

[17] El autor retoma estos conceptos de la obra *La transmission des savoirs*, de Delbos y Jorion, 1984, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris. En ella se refleja la óptica de la formación en las escuelas profesionales en los años 70.

> estudiantes de un saber-pragmático "útil". Este saber puede ser concebido parcialmente como una recomposición de elementos de los saberes didáctico y matemático (Kuzniak A. , 1994, pág. 254)

Ahora bien, para Kuzniak (1994) no sólo es relevante pensar en los saberes del profesor sino también en la manera cómo puede adquirirlos, es decir, en las estrategias de formación, que si bien es cierto fueron inicialmente pensadas para la formación inicial, pueden también ser utilizadas en la formación continua. Kuzniak (1994) organiza estas estrategias en dos grandes grupos: las orientadas a la formación profesional de los estudiantes, que los vuelven capaces de enseñar utilizando actividades específicas de formación y; aquellas que no parecen tener como prioridad la formación para la enseñanza. A su vez, ambas categorías contienen tres estrategias específicas que a continuación se sintetizan con base en lo descrito por Kuzniak (1994).

Tabla 1. Síntesis de las estrategias de formación. Fuente: Elaboración propia con base en Kuzniak (1994).

Centradas en la formación profesional	**Sin prioridad evidente en la formación profesional**
Estrategias basadas en la presentación de un modelo Iniciación a las prácticas profesionales, el estudiante debe saber ver y saber observar para que los conocimientos de ello sean objeto de aprendizaje.	**Estrategias culturales** Su núcleo central es el saber sabio, privilegiando el dominio matemático.
Estrategias basadas en la homología El formador utiliza (o intenta utilizar) un modo de transmisión idéntico al que desea ver aplicado por sus estudiantes cuando éstos enseñen en clases. Parte de situaciones propuestas al estudiante desde una visión constructivista propiciando una reflexión a partir de ellas.	**Estrategias de investigación aplicada** Formar a los estudiantes a partir de la investigación, aunque ambiciosa parece adaptada a la formación de los formadores.
Estrategias basadas en la transposición Centradas en los saberes de referencia, el pasaje del saber del formador al saber enseñado. Y la aplicación de este último por el estudiante, a partir del análisis didáctico de las clases, el estudio y exploración de los errores de los niños, entre otros elementos.	**Estrategias basadas en la autonomía** Se les concede a los estudiantes una autonomía de formación amplia, se evalúan competencias que no han sido enseñadas en el marco de la formación.

En cuanto a la descripción de cada estrategia, pueden observarse en la tabla 1, ciertas ventajas de acuerdo al marco en que son operativas, aunque las estrategias de transposición centran la formación en una orientación profesional que parte de la aproximación al saber en juego, las otras pueden brindar una opción de formación según la finalidad y propósito fijados por los formadores de profesores. En palabras de Parada y Fiallo (2014), la formación plena no siempre puede lograrse en el curso de la formación inicial, para ello habrá de ser complementada con el acceso a las oportunidades de formación continua para los profesores, por lo que resulta fundamental que exista una vinculación estrecha entre los saberes que debe tener el joven profesor, las ofertas de capacitación y actualización que ofrezca el sistema, las necesidades del contexto en que se desempeñe la labor docente y el currículo de la educación básica. En congruencia con lo anterior, retomamos lo que Llinares (2007) señala,

> El desafío para los programas de formación inicial y permanente y de las oportunidades diseñadas para potenciar el aprendizaje a lo largo de la vida procede del carácter integrado del conocimiento (por ejemplo la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas) y cómo el profesor define su participación en la "práctica" de enseñar matemáticas y cómo los estudiantes para profesor llegan a generar su propia aproximación a la enseñanza de las matemáticas. (pág. 2).

Partiendo de esta idea Llinares (2007) propone una relación entre la formación inicial y continua empleando el análisis de video de profesores en servicio y la reflexión de lo que en ellos prevalece como una acción institucionalizada en las instituciones formadoras, esta idea ha ganado consenso en el campo de la formación de profesores. Por lo que el análisis y reflexión de lo que sucede en las aulas de los profesores en servicio, puede considerarse un insumo importante para los profesores en formación inicial.

1.2.2. El Espacio de Trabajo Matemático en la formación de profesores.

En el acercamiento previo a la revisión de literatura relacionada con la formación de profesores y la enseñanza de la geometría, generalmente los primeros trabajos encontrados sobre formación inicial de maestros se centran en los dominios del estudiante y los docentes en servicio y los más actuales principalmente versan sobre la reflexión de sus prácticas y el dominio matemático. Dentro de las investigaciones realizadas puede encontrarse una serie de estudios más actuales basados en la conformación de los *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) para la enseñanza de la matemática y la formación de profesores (en geometría con los Espacios de Trabajo Geométrico), por lo general dichos estudios concluyen señalando que los ETM son una herramienta útil para analizar los procesos que subyacen los aprendizajes y el proceso de transposición, algunos de los estudios analizados en la presente investigación son Gómez-Chacón, 2014; Montoya, Mena y Mena, 2014; Montoya, Mena y Mena, 2016; Montoya, 2014.

En los estudios sobre la formación de profesores, se encuentra el de Nikolantonakis y Vivier (2016) quienes muestran cómo los ETM propuestos en la formación son guiados por los formadores para que a partir de un saber matemático, construir un Espacio de Trabajo idóneo para el estudiante. Otro de estos estudios es el de Codina y Romero (citado en Gómez- Chacón, Kuzniak y Vivier, (2016), quienes desde un enfoque metodológico observacional y de trabajo colaborativo, analizan la influencia de contextos ricos en tecnología digital sobre los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) y concluyen sobre la importancia recuperar las ventajas de un trabajo colaborativo entre profesores en el contexto de espacio de trabajo matemático compartidos. En resumen, de acuerdo a Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016)

> Se considera la teoría del ETM como un modelo dinámico que permite reflexionar sobre la acción del profesor en el aula y sobre elementos importantes a tener en cuenta en su formación [...] Se ha presentado el modelo a través de distintos estudios realizados en distintos países, proporcionando ejemplos de cómo puede actuar como una herramienta para el estudio de un trabajo efectivo de los profesores. Inicialmente este modelo propuesto por Houdement y Kuzniak no se pensó como herramienta para la formación del profesorado, sin embargo, la perspectiva didáctica del trabajo matemático y el dinamismo de sus componentes ha posibilitado su uso como una herramienta para analizar cómo el profesor trabaja con las matemáticas. Estudiar el comportamiento del profesor no sólo como matemático –su ETM personal– sino también, permite verlo como profesor en la concepción de la matemática que debe enseñar, en el proceso de transposición de ésta con el objeto de elaborar propuestas didácticas que logren construcción de saberes matemáticos, y todas las reorganizaciones que su rol de profesor supone, en el ETM idóneo (págs. 16-17).

Para los fines que persigue la presente tesis, además de las investigaciones ya señaladas, se consideró profundizar en otros estudios donde se emplea esta perspectiva teórica y las diversas propuestas de formación que incluyen, tales indagaciones son las realizadas por (Henríquez, Menares, Montoya, & Verdugo, s/f; Henríquez, 2016; Olvera, Figueras, & Guillén, 2014; Sánchez & Romero, 2014; Delgado, Cuevas, & Martínez, 2014.

Además, es preciso mencionar el estudio de Montoya, Mena y Mena (2016) quienes identifican que un profesor debutante reacciona en la clase en dos dimensiones: la profesional, y la personal como matemático. Es decir, su espacio idóneo es determinado primero por el espacio de referencia recibido en su formación y por ello se centra en la geometría porque su formación disciplinar puede estar focalizada en lo discursivo y ubicada en el paradigma más avanzado. Sin embargo, una vez que se enfrenta a la tarea de transponer los saberes, encuentra que no ha tenido experiencia para activar la génesis discursiva, pues la institución formadora no le dio elementos suficientes para efectuar su transposición. También en esta investigación se describe cómo el desempeño de los profesores en las aulas está determinado por lo que considera es viable en el nivel en que se encuentra. Con ello se demuestra que existe una brecha entre la construcción del ETM personal y el ETM idóneo cuando la formación inicial no le proporcionó las herramientas que requiere. Con el marco teórico del ETM, se ofrece una forma de abordar el proceso de transposición pues al preocuparse por la activación de las génesis y crear circulaciones apropiadas permite completar un ETM idóneo que posibilita atender a las necesidades tanto de los estudiantes como del profesor en su rol (Montoya, Mena, & Mena, 2016).

Cabe señalar, que las investigaciones incluidas en los párrafos anteriores abordan diversos subdominios matemáticos como aritmética o geometría, este último es el de interés en esta tesis por lo cual, consideramos importante mencionar una de las investigaciones más recientes que se centra en la formación de profesores en el subdominio geométrico en el marco de esta teoría, la cual además, se centra en la enseñanza de los triángulos, objeto matemático también de interés en esta tesis, éste es el de Pizarro (2018), quien busca determinar el espacio de referencia e idóneo sobre la enseñanza de los triángulos. Los sujetos de observación son dos profesoras que atienden estudiantes de 13 años y analiza el espacio de referencia y la posibilidad que brinda para la configuración del espacio idóneo de las profesoras. En sus conclusiones señala que el primero no propicia un razonamiento matemático, además en las clases se despliega recurrentemente un discurso tecnológico con poca presencia de instrumentos geométricos y una ausencia del proceso de prueba. Basándose en sus resultados propone que se modifiquen los documentos oficiales de referencia para la enseñanza y aprendizaje. Lo anterior expuesto, da cuenta, de la posible efectividad de formar a los futuros profesores en el marco de análisis y reflexión mediante el espacio personal y la forma en que lo transpone a partir del espacio idóneo que construye para llevar a cabo su práctica.

1.2.3. Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

En México, a decir de Ávila (2016), en la década de los ochentas se inició la discusión acerca de la demostración en geometría, pues existían pocos investigadores interesados en conocer su utilización y propiciar este pensamiento. En los siguientes años continuaron siendo muy limitados los estudios enfocados en este tema en el nivel de educación básica (véase Ávila 2016); en el caso de educación media superior se vio incrementado el número de investigaciones respecto al aprendizaje de la geometría, dichas investigaciones estaban centradas principalmente en los estudiantes y sus procesos de demostración, no en el saber geométrico a desarrollar, puede decirse que éste fue considerado mínimamente como objeto de indagación durante la época de los ochentas. En la década siguiente, Ávila (2016) señala que la investigación en educación matemática tuvo un crecimiento en calidad y cantidad, y entre las escasas investigaciones sobre el pensamiento docente, se conoció sobre las concepciones respecto a la geometría. En cuanto al periodo del 2002 al 2011, Ávila et al. (2013), concluyen que en las principales línea de investigación conviene abrir un paréntesis para señalar la necesidad de trabajar con más profusión la geometría y la medición, la probabilidad y la estadística, entre otros temas esenciales. Sobre los contenidos matemáticos Ávila et al. (2013) señalan que

> Independientemente del foco de atención de las investigaciones, en cada uno de los niveles educativos hay temas de matemáticas que llaman la atención de los investigadores en tanto otros interesan a muy pocos o a nadie. En primaria, el interés principal lo constituye la aritmética; en secundaria el álgebra; en educación media superior la geometría dinámica; y en educación superior el cálculo [...] Pero hay ausencias que son notables. La geometría resulta la gran ausente en cuanto a los contenidos matemáticos abordados. A excepción de la educación media superior donde hay una gran predilección por la geometría dinámica. (2013, pág. 119)

Respecto a los estudios más recientes encontrados en la revisión de literatura a nivel internacional, los que conciernen al saber geométrico en el nivel básico han abordado conceptos como la geometría espacial, las figuras (áreas y perímetros) y algunos elementos de la geometría euclidiana, específicamente conceptos como cuadrado, rectángulo, triángulo, entre otros, ejemplo de ellos y para profundizar en estos estudios puede verse (Varela, 2015; Gutiérrez, 1998; Márquez, 2008; Oller, 2009; Galvis & Vásquez, 2015). Sin embargo la mayoría de estos estudios se ha centrado en la educación secundaria, hasta ahora, sigue siendo una cuestión importante comprender la enseñanza de la geometría en los niveles de preescolar y primaria, particularmente en lo que concierne al contexto multigrado.

El énfasis de los estudios realizados en el nivel de secundaria sobre el aprendizaje de la geometría ha estado centrados en desarrollar las habilidades de pensamiento espacial, la actividad de la demostración, los modelos de razonamiento geométrico, aprehensión, nociones, construcción de conocimientos y conceptos geométricos (Véase Ortega & Pecharromán, 2015; Quartieri, Schmitt, & Giongo, 2015). Las investigaciones con niños pequeños enfatizan el trabajo con las figuras y la visualización (Véase Uribe, Cárdenas, & Becerra, 2014; De Rezende & Domingos, 2015). En los grados superiores de educación primaria y en educación secundaria las investigaciones coinciden en demostrar que los conocimientos previos del estudiante influyen en la adquisición de los conceptos subsecuentes.

En cuanto a Duval (2004), propone identificar la visualización y señala como elementos para la actividad geométrica dos tipos de funcionamiento cognitivo que a menudo se han opuesto, tanto pedagógicamente, como en lo psicológico y en lo matemático, por un lado se emplea la visualización de formas para representar el espacio y por el otro el lenguaje para indicar algunas propiedades. También propone la articulación de la visualización y el lenguaje como factor decisivo para el aprendizaje de la geometría, puesto que, señala, ésta facilita la percepción de las figuras y permite las representaciones de imágenes mentales, ya que la forma de ver una figura geométrica depende de la actividad para qué se utiliza, además de señalar los tipos de razonamiento que se pueden identificar en la tarea de demostrar y que tienen relación entre ellos[18].

En los últimos años, los estudios sobre el aprendizaje de la geometría se han ocupado del desarrollo del trabajo geométrico de los estudiantes, de manera general "en el trabajo geométrico, los enunciados, relaciones y propiedades son generales y se establece un dominio de validez" (Iztcovich, 2005, pág. 11). También en estos años Kuzniak (2006) introdujo el término de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), en la actualidad esta noción considera subdominios como el álgebra, la aritmética y la geometría (inicialmente los estudios se desarrollaron específicamente en la geometría), razón por la que lo ha denominado Espacio de Trabajo Matemático. Un ETM tiene por objeto comprender lo que se pone en juego en los espacios escolares cuando el estudiante se enfrenta a la solución de una tarea matemática, pero desde un punto de vista didáctico con el papel que desempeña el profesor en dicho espacio. En el estudio de un ETM destacan dos niveles que permiten analizar la forma de resolver las tareas: el epistemológico (contenidos) y cognitivo (pensamiento del individuo) (Kuzniak , 2011).

Es importante mencionar que en esta línea de investigación los estudios más numerosos se focalizan en los niveles de secundaria y superior, principalmente se han analizado a los estudiantes para profesores (Henríquez, 2016); (Montoya, Mena, & Mena, 2016);

---

[18] La noción de razonamiento de Duval se cita también en Samper, Camargo y Leguizamón (2010)

(Nikolantonakis & Vivier, 2016); (Pizarro, 2018). No obstante esta focalización considera que esta perspectiva teórica tiene elementos que permiten desarrollar la argumentación y el razonamiento geométrico en todos los niveles educativos. A continuación destacamos algunas investigaciones que centran sus análisis en los alumnos de preescolar, primaria y secundaria.[19]

Como se mencionó, el ETM considera subdominios matemáticos, en el caso particular de la geometría, se denomina Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), sobre este tema, el estudio de Petridou, Elia y Gagatsis (2016), analiza las diferentes maneras en que los alumnos de preescolar observan las figuras geométricas al resolver las tareas matemáticas y los diferentes tipos de razonamiento que tienen lugar en relación con los tipos de aprehensión figural en el sentido de Duval. Los autores consideran que el espacio de trabajo geométrico de los estudiantes se define con respecto a la forma de mirar las figuras y el tipo de razonamiento que producen. A partir de los hallazgos sugieren integrar estos aspectos en el trabajo de la formación de profesoras de preescolar, sin embargo, resultaría significativo, analizar en lo particular las génesis que se activan en los alumnos de edades pequeñas, en el nivel primaria los grados de primero y segundo principalmente, sobre todo, si es posible incluir el análisis de la génesis discursiva al igual que se desarrolla la génesis figural.

Por su parte, Mántica (2015) toma al ETG como referencia para abordar con alumnos de secundaria una secuencia enmarcada en el copiado de figuras cuyo propósito es que conjeturen, validen y enuncien los criterios de congruencia de triángulos mediante el espacio social como regulador del trabajo geométrico. Se analizan las interacciones con pares y las intervenciones del docente considerando la construcción a partir de los mensajes que contienen tres lados, dos lados y un ángulo o, un lado y dos o tres ángulos, de este modo entienden la importancia de que

[19] Además de los estudios analizados en este apartado, pueden verse los artículos completos de De Cotret; Kalogirout y Gagatsis; Chrysanthou y Gagatsis; presentados en el tercer simposio de Espacio de Trabajo Matemático celebrado en Francia (ETM, 2012); así como López, Romero y Gómez-Chacón; Figueras, Flores y Pluvinage; presentados en el cuarto simposio de Espacio de Trabajo Matemático celebrado en Madrid (ETM, 2014).

tanto el docente como los alumnos tengan en cuenta la utilidad de la construcción de una figura para explorar sus propiedades, aunque no para realizar generalizaciones.

Por su parte, Xistouri, Pitta-Pantazi, y Gagatsis (2013) en su estudio con alumnos de quinto y sexto grado de primaria, sugieren que la comprensión de la geometría transformacional puede explicarse con base en el proceso de visualización de espacio de trabajo geométrico personal de los estudiantes y Coutat-Gousseau (2014) en el contexto de la geometría dinámica, analiza el espacio de trabajo geométrico de alumnos de 9 a 12 años haciendo énfasis en las correlaciones entre las génesis, particularmente la génesis instrumental ligada al desplazamiento, correlativo a la génesis video-figural ligada a la visualización de figuras.

Destacan también las indagaciones en torno a los conceptos básicos que postula la teoría del espacio de trabajo matemático (De la Torre & Pérez, s/f), y el de (Paredes, Riveros, & Pizarro, 2018) centrado en el triángulo y ubicado en los grados inferiores, existen ciertos factores señalados en los resultados, la poca sistematización de contenidos en los programas curriculares, el dominio disciplinar y didáctico del docente, su continuidad en el grupo, su formación inicial y continua, así como el contexto sociocultural y su influencia en los niveles de razonamiento geométrico de los niños.

Por otra parte, hasta hace poco los grupos multigrado contaban con menos investigaciones sobre los procesos de sus alumnos, pues los que existen solamente reflexionan escasamente en lo relacionado al contexto y no en lo concerniente a los procesos de los estudiantes. Sobre este aspecto, en México Solares, Solares y Padilla (2016) analizan los conocimientos matemáticos de adultos y jóvenes en sus actividades extraescolares a partir de las prácticas que realizan fuera de la escuela, particularmente con el trabajo. En este tenor, es pertinente continuar indagando los procesos de aprendizaje de los alumnos en la geometría y su relación con las intervenciones docentes, particularmente en el contexto multigrado.

1.2.4. La formación del profesor multigrado y las prácticas en el aula.

La ausencia de una formación inicial adecuada para ser docente en el contexto rural de España es señalada por Bustos (2008, 2010), afirma que no se le da al estudiante la dotación didáctica necesaria para trabajar en estos colegios que son paso obligado para la mayoría del profesorado. En sus estudios describe las prácticas de agrupamiento en las escuelas rurales y hace visibles las ventajas que tiene para el alumnado la heterogeneidad de los grupos multigrado y además subraya que posiblemente la razón del mayor rendimiento en estas escuelas puede estar en la atención individualizada que permite realizar el bajo número de alumnos. Por otro lado, a causa de que hay alumnos de distintas edades, el de menor edad se familiariza y conoce de forma adelantada los contenidos correspondientes a próximos cursos y el de mayor edad repasa contenidos tratados en grados anteriores. Esta reflexión, aporta un elemento importante que debe considerar el maestro multigrado en la planificación de sus clases.

Por otra parte, en Uruguay se ha construido el concepto de “comisiones de trabajo” para referirse a la propuesta teórica del multigrado (Santos, 2011). Dicha propuesta está fundamentada en las situaciones didácticas, integra talleres de discusión que retoman lo multigradual y considera a las situaciones didácticas desde el aspecto particular de multigrado. Desde esta postura, Santos (2011) encuentra que la diversificación de las propuestas de enseñanza permite incluir a todos en el proceso educativo, cada uno desde su posibilidad y no desde sus limitaciones. Permite una circulación de saberes en términos de complementariedad o de diferente nivel de profundización, la incorporación del saber en un mismo plano de relevancia en el docente y en el alumno. Las sucesivas instancias de reflexión con los maestros rurales generaron productos parciales que bajo la forma de textos, esquemas, planificaciones didácticas y ensayos, fueron puestos a disposición de los maestros en general, produciendo un proceso acumulativo. Esto ha permitido un paso importante en la construcción de una Didáctica Multigrado, con un sustento teórico generado de los acontecimientos didácticos suscitados en las aulas multigrado de escuelas rurales.

En México las escuelas multigrado son bastante numerosas, la escasa población en edad escolar en ciertos sectores rurales del país provoca la apertura de estas escuelas en las que el docente tiene que atender a niños de distintas edades. En un estudio, Weiss (2000) hace énfasis en los apoyos que requieren los profesores multigrado y señala que la política educativa no cumple las expectativas porque solamente sugiere algunas formas de trabajo o propuestas adaptadas que se abordan en talleres. A pesar de involucrarse en la planeación de dichos cursos, afirma este autor, se complica la tarea del profesor porque no puede hacer todo lo que se marca en el currículum. Derivadas de sus conclusiones, el autor sugiere ofrecer a los profesores multigrado materiales unificados y específicos para el multigrado, y lo que es más importante, sugiere que el seguimiento pedagógico a cargo de los supervisores y otras figuras se constituya como la tarea fundamental del sistema de actualización que, entre otras acciones, debe ofrecer talleres en los que se tenga la posibilidad de probar nuevas formas de enseñar y se involucren las experiencias de los docentes.

Un aspecto importante de las investigaciones sobre las escuelas multigrado en México es que en ellas mismas se reitera la importancia de seguir indagando sobre este tópico, es decir, estos estudios reconocen que el tema debe continuar y ampliarse en el campo de la investigación. Un ejemplo de estas investigaciones es el estudio de Block, Ramírez y Reséndiz (2015) quienes dan cuenta de las condiciones en que ocurre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en escuelas primarias multigrado. Con base en estudios sobre didáctica de las matemáticas (TSD) y aportes de investigaciones con sustentos etnográficos, analizan seis clases en las que una maestra con experiencia en una escuela unitaria moviliza estrategias didácticas para atender de manera simultánea a alumnos de primero a sexto grados.

Por su parte, Juárez (2016) describe las problemáticas de la escuela multigrado y de la formación, entre las reflexiones iniciales cita a Ezpeleta y Weiss (2000), Rosas (2003), Fuenlabrada y Weiss (2006) y Taboada (2014) para subrayar que la formación de profesores multigrado es limitada, ya que las acciones del sistema mexicano no responden a las necesidades de estos contextos. Además, que los profesores demandan conocimientos y habilidades didácticas y curriculares para elegir propósitos, seleccionar contenidos, diseñar situaciones didácticas, proponer cuándo y con qué frecuencia organizar la enseñanza e instrumentar actividades que favorezcan el trabajo cooperativo y las competencias entre los alumnos de los diferentes grados. En este tenor, se precisa identificar los saberes con los que cuenta el profesor en su formación inicial respecto a la enseñanza en grupos multigrado y la manera en que se reflejan durante el diseño del trabajo en el aula. Además, en este estudio llama la atención que en la parte de la contextualización de la educación rural propone que profesores en servicio con estudiantes normalistas compartan experiencias, en otras palabras, un trabajo en conjunto.

En lo que concierne a la investigación de la profesión docente en educación básica rural, en la década que va del 2004 al 2014, Rebolledo y Torres (2019) concluyen que en el campo de la docencia rural y el de la formación inicial de docentes rurales la producción es escasa y básicamente se ha difundido a través de ponencias. Destacan que las investigaciones visibilizan una serie de problemáticas clasificadas en categorías como normalismo, formación inicial, profesión docente o magisterio. Los análisis dejan ver las condiciones de trabajo y profesionales de los docentes de los contextos rurales, así como el papel que juegan las Escuelas Normales Rurales en la formación de los docentes.

Luego de esta revisión parece importante destacar la escasa investigación que existe actualmente sobre el contexto multigrado, hasta el momento la tendencia ha sido el estudio de las prácticas de los docentes así como la caracterización de las condiciones de estos espacios, por lo que continúa siendo relevante la configuración de una propuesta de trabajo en este contexto tal como lo señalan las investigaciones previas. Asimismo, del análisis de estos estudios podemos señalar que compartir y documentar experiencias de los docentes en multigrado, así como una comparación entre el trabajo en el aula de un profesor con experiencia en escuelas de esta modalidad y futuros profesores, puede generar una visión distinta de la didáctica en las escuelas multigrado.

1.3. PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Lo expuesto anteriormente permite caracterizar la problemática existente en relación a la formación de profesores para la enseñanza de la geometría en escuelas multigrado, creemos que para resolverla, son necesarios dispositivos didácticos que permitan integrar la formación geométrica y didáctica de los profesores.

Para intentar construir respuestas a esta problemática, se considera como posibilidad estructurar una propuesta de formación bajo el marco teórico de los *Espacios de Trabajo Matemático*, centrado en la tarea geométrica y la gestión didáctica del profesor en servicio y el futuro profesor. Particularmente sobre la enseñanza de elementos básicos de la geometría euclidiana, específicamente con el triángulo.

A decir de Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016), la formación bajo esta perspectiva didáctica se considera como una herramienta útil para examinar los procesos concernientes a los saberes adquiridos por el profesor durante su trayecto formativo inicial y en la experiencia (saberes geométricos y didácticos), así como el proceso de transposición de los mismos. Además, permite estudiar el comportamiento del profesor no sólo como matemático (espacio personal), sino que también permite caracterizarlo como profesor en la noción de la matemática que debe enseñar, durante el proceso de transposición de ésta al elaborar propuestas didácticas que logren en sus alumnos la construcción de saberes matemáticos, y todas las reorganizaciones que su rol de profesor supone mediante el trabajo en el aula (espacio idóneo). Es así, que en esta propuesta de formación bajo el marco del ETM consideramos que no solamente permite analizar lo que realiza el profesor, pues la presente investigación propone estudiar las posibilidades del Espacio de Trabajo Geométrico Didáctico como elemento para la formación de profesores que laboran en escuelas multigrado, además de conocer los sucesos que se generan del trabajo en equipo entre profesores en servicio con experiencia en el trabajo con grupos multigrado y futuros profesores, es por ello que la pregunta central sobre la que gira el estudio es la siguiente:

¿Cuáles son los saberes geométricos y didácticos que se propician en un Espacio de Trabajo Geométrico en la formación del profesor multigrado, para la configuración del espacio idóneo en la enseñanza del triángulo?

De esta pregunta fundamental se desprenden otras de menor envergadura, a saber:

- ¿Cuáles son las características de un Espacio de Trabajo Geométrico?
- ¿Qué tareas (geométricas y didácticas) se proponen para el aprendizaje y la enseñanza de las propiedades y criterios del triángulo en los planes de estudio para la formación de profesores (espacio de referencia)?
- ¿Qué tareas y orientaciones didácticas exponen para el aprendizaje y la enseñanza de las propiedades y criterios del triángulo los libros para el maestro en México (espacio idóneo)?
- ¿Cuál es la potencialidad que las tareas incluidas en los materiales oficiales brindan al profesor para el diseño de un espacio de trabajo idóneo?
- ¿Cuáles son los elementos para el diseño y experimentación de un Espacio de Trabajo Geométrico Didáctico como dispositivo en la formación de profesores, para favorecer el razonamiento geométrico en la enseñanza del triángulo en el aula multigrado?
- ¿De qué manera se relaciona el espacio idóneo que configuran los profesores para el trabajo en el aula con lo desarrollado en su espacio personal?

Y a su vez, con base en estas preguntas se pueden plantear los siguientes:

Objetivos:

Para nuestros fines, la configuración de un ETG se propone como la respuesta a una formación docente que se centre en el dominio didáctico y la forma de transponer los conocimientos matemáticos en el aula. Por lo que el **objetivo central** de esta investigación es:

Analizar los saberes geométricos y didácticos que brinda una propuesta de formación en el marco de un Espacio de Trabajo Geométrico para profesores de multigrado, en la configuración del espacio idóneo en la enseñanza del triángulo.

Del anterior se desglosan los siguientes objetivos específicos:

- Caracterizar los Espacios de Trabajo Geométrico.
- Examinar las tareas geométricas y didácticas sobre el saber geométrico (triángulo) inscritas en el espacio de referencia para la formación del profesor.
- Analizar las posibilidades que brindan al profesor los materiales oficiales (espacio idóneo) en la configuración de un espacio idóneo para la enseñanza del triángulo.
- Diseñar y experimentar un Espacio de Trabajo Geométrico Didáctico como dispositivo en la formación de profesores, y determinar su pertinencia para el logro del razonamiento geométrico en la enseñanza del triángulo en grupos multigrado.
- Estudiar la manera en que se relacionan los ETG idóneo y personal del profesor cuando despliegan sus clases en el aula.

CAPÍTULO II
EL ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO: PERSPECTIVA TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN.

Durante la formación inicial, el profesor busca dominar los contenidos de las disciplinas que impartirá, definidas en el programa de estudios institucional, así como las técnicas y métodos de enseñanza a partir de las oportunidades que le brindan los espacios formativos donde se encuentre; y aunque este interés es compartido por quienes configuran los programas de formación, existen diferentes perspectivas acerca del nivel de dominio que debe tener el maestro tanto del saber disciplinario como del saber didáctico. Quizás la divergencia más significativa es que, por lo general el docente pone en el centro la preocupación por estructurar y organizar actividades para la enseñanza, mientras que en la mayoría de los programas de formación se hace mayor énfasis en el dominio de la disciplina a enseñar; obviamente ambos elementos se deben mantener en equilibrio, además resulta importante comprender el papel que juega el alumnado en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Por otra parte, es de reconocerse que el análisis de las condiciones que hacen posible este equilibrio y la relación entre saberes de enseñanza y aprendizaje es el objeto de la *didáctica de las matemáticas* y como se mencionó en el capítulo anterior, el objetivo central de esta disciplina es dominar el proceso didáctico, tanto teórica como prácticamente, porque la práctica no puede ser asegurada a menos que se logre el control teórico. El sistema didáctico referido bajo esta mirada teórica está compuesto de tres partes: el *docente*, *los alumnos y un saber matemático* y para una actuación efectiva en el sistema didáctico, el profesor requiere poseer una diversidad de conocimientos, de los programas de estudio, de la disciplina a enseñar y de las características de aprendizaje de sus estudiantes, entre otros.

Ahora bien, en la formación del profesorado la importancia del conocimiento sobre la materia a enseñar continúa siendo un punto de debate, pues a partir de la apropiación y comprensión que el docente tenga de este conocimiento es que genera y organiza las actividades didácticas para el aprendizaje de sus estudiantes. En este sentido, existe un consenso acerca de que el conocimiento de la materia no es suficiente, por ejemplo Kuzniak (1994) acepta la existencia de un conjunto de conocimientos que sólo la experiencia parece otorgar, definiendo tres formas de saber: el saber matemático, el saber didáctico y el saber pedagógico. Los dos primeros saberes son reconocidos a partir de las instituciones, aunque con definiciones un tanto variadas, mientras que el saber pedagógico es un objeto con esencia propia, el cual no se puede reducir a lo que señalan los postulados de la didáctica de las matemáticas, a este saber Kuzniak (1994) lo denomina como

> La reunión compleja y a veces contradictoria de estas dos formas de saber. Este saber se caracteriza por su oscilación entre dos polos, uno teórico pero a veces muy alejado de la práctica futura de las personas formadas, otro cercano al sentido común y a la práctica de la clase pero privado de la adaptabilidad de un modelo más teórico [...] La naturaleza exacta y los contenidos de este saber pedagógico se clarifican con el estudio de las estrategias puestas en ejecución en la formación de los maestros. (1994, pág. 254)

Entonces, si se habla de formación de profesores el espacio de formación no estaría completo sólo con el estudio de la disciplina a enseñar, también debe incluir una dimensión didáctica, puesto que es parte del trabajo de un profesor, en este caso se considera pertinente el marco teórico del Espacio de Trabajo Geométrico cuya estructuración tiene una doble vertiente, los criterios geométricos emanados de la comunidad matemática y los criterios de enseñanza emanados de la comunidad didáctica. Dicha perspectiva integra tres diferentes niveles de espacios de trabajo matemático (de referencia, personal e idóneo) que se encuentran descritos más adelante en el presente capítulo. En este tenor, al ser el objetivo fundamental de esta investigación formar al profesor a partir de la configuración de un Espacio de Trabajo Geométrico, es importante analizar lo expuesto en la formación inicial del profesor (espacio de referencia), los saberes geométricos del profesor al resolver tareas geométricas (espacio personal) y caracterizar la manera como transforma los saberes adquiridos mediante el diseño de tareas didácticas durante su trabajo en el aula (espacio idóneo). Es decir, una de las acciones más importantes es analizar lo que sucede en el momento en que los profesores gestionan la enseñanza en sus clases y la relación existente entre los antes mencionados espacios de trabajo matemático.

Para desarrollar los conocimientos tanto disciplinares como didácticos, especialmente para la enseñanza de la geometría Houdement y Kuzniak (2006) han construido la noción de *Espacio de Trabajo Geométrico,* la cual ha permitido avanzar en la noción general de la teoría Espacio de Trabajo Matemático; éste es el modelo de formación en que se centra la investigación y a su comprensión y análisis se le dedican los siguientes apartados.

2.1. EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO (ETM)

Los postulados acerca de la enseñanza de las matemáticas se han reconstruido a través del tiempo, desde hace algunas décadas[20] el sistema ha colocado en el centro de las investigaciones la acción que realiza el estudiante. A decir de Giaquinto (2005, citado en Kuzniak, Montoya y Vivier, (2016), en un sentido clásico de la enseñanza, el alumno ocupaba un lugar de apropiación del conocimiento, aunque esta perspectiva carece de sentido cuando lo que se pretende es que el estudiante sea un sujeto activo en la construcción de los saberes matemáticos. Se entiende que la actividad que realiza el alumno es lo que lo hace aprender un determinado objeto matemático, es decir, su propio trabajo matemático. De ahí la importancia de analizar este trabajo en los profesores como posibilidad de formación.

[20] A partir de los años 70s con la reforma en la enseñanza de las matemáticas iniciada en Francia.

Para definir en qué consiste el trabajo matemático desde la perspectiva de la didáctica, Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) retoman algunos aportes de diversos autores, una de estas contribuciones es la de Reichenbach quien pone en evidencia dos facetas del trabajo matemático: el descubrimiento (cuando el individuo descubre y elabora conceptos al resolver problemas) y la justificación (el momento en que presenta, defiende y justifica el resultado). En el contexto del descubrimiento se integran el campo científico y lo concerniente al aspecto psicológico y se establece la relación entre los conceptos matemáticos y el proceso cognitivo del sujeto; aunado a lo anterior, Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) también consideran lo que Lakatos y Kuhn aportan acerca del factor sociológico del sujeto, es decir, para comprender la actividad matemática se precisa de analizar el saber matemático, el proceso de aprendizaje y el contexto en que está inmerso, así como lo Giaquinto distingue como fases de la actividad global del matemático: descubrir, explicar, justificar y aplicar.

Esto significa que en toda actividad que realiza el estudiante se requiere analizar el saber matemático involucrado y cuál es el proceso mediante el cual el alumno construye dicho saber, propiciando que al enfrentarse a dicha acción, el estudiante parta del descubrimiento y explique los procedimientos de solución, los justifique y logre aplicarlos en un contexto o problema distinto. De lo anterior concluimos que es importante que los profesores justifiquen la forma en que ellos mismos resuelven tareas matemáticas (espacio personal) pues da sentido no solamente al saber adquirido sino a las tareas que diseñarán a partir de ello con sus estudiantes (espacio idóneo). Además, cuando el profesor adquiere ciertas nociones propias de la enseñanza de las matemáticas, se mueve de una postura clásica que considera que el rol del estudiante es solamente absorber los conocimientos para pasar a la idea de que el alumno es constructor de sus propios saberes matemáticos, comprendiendo la necesidad de que los estudiantes se enfrenten a tareas que le exigen poner en práctica sus saberes, y esto, a su vez, le permite al profesor reflexionar sobre el trabajo didáctico que habrá de efectuar en tal actividad, es decir, el proceso de transposición.

Desde esta perspectiva cobra importancia la resolución de problemas que "ocupa un lugar esencial en el trabajo de los matemáticos y también en la enseñanza de las matemáticas" (Kuzniak, Montoya, & Vivier, 2016, pág. 240), ya que se retoma el planteamiento de problemas matemáticos para la construcción de saberes, tanto en la formación del profesor como en la del niño, dichos problemas permitirán que los estudiantes utilicen los conocimientos y las técnicas necesarias para resolverlos.

De acuerdo con Kuzniak "Es esencial observar las tareas requeridas que permiten que ambos describan el trabajo desde un punto de vista matemático, pero también desde un punto de vista didáctico" (2011, pág. 12). En relación con lo anterior, es preciso definir la noción de tarea a partir de la perspectiva teórica del Espacio de Trabajo Matemático; sobre ésta, Robert (2008, citado en Kuzniak, 2011) propone separar del ámbito profesional y cotidiano lo que se espera del alumno en el marco escolar, en este caso resulta crucial observar lo que el alumno aprende en la escuela y la manera cómo lo aplica en tareas de otros contextos; de igual manera, Kuzniak y Richard (2014, citados en Verdugo (2017),

> Señalan que la "tarea" aparece como el deber del profesor de crear, proponer y gestionar ciertas actividades en el contexto de un ETM idóneo, en donde el estudiante trabaja y se desarrolla en su ETM personal, en donde están involucrados los intereses institucionales, estrechamente relacionado con el ETM Personal del docente (pág. 46).

En este trabajo, se emplearán las acepciones y definición de Kuzniak y Richard para describir las tareas didácticas en los momentos de análisis de los espacios de trabajo matemático, esta noción se profundiza en el siguiente capítulo, aunada a la definición de tarea geométrica desde el marco teórico que se asume en esta tesis.

A partir de estas concepciones sobre trabajo matemático y de las investigaciones en didáctica de la geometría (descritas con mayor amplitud más adelante), Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), reflexionan sobre la posibilidad de estructurar un Espacio de Trabajo Matemático, en particular señalan que todo estudio didáctico supone la descripción de un espacio de trabajo para un dominio específico en cuestión, de esta manera presentan al Espacio de Trabajo Matemático (en adelante ETM), como una “envoltura metodológica” sobre la que es posible apoyarse para desarrollar nuevos espacios de trabajo en dominios específicos (álgebra, geometría, estadística, etc.)[21].

Como el trabajo matemático es el resultado de un proceso progresivo de varias génesis que permiten una articulación interna y externa entre los planos epistemológico y cognitivo, a fin de definir el ETM, Henríquez y Montoya (2016) señalan que es “un ambiente organizado que permite el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas, el cual se constituye por dos planos, cognitivo y epistemológico, en relación directa con los objetos matemáticos del dominio en juego” (pág. 47). Por lo tanto, es en este ambiente donde el profesor resuelve problemas y construye y utiliza los saberes matemáticos que están en juego, se considera como el espacio donde “se concibe la reflexión como el fruto de la interacción entre los problemas matemáticos y el individuo” (Kuzniak A. , 2011, pág. 183). Estos planos estructuran el ETM en dos niveles y se describen en el siguiente apartado a fin de facilitar la comprensión sobre dicha articulación.

2.1.1. Los planos epistemológico y cognitivo de un ETM.

Un espacio de trabajo está integrado por dos grandes planos, el epistemológico estructurado en función del objeto matemático a trabajar y el plano cognitivo que se refiere al proceso mediante el cual el matemático construye el saber. Ambos planos tienen relación directa con los conocimientos matemáticos del dominio en juego y como se puede apreciar (ver figura 5), cada plano cuenta con tres componentes. Para dar cuenta del modo en que se articulan ambos planos se emplea el término “génesis”, que alude a la idea de “generar”. La articulación entre los planos epistemológico y cognitivo de un ETM se realiza mediante génesis, la semiótica que nace del vínculo e interacción entre el componente *representamen* (representante) con el de

[21] Entenderemos dominio como la diferenciación que está ligada a la naturaleza de los objetos estudiados (Kuzniak, Montoya, & Vivier, 2016)

visualización; la instrumental que se origina de la relación interactiva entre el componente "artefactos" con el de construcción y; la génesis discursiva que emana del nexo articulado entre el componente referencial con el de prueba[22].

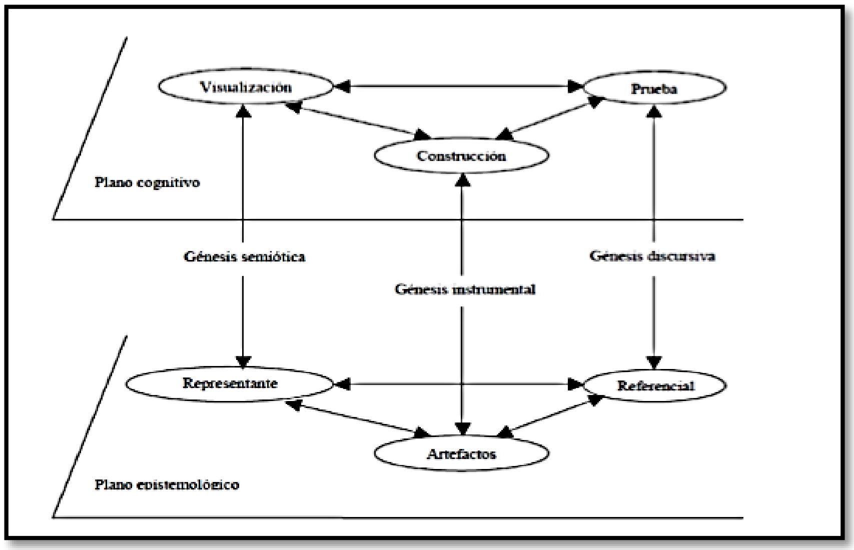


Figura 5. Espacio de Trabajo Matemático. Fuente: Henríquez, *(2014)*

Cabe señalar que en el plano epistemológico los artefactos y el referencial teórico son siempre componentes inscritos en un campo matemático en particular, por ejemplo en el caso del álgebra el referencial teórico podría ser la multiplicación de números complejos y para su enseñanza se pueden emplear artefactos como el papel milimetrado o un software como Geogebra. Por su parte, el componente "representante" varía de acuerdo al dominio matemático que se trabaja, un dominio podría privilegiar la visualización mediante la representación gráfica. Estos componentes establecen su relación mediante la génesis semiótica, la cual tiene que ver con las representaciones del objeto matemático (Flores & Montoya, 2016); además de este ejemplo se

[22] Para describir los planos cognitivo y epistemológico en este apartado, se hace una interpretación de los aportes en las investigaciones de (Kuzniak, Montoya, & Vivier, 2016); y (Vidal-Szabó, Estrella, Morales, & Olfos, 2016); (Henríquez, 2014); (Flores & Montoya, 2016).

puede mencionar el caso específico de la estadística, Vidal-Szabó, Estrella, Morales y Olfos (2016) señalan,

> En el contexto de la estadística, en el componente de representante (o representamen) se sitúan signos de tipo simbólico como X (variable estadística), xi (dato i-ésimo), fi (frecuencia absoluta i-ésima), entre otros. También, otros signos como imágenes reales que representan los datos. En el componente artefactos [...] se considera la calculadora, una encuesta en papel para el registro de los datos, regla y/o compás [...] entre otros. El componente referencial como un sistema teórico, está basado en definiciones y propiedades [...] por ejemplo, la suma de las frecuencias absolutas, el concepto de variable y sus categorías, tipos de variable (pág. 256).

Con relación al plano cognitivo, se reconoce que el proceso de cognición adquiere sus características dependiendo de la importancia que se conceda a los signos y las representaciones en el trabajo matemático, retomando a los autores y el ejemplo anterior se puede decir que,

> Se propone para la estadística que el sentido del dato permita la vinculación entre los componentes del plano epistemológico con el plano cognitivo, al distinguir los datos como números en un contexto. Cabe destacar, que la caracterización de los procesos de visualización, construcción y discursivos, son parte de la investigación aún en curso (Vidal-Szabó, Estrella, Morales, & Olfos, 2016, pág. 257)

No obstante, si se conservan las nociones de prueba y construcción en un ETM, el proceso de visualización requiere de una reinterpretación, asociada a esquemas y operaciones sobre el uso de los signos ya que la génesis instrumental permite hacer operatorios los artefactos mediante el proceso de construcción y la génesis discursiva de la prueba da sentido al referencial teórico compuesto por definiciones, propiedades, etc., porque las pone al servicio del razonamiento matemático. Cabe señalar que estas tres génesis no son independientes entre sí, están relacionadas en el trabajo matemático. Es precisamente en la relación entre estas tres génesis que aparece el papel fundamental de la tarea (geométrica y didáctica) que se proponga en el espacio de trabajo matemático.[23]

---

[23] En los siguientes apartados se describirá cada una de las génesis y los componentes de esta teoría, centrados en el subdominio geométrico, por ser el objeto de estudio del presente documento.

De igual forma, en los ETM es posible identificar tres tipos de espacios que dependen de la reflexión que haga el sujeto, es decir existe un ETM de Referencia cuando se estructura sobre la base de los criterios matemáticos; un ETM Idóneo que está definido en términos de la enseñanza ideal y un ETM Personal que no es otra cosa que la reflexión de los conocimientos que posee el estudiante y utiliza para resolver la tarea.

Ahora bien, desde la hipótesis principal de esta teoría,[24] se asume que cuando el sujeto (profesor y/o estudiante de primaria) activa todas las génesis realiza una acción que le permite la construcción suficientemente completa del objeto matemático. En este sentido, lograr que el geómetra active todas las génesis para que construya el saber sobre el objeto, es la acción fundamental que se busca mediante la estructuración de un ETM, para citar un ejemplo podemos mencionar que cuando sólo se activan las génesis figural e instrumental dejando de lado la discursiva[25], el nivel de conocimiento se queda en un solo plano que puede denominarse "proceso de descubrimiento".

Tomando en cuenta lo anterior, es importante hacer énfasis en que la activación de una o las tres génesis se encuentra vinculada con la percepción que el maestro tenga acerca de cada una de ellas y de la relación entre sí en la circulación de los componentes, sin duda estas percepciones influirán en su decisión de desarrollarlas o no dentro de las tareas matemáticas que proponga, incluso el profesor puede llegar a pensar que no es necesario abordar la génesis discursiva con sus estudiantes al creer que el proceso de prueba sólo es una acción propia de los matemáticos como se ha descrito en algunas investigaciones analizadas en el capítulo anterior.

Desde el razonamiento anterior consideramos que para estructurar un ETM es necesario que el profesor conozca y comprenda cada una de las génesis, ya que de esta manera podrá diseñar "tareas" en las que el alumno utilice lo instrumental, emplee la semiótica y elabore una prueba discursiva, obviamente que de acuerdo al grado o nivel escolar en que se encuentre el alumno

[24] Hablamos de la Teoría del Espacio de Trabajo y de los paradigmas geométricos.
[25] Génesis específicas del subdominio geométrico y que se describirán más adelante.

sería el tipo de prueba que se solicite. Lo anterior da sentido a la posibilidad de emplear este modelo como herramienta para la formación de profesores, ya que en correspondencia con el conocimiento del profesor podrá diseñar espacios de trabajo para sus estudiantes que favorezcan un razonamiento geométrico.

Como se ha mencionado, dependiendo del dominio matemático que se trabaje, álgebra, estadística o geometría, el individuo configura un constructo teórico acerca del objeto y del contenido por lo que en el caso específico de la geometría, al Espacio de Trabajo Matemático se denomina *Espacio de Trabajo Matemático en el subdominio Geométrico* (ETM_G) o más específicamente *Espacio de Trabajo Geométrico (ETG);* es de reconocerse como lo señalan Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) que, "Los dominios matemáticos se constituyen mediante los concursos de agregación y la organización de los conocimientos y (…) esta organización no corresponderá necesariamente a lo que se pondrá en práctica en la enseñanza." (pág. 240). Esto significa, de acuerdo con estos autores, que un dominio matemático es objeto de diferentes interpretaciones debido a la transposición didáctica que sufre cuando se le prepara para ser enseñado y tanto la naturaleza del trabajo de transposición como la lógica de las instituciones genera que, en el caso de la geometría,

> No es posible utilizar de manera unívoca el término "geometría" dado que esta palabra reviste diferentes significados que dependen, a la vez, de la evolución de las matemáticas y de las instituciones escolares. Para tomar en cuenta esta diversidad de puntos de vista, hemos introducido, en el ámbito de la didáctica de la geometría, un enfoque a través de paradigmas (Kuzniak, Montoya, & Vivier, 2016, pág. 240).

Para plantear este enfoque basado en paradigmas geométricos, dichos autores afirman que se inspiraron en la noción de paradigma introducida por Kuhn (1971), la cual se define como el conjunto de creencias y verdades que comparten miembros de una misma comunidad científica, que proporciona la manera correcta de plantear un problema y de buscar una resolución. En términos generales, la palabra paradigma sirve para identificar comunidades, por lo tanto, en el caso específico de la geometría, "es posible encontrar la noción de paradigma geométrico como la forma de utilizar el conocimiento de la geometría en una comunidad escolar" Montoya, Henríquez, Menares y Barra (s/f, pág. 3).

Desde esta perspectiva entonces, cuando se cite un determinado paradigma geométrico se referirá al conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico, los geómetras en este caso, y el acceso e ingreso a ese paradigma se realizará mediante el acercamiento y estudio de las obras de matemáticos y por lo tanto, vuelven a señalar estos autores, dichos acercamientos habrán de pasar por la resolución de un cierto número de problemas característicos que definen cada uno de los tres paradigmas. Es decir, en el caso de la formación de profesores y la enseñanza en educación primaria, el planteamiento de problemas tendrá relación con los paradigmas que predominen en estas comunidades escolares, en función de los criterios matemáticos definidos en su espacio de referencia, resulta pues fundamental conocer y analizar lo que se encuentra en él, para la descripción de dicho espacio se dedicará el capítulo siguiente.

2.2. EL ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO (ETMG)

En la presente investigación el saber matemático de interés es la geometría, colocarla como centro de estudio supone pensar su relación con la formación del alumno, la del profesor y el papel que tiene en las instituciones, lo esencial de pensarla así tiene que ver con la naturaleza del trabajo geométrico. Así pues, es necesario profundizar en este subdominio que retoma el cuerpo teórico de los Paradigmas geométricos y el Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) desarrollado por Houdement y Kuzniak (1999, 2000, 2006) y Kuzniak (2004), dichos autores citados en Montoya, (2014)

> Consideran la naturaleza del trabajo geométrico cuando un geómetra[26] se enfrenta a una tarea de geometría. [...] La teoría posee dos grandes ejes: los Paradigmas y el ETG. En la actualidad, la teoría considera un espacio de trabajo matemático global, ETM, que depende del dominio matemático –así, el ETG es ahora ETMG, y se tiene además ETMA, etcétera– y los paradigmas se pueden interpretar como la caracterización del ETM. (Montoya E. , 2014, págs. 230, 231)

Dicha reflexión constituye la base de las investigaciones respecto de la didáctica de la geometría conocida inicialmente como *Paradigmas Geométricos* y *Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG), perspectiva en la que se asume que los problemas geométricos no son parte esencial de un espacio de trabajo pero son un catalizador, debido a que el ETG debe ser el medio para que se resuelvan.

Como se mencionó anteriormente, para diferenciar los diversos dominios matemáticos y la naturaleza de sus objetos es necesario conocer los principios epistemológicos de los objetos que circulan en un ETM. Es esencial destacar que un concepto no puede reducirse a su definición, sino que es a partir de las situaciones y problemas que adquiere su significado, por lo tanto, cuando aludimos a un dominio en cuestión, éste se encuentra organizado en:

> La resolución de problemas (aspecto herramienta) que da sentido a los conceptos (referente); la construcción y el tratamiento de las propiedades de los conceptos movilizados en la resolución (aspecto objeto-significado); las relaciones entre diferentes representaciones semióticas (significantes) asociados a diferentes registros de representación semiótica (Pilet & Grugeon-Allys, 2015, pág. 187).

En este sentido y por las especificidades del trabajo geométrico que se analizará de aquí en adelante, al citar lo relacionado al espacio de trabajo matemático en el subdominio geométrico se identificará como ETM_G o simplemente *Espacio de Trabajo Geométrico (ETG).* Para explicar la estructura de este espacio se toman en consideración los componentes que caracterizan la

[26] Los autores referidos en este análisis definen el geómetra como la persona que se enfrenta a una tarea geométrica, ya sea un investigador, profesor o estudiante. En el caso de esta tesis serán los profesores en servicio y futuros profesores.

actividad geométrica en una dimensión puramente matemática, es decir, se asume que el plano epistemológico de un ETG se constituye con componentes como: a) un espacio real y local; b) un conjunto de artefactos; y c) un sistema teórico de referencia (ver tabla 6). Cabe aclarar que estos tres componentes se articulan con los del plano cognitivo como la visualización, la construcción y la prueba a través de las génesis del espacio de trabajo.

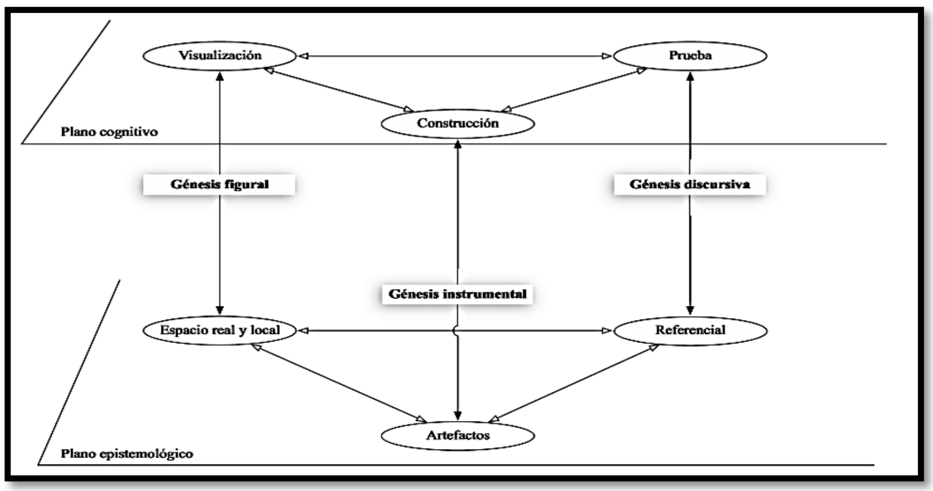


Figura 6. Espacio de Trabajo Geométrico. Fuente: Kuzniak *(2011)*

Siguiendo el sentido de las afirmaciones anteriores puede decirse que un ETM_G, es el ambiente o "le milieu" en términos broussonianos, en el cual se genera la reflexión que surge de la interacción entre el sujeto y los problemas geométricos, es el espacio donde trabaja el geómetra porque está creado por el profesor y para el estudiante (ambos considerados geómetras). Ahora bien, acerca de su estructura, como se puede ver en la figura anterior, los dos niveles o planos horizontales no están jerarquizados, ya que se articulan de manera dinámica y además el plano de naturaleza *epistemológica* tiene una relación estrecha con los contenidos geométricos y el plano de naturaleza *cognitiva* concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas geométricas (Kuzniak & Philippe, 2014), ambos planos son parte del aprendizaje geométrico. En síntesis, el plano epistemológico incluiría los objetos geométricos "científicos" y el plano cognitivo contendría los objetos geométricos que cognitivamente ha hecho suyos el sujeto.

2.2.1. El enfoque de los Paradigmas Geométricos.

Como hemos mencionado, en la perspectiva del Espacio de Trabajo Geométrico se habla de diferentes geometrías que son el resultado de procesos transpositivos y transformaciones institucionales particulares, en sus estudios, Houdement y Kuzniak (2006) identifican tres tipos de geometrías presentes en la enseñanza de la geometría elemental y que permiten al estudiante construir su propio espacio de trabajo, en este proceso de construcción se encuentra presente el papel del profesor como un guía, de hecho según sea el papel del geómetra y el paradigma geométrico que se enfatice, los problemas geométricos presentados tienen un carácter distinto a partir de la institución o nivel en que se encuentre.

En el caso de la enseñanza de la geometría es importante definir el paradigma apropiado, en este sentido Kuzniak considera dos facetas del paradigma de Kuhn, la primera como un conjunto de creencias (descrita en el apartado anterior) y la segunda en relación a la enseñanza. En esta última se requiere de una reorganización del saber o en palabras de Chevallard (1997) una *transposición didáctica* que debe ser realizada por la propia comunidad, y que lleva a reconocer los problemas en los que intervienen tanto el profesor como el estudiante.

Desde esta perspectiva teórica, de acuerdo a los modelos o modos de pensar geométricamente es posible observar cómo reflexiona el sujeto al enfrentar una tarea específica, su reflexión siempre tendrá que ver con el paradigma geométrico dominante en el que se ubica la tarea y ello se relaciona con las condiciones de la institución escolar y con la evolución de los conocimientos del geómetra, incluso pueden presentarse dos paradigmas en una misma tarea aunque se haga mayor énfasis en alguno de ellos, de acuerdo a esta perspectiva teórica dichos paradigmas se constituyen con tres aportes: los modos de pensamiento de Gonshet (eje cognitivo), el concepto de paradigma de Kuhn (eje filosófico) y de la evolución misma de la geometría (eje epistemológico), Montoya, Henríquez, Menares y Barra (s/f), señalan que,

- *El aporte filosófico*. De acuerdo con Kuhn (1971, citado en Kuzniak, 2004, el conjunto de creencias, técnicas y valores que forman parte de una comunidad es lo que podemos denominar paradigma, esta conceptualización queda sujeta a un contexto histórico y temporal. En una comunidad científica los paradigmas evolucionan e incluso llegan a existir contradicciones entre ellos debido a que con el tiempo se crean nuevas prácticas y conocimientos. Es en el marco de la geometría (desde la postura de los matemáticos), que se asumen los axiomas que regulan los teoremas y prácticas. En el ámbito escolar se comparten verdades y técnicas de acuerdo a su realidad que evolucionan con los conocimientos alcanzados dentro de un sistema formal e informal. Kuzniak considera una faceta de la visión de Kuhn en el ámbito institucional, la define como matriz disciplinaria que reagrupa las teorías y los conocimientos; una reorganización del saber que reconoce ejemplos y problemas del profesor y el estudiante en el aprendizaje de la geometría. Es en este ámbito donde se inscribe la definición de paradigma geométrico que la teoría sustenta y que de acuerdo a Montoya Henríquez, Mena y Barra (s/f) "es la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas de la geometría puesto en juego" (pág. 5).
- *El aporte cognitivo*. Se centra en los modos de pensar la geometría descritos por Gonshet (1945): la intuición, la experiencia y el razonamiento deductivo y constituyen la base para que los estudiantes puedan enfrentarse a las tareas geométricas. Cada modo de pensar tiene una función que el profesor habrá de tener en cuenta para que el alumno pueda evolucionar en el conocimiento de la geometría. Por ejemplo, en la escuela primaria puede plantearse al estudiante un problema donde identifique las características de las líneas paralelas, sus primeras intuiciones se basarán en la percepción que tenga sobre el tema, sin embargo, a partir de la experiencia o la experimentación (con artefactos manuales o digitales) las intuiciones del estudiante evolucionarán hasta lograr la validación del constructo abordado. Esta validación como acción física o mental es

necesaria para que sea capaz, sin utilizar la experiencia, de expresar que estas líneas se prolongan indefinidamente, es eso lo que podemos definir como un razonamiento deductivo. Es así como la experiencia nutre a la intuición pues al evolucionar a partir de ella constituiría un modo de pensamiento de la experiencia para lograr la validación del constructo matemático y con ello el razonamiento. Lo anterior da cuenta que por lo general, el trabajo escolar se sitúa entre la experiencia y el razonamiento probablemente transmitidos mediante la intuición (Houdement & Kuzniak, 2006), por lo que es importante hacer énfasis en cada función del pensamiento.

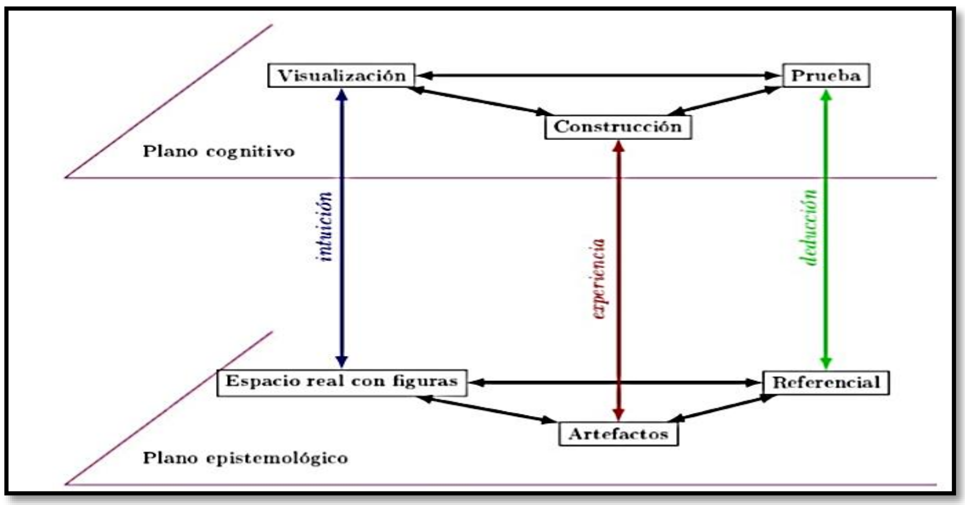


Figura 7. ETG y Modos de Pensamiento. Fuente: *(Kuzniak, Vivier, & Montoya, 2015)*

- *El aporte epistemológico*. En este eje se plantea lo que concierne a la evolución de la geometría. En esta evolución, la humanidad se ha enfrentado a diversas rupturas epistemológicas, no obstante, al enseñar geometría se dejan de lado las dificultades que ha tenido el desarrollo y evolución de la geometría desde sus inicios en la cultura griega hasta la aparición de las geometrías no Euclidianas.

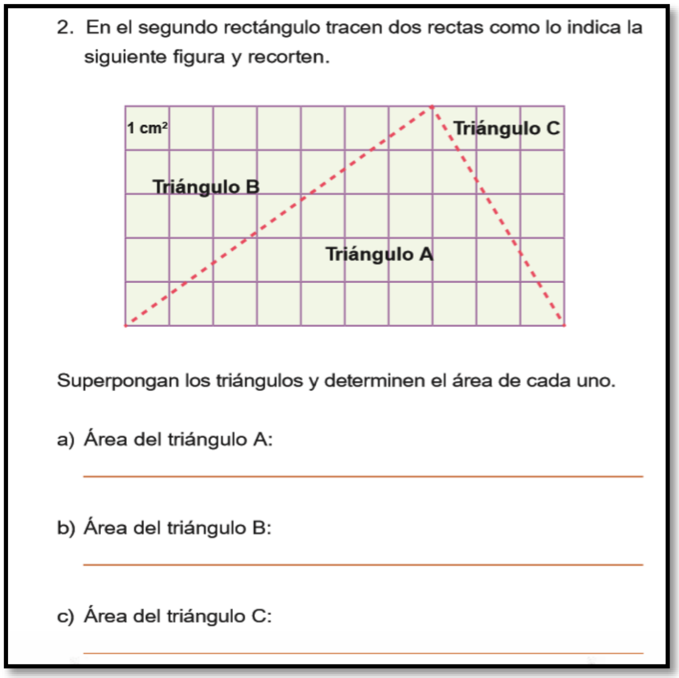
2.2.1.1. Los tres paradigmas de la geometría.

Es importante comprender cada uno de los paradigmas y las tareas que se encuentran presentes en los ETG de referencia e idóneo para, de esta manera, comprender los paradigmas presentes en ellos. Para describir los tres paradigmas geométricos es necesario no separarlos de los ejes de un ETG, pues son ellos quienes permiten explicitarlos, así tendríamos los siguientes tipos de geometría.

La Geometría natural (GI)**:** los objetos de este paradigma son materiales, se emplean trazos sobre papel, maquetas u ordenadores virtuales y hace énfasis en la importancia de la aproximación y la medida pues el modelo geométrico está ligado al mundo real. En este caso los medios de prueba son materiales y para su representación se utilizan artefactos concretos que representen el objeto.

> El calificativo de geometría natural refleja la existencia de una relación con la realidad, es así que los objetos están definidos por el modelo geométrico pero en correspondencia con la realidad espacial y local del individuo. [...] La experimentación y la deducción actúan sobre la representación de los objetos geométricos mediados por los artefactos y la percepción. El juego de ir y volver entre objetos y realidad es permanente y está permitido como razonamiento de validación. La intuición es a menudo asimilada a la percepción inmediata. [...]. Están permitidas las mediciones (con instrumentos), trabajos con pliegues y/o los cortes, etc. [...]. En las tareas propuestas el razonamiento de validación no exige ni exhibe los axiomas de la Geometría de Euclides, sino que se trabaja en forma local. En este sentido, la Geometría Euclides no es parte de la Geometría I (Montoya, Henríquez, Menares, & Barra, s/f, pág. 6)

En este paradigma se acepta que el alumno afirme que una figura es un triángulo pues es lo que percibe de la realidad (esto sería su soporte o espacio real y local), a su vez el triángulo puede ser representado por dibujos o por otros objetos que pueden ser manipulados (artefactos), también se pueden trazar triángulos sobre papel o en un ordenador, emplear técnicas como el uso de reglas graduadas, escuadras, etc., incluso se pueden construir mediante el plegado o calcado. La experiencia usual de este paradigma es el dibujo con instrumentos y para ello se recurre a la intuición. La validación en esta geometría es empírica, confrontada a la realidad, cuando el alumno logra mencionar que es un triángulo es porque ya lo midió, de esta manera queda demostrado que existe un razonamiento. En este paradigma la deducción parte de una experiencia articulada con la intuición, el razonamiento que se privilegia es de tipo constructivo y tiene un horizonte tecnológico. La construcción y la percepción forman parte de esta geometría experimental. Un ejemplo de tareas propias de la geometría natural es la siguiente (figura 8).


2. En el segundo rectángulo tracen dos rectas como lo indica la siguiente figura y recorten.

Superpongan los triángulos y determinen el área de cada uno.

a) Área del triángulo A:

b) Área del triángulo B:

c) Área del triángulo C:

Figura 8. Actividad geométrica incluida en el Libro para el Maestro "Desafíos Matemáticos" de quinto grado. Fuente: *(SEP, 2016, pág. 96)*

En esta actividad (figura 8), se pretende que mediante la yuxtaposición y superposición de los triángulos, los alumnos infieran cómo calcular el área de un triángulo (SEP, 2016), para ello se pide al alumno que recorte el material y realice la comparación de los triángulos obtenidos. Aunque esta tarea geométrica tiene relación directa con lo correspondiente a la medida del área del triángulo, al superponer y comparar los diferentes triángulos en los que se divide el rectángulo, los productos resultantes se asocian a la regla que menciona: "los triángulos de iguales bases y alturas, tienen áreas iguales" (Thompson, 1993, pág. 217). El paradigma que se privilegia es el GI porque la técnica utilizada es el recortado y plegado para comprobar la respuesta.

La Geometría axiomática natural (GII)**:** en este paradigma los objetos geométricos son descritos mediante una propiedad, el razonamiento de validación se funda sobre leyes hipotético-deductivas del sistema axiomático en juego (propiedades, definiciones, etc...) aunque sea incompleto, es decir, en estos casos no es necesario enunciar todos los axiomas involucrados. En la geometría axiomática natural los problemas deberán ser textuales ya que los objetos son las definiciones y teoremas y aunque los objetos textuales son representados por esquemas, la mirada se centra en la validación dentro del sistema de definiciones o propiedades; además de que los axiomas propuestos se apoyan fuertemente en la GI, esto que da origen al calificativo de Axiomática Natural.

> En este paradigma, la representación de los objetos difiere del paradigma anterior; ya no se habla de dibujos sino de figuras geométricas y la definición de figura depende del paradigma geométrico. El dibujo es la representación de la figura [...] una figura geométrica es el objeto geométrico descrito por una propiedad. El razonamiento de validación se funda sobre las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático puesto en juego, es decir, propiedades, definiciones, etc. El uso de los artefactos como medio de prueba no está permitido, y ellos sólo son usados para las construcciones geométricas mediante los instrumentos geométricos (tradicionales y no tradicionales).
> Esta geometría se dice que es edificada sobre un modelo próximo de la realidad y de la intuición espacial, como una representación inicial, pero al momento de validar se deben hacer dentro del sistema axiomático. [...] En este paradigma, el modelo geométrico tampoco corresponde al de la Geometría de Euclides ni a la Geometría Euclidiana, puesto que en esta geometría, los problemas para ser resueltos no requieren de la presencia de todos los axiomas. En este sentido, es posible referirse de un sistema axiomático local y lo llamaremos Geometría Euclidiana local (Montoya, Henríquez, Menares, & Barra, s/f, pág. 7).

Una tarea de este tipo se puede observar en la figura 9, a partir de un dibujo se pide al estudiante que describa una propiedad de la figura representada. Como se puede ver, el propósito es clasificar los triángulos a partir de la medida de ángulos, permitiendo con ello hacer generalizaciones a partir de casos particulares. En la actividad es posible deducir y asociar también los siguientes teoremas: "un triángulo equilátero es también equiangular" y "si dos ángulos de un triángulo son iguales, sus lados opuestos son iguales, y el triángulo es isósceles" (Thompson, 1993, pág. 83).

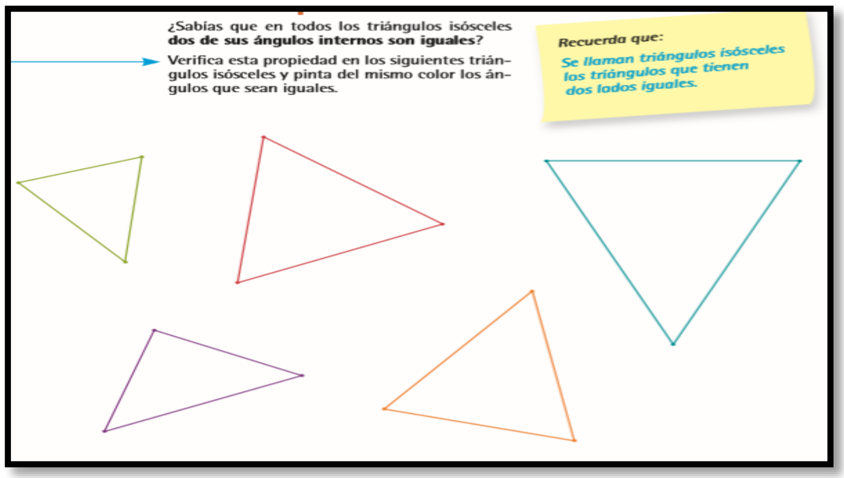


Figura 9. Tarea geométrica incluida en el Libro de Matemáticas para Telesecundaria de segundo grado. Fuente: (SEP, 2007, pág. 66)

La Geometría axiomática formalista (GIII)**:** este paradigma se caracteriza por separar el axioma de la realidad, la validación se realiza exclusivamente a través del sistema formal de axiomas incorporando toda la rigurosidad y el formalismo. Este tipo de geometría surge con la aparición de las geometrías no euclidianas pero incluye a la euclidiana. Una diferencia con la GII es que en este paradigma se incluye completamente el sistema de axiomas, lo que implica una ruptura con el espacio sensible y con los instrumentos meramente teóricos. Cabe aclararse que este paradigma es muy poco habitual en la enseñanza básica y es poco probable que se inscriba en el marco del espacio de referencia de los profesores en formación.

> Los objetos geométricos en esta geometría provienen de una axiomática elegida con toda la rigurosidad y formalismo del modelo, pueden ser representados por un dibujo dependiendo del modelo y podrían guiar la intuición del geómetra (Kuzniak, 2004, p.35) El razonamiento de validación en este paradigma es exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo geométrico subyacente y el uso de artefactos materiales

> no es permitido y deja de ser una cara visible(a diferencia de los otros paradigmas), más bien se habla de instrumentos teóricos; de esta forma esta geometría no está relacionada con la realidad. [...] Las características de un sistema formal son la independencia, la consistencia y la completitud; por ello podemos distinguirla de las otras geometrías, GI y GII. La geometría GIII, surge con la aparición de las geometrías no Euclidianas y la Geometría de Euclides es parte de este paradigma, puesto que ya no se trabaja a nivel local para enfrentar los problemas geométricos (Montoya, Henríquez, Menares, & Barra, s/f, pág. 8)

Tomando en cuenta los ejes de un ETG que se relacionan con los paradigmas, se puede pensar en una transición entre uno y otro paradigma de acuerdo con el énfasis que se dé a algunos de los elementos de estos ejes. Con base en lo señalado en los párrafos anteriores, puede afirmarse que la GII es una transición entre GI y GIII, pues en el GI la experiencia es más visible que en el GIII; de igual manera es más factible observar un tránsito entre GI y GII y entre GII y GIII, algo que no es posible entre GI y GIII. También existen matices entre cada paradigma que permiten identificar estos tránsitos, por ejemplo, en el GI se permite la deducción a partir de la experimentación que se apoya en el dibujo, mientras que en el GII puede apoyarse en dibujo o figuras pero la validación se centra en el uso de axiomas. En el caso de la GII su referencial teórico tiene relación con la realidad, mientras que en la GIII dicha relación no está permitida.

Es por estas razones que, dependiendo del diseño de las tareas, el trabajo se centra en alguno de los paradigmas. En esta perspectiva teórica esta especie de transiciones se simbolizan como GI/gII y GII/gI, como GIII/gII y GII/gIII y para determinar la articulación entre cada paradigma, la letra mayúscula simboliza el paradigma en que se hace mayor énfasis.

En el contexto de estas articulaciones se puede observar la manera como el geómetra reflexiona al enfrentarse a un problema al poner en evidencia los modos, el tratamiento y los métodos que le da a los problemas que deben ser adaptados y planteados por el docente para la enseñanza de la geometría, considerando la institución en que se encuentra el alumno y la relación con el "saber sabio" a estudiar. De acuerdo con los autores a quienes nos hemos referidos en recientes acepciones descritas en este apartado, en la siguiente noción es en la que descansa la teoría de los Espacios de Trabajo.

> En la actividad que se enfrenta el alumno, intervienen objetos que son más visibles y tangibles que otros, como lo son las figuras geométricas y los artefactos [...]. Estos aspectos que se articulan y forman un ambiente de trabajo –cuando el individuo trabaja en un problema geométrico- conforman uno de los tres universos desarrollado por los autores (Montoya, Henríquez, Menares, & Barra, s/f, pág. 9)

En relación a los dos paradigmas de la geometría elemental GI y GII, se señala que son relativamente coherentes en cuanto a los objetos de estudio, en las técnicas permitidas y los modos de validación. A decir de De la Torre y Pérez (2008) la GI proporciona una heurística y una base de experimentación ya que la GII generaliza ciertas técnicas empleadas en la GI. Cuando el profesor es consciente de la ida y vuelta entre estos dos paradigmas durante la resolución de un problema y de la complementariedad de las mismas, comprende la dificultad de separarlos.

2.3. LOS NIVELES DEL ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO

Como se señaló anteriormente, dependiendo del nivel en que se encuentre el geómetra los problemas geométricos tienen una interpretación distinta y lo que pretenda la institución escolar será distinto, ya sea una escuela del nivel básico o una para la formación de profesores. La noción de espacio toma el sentido de un espacio de pensamiento, donde se insertan objetos, instrumentos y un referente teórico para el trabajo geométrico (De la Torre & Pérez, 2008). La finalidad de este espacio es definida por la elección del paradigma geométrico o la referencia teórica. En cuanto al paradigma GIII y su relación con lo abstracto, puede afirmarse que en este caso el espacio está constituido por puntos, rectas y planos.

En lo que concierne al GII, las definiciones de estos elementos se apoyan sobre la percepción de la realidad que rodea al individuo, mientras que en el GI los objetos de estudio son los dibujos o maquetas. En este sentido resulta importante señalar lo que Kuzniak y Houdement (2006) definen como Espacio de Trabajo Geométrico, desde su perspectiva es un "ambiente organizado por y para el geómetra con el fin de articular de forma idónea componentes como: un conjunto de objetos (...), un conjunto de artefactos (...), un referencial teórico", (2006, pág. 184). Puede decirse entonces que es una actividad intelectual que organiza el individuo entre objetos empíricos y teóricos bajo una visión paradigmática (los paradigmas geométricos).

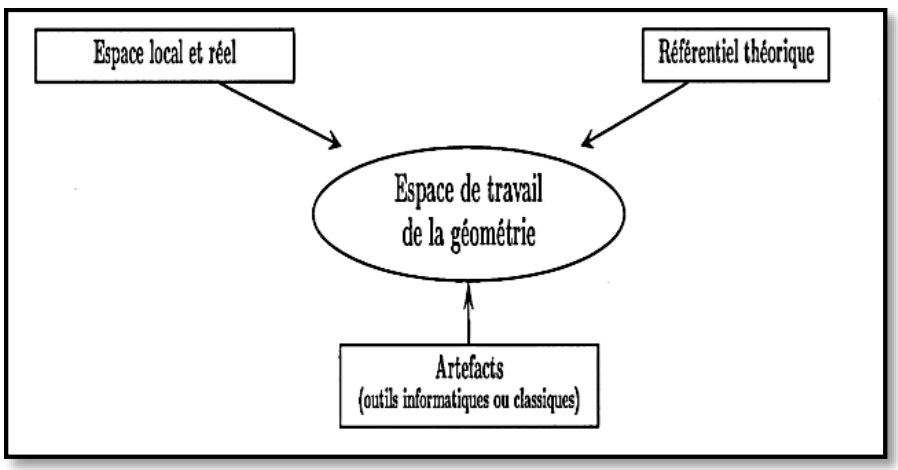


Figura 10. Los espacios de trabajo geométrico (L'espace de travail géometrique). Fuente: *(Kuzniak A. , 2016, pág. 22)*.

En la figura 10 se pueden apreciar los componentes del ETG, el espacio local y real (espace local et reél) corresponde a los objetos eventualmente materiales. El referencial teórico (référentiel théorique) está organizado o definido por un modelo teórico y los artefactos (artefacts) son los instrumentos utilizados por el geómetra.[27]

[27] La articulación entre los componentes será descrita en apartados posteriores.

El estudio del ETG se interesa entonces en la organización que realiza el individuo cuando hace un trabajo geométrico y dependiendo del trabajo matemático en un entorno escolar se puede describir la reflexión que realiza el geómetra al enfrentarse a un problema en alguno de los tres niveles de espacio de trabajo geométrico, a saber el ETG de Referencia, Idóneo y Personal.

En los ETG de referencia se describe el tipo de geometría cuyo aprendizaje es el objetivo de la institución. Los conceptos u objetos geométricos que la institución selecciona requieren de un trabajo de adaptación para ser enseñados, tal adaptación da como resultado un ETG adecuado para permitir el desarrollo efectivo de las clases, esto es, un ETG idóneo. En el marco de un ETG idóneo los sujetos (alumnos o profesores) desarrollan actividades, es decir trabajan en su ETG personal. De manera más precisa, estos tres espacios se pueden describir de la siguiente manera:

- ***ETG de referencia*****:** básicamente es concebido como el espacio definido en función de los criterios matemáticos instituidos en la comunidad matemática, comúnmente los investigadores de la geometría. En la formación de profesores, el ETG de referencia se encuentra en los programas de estudio que son los documentos oficiales donde se define lo que debe saber el docente acerca de la geometría y de su tratamiento didáctico. Además, se incluye la geometría a enseñar que la institución propone, es decir, en el caso de los profesores este espacio está integrado por los contenidos matemáticos relacionados con el triángulo que se encuentran descritos en los planes de estudio de formación inicial y en el nivel de educación primaria, los contenidos o aprendizajes esperados que habrán de trabajarse en cada grado escolar y que se enuncian en los programas de estudio.
- ***ETG idóneo*****:** el ETG de referencia debe ser conducido y organizado para ser un espacio efectivo e idóneo en una determinada institución, para ello se requiere una

reorganización didáctica de lo incluido en el espacio de referencia. El ETG idóneo es la herramienta del profesor y en el caso que nos ocupa incluye las situaciones didácticas que planteará el profesor en el aula[28] y las tareas relacionadas con el triángulo que se encuentran en los libros de texto que utiliza.[29]

- ***ETG personal*****:** es el espacio definido por un geómetra (estudiante), donde reflexiona sobre los conocimientos que posee y los que pone en práctica en correspondencia con sus conocimientos y capacidades. En el caso de este trabajo en el ETG personal es posible apreciar los conocimientos geométricos que ha aprendido anteriormente el profesor al resolver una tarea geométrica relacionada con el triángulo y aquellos conocimientos que puede desarrollar a partir de la misma, es decir, cuando el profesor se convierte en estudiante.

En la escuela primaria el ETG idóneo es diferente al de las instituciones de formación de profesores, en este sentido, la configuración de los ETG de referencia, idóneo y personal dependerán del objetivo que se plantee en una institución específica. Para comprender la reflexión que se realiza en el ETG personal, se precisa describir los elementos que lo componen, así como la relación entre ellos, por esta razón en lo que sigue se analizará el espacio de trabajo geométrico desde los planos, epistemológico y cognitivo.

[28] Estas situaciones didácticas serán producto de la reconstrucción de las situaciones de referencia que se desarrollan en el proceso de trabajo colaborativo con los profesores.
[29] En el caso de México, los libros de texto son documentos oficiales expedidos por la Secretaría de Educación Pública junto con los programas de estudio de educación básica. Estos se convierten en las herramientas con las que cuenta el profesor para el diseño de sus clases y orientan los saberes que habrán de estudiarse en las escuelas de nivel básico a nivel nacional.

2.4. LA NATURALEZA EPISTEMOLÓGICA DE UN ETG

En la dimensión epistemológica de un ETG se encuentran tres componentes ligados a la dimensión puramente matemática de los objetos geométricos: el espacio local y real; el referencial teórico y; los artefactos. Aunque pueden separarse para su análisis, no siempre es posible hacerlo en el trabajo matemático.

De acuerdo con Montoya, Henríquez, Menares y Barra (s/f), el espacio real y local[30] se corresponde con la concepción que el individuo tiene acerca del modelo geométrico y de la intuición y abstracción que se hace del objeto. Los dos componentes de este espacio se refieren en primer término al momento en el que el individuo trabaja con una parte del modelo (*espacio local*) y en segundo término a los objetos resultantes de la abstracción del modelo a partir de la realidad (*espacio real*), es decir al conjunto de objetos concretos y tangibles.

En el GI el espacio real y local está constituido por los objetos físicos y por el dibujo que representa al objeto geométrico, en la GII son las figuras y configuraciones de las mismas y en la GIII son los puntos, las rectas y los planos. Los *artefactos* tienen relación con la construcción y pueden ser de distinto tipo, materiales (reglas, software como Geogebra, etc...) o simbólicos (como un teorema), es importante señalar que la construcción se encuentra determinada por los instrumentos utilizados que se relacionan entre sí. Los artefactos materiales de tipo tecnológico permiten realizar procesos que con artefactos tradicionales (lápiz y compás), sería más difícil realizar. Los artefactos simbólicos permiten al geómetra utilizar instrumentos teóricos como teoremas, definiciones o ecuaciones.

El componente *artefactos* se sustenta en las ideas de Rabardel (1995), quien señala que un instrumento de dibujo es un artefacto utilizado por un individuo con una cierta finalidad o un esquema de acción. El artefacto tiene una doble orientación, por un lado a la instrumentalización

[30] En un Espacio de Trabajo Matemático (ETM) el componente que ocuparía el mismo sitio que el espacio real y local sería el *representamen*

que orienta los usos que se dan a los artefactos y por otro está la instrumentación orientada a la apropiación de los esquemas de acción. Por ejemplo el uso de la regla y compás se privilegia en la GI, mientras que en el GII es un error utilizarlos como instrumentos de prueba.

Ahora bien, es necesario comprender los mecanismos y los procesos por los cuales son concebidos los artefactos para proporcionar ayuda real al geómetra y comprender también los significados y contextos donde se inscriben sus usos en situaciones sociales. Los artefactos en el GI sirven para la medición, en el GII sirven para la construcción y en el GII pierden validez pues no es necesario emplearlos para la validación.

Finalmente, el componente *referencial teórico* está compuesto por los elementos teóricos en los que se basa la tarea, generalmente están sustentados en las propiedades y definiciones involucradas en el razonamiento y se utilizan en el argumento llamado prueba.

Un ejemplo de estos componentes sería el siguiente: en el paradigma GI, el espacio real y local son los dibujos o figuras compuestas por rectas, puntos, planos, etc., los artefactos son la regla, el compás, plegar, cortar, etc., y en este caso (característico de GI) el referencial teórico queda en segundo plano puesto que, conforme avance en los paradigmas GII y GIII tendrá un papel más importante, pues son las definiciones, propiedades o teoremas. (Montoya, Henríquez, Menares, & Barra, s/f). Por ejemplo, en una tarea geométrica sustentada en la propiedad general del triángulo "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano" (Thompson, 1993, pág. 79); dicha propiedad así como los artefactos que se emplearán orientarán el espacio real y local provocando el análisis de la articulación entre ambos, el componente cognitivo y la relación con el paradigma dominante de la tarea.

2.5. LA NATURALEZA COGNITIVA DE LOS COMPONENTES DEL ETG

Desde el punto de vista cognitivo existen procesos que se activan en los diferentes dominios matemáticos, de acuerdo con Kuzniak (2006) específicamente en la geometría esos procesos son la visualización, la construcción y la prueba. En el plano cognitivo estos procesos se relacionan entre sí, por ejemplo el proceso de visualización aporta al de construcción y viceversa, el proceso de construcción aporta al de prueba y viceversa. Además la visualización aporta tanto a la construcción y a la prueba aunque no se puede asegurar que la prueba pueda aportar en los procesos de visualización y construcción.[31] Además de estas relaciones, estos procesos se encuentran ligados con los componentes del ETG, por lo que se puede decir que es un espacio de trabajo dinámico y cognitivo en el que el geómetra organiza su articulación dependiendo del paradigma geométrico en el que se ubique. Por ejemplo la visualización requiere de los artefactos, y su articulación se da a través de la génesis instrumental.

Por su parte, la *visualización* se define como actividad cognitiva que se despliega en el dominio geométrico, se puede considerar como una de las actividades cognitivas más completas pues el individuo debe ver, construir y razonar para aprehender los objetos geométricos. Cuando el geómetra se enfrenta a la tarea geométrica y despliega sus procedimientos mentales para resolverla, se hace presente el componente visualización y, a decir de Houdement y Kuzniak (2006) en la visualización se produce la representación semiótica de un objeto como una figura geométrica o un gráfico cartesiano. Como se mencionó, en las formas de pensar la geometría, la intuición es la primera teoría que construye el geómetra respecto del objeto geométrico, recurre a ella cuando dibuja una figura o cuando la representa mentalmente, esto le permite estudiar las propiedades de la misma y tomar en cuenta las propiedades cualitativas que son el objeto propio de análisis, en este sentido la percepción está estrechamente relacionada con las propiedades.

[31] Las influencias y aportes entre ellas quedarán más explícitas más adelante en las distintas tareas que lo ejemplifiquen.

La *construcción*, se relaciona directamente con la visualización no icónica y se refiere al proceso mediante el cual el sujeto interactúa con los instrumentos necesarios para la tarea. Hay instrumentos de dos tipos, los que permiten manipulaciones de objetos materiales y los que permiten operaciones de trazado gráfico (Duval R. , 2005), los primeros permiten girar las piezas, ensamblarlas; acción que no es posible con los instrumentos de trazado tradicional, en este caso los moldes o esquemas se constituyen como herramientas indispensables en la enseñanza de la geometría, ya que permiten el manejo de figuras superpuestas y en yuxtaposición, generando una geometría más activa. Por otra parte, los de trazado gráfico permiten constatar las propiedades.

Al utilizar un instrumento existe la posibilidad de experimentar las propiedades geométricas y se puede tomar conciencia de que éstas no son solamente características perceptivas, es por estas razones que la elección de los instrumentos debe tomar en cuenta los objetivos de aprendizaje ya que son éstos los que permiten entrar progresivamente en la deconstrucción dimensional y por ende, toda actividad de construcción puede ser explicada a través de la descripción porque conlleva a un razonamiento que de acuerdo con Duval (2005), puede considerarse desde dos posturas, desde las inferencias explícitas y desde los actos de exploración.

De esta manera entonces, para que un discurso se considere como razonamiento deductivo debe estar orientado hacia una preposición que se quiere justificar, también debe estar centrado sobre el valor lógico o epistémico de la proposición y no en su contenido ya que un razonamiento ligado al lenguaje tiene que ser validado o refutado por la experiencia. Para Duval (2005), una explicación no se considera un argumento y para describir el proceso discursivo la teoría del Espacio Geométrico se apoya en la tipología de prueba de Balacheff (1987) porque tiene amplio potencial para analizar las explicaciones que los geómetras realizan en las tareas.

Sobre el componente *prueba*, Balacheff (2000) sostiene que “Los verbos explicar, probar, y demostrar son considerados frecuentemente como sinónimos en la práctica de la enseñanza de las matemáticas” (pág. 11), por ello considera que es importante diferenciarlos. La explicación se expresa en un lenguaje natural cuando el sujeto ha adquirido la verdad. La demostración por su parte designa la prueba que se apoya en un cuerpo de conocimientos institucionalizados, es decir, definiciones, teoremas y reglas validadas por la comunidad matemática (rigor matemático). Por otro lado, una *prueba* puede hacer referencia a una explicación aceptada por una determinada comunidad en un cierto momento, por lo que a su vez, puede ser rechazada por una comunidad distinta.

Las dimensiones sociales de las pruebas y demostraciones son producto del proceso de validación que depende de una situación en particular y puede considerarse como el proceso donde se generan argumentaciones de una tarea. En este sentido, debe comprenderse que plantear al estudiante un problema no garantiza que se ponga en marcha un proceso de validación, si bien es cierto que el programa de estudios de educación primaria estipula que habrán de validarse las respuestas de los alumnos y con ello favorecer las competencias matemáticas, es importante puntualizar que en las situaciones que se planteen al estudiantes deben propiciar que se produzca dicho proceso de validación mediante una demostración o una prueba, de manera individual o en el contexto de las discusiones grupales durante el trabajo en el aula.

2.6. LAS GÉNESIS EN UN ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO

Como se ha mencionado, la conexión entre los planos cognitivo y epistemológico del ETG se establece a partir de un conjunto de génesis, es decir, de ciertos eventos que surgen al relacionarse los componentes. Nikolantonakis y Vivier (2016) señalan la existencia de una génesis global del ETM que supone a este conjunto de génesis como interdependientes y conectadas a los componentes de cada plano. Por lo tanto, y debido a la relación directa que se presenta entre estos aspectos, la relación entre las diversas génesis no se da de forma jerárquica o aislada, sino de manera integral.

Asimismo, para que el sujeto pueda apropiarse del saber, el trabajo matemático debe hacerse gradual y progresivamente en un ETG personal donde los procesos cognitivos requieren la acción de las génesis. Activar o controlar estas génesis es posible porque se encuentran concebidas dentro del trabajo del profesor, en el ETG idóneo en el que se incluyen las situaciones de enseñanza que corresponden al espacio en el que se consideran los distintos criterios matemáticos que se estudiarán en una institución en particular (Kuzniak, Montoya, & Vivier, 2016). En el caso del ETG, como se ha dicho, hay tres génesis que posibilitan la apropiación del saber en juego: la génesis figural, la instrumental y la discursiva.

2.6.1. La génesis figural.

Esta génesis, a la que Kuzniak (2011) se refiere como la entrada perceptiva a la tarea geométrica, es fundamental y propia de todo ETG porque permite describir el proceso semiótico asociado con la visualización. Desde la perspectiva de Duval (2005), este proceso puede definirse como una actividad cognitiva básica de la geometría en la que la visualización se centra en la producción de una representación semiótica de un objeto, que puede ser una figura geométrica o gráficos cartesianos.

Es importante señalar Nikolantonaski y Vivier (2016) exponen que el ETM supone un conjunto de génesis que son interdependientes y que a su vez involucran a todas las componentes del plano epistemológico y del plano cognitivo, pero la importancia de la génesis semiótica (figural en el caso del ETG) radica en que da significatividad a los objetos matemáticos confiriéndoles un estatus de objetos matemático operatorios (Nikolantonakis & Vivier, 2016, pág. 26) en relación con las figuras que se presentan y con la manera cómo se movilizan sus propiedades. Es decir, en el caso de un objeto matemático como “la suma de los ángulos internos de un triángulo son igual a la suma de dos ángulos rectos”, si se comprende la génesis figural, se plantean tareas en las que el estudiante reconozca y de sentido a este postulado, así dicho objeto logra convertirse en un objeto matemático operatorio.

En esta génesis se deben tomar en cuenta los objetos matemáticos y sus signos, pues para la actividad geométrica se requiere de la coordinación en dos registros semióticos, la visualización de formas y el lenguaje para enunciar y obtener propiedades. En este caso se presentan los tipos de aprehensión perceptiva y operatoria que define Duval (2004). Además, Pierce (citado en Montoya (2014) postula que en el ETM en general deben considerarse los representantes matemáticos, esto es, los objetos geométricos y sus respectivos signos. Entonces sobre la relación entre la visualización y el componente de espacio real y local, se dice que lo real es el acceso a los objetos como abstracción del modelo matemático a estudiar y lo local las particularidades de dicho modelo que se incluyen en el trabajo matemático. Sobre este aspecto, Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) afirman que en la escuela obligatoria las figuras son los soportes visuales privilegiados del trabajo geométrico y que en la actualidad, la noción de prueba se articula rápidamente a la visualización gracias a las herramientas informáticas o videos.

Ahora, para ampliar la comprensión de esta génesis es preciso describir lo concerniente a la visualización. Según Duval (2005) la visualización es la actividad cognitiva requerida para la geometría y exige la articulación de dos registros de representación que funcionan de manera simultánea e interactiva; el lenguaje y el registro de las figuras. Por ejemplo, en el contexto escolar el registro de figuras a partir de la representación del rectángulo implica identificar y enunciar sus características o viceversa, a partir de una descripción oral o escrita de las características de la figura el estudiante debe reconocer que se trata de un rectángulo.

A decir de Duval (2005),

> El reconocimiento de los objetos representados no depende ante todo de la discriminación visual de las formas, sino de las suposiciones que se han realizado y que también controlarán la mirada sobre las figuras, éste es otro tipo de actividad que se moviliza: la producción discursiva de declaraciones que están vinculadas entre sí para justificar, explicar o demostrar (pág. 8).

Es así, que de acuerdo con este autor, la enseñanza debe considerar entre sus objetivos la visualización y la producción de enunciados, ya que para que el estudiante comprenda los contenidos matemáticos requiere de la acción conjunta entre las condiciones cognitivas de visualización y lenguaje, ambas son condiciones para aprender en geometría. En este sentido, toda tarea que se plantee en la actividad geométrica está relacionada con la forma de ver y, siguiendo con Duval (2005) hay dos formas de visualizar según sea el tipo de operación que se realice con las figuras y según la manera como se movilizan sus propiedades: una visualización icónica y otra no-icónica.

Cuando se activa la visualización icónica los objetos se identifican o se representan por la semejanza con un objeto (real) o por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo). Un ejemplo de ello es que en el trabajo escolar es común encontrar actividades donde se solicita al alumno que trace un rectángulo a partir de una imagen observada, esto implica el reconocimiento visual global de una forma geométrica elemental, pero sin representar trazos internos o externos que le permitan apreciar algún tipo de modificación posible a la figura, esta es una visualización icónica.

Por su parte, señala Duval (2005), la visualización no icónica reconoce las formas por las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o aproximaciones y por las deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades enunciadas en las definiciones o en los teoremas, o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura. En el caso de la visualización no icónica, las figuras se construyen y descomponen mediante una secuencia de operaciones que permiten reconocer y movilizar propiedades geométricas, es decir, se construyen figuras usando instrumentos y se descomponen usando trazos suplementarios, así se efectúa la de-construcción dimensional de figuras. Un ejemplo es la tarea en la que se pide al estudiante observar un rectángulo que contenga distintos tipos de triángulos dentro de él y posteriormente se le solicita que lo trace en su libreta identificando y clasificando los tipos de triángulos. En este caso la visualización no icónica juega un rol facilitador en la comprensión del problema, lo que la convierte en pertinente en los procesos geométricos.

Ahora bien, el uso de figuras en las actividades geométricas posibilita el trabajo con la geometría elemental y en estos casos la visualización es intrínsecamente semiótica, por lo que no se puede reducir a una simple percepción visual sino que también es necesaria la coordinación de otros tipos de aprehensión. De acuerdo con Duval (1995, citado en Bustamante y Giraldo (2015), estas aprehensiones son de naturaleza diferente, según sea cada forma de ver o de percibir un objeto geométrico, una es la perceptiva que identifica de manera espontánea la figura a partir de trazos externos o internos que posibilitan la resolución del problema. Por ejemplo, si en una tarea relacionada con polígonos se presenta la figura de un cometa con sus diagonales trazadas y su clasificación, permitirá la aprehensión perceptiva de otros elementos como ángulos, vértices, lados (Bustamante & Giraldo, 2015).

Otro tipo de aprehensión es la operatoria, la cual aparece, en palabras de Duval (1999, citado en Henríquez, (2014), cuando toda figura puede modificarse de diversas maneras (rotar, separar, agrandar, desplazar, etc.), lo que representa un producto heurístico de las figuras ya que en la búsqueda de la solución a un problema geométrico, un sujeto puede modificar la figura hasta regresar a la configuración inicial y las modificaciones que hace pueden ser de dos tipos: un cambio figural o una reconfiguración.

Un cambio figural se realiza cuando se quitan o se añaden nuevos elementos a una tarea geométrica y una reconfiguración se realiza cuando se manipulan las piezas como en el caso de un puzle. Ejemplo de este tipo de aprehensión, es una tarea donde se presenta una figura que contengan triángulos y trapecios y además de la visualización se solicita que determinen si las áreas de los trapecios son congruentes entre sí, con ello el alumno accede a la transformación y exploración de las figuras.

En cuanto a la acción cognitiva que se produce al asociar la configuración con una afirmación matemática (definiciones, propiedades), Duval (1999, citado en Henríquez, (2014) se refiere a ella como aprehensión discursiva y señala que este razonamiento puede realizarse desde lo visual hacia el discurso o del discurso hacia lo visual ya que la introducción de una figura geométrica necesariamente implica un discurso, una figura representa una situación geométrica sólo en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones, estén explícitamente fijadas de entrada, pues una misma figura puede remitir objetos teóricos diferentes, según la situación matemática y en efecto, el razonamiento también será diferente. En este sentido, la introducción a una figura geométrica necesariamente es discursiva. recuérdese que una figura geométrica es una configuración de al menos dos unidades figurales elementales, en el triángulo por ejemplo, la 1 corresponde a las líneas que en él se encuentran y que son en este caso rectas, y la dimensión 2, concierne a la forma cerrada de estas líneas (superficie). La coordinación entre figura y razonamiento es llamada por Duval (1999, 2010) como no-congruencia dimensional, debido a que en la enseñanza primaria la exploración heurística tiende a privilegiar la visualización de las unidades de dimensión 2 (como en el ejemplo del triángulo, la figura es la que se visualiza) sobre las unidades de dimensión inferior (las líneas rectas o puntos de dicho triángulo), mientras que la aplicación de definiciones o teoremas de dicha figura privilegia las dimensiones de la unidad 1, por lo cual para el razonamiento de requiere también el trabajo con la dimensión inferior además de la figura representada.

Por lo tanto Duval (1999, citado een Henríquez 2014) llama al cambio de dimensiones para reconocer los objetos percibidos en la visualización. “Este proceso, Duval lo denomina deconstrucción dimensional de las formas, cuyo funcionamiento requiere necesariamente de una articulación con un discurso[32]” (Henríquez, 2014, pág. 50). En este mismo tenor, podemos señalar que la acción de visualizar figuras está asociada con las posibles actividades que se

[32] Para profundizar sobre esta relación más adelante se describirá el componente prueba.

ofrecen a los alumnos ya que plantear acciones en función de las figuras es extenso y variado, a decir de Duval (2005),

> Las variaciones de actividad se relacionan tanto con la tarea en cuestión (para reproducir una figura según un modelo o para construirla, o para realizar mediciones, o para describirla para que sea reconstruida por otro alumno) y en el modo del actividad solicitada (modalidad concreta utilizando un material manipulable, modo de representación apegándose a las únicas producciones gráficas, o modalidad técnica mediante la imposición de ciertos instrumentos) (pág. 9).

Es por estas razones que Duval (2005) clasifica cuatro entradas a la geometría.

La entrada del botánico (botanise) es evidente e inmediata, en ésta se reconoce y nombra a las formas más elementales de la geometría plana (tipos de triángulos por ejemplo), se observan las similitudes y/o diferencias entre formas, las propiedades se distinguen a partir de las características visuales del entorno. Para Duval la actividad del botánico no es geométrica pues la observación podría ser representada con una copia a *mano alzada* sin requerir la utilización de algún instrumento.

Entrada del topógrafo (arpenter-géomètre), la actividad fundamental es aprender a medir (por ejemplo la distancia entre dos puntos) y llevar esta medida a un dibujo que toma el estatus de plano, generalmente las tareas exigen pasar de una escala de magnitud a otra, por lo tanto se deben igualar. Como no existe un procedimiento común para medir las distancias reales en el campo y medir las longitudes de un dibujo, el estudiante tiene dificultades para pasar de una medida a otra. Cuando se eligen los objetos como puntos o ejes de referencia para representar la posición de los objetos relativos entre sí, se toman en cuenta las direcciones u orientaciones (como los mapas en geografía), pero estos aspectos no siempre son relevantes para la representación geométrica. Además, en este tipo de actividad, las propiedades geométricas se movilizan para fines de medición (Duval R. , 2005)

Entrada del constructor (constructeur), es necesaria, ya que en la geometría las particularidades de las figuras (por lo menos las formas elementales o euclidianas) deben ser edificables mediante instrumentos manipulables o sustitutos (regla, compás, software). Utilizando instrumentos los alumnos pueden verificar las propiedades de las figuras y experimentar para constatar que no es meramente perceptivo. El Geogebra es una de las recientes aportaciones a esta entrada, pues este tipo de geometría dinámica posibilita que la figura de un triángulo escaleno construido previamente, pueda conservar su configuración si se mueve uno de sus puntos.

Entrada del inventor (inventeur-bricoleur), para una mejor comprensión de esta entrada Duval (2005) plantea el ejemplo de la siguiente tarea: ¿ a partir de un cuadrado ya dado, de qué manera se puede construir otro que sea dos veces más grande y que su área es el doble? Si este problema se resuelve sólo usando papel cuadriculado para reproducirlo a partir del conteo de unidades, se reduce a operaciones de medición. En cambio, si se reconfigura la figura, la acción exige una deconstrucción visual ya que añadiendo trazos complementarios se genera un proceso heurístico que lleva a la solución de la tarea. Cada una de las entradas descritas se relaciona con un cierto tipo de comprensión, En la figura 11 se describen los modos de comprensión de cada entrada.

	Botaniste	**Arpenteur-géomètre**	**Constructeur**	**Inventeur-bricoleur**
ESTATUS EPISTEMOLÓGICO	*Constatación* perceptual inmediata.	*Constatación* resultante de la lectura de un instrumento de medición.	*Resultado* de un procedimiento de construcción.	*Resultado* de una descomposición de la figura de partida que uno reconfigura de otra manera.
FUENTE COGNITIVA DE CERTEZA	**Superposición** realizada al ojo o mediante el uso de una plantilla.	**Comparación** de valores numéricos que se han obtenido empíricamente.	**Necesidad interna** del encadenamiento de las operaciones del proceso de construcción.	**Invarianza** de unidades figurales que son referentes de la transformación de la figura de partida.

Figura 11. Modos de comprensión de entradas de la geometría. Fuente: Henríquez *(2014)*

Como se puede apreciar (figura 11), las dos primeras entradas activan la visualización icónica y las siguientes la no icónica, la entrada del inventor (inventeur-bricoleur) implica la deconstrucción de las formas ya conocidas lo que constituye el proceso central de la visualización geométrica que se lleva a cabo en coordinación con la actividad discursiva (Duval R. , 2005), por esta razón en la actividad geométrica resulta esencial favorecer la visualización no icónica.

2.6.2. La génesis instrumental

La génesis instrumental se basa en los artefactos y la forma en que se utilizan, es decir distingue una cosa que ha sido transformada pero no se refiere sólo a objetos materiales, también a aspectos simbólicos como un teorema y se puede usar a través de un conjunto de operaciones.

De acuerdo con Rabardel (1995, citado en Henríquez, 2014), el proceso de transformación de un artefacto a instrumento es lo que se denomina génesis instrumental. Por ello, es importante puntualizar la diferencia que existe entre uno y otro.

Un artefacto es un material o símbolo que se emplea para la resolución de un problema, cuando a partir de estos artefactos el sujeto hace una construcción propia mediante el proceso de instrumentalización (reconocimiento de las funciones del artefacto) e instrumentación (construcción mental relativa al uso de los artefactos), el artefacto se convierte en un instrumento. No obstante, puede presentarse una serie de artefactos simbólicos como los algoritmos, que al ser utilizados en la resolución de una tarea se instrumentalizan, es decir, se convierten en instrumentos. Los instrumentos son una entidad intermediaria entre el sujeto y el objeto (Henríquez, 2014).

Ahora bien, la utilización de los instrumentos depende el paradigma geométrico en el que se inscribe la tarea, si está inscrita en el paradigma GII la experimentación puede apoyarse en un software que realiza pruebas dinámicas ya que, de acuerdo con Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), el uso de este artefacto permite la trasformación de las figuras mediante imágenes animadas en un problema donde la percepción estática era insuficiente para convencer, de esta manera se liga la cuestión de la prueba para dar solución a la tarea provocando un discurso explicativo dinámico que complemente el discurso escrito.

2.6.3. La génesis discursiva

En la génesis discursiva el razonamiento está ligado a un proceso de prueba que se considera como la entrada probatoria, en esta génesis el estudiante argumenta el proceso realizado y hace explícito un discurso que da sentido a las propiedades geométricas involucradas en la tarea matemática. Esta génesis es importante porque, como lo afirma Duval (1995 citado en Henríquez, 2014), la actividad cognitiva de la geometría precisa de una articulación entre visualización y razonamiento discursivo. El componente prueba que entra en juego en la génesis discursiva descansa en las aportaciones sobre la tipología de pruebas de Balacheff (1987, 2000).

En la perspectiva teórica de los ETG se consideran dos aportes sobre el razonamiento, en el primero Duval afirma que el razonamiento puede realizarse de dos maneras, desde las inferencias explícitas ligadas al lenguaje (lo discursivo) y desde los actos de exploración (acciones y manipulaciones). Estos tipos de razonamiento se asocian con la exploración o acción y con la utilización de un lenguaje, por lo tanto el razonamiento es una actividad que puede estar organizada mediante definiciones y propiedades entrelazadas coherentemente. De acuerdo con Montoya (2010) “el razonamiento matemático es un pilar esencial cuando se trata de demostraciones y el proceso de prueba [...] Requiere aprendizaje, por lo que se supone que la enseñanza busca las condiciones adecuadas para ese razonamiento” (pág. 39). Entonces el razonamiento se encuentra entrelazado a un discurso del sujeto que busca construir los saberes geométricos.

A decir de Duval (citado en Montoya, 2010), el discurso debe tener dos características para ser considerado un razonamiento: debe estar orientado hacia una declaración objetivo de una proposición y centrarse en su valor lógico o epistémico; generalmente cualquier discurso que intente demostrar la veracidad de una declaración debe ser admitido o rechazado por un interlocutor, por lo cual los discursos que intenten demostrar la veracidad o falsedad de una declaración son discursos formales vinculados a un cuerpo de conocimiento, relacionados con el contenido y el valor epistémico de las declaraciones, al hablar de valor lógico se refiere a si es falso o cierto de acuerdo a un proceso de prueba y el valor epistémico se asocia al grado de confiabilidad del mismo (Montoya E. , 2010, págs. 39, 40). Asimismo, el razonamiento está asociado a la demostración, por lo que se puede analizar en relación a las génesis puestas en juego en la actividad matemática, sobre este aspecto, Henríquez (2014) menciona,

> La concepción sobre demostración desarrollada por Balacheff es compatible con la noción de demostración de Duval. Pero cuando hay que probar un teorema o prueba en general la tipología de prueba desarrollada por Balacheff muestra un potencial para analizar las explicaciones vertidas por los estudiantes y así estudiar el razonamiento de validación de los estudiantes. La postura de Duval, denota un trabajo basado en el caso de la geometría, donde es posible analizar la coordinación (o no) entre razonamientos discursivos y la actividad de visualización (pág. 62)

De acuerdo con Balacheff (1987), en el razonamiento geométrico debe considerarse la interacción social del individuo porque el contexto posibilita la discusión y los argumentos de los sujetos. En este sentido, cobra importancia para el profesor, tanto en su formación como en el diseño de sus clases organizar la validación, ya que para argumentar y convencer es necesario desplegar un discurso explicativo que puede ser escrito o apoyarse en la elaboración de diagramas (Miller, 2007; citado en Kuzniak, Montoya y Vivier, 2016), empero, la naturaleza e importancia de las formulaciones difieren de un paradigma a otro, en la geometría axiomática un objeto matemático existe sólo mediante su definición y solicitar un discurso de prueba dependerá de la institución escolar y el paradigma involucrado en la tarea geométrica.

2.6.3.1. La tipología de prueba.

A decir de Balacheff (2000), la demostración es una herramienta de prueba reconocida, en la que el problema de la verdad se presenta en los procedimientos científicos. Sin embargo, también señala que esto no implica que los matemáticos puedan probar su saber apoyándose tan solo en pruebas de esa naturaleza.

> Por otro lado, antes de la existencia del modelo euclidiano, los antiguos matemáticos se valían de medios de prueba para establecer el carácter necesario de una proposición o de un resultado. En otras palabras, la actividad matemática reconocida como tal es anterior a la “invención” de la demostración hecha por los griegos. De la misma manera, supongamos que existe la posibilidad de que los alumnos construyan, antes de dominar la demostración, pruebas de los enunciados matemáticos que ellos mismos producen. Nos interesa saber cuál es la naturaleza de estas pruebas, si es posible dilucidar una jerarquía de la génesis de la demostración, y cuáles son los medios para provocar su eventual evolución. Pero, por otro lado, estaríamos tratando de hacer una constatación banal; el solo hecho de disponer de la demostración como una herramienta de prueba no es suficiente para garantizar su uso. (Balacheff, 2000, pág. 20)

Podemos inferir entonces que los axiomas y definiciones concernientes a los objetos matemáticos, fueron desarrollados a partir de argumentos expuestos mediante una serie de explicaciones convertidas posteriormente en afirmaciones científicas. Por lo cual es importante, propiciar en los estudiantes la evolución de los diversos tipos de prueba que ellos empleen.

Otra de las ideas del autor es que, con base en Piaget (1983, citado en Balacheff, 2000), en los niños, para que suceda el reconocimiento del carácter necesario de una proposición, se requiere de una diferenciación de los objetos del pensamiento y de sus relaciones. Aunado a ello, Balacheff también expone que son necesarias las herramientas lingüísticas puestas en práctica. Requiriendo de un distanciamiento en lo que se denomina “discurso argumentativo natural” para poder elaborar un “discurso argumentativo formal” que se basa en un lenguaje operativo, permite el cálculo de las proposiciones y las relaciones que caracterizan las pruebas de nivel elevado, sobre todo las demostraciones. De este modo, la construcción de tales herramientas lingüísticas no puede disociarse de la construcción del conocimiento. (Balacheff, 2000, pág. 20). Es así, que consideramos la prueba como elemento que favorece el razonamiento discursivo, y el estudio de la misma, importante para el trabajo geométrico en el nivel de educación primaria.

Cuando Balacheff (2000) habla de la dimensión social de la prueba e involucrar a la comunidad en la aceptación o rechazo de un razonamiento, asume que cuando esas pruebas adoptan una particularidad en el seno de la comunidad científica se les puede llamar demostración. De acuerdo a la interpretación de Pizarro (2018),

> Balacheff (1987) recalca que, en estas interacciones entre alumnos, con diferentes niveles de razonamiento, es posible que surjan obstáculos debido a malas interpretaciones, a que no se llegue a establecer consensos y a querer que prevalezcan los puntos de vista de unos sobre los de los otros, frente a una tarea matemática, dependiendo de su naturaleza y los medios que pone en práctica para asegurar la validez (pág. 61).

Así cobra sentido el rol del profesor durante el momento de la validación, porque a partir de la confrontación de los argumentos de los estudiantes se desarrolla un proceso de prueba y de acuerdo a Balacheff (citado en Pizarro, 2018), puede haber dos tipos de validaciones: la explicación (discurso subjetivo con base en los conocimientos y racionalidad de quien explica, principalmente centrado en un lenguaje natural); y la prueba (explicaciones aceptadas en un momento determinado que pueden ser pragmáticas o intelectuales. La diferencia entre unas y otras tiene que ver con la naturaleza de la justificación, las pruebas pragmáticas están ligadas a la acción y la experiencia mientras que las intelectuales se articulan en torno de argumentos y cadenas de argumentos para producir un lenguaje simbólico. Por ejemplo una prueba intelectual se da cuando el estudiante justifica su respuesta a la tarea, pero para establecer el tipo de prueba en una tarea deben tomarse en cuenta los criterios aceptados como prueba en la comunidad escolar. (Véase tabla 2).

Uno de los medios principales para transformar una situación de decisión a una situación de validación tiene que ver con someterla a debate para garantizar o desconocer su validez. A decir de Brousseau (1986), estas situaciones presentan un carácter social donde se interactúa para que otros hagan lo que se pretende al resolver un problema y el papel determinante que esto juega en la construcción de los contenidos matemáticos. Esta situación social no asegura la condición de las pruebas, porque puede suceder que algunos de los estudiantes no participen en actividades que impliquen un debate e incluso deliberadamente pueden presentar enunciados y defender enunciados falsos o rechazar verdaderos (Balacheff, 2000). Enseguida, la tabla 2 muestra la definición general de cada tipo de prueba.

Tabla 2. Tipología de prueba. Fuente: Henríquez *(2014, págs. 58,59)*

Pruebas pragmáticas	Pruebas intelectuales
***Empirisme naïf:* cuando la persona valida después de verificar casos particulares.** **Ejemplo: cuando los alumnos dibujan un pentágono que consta de cinco diagonales, y se solicita que elaborarán un hexágono concluyen que tendrá seis diagonales.**	***Experiencia mental*[33]*:*** cuando el razonamiento se independiza de la representación particular. Ejemplo: en el caso de las diagonales, es posible encontrar el número de diagonales que salen desde un vértice (n-3), por lo tanto el estudiante puede escribir la siguiente expresión número de diagonales=n(n-3)/2
***Experimento crucial:* toma en cuenta la problemática de la generalidad y la resuelve mediante un caso en particular.** **Ejemplo: En el caso anterior (diagonales del polígono) un estudiante traza un polígono de quince lados para verificar la conjetura.**	***Demostración***: cuando la validación se apoya en conocimientos institucionales, conjunto de definiciones, teoremas, etc., y se funda en una lógica formal.
***Ejemplo genérico*: cuando se justifica la afirmación considerando un ejemplo concreto como representante de los que pertenecen a dicha afirmación.** **Ejemplo: en el mismo caso anterior, los estudiantes consideran un hexágono y hacen el cálculo de cuántos vértices existen para concluir que sucederá lo mismo con el resto de los polígonos.**	***Cálculo sobre el enunciado:*** se identifica esta prueba entre la experiencia mental y la demostración, no es una prueba con las características de una demostración pero tampoco con las de una experiencia mental. No tiene ejemplos ni dibujos, y utiliza el razonamiento con propiedades explícitas aunque no todas ciertas. Ejemplo: probar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, afirmando que como un triángulo es la mitad de un rectángulo, y como la suma de los ángulos de un rectángulo son 360°, entonces la suma del triángulo es la mitad. 360:2=180°

[33] Henríquez (2014) señala que entre el ejemplo genérico y la experiencia mental, opera el pasaje entre las pruebas pragmáticas y las intelectuales.

En cuanto a la articulación y transición entre pruebas pragmáticas, haciendo énfasis en la tipología de prueba de Balacheff (2000), así como en la propuesta de Montoya (2012, 2014), se puede observar en la siguiente figura (figura 12).

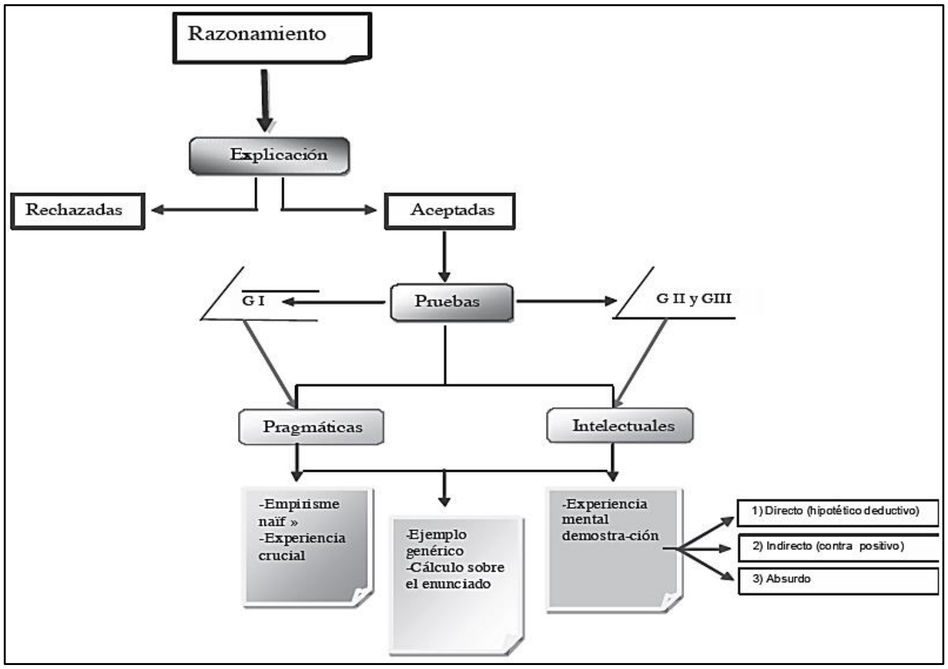


Figura 12. Tipología de pruebas y paradigmas geométricos. Fuente: Montoya *(2014, pág. 234)*

Puede verse la manera en la figura 12 que las pruebas pragmáticas de empirisme näif (empirismo ingenuo) y experiencia crucial, se integran básicamente en el paradigma GI, porque la validación de las afirmaciones corresponde a casos en particular o bien una problemática general se valida con un caso específico. No obstante cuando hablamos de pruebas de tipo intelectual como la experiencia mental y la demostración, las justificaciones se liberan de situaciones particulares y se apoyan en los conocimientos institucionales, para ello se requiere una compleja construcción cognitiva y lingüística porque este tipo de prueba otorga la validez socialmente aceptada y fundada en una lógica formal, para transitar de un tipo de prueba a otra, Balacheff (citado en Montoya (2012),

> Identifica la transición de la evidencia pragmática a la evidencia intelectual mediante la evolución de las características del lenguaje, sin olvidar el estado y la naturaleza del conocimiento del sujeto que realiza la prueba. La transición ocurriría entre el ejemplo genérico y la experiencia mental [...] La transición de la prueba pragmática a la prueba intelectual, más específicamente a la demostración presupone que el sujeto usa un lenguaje apropiado, pasando de familiar a funcional (formal). (págs. 37, 38)

Entonces, la transición de la prueba pragmática a la demostración, implica descontextualizar, destemporalizar y despersonalizar los resultados del sujeto que realiza la demostración, permitiendo con ello la expresión de evidencia del cálculo de enunciados para llegar a ella (Montoya E. , 2012). Finalmente, el tránsito entre las pruebas pragmática, intelectual y demostración, involucra el cambio intencionado del formalismo del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Es decir, el geómetra habrá de descontextualizarse de los ejemplos para presentar los resultados a partir de una demostración que no dependa de la persona y que no cambie en ningún tiempo. Por esta razón resulta importante que al resolver un problema se tomen en cuenta los criterios aceptados como prueba en una comunidad escolar (Henríquez, 2014), por ejemplo, en la escuela primaria, el diseño de tareas geométricas y didácticas que realice el profesor debe corresponder al nivel cognitivo de los estudiantes y lo que se indica en los programas de estudio, habrán de especificar el tipo de prueba que se aceptará cuando un estudiante justifique su respuesta a una tarea geométrica relacionada con las propiedades del triángulo, es decir, si se encuentra el alumno en los primeros grados podrán aceptarse pruebas pragmáticas y es probable que en grados superiores sea factible recurrir a las pruebas intelectuales como medio de validación sobre las propiedades geométricas, bajo este entendido será posible analizar el proceso intelectual que realicen los alumnos.

2.7. LA CIRCULACIÓN ENTRE LOS PLANOS DEL ETG

Es importante mencionar que, de acuerdo a Kuzniak (2011, citado en Pizarro, 2018), en la enseñanza de la geometría pueden aparecer tres tipos de trabajo geométrico: 1) de descubrimiento (predomina la intuición y la experiencia); 2) de justificación (las propiedades entran en juego para probar y demostrar) y; 3) de comunicación (se requiere comprender, explicar y presentar los resultados que se han obtenido).

Este proceso hace énfasis en la movilización que provoca una tarea matemática en el ETM, por lo que Kuzniak & Richard (2011, citados en Henríquez, 2014), plantean que el trabajo geométrico debe realizarse a través de la circulación entre los componentes de los planos, dichas circulaciones involucran las génesis descritas y mediante ellas se da cuenta de la realización de ciertas fases en un trabajo matemático o geométrico. Esto implica que, a partir de la articulación de planos y componentes y mediante la acción mediadora de un enseñante, frente a una tarea el estudiante active las génesis y propicie la circulación de los planos, identificando los componentes puestos en juego en la tarea. Esto se ha denominado como la circulación entre los componentes de los planos y representan las distintas fases o momentos de una tarea. En las interacciones entre génesis y componentes se definen tres planos verticales, *descubrimiento, comunicación y razonamiento* que permiten caracterizar las fases (de trabajo) en relación a una tarea dada. “De hecho, la ejecución efectiva de estas fases definirá un cierto número de competencias matemáticas cognitivas fundamentadas en la coordinación de las génesis en sus relaciones con el plano epistemológico” (Kuzniak & Philippe, 2014, pág. 3). Lo anterior se muestra en la figura siguiente (figura 13).

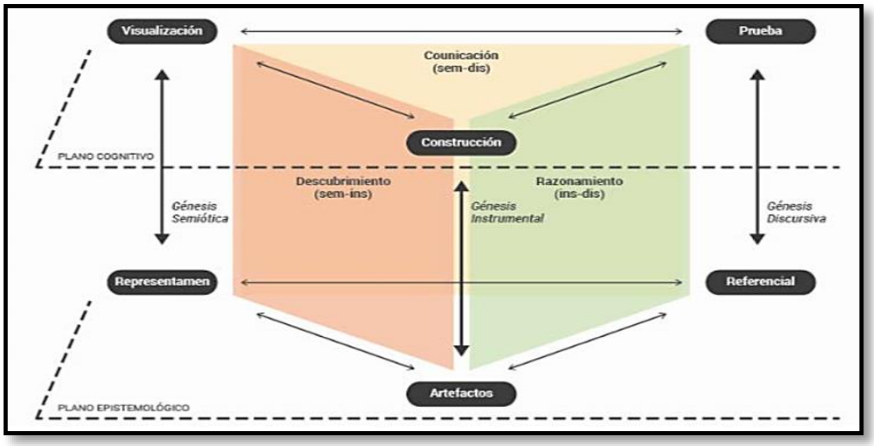


Figura 13. Planos verticales de un ETG. Fuente: *(Kuzniak & Philippe, 2014)*

Descubrimiento y exploración (plano Semiótico-Instrumental Sem-Ins): en este plano las interacciones privilegiadas son la identificación y exploración de los objetos apoyándose en las génesis semiótica e instrumental, resolver los problemas mediante la representación de objetos. Los procesos de construcción mediante artefactos son acciones propias de esta circulación (Henríquez, 2014). Los componentes que se relacionan son: espacio real y local, visualización, artefacto y construcción. En esta fase, el individuo tiene contacto con el problema geométrico a resolver, por ejemplo, cuando se solicita construir un triángulo con o sin instrumentos. Su circulación se muestra en la figura 14.

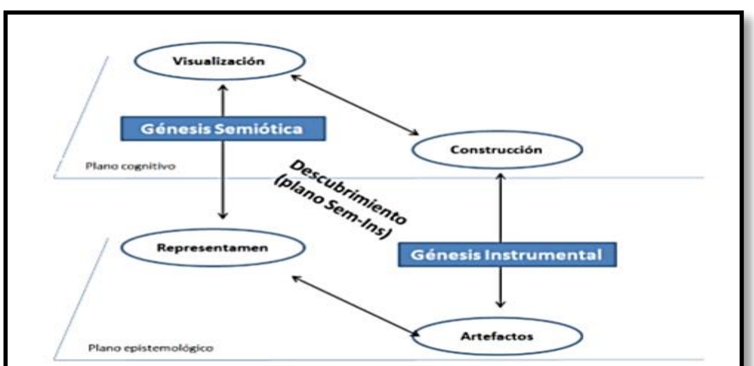


Figura 14. Plano vertical Sem-Ins. Fuente: *(Henríquez, 2014)*.

Justificación y razonamiento (plano Instrumental-Discursivo Ins-Dis): en el plano *instrumental-discursivo* se privilegia el desarrollo del razonamiento y la justificación en relación a la técnica de construcción con las génesis instrumental y discursiva. Los componentes que interrelacionan son: artefacto, construcción, referencial y prueba. En el ejemplo de la construcción del triángulo, en esta fase se solicitaría que comunicaran la forma en que lo construyeron. Lo anterior se observa en la figura 15.

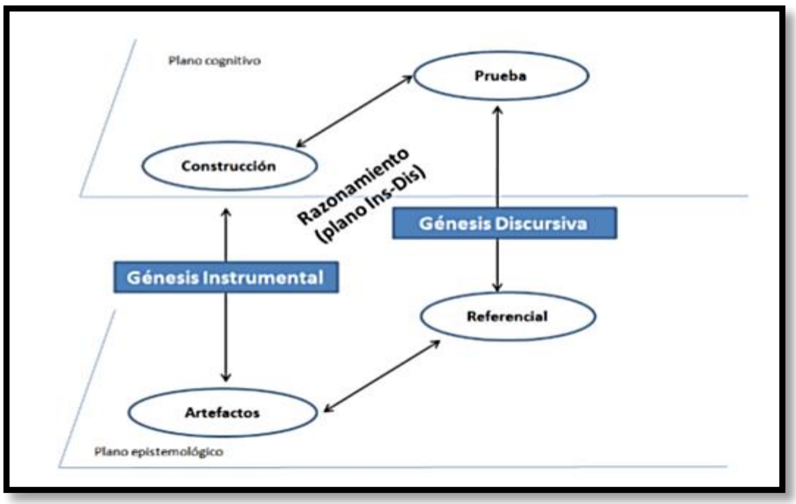


Figura 15. Plano vertical Ins-Dis. Fuente: *(Henríquez, 2014)*.

Presentación y comunicación (plano Semiótico-Discursivo Sem-Dis): este plano *semiótico-discursivo* está orientado a la comunicación de las relaciones matemáticas de los resultados entre los objetos, en ello se involucran las génesis: semiótica y discursiva. Los cuatro componentes que interactúan son: espacio real y local, visualización, referencial y prueba. En el ejemplo del triángulo, sería solicitar al estudiante que dibuje varios triángulos y enuncie sus propiedades solicitando que argumenten, el énfasis se centraría en probar que todo triángulo tiene tres lados pero que existe una clasificación diferente de acuerdo a los lados y ángulos. Por lo tanto, es importante comprender las actividades que se realizan en cada una de las fases de trabajo, las génesis involucradas y el saber en juego. Este plano se observa en la figura 16.

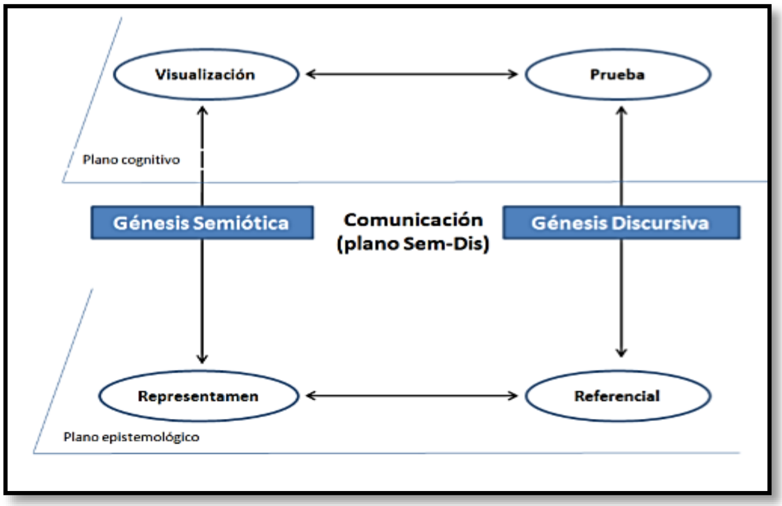


Figura 16. Plano vertical Sem-Dis. Fuente: *(Henríquez, 2014)*

Dado lo anterior, las relaciones entre los planos verticales no dependen sólo de una tarea, sino del dominio matemático que se estudie, los planos y las génesis no deben entenderse aisladas sino como un todo. Para ejemplificar los conceptos analizados, se tomó como referencia una tarea geométrica (figura 17) que forma parte de una propuesta didáctica sobre los triángulos[34], dicha propuesta fue aplicada por la investigadora y cinco futuros profesores en el ciclo escolar 2017-2018 con la finalidad de analizar la potencialidad de la misma e identificar en ella los conceptos del ETG, en la tabla 3, se presenta una interpretación propia de la tarea vista desde el enfoque teórico que se adopta en esta tesis; a continuación se muestra la tarea geométrica en cuestión.

[34] La propuesta didáctica fue tomada de una página con recursos educativos para profesores de nivel básico y medio superior, para conocer la propuesta completa puede consultarse a Moleri (s/f).

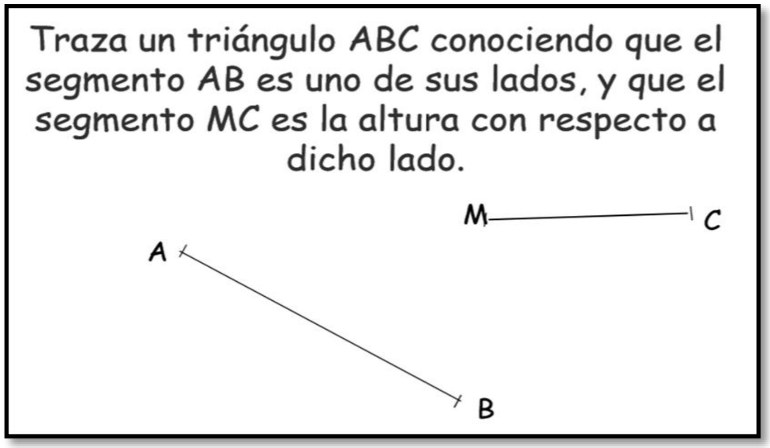


Figura 17. Tarea geométrica incluida en la tarea de pre experimentación. Fuente: Moleri *(s/f)*

Tabla 3. Análisis de la tarea geométrica con base en el enfoque teórico. Fuente: Elaboración propia.

Análisis de la tarea	
Tema y propósito de la tarea.	Explorar nociones y promover avances conceptuales sobre el concepto de altura en los triángulos (Moleri, s/f). Se integró como parte de una serie de situaciones didácticas implementadas antes del trabajo con la intención didáctica de "Localización y trazo de las alturas en los triángulos" que se incluye en el programa de estudios de quinto grado de primaria.
Génesis figural	Como entrada perceptiva, la tarea pone en juego la visualización no icónica, que implica la deconstrucción instrumental para construir una figura (en este caso el triángulo) y señalar la altura. El espacio real y local del objeto geométrico son los segmentos.
Génesis instrumental	En lo experimental, el artefacto simbólico utilizado son los segmentos que le permitirán dar respuesta al problema, para el proceso de construcción es probable que recurra al uso de instrumentos como la escuadra o el compás, en tanto entidades intermediarias.
Génesis discursiva	Para comprender y probar la tarea debe reconocerse la diversidad de triángulos que pueden construir los estudiantes al realizar la tarea, que cumplen con lo solicitado en la consigna y la altura en ellos. El razonamiento de validación implica probar distintas formas de trazar el triángulo con la referencia de la altura, en el discurso de prueba se requiere de apoyo en una experimentación, es decir, se considera una prueba pragmática ligada a la acción y la experiencia. En el caso de esta tarea, la prueba discursiva consistiría en determinar que la altura de un triángulo es el segmento perpendicular a uno de sus lados que va desde el vértice opuesto a este lado o su prolongación, por lo que a cada vértice corresponde una altura.

Paradigma	El paradigma que se privilegia es el de Geometría Natural sobre objetos reales, con un trabajo de tipo material que bien pudiera incluir la propiedad o definición de los triángulos (GI/gII).
Contenidos con que se relaciona	Futuro profesor: Construcción de triángulos. Primaria quinto grado: Localización y trazo de las alturas en diferentes triángulos.

Como se ha visto, la descripción y análisis de los elementos de la perspectiva teórica han permitido caracterizarla, además de dar cuenta de la forma en que se estructura un ETG. Cada uno de los conceptos mencionados son los referentes fundamentales en los cuales se centra el análisis de los datos que se recuperan en esta tesis de investigación en los espacios de trabajo (de referencia, personal e idóneo) y que se presentan en los capítulos posteriores.

CAPÍTULO III
SABER GEOMÉTRICO Y FORMACIÓN DEL PROFESOR. EL ESPACIO DE REFERENCIA

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, el estudio del ETG se interesa en la actividad del individuo cuando efectúa actividades geométricas y dependiendo de su función se pueden distinguir diferentes espacios de trabajo, uno de ellos, el *ETG de referencia* se estructura en función de los criterios matemáticos instituidos por la comunidad matemática, generalmente los investigadores de la geometría.

Con relación a lo anterior, es preciso recordar que este trabajo se centra en la formación de profesores multigrado para la enseñanza de la geometría y él no requiere saber solamente enfrentar tareas geométricas sino que también debe resolver tareas didácticas con relación a las tareas geométricas, es por ello que en el caso de la formación hemos decidido hablar de un Espacio de Trabajo Geométrico que, en su función de espacio de referencia se encuentra estructurado en los programas de estudio de las escuelas normales y de los de educación primaria. Dado lo anterior, en este capítulo primeramente habrá que delimitarse el saber en juego, el interés de la investigación es centrarse en el triángulo, objeto matemático que se encuentra en los programas de estudio de nivel básico. Asimismo, se analizarán los planes de estudios 1997 y 2012 de la licenciatura en educación primaria ya que es en estos planes que se formaron los profesores que participan en la investigación.

El saber ocupa un lugar central en la formación de profesores, por lo que la comprensión que el maestro tenga de éste, le permite organizar actividades didácticas apropiadas para los sus alumnos. En este sentido, es importante recordar con Chevallard, Bosch y Gascón (1997), que el "saber sabio"[35] sufre una serie de adaptaciones que le permiten ser enseñado, a este fenómeno se le denomina transposición didáctica y alude a las transformaciones que los saberes designados para enseñar (por las instituciones) sufren para que puedan ocupar un lugar como objeto de enseñanza. En este sentido, cuando el profesor se enfrenta a ciertos problemas geométricos y luego los transforma para convertirlos en tareas de enseñanza, se puede considerar que es parte de un proceso de transposición didáctica.

Ahora bien, desde la perspectiva de Kuzniak (1994), la formación es una actividad en la que el formado ocupa un doble rol, como estudiante (al resolver tareas matemáticas) y como eventual profesor (al resolver tareas didácticas) y cada uno de estos roles le implica usar saberes distintos, por ejemplo el conocimiento del contenido y de las técnicas para resolver las tareas son propias de su rol como estudiante, mientras que los conocimientos de los propósitos de la asignatura, de las técnicas de la enseñanza, de las características de los alumnos, etc., son propias de su rol como profesor. Entonces, en la formación de profesores se debe realizar la transposición de los saberes disciplinares pero también la de los saberes que lo distinguen como profesor, esto la hace una actividad por demás compleja.

A propósito de la complejidad de la formación, Kuzniak (1994, citado en Aguayo, (2005) reconoce distintas estrategias para la formación, las "no profesionales" y las "profesionales". Entre las no profesionales están *las culturales*, que dan primacía al saber matemático sin ninguna referencia pedagógica; *las de investigación* que intentan desplegar la habilidad investigativa en el formado y *las de autonomía*, que promueven la búsqueda libre de información sobre un tema a partir de bibliografía específica. Por ejemplo, en el caso del estudio de los triángulos, se precisa de estrategias de formación como las señaladas, para que los futuros profesores se apropien de la disciplina en cuanto a conceptos matemáticos se refiere, ya sea a partir de los referentes

[35] Aunque en desarrollos ulteriores de la Teoría Antropológica de lo Didáctico se utiliza la noción de praxeología, en sus primeras conceptualizaciones el "saber sabio" se ubicaba como el saber de referencia para la transposición.

teóricos señalados en el programa de estudios, como de manera autónoma con base en las necesidades que se presenten.

Entre las estrategias profesionales se encuentran *las basadas en mostrar* que colocan al formado en contacto con su futuro medio de trabajo, por ejemplo, las prácticas profesionales son un caso; *las de homología*, en las que se trata que los formadores enseñen de la misma forma que pretenden lo hagan los formados y; *las de transposición*, que ponen el acento en el saber didáctico como saber de referencia, en este caso la reflexión tanto del formador como del formado se centra en las nociones didácticas que deben transponerse, en este caso, sobre el estudio de los triángulos, el papel de las jornadas de práctica así como las sesiones de clase basadas en la resolución de situaciones didácticas, permiten la reflexión de los conocimientos necesarios para el diseño de tareas didácticas que habrán de diseñar los futuros profesores. Es así, como coincidimos con Aguayo (2005) cuando señala que, más allá de seleccionar una estrategia única, se considera que la combinación de las estrategias profesionales es lo más adecuado para una formación profesional.

Ahora, en el caso específico de la formación para la enseñanza de la geometría, coincidimos con la idea de Kuzniak (1994), en que hay momentos en que el formador debe situar a los formados en condiciones similares a las que se enfrenta el niño (homología), pero una vez que el formado deja su papel de aprendiz y se ubica como eventual profesor transforma en actividades de enseñanza las situaciones geométricas que había resuelto, es entonces que se hacen presentes las estrategias de transposición.

Considerando las ideas anteriores puede decirse que en la Escuela Normal los estudiantes deben adquirir conocimientos geométricos pero también es necesario que sean capaces de diseñar y gestionar situaciones de enseñanza, como objetivo central de la formación. Es decir, de lo que se trata en la formación es de “transponer” un doble saber, el saber geométrico y el saber didáctico sobre la geometría y en el proceso transpositivo de este doble saber resulta importante reconocer los saberes y su articulación en los *ETG de Referencia e Idóneo*, puesto que es en éstos donde la institución coloca los saberes que considera adecuados tanto para la formación de profesores como para la formación geométrica de los niños.

3.1. LA GEOMETRÍA. EL SABER EN JUEGO

La geometría ha sido objeto de estudio desde tiempos antiguos, las primeras civilizaciones se enfrentaron a la necesidad de comprender las características de la arquitectura con el propósito de diseñar sus construcciones y desarrollar estrategias para la medición y distribución de los terrenos de cultivo así como en el espacio ocupado por un cuerpo. De acuerdo con Thompson (1993) en la mayoría de los textos antiguos se registra la medida de la tierra como parteaguas para la elaboración de los métodos y conocimientos sobre la geometría.

El acercamiento a partir de la experiencia y la experimentación con líneas y figuras sencillas así como el intento de comprender lo que representaban y la relación entre ellas, condujo a la construcción de un sistema de conocimientos que se denomina Geometría, una de las definiciones básicas la denomina como "la ciencia de las propiedades del espacio y de sus relaciones [...] el arte y la ciencia de la descripción y la medida en el espacio" (Thompson, 1993, pág. 20), otra menos básica la considera como el conjunto de las propiedades invariantes de las figuras de un espacio de cualquier número de dimensiones, respecto de todos los grupos de transformaciones que se puedan definir en él (Klein, 1872, citado en (Henríquez, 2014, pág. 32).

Con el tiempo, las civilizaciones requerían ampliar sus saberes, pues en una cadena lógica de razonamiento es necesario iniciar con principios básicos que den origen a otros principios para especificar características o propiedades que los conforman, es decir, "La medida de figuras sencillas, formadas por líneas rectas y circunferencias, exigía un conocimiento de sus propiedades y fue el estudio de esas propiedades lo que condujo al perfeccionamiento de la geometría" (Thompson, 1993, pág. 4). Entre los primeros conocimientos geométricos de carácter práctico se encuentran los de la cultura Babilónica quienes recurrían a métodos sencillos para la medición de áreas de cultivo, también se les atribuye el invento de la rueda con lo que contribuyeron al conocimiento de la circunferencia, aunque sus cálculos sobre la medida del círculo no eran del todo correctos.

Posteriormente, de acuerdo a Thompson (1993) los egipcios profundizaron en el estudio de la geometría, prueba de ello es un manuscrito aproximadamente del año 2700 a. c. donde se revelan los conocimientos geométricos que empleaban para la agrimensura y el cálculo. Para los egipcios el sistema de medición era puramente práctico, contrario a los griegos que estudiaban las propiedades y relaciones de las figuras geométricas recurriendo a la demostración mediante la lógica pura con base en una perspectiva filosófica, ejemplo de ello es el argumento de Tales de Mileto, quien sostuvo que los hechos geométricos deben sustentarse por postulados en vez de la experimentación y observación. Luego Pitágoras investigó sistemáticamente los principios y aplicó los métodos de la lógica fue, junto con sus discípulos, quien hizo las primeras demostraciones de algunas preposiciones ya conocidas.

Otro de los más notables es Euclides, creador de la obra los *Elementos*[36] en la que agrupa y sistematiza todos los conocimientos existentes en su tiempo sobre la geometría, con ello Euclides de Alejandría funda la geometría a partir de un pequeño número de postulados de los cuales se deducen otras proposiciones, formulando con gran precisión los fundamentos, los enunciados de ellas y clasificando las definiciones principales, además fija una serie de axiomas como punto de partida para otras proposiciones geométricas. De acuerdo con Thompson (1993), en los *Elementos* se supone que el lector sabe emplear la regla y el compás, por lo que las demostraciones y soluciones están basadas en la circunferencia y línea recta (Geometría elemental o euclidiana), estos primeros acercamientos deductivos a los conceptos geométricos sentaron las bases del estudio a profundidad de la geometría.

[36] En el siguiente apartado describiremos algunos aspectos esenciales de la geometría euclidiana plana por lo que se retoma esta obra como punto de partida.

3.1.1. La geometría Euclidiana como objeto escolar.

La geometría euclidiana es la disciplina matemática que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional, se basa en las definiciones y axiomas descritos por Euclides en su tratado *Elementos*. En el libro I de Euclides se inicia el estudio de la geometría plana, hoy conocida como Geometría Euclidiana Plana, algunas de las 23 definiciones contenidas ahí conciernen al punto, recta, círculo, rectas paralelas, igualdad de los triángulos así como la igualdad de sus áreas (Silva & De Barros, 2011), también se enlistan cinco postulados, cinco nociones comunes y 48 proposiciones.

Lo que Euclides propuso fue construir axiomáticamente la geometría plana en la que, para confirmar que una proposición es verdadera, debe demostrarse que esta afirmación sigue la secuencia lógica de otra afirmación, si no se acredita como verdadera debe repetirse el proceso utilizando la misma u otra afirmación hasta que se justifique como cierta, esta afirmación juega el papel de postulado o de axioma y utilizando este conjunto de axiomas es como se demuestran los teoremas. Históricamente, los *Elementos* es la primera obra deductiva porque propone encadenar conocimientos que se suponen ciertos hasta obtener nuevos conocimientos, en suma, se trata de obtener proposiciones como consecuencia lógica de las proposiciones iniciales, la mayoría de las afirmaciones geométricas se pueden deducir de las más básicas. Un punto a considerar es que en sus razonamientos Euclides utilizó resultados que si bien son claros intuitivamente, no necesariamente se definen por axiomas, por ello algunas demostraciones pueden estar basadas en la experiencia o la intuición del geómetra, lo que permite que el estudiante pueda deducir ciertos postulados sin estar obligado a enunciar todos los axiomas involucrados (Luna & Álvarez, 2004).

Con el tiempo, además de la euclidiana o sintética han surgido una serie de geometrías como la no euclidiana (que difiere en algo de los postulados de Euclides), la proyectiva (que estudia las propiedades descriptivas de las figuras), la dinámica (mediación entre conocimiento perceptivo y geométrico) y la analítica (que utiliza el álgebra). Esta diversificación de las geometrías ha tenido influencia en la discusión sobre cuál debe enseñarse en la educación básica. De acuerdo con Henríquez (2014), la mayor parte de las proposiciones del Libro I de los *Elementos* son estudiadas en el nivel de secundaria y en coincidencia con Broitman e Itzcovich (2004), señala que entre las geometrías es posible considerar que la geometría euclidiana involucra un nivel de complejidad accesible para los grados de la educación básica. En este sentido, es importante señalar que las primeras experiencias del individuo con el exterior son de tipo espacial, a través de la aprehensión del mundo se activan los sentidos y se da paso a las representaciones mentales, esta concepción de aprendizaje es adoptada por Broitman e Itzcovich (2004) para explicar el pasaje de un estado de menor conocimiento a uno de mayor ya que, una vez que se han conceptualizado las figuras, se convierten en objetos teóricos y las propiedades que se enuncian de las mismas no son necesariamente referentes físicos. Estas propiedades habrán de ser demostradas por medio de argumentaciones.

La parte de la Geometría que estudia la construcción, relaciones, descripción y medida se le conoce como *Geometría Plana* y todas las líneas y figuras que se trazan en un plano son denominadas figuras planas. La geometría plana es parte de la geometría euclidiana y estudia los elementos cuyos puntos están contenidos en un plano, además se relaciona con la geometría espacial que se ocupa de las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional o espacio euclídeo. La geometría del espacio amplía las proposiciones de la geometría plana y es la base elemental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio y la geometría descriptiva.

Resulta evidente que en la educación básica, particularmente en la educación primaria (para niños de entre 6 y 12 años de edad), no se debe renunciar a la geometría elemental basada en un razonamiento hipotético-deductivo apoyado en un trabajo heurístico que implique una representación inicial centrada en la intuición espacial y la realidad (GI), pero con validaciones o justificaciones derivadas de un sistema axiomático. A decir de Kuzniak (2013), será congruente referirse a ésta como Geometría Euclidiana Local (GII). Es en este marco que se sitúa este estudio, pues los problemas planteados a los estudiantes no exigen la utilización de todos los axiomas en la justificación o validación.

Ahora bien, en tanto que los *Elementos* de Euclides utilizan el razonamiento hipotético-deductivo como principio, existen algunos términos del sistema axiomático que precisan definirse para una mejor comprensión, en el caso de la presente tesis incluimos algunas definiciones básicas que clarifican el proceso de análisis de los datos recuperados, para estas acepciones se tomaron como base las ideas de Thompson (1993) y Baldor (2004):

- Teorema: es toda proposición cuya validez se puede demostrar utilizando otros elementos conocidos, mediante operaciones lógicas perfectamente coordinadas. No siempre tenemos evidencia directa de la validez de un teorema, eso depende en parte de su grado de complejidad y de nuestra mayor o menor familiaridad con su contenido. Un teorema requiere demostración cuando no hay evidencia de su validez.
- Axioma: supuestos que se pueden aplicar en matemática de forma general, son aceptados sin demostración evidente, en la actualidad casi no existe diferencia entre axioma y postulado debido a que ambos suelen ser el sustento de los principios básicos de la ciencia.
- Postulado: es un supuesto que se puede aplicar en un dominio particular y que no es evidente por sí mismo, son proposiciones que se aceptan como verdaderas sin necesidad de demostración, el enunciado de una sencilla relación que se admite como verdadera.
- Propiedades: características que forman parte de una figura geométrica en particular.

3.1.2. El triángulo. El objeto geométrico de estudio.

Para realizar un trabajo como el que se ha propuesto, es necesario seleccionar un objeto geométrico en torno al cual se estructuren los diferentes ETG, en este caso se ha seleccionado el triángulo. Un criterio fundamental de tal selección es la presencia que éste tiene en la educación primaria y secundaria, es decir, a pesar de ser una de las figuras aparentemente más sencillas, en la educación básica se incluyen múltiples lecciones para estudiar algunas de sus propiedades y/o características.

Para conocer los aspectos básicos del triángulo que sirven de referencia en la enseñanza puede decirse con Thompson (1993), que una figura geométrica es la combinación de puntos, líneas y superficies y una figura plana es aquella que está enteramente en el plano. Pero además, hay un tipo de figuras que se denomina "figuras cerradas" entre las cuales se encuentra una figura plana rectilínea cerrada que es el triángulo. En términos generales, el triángulo se puede definir como un polígono de tres lados, una porción de plano limitada por tres segmentos unidos dos a dos por sus extremos. Los tres segmentos que lo limitan se denominan lados y los extremos de los lados vértices. En un triángulo se consideran dos tipos de ángulos: interior (formado por dos lados) y exterior (formado por un lado y la prolongación de otro). El triángulo se puede considerar como el más simple de todos los polígonos, pero su importancia radica en que sirve de base para el posterior conocimiento de los polígonos y las figuras planas (Puertas y Vega, 1991, citado en González, Delgado y Aguayo (2017).

En el libro I de Euclides hay 48 proposiciones, postulados y axiomas, 26 de ellas tratan sobre las propiedades y teoremas del triángulo. Dichos elementos constituyen el conjunto de "saberes sabios" o de referencia que pueden estar contenidos en el currículo escolar tanto de la Escuela Normal como de la escuela primaria. De acuerdo a los intereses de investigación de la presente tesis se retoman los aportes de Thompson (1993); Barredo (s/f); Godino y Ruiz (2002); y Jara y Ruiz (2008); y en lo que sigue se incluyen los elementos, propiedades y criterios del triángulo de conocimiento más significativo en los cuales se centrará el diseño de las situaciones de referencia y el análisis de los espacios de trabajo en la presente tesis.

Propiedades generales de triángulo

- La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo suman 180°
- Cada ángulo de un triángulo equilátero vale 60°
- En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a lados iguales son iguales
- Un triángulo rectángulo isósceles tiene un ángulo recto y sus catetos iguales, luego los ángulos agudos también son iguales, e iguales a 45º
- Una altura puede ser interior al triángulo, exterior al mismo, o incluso, coincidir con alguno de sus lados (según el tipo de triángulo)
- Si el triángulo es rectángulo: la altura respecto a la hipotenusa es interior, y las otras dos alturas coinciden con los catetos del triángulo
- Si el triángulo es acutángulo: las tres alturas son interiores al triángulo"
- Si el triángulo es obtusángulo: la altura respecto al mayor de sus lados es interior, siendo las otras dos alturas exteriores al triángulo

Criterios de construcción de triángulos

- Conocidos un lado y los ángulos adyacentes
- Conocidos dos lados y el ángulo formado por ellos
- Dados sus tres lados
- Conocidos dos lados y uno de los ángulos que no es el formado por ellos

Teoremas del Triángulo rectángulo

- Teorema de Pitágoras: en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

- Teorema de Altura: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa

Teoremas del triángulo

- Teorema de Pitágoras generalizado: el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Formula de Herón

- Se calcula el área de cualquier polígono, regular o no, con descomponerlo en triángulos. La fórmula que permite calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados, se llama fórmula de Herón, esta fórmula es la más útil para calcular áreas de triángulos, ya que la medida de los lados es una operación fácil.

Rectas notables en el triángulo

- Mediatriz: Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio. Los puntos de la mediatriz de un lado de un triángulo equidistan de los vértices que definen dicho lado.
- Altura: Segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación. Una altura puede ser interior al triángulo, exterior al mismo, o incluso, coincidir con alguno de sus lados (según el tipo de triángulo).
- Mediana: Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo son interiores al mismo.
- Bisectriz: Segmento que divide al ángulo en dos partes iguales. Los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo.

Puntos notables del triángulo

- Circuncentro: Punto de intersección de las mediatrices
- Incentro: Punto de intersección de las bisectrices
- Baricentro: Punto de intersección de las medianas.
- Ortocentro: Punto de intersección de las tres alturas

Congruencia de triángulos

- Dos triángulos son congruentes si dos lados de uno tienen la misma longitud que dos lados del otro triángulo, y los ángulos comprendidos entre esos lados tienen también la misma medida.
- Dos triángulos son congruentes si dos ángulos interiores y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida y longitud, respectivamente.
- Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.

Triángulos semejantes

- Criterio ángulo, ángulo, ángulo (A-A-A). Si en dos triángulos los ángulos de uno son respectivamente congruentes con los ángulos del otro, los dos triángulos son semejantes.
- Criterio lado, ángulo, lado (L-A-L). Si en dos triángulos, dos lados de uno son proporcionales a dos lados del otro y si los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes, entonces los dos triángulos son semejantes.
- Criterio lado, lado, lado denotado (L-L-L). Si en dos triángulos los lados de uno son proporcionales a los lados del otro, entonces los dos triángulos son semejantes.

- Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina un segundo triángulo semejante al primero
- En cualquier triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa, es decir, la altura trazada desde el vértice del ángulo recto hasta la hipotenusa, divide al triángulo en otros dos triángulos que son semejantes entre sí y semejantes al triángulo original.

Teorema de la desigualdad del triángulo

- La suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es siempre mayor que la longitud del tercer lado.
- Una condición para la existencia de un triángulo es que cualquier lado es mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos y menor que su suma.

Teorema de Tales

- Paralelismo en dos rectas: si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.
- Sobre los triángulos rectángulos, circunferencias y ángulos inscritos: sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC y centro "O", distinto de A y de C. Entonces el triángulo ABC, es un triángulo rectángulo donde <ABC = 90º.

Las anteriores definiciones pueden estar o no presentes en los datos recuperados para el análisis, pero se han integrado como referentes básicos para este estudio, existiendo la posibilidad de incluir algunos más que resulten en los hallazgos.

3.2. EL ESPACIO DE TRABAJO DE REFERENCIA

Esencialmente, el estudio de la geometría tiene que ver con establecer relaciones no sólo en el espacio físico, sino en un espacio conceptualizado, lo que implica que más allá de la comprobación empírica, la validez de las conjeturas geométricas debe hacerse mediante razonamientos sustentados en las reglas de argumentación y en particular, en la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya conocen. Este es un principio doble, es un principio geométrico que al mismo tiempo orienta la enseñanza, lo que permitiría colocarlo en el centro de un ETG, no obstante esto no ha sido siempre así ya que los programas de formación de profesores en las escuelas normales han sufrido una serie de modificaciones recurrentes.

El Plan de estudios que en México se puso en marcha en 1984 (Plan 84) marca el momento en que la carrera de profesor se eleva al nivel de licenciatura, el propósito principal era formar docentes reflexivos, analíticos y críticos con habilidades para ejercer la docencia y la investigación, pero en su estructura curricular había ciertas lagunas relacionadas con la formación específica para la enseñanza. Posteriormente, en 1997 se pone en marcha el *Plan de Transformación a las Escuelas Normales* y se propone una malla curricular donde se incluían las asignaturas de *Matemáticas y su enseñanza I y II* centradas en una formación para la enseñanza, diluyéndose un tanto el saber disciplinar de los contenidos.

En el 2012 nuevamente se cambian los Planes y Programas de la Educación Normal con el fin de articular la formación de los profesores con la reforma a la educación básica de 2009. En él se incluyen las asignaturas de *Aritmética, Álgebra, y Geometría* (su aprendizaje y enseñanza) y *Procesamiento de información estadística,* secuenciadas entres sí; esta última, además de sus fines didácticos contribuye a la formación del docente investigador que también se menciona en dicho plan. La idea que subyace en dichos cursos es la de formar a los estudiantes con énfasis en el conocimiento disciplinar y una vez que dominen un determinado contenido surgirá en "automático" la capacidad de transponer los saberes adquiridos.

Ahora bien, recordemos que en el espacio de referencia se definen los saberes matemáticos que habrán de estudiarse en un determinado grado escolar y son indicados por las instituciones oficiales, por ello, en tanto que el objetivo en este capítulo es analizar el Espacio de referencia para la formación de los estudiantes de la Escuela Normal (Plan 2012) y de profesores en servicio (formados con el Plan 97) es necesario analizar el Espacio de Referencia en uno y otro plan de estudios, y revisar los contenidos geométricos incluidos en los programas de estudio de la escuela primaria.[37]

El análisis al espacio de referencia considera dos vertientes. En la primera se analizan los tipos de tareas geométricas, los paradigmas que predominan, las génesis que pretenden activar y los componentes que circulan entre sí (planos). En la segunda se analiza el tipo de tareas didácticas relacionadas con el profesor como el diseño de las clases, los momentos que predominan (enseñanza y aprendizaje) y las estrategias de formación que se proponen implícitamente. En el capítulo anterior hemos expuesto la noción de tarea didáctica de Kuzniak y Philippe (2014), no obstante, para mayor claridad de la categorización realizada, es importante complementar esta acepción con lo que Verdugo (2017) define como tarea en el sentido del rol docente y como estudiante, desde la perspectiva teórica del ETM,

> En el ETM se deben distinguir los tipos de tareas dependiendo del contexto y de sus espacios: La tarea en el sentido del "deber" del docente y del estudiante, y la tarea en el sentido de un "cierto desafío", pudiendo existir una tarea, un conjunto de tareas o una secuencia de tareas que activarán los polos del espacio de trabajo matemático. Dicha tarea es creada por el docente con el objetivo de enseñar un conocimiento matemático determinado. Una secuencia de tareas será creada con el objetivo fundamental de activar el ETM por sus distintos polos, es decir, generar una circulación, y no será necesariamente una sola tarea la que active todo el ETM, sino probablemente varias las que cumplan esa labor. Además, estas tareas inevitablemente presentarán distintas entradas a los diferentes polos, por lo que es fundamental focalizarse en un cierto propósito, ya sea para el nivel educacional que va dirigida la tarea o para desarrollar

[37] En este capítulo se presentará solamente los contenidos geométricos que conforman los programas de educación primaria, desde una mirada puramente matemática, debido a que las tareas didácticas sugeridas para el profesor se analizarán desde el espacio idóneo con la revisión del libro del maestro y del alumno.

> cierta habilidad o cognición. En definitiva, la tarea (actividad intelectual) es el motor que permite activar el ETM entre sus planos, polos, y génesis. (págs. 46, 47).

Es en este sentido que se revisa la activación del ETG de acuerdo con el propósito que tienen las tareas incluidas en la formación de los profesores al tomar en cuenta su rol de estudiantes. Asimismo, como una categoría en que versa el análisis la hemos denominado tarea geométrica, consideramos necesario complementar la definición anterior con lo expuesto por Nechache (2016), pues permite delimitar aquellas que se clasificarán en este rango,

> Una tarea matemática en un espacio de trabajo matemático es para nosotros cualquier ejercicio, pregunta o problema realizado en un tiempo limitado y en un contexto dado. Las condiciones de realización de este trabajo matemático están definidas por el espacio de trabajo matemático en el que se propone la tarea (Nechache, 2016, pág. 229)

Por lo tanto, las tareas geométricas consideramos son las tareas asociadas al trabajo que realiza el geómetra, tales como la visualización o construcción, además de los problemas que se plantean para propiciar la activación de los planos, con base en lo anterior, se clasifican los tipos de tareas geométricas sobre el triángulo; para organizar las tareas didácticas retomamos aquellas que se relacionen con el triángulo didáctico (saber, profesor y alumno) que permiten al profesor realizar la transposición de los saberes matemáticos. Asimismo, se consideran las estrategias de formación definidas por Kuzniak (1994), para analizar cuáles subyacen en las tareas didácticas propuestas. Ese es precisamente el objetivo de los siguientes apartados, analizar los tipos de tareas que se proponen en los programas de estudio de las escuelas Normal y primaria, considerando que en ellos se plasma el ETG de referencia. Las preguntas que guían el análisis son las siguientes:

- ¿Qué tipos de tareas geométricas se incluyen?
- ¿Cuáles son las génesis del ETG que se favorecen?
- ¿Qué paradigma geométrico predomina en los programas de estudio?
- ¿Principalmente en qué plano del ETG se ubican las tareas propuestas?
- ¿Cuáles son los tipos de tareas didácticas que se proponen en la formación del profesor?

- ¿Cuáles son las estrategias de formación que guían el desarrollo de los programas?

3.2.1. El ETG en el Plan 97. La primacía de lo didáctico.

Se ha mencionado que la formación para la enseñanza de las matemáticas en el Plan 97 se estructuraba mediante dos asignaturas, *Matemáticas y su Enseñanza I y II* que se impartían durante el segundo y tercer semestre de la carrera, ambas se dividían en "bloques", y "en cada bloque había dos tipos de contenidos: los que tienen como propósito la formación en matemáticas del futuro profesor y aquellos en los que se reflexiona sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria" (SEP, 2001, pág. 14). En la primera asignatura (Matemáticas y su Enseñanza I) se ubicaba el bloque dedicado a la geometría[38] y sus propósitos eran:

Que los alumnos:

1. Profundicen en el conocimiento y la comprensión de las nociones básicas sobre geometría.
2. Utilicen adecuadamente los instrumentos para efectuar trazos geométricos.
3. Analicen secuencias de situaciones didácticas para el estudio de las nociones de geometría.
4. Utilicen diversos materiales como recursos que favorecen el aprendizaje de la geometría. (SEP, 2001, pág. 30)

Los temas que se incluían en dicho bloque eran:

- Orientación, organización y estructuración del espacio; el plano cartesiano.
- Propiedades geométricas de figuras planas y cuerpos.
- Dibujo y trazos geométricos. Construcciones con regla y compás.

[38] Los bloques de la primera asignatura eran: Aprender matemáticas al resolver problemas; Los números naturales y el sistema decimal de numeración; Las cuatro operaciones básicas con números naturales y; La geometría. Los bloques de la segunda asignatura eran: La medición; Los números racionales; Procesos de cambio y; Tratamiento de la información, predicción y azar.

- Situaciones didácticas para el desarrollo de la orientación espacial.
- Situaciones didácticas para el conocimiento de propiedades geométricas. (SEP, 2001, pág. 30)

Asimismo, en el bloque de medición (de la asignatura *Matemáticas y su enseñanza II)*, se consideraban aspectos relacionados con la geometría tal como se observa en el siguiente propósito:

> Analicen la noción de medición como una comparación entre dos magnitudes del mismo tipo y conozcan distintos procedimientos para comparar y medir magnitudes, desde los recursos informales hasta el uso de fórmulas.

Derivado del mismo, los temas a estudiar eran:

- Medición de magnitudes diversas: longitud, superficie, capacidad, volumen, ángulos, peso, tiempo. Sistemas de medición.
- Procesos de construcción de fórmulas.
- Sesión de observación y práctica.

Para apoyar el desarrollo de estos cursos se proponía una bibliografía básica, a saber:

- Block (1995). *La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria. Taller para maestros. Parte I* editado por la Secretaría de Educación Pública para distribuirlo a todos los profesores en servicio de México, aunque en ese mismo tiempo también se distribuyó a todos los estudiantes de las escuelas normales del país.
- Martínez y Rivaya (1998). Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría.

La característica principal de estos textos es que proponen una amplia cantidad de actividades para el estudio de la geometría, no obstante, en el programa de la asignatura (Matemáticas y su Enseñanza I y II), se indica el trabajo tan solo con unas cuantas actividades, en este tenor podemos suponer que el formador puede tomar la decisión de desarrollar las sesiones con los futuros profesores a partir de las actividades indicadas en el programa de la asignatura o bien, incluir algunas otras que suponga útiles para complementar la comprensión de los contenidos matemáticos, por lo tanto, consideramos importante analizar todas las tareas propuestas en los documentos de la bibliografía básica. Es importante mencionar, que a pesar de que el programa de las asignaturas se estructura en función de temas y propósitos genéricos, en los textos de apoyo se incluyen implícita y explícitamente los "contenidos geométricos" (propiedades, teoremas, etc...).

En el texto de Martínez y Rivaya (1998) se encuentran los siguientes contenidos:

- Triángulos y poliedros de caras triangulares.
- Elementos básicos del triángulo (vértices, lados y ángulos).
- Noción de triángulo.
- Propiedades relativas a los ángulos, a los lados y relaciones entre lados y ángulos; tipos de triángulos.
- Introducción a la noción de altura.
- Relación entre base y altura.
- Introducir las nociones de cateto e hipotenusa.
- Condición fundamental de construcción de triángulos.
- Semejanza e igualdad de triángulos.
- Construcción de figuras en el plano y luego en el espacio. (Martínez & Rivaya, 1998, págs. 76-83)

En el texto de Block (1995) se incluyen los siguientes contenidos:

- Condición fundamental de construcción de triángulos.
- Noción de altura, base y área en el triángulo
- Elementos del triángulo (ortocentro, mediatriz, circuncentro, bisectriz, incentro).

- Vértices, lados, ángulos. (págs. 159-179, 211-220)

En este segundo documento, la definición de cada contenido aparece escrito al final de cada secuencia de actividades.

Ahora, en el bloque dedicado a la medición se incluyen tareas de naturaleza geométrica y un primer rasgo que llama la atención es que las tareas geométricas y didácticas están fuertemente relacionadas, por esta razón su análisis se incluye al final de este apartado. En la tabla 4 se presentan los tipos de tareas y cantidad de cada una, incluidas en las asignaturas de Matemáticas y su Enseñanza I y II del Plan 97.

Tabla 4. Tareas geométricas y didácticas incluidas en las asignaturas de Matemáticas y su Enseñanza I y II (Plan 97). Fuente: Elaboración propia.

En el programa de la asignatura		**En los textos de apoyo (opcionales)**	
Tareas geométricas	Tareas didácticas	Tareas geométricas	Tareas didácticas
12	19	91	99

Con base en la información presentada (tabla 4), podemos inferir que la idea que subyace en la asignatura de Matemáticas y su Enseñanza I y II en el Plan 97 es la de una formación centrada en la didáctica, el mayor número de tareas de esta índole parece indicarlo. Otro rasgo observable durante el análisis realizado y como se observa en la tabla 4, es que apenas una pequeña parte de las actividades contenidas en los programas de apoyo, tanto didácticas como geométricas, se sugieren en los programas del curso.

3.2.1.1. Tareas geométricas.

En lo que toca a las tareas geométricas, lo primero que llama la atención es que las actividades incluidas en el bloque destinado a la geometría son sumamente breves, sólo se proponen unas cuantas tareas (cinco secuencias que incluyen actividades y páginas de la bibliografía) y no se describen las actividades como se hace en otros bloques de la asignatura, sólo se sugiere complementarlas con otros textos. Este rasgo parece indicar que al bloque de geometría no se le da la misma importancia que a otros del mismo curso.

En lo que corresponde a los tipos de tareas geométricas sobre el triángulo se han identificado las siguientes:

- *t1. Resolución de problemas.* Son tareas que piden la solución de una situación problemática e incluyen cuestionamientos referidos a alguna propiedad o criterio en particular. Aunque en ocasiones aparecen al inicio de un tema, por lo general se ubican después de los ejercicios. Las más numerosas se plantean al concluir otras tareas de construcción. También se incluyen problemas de los libros de los niños que los profesores en formación deben resolver.
- *t2. Visualización.* Son tareas en las que principalmente se demanda identificar características de los triángulos. La mayoría comprenden la visualización icónica ya que están centradas en imágenes. En otras, se muestran figuras compuestas y se requiere encontrar la relación entre propiedades o criterios. Si bien en este tipo de tareas no sólo se engloba la visualización, sí es la actividad central. Un ejemplo de este tipo es la siguiente actividad (figura 18):

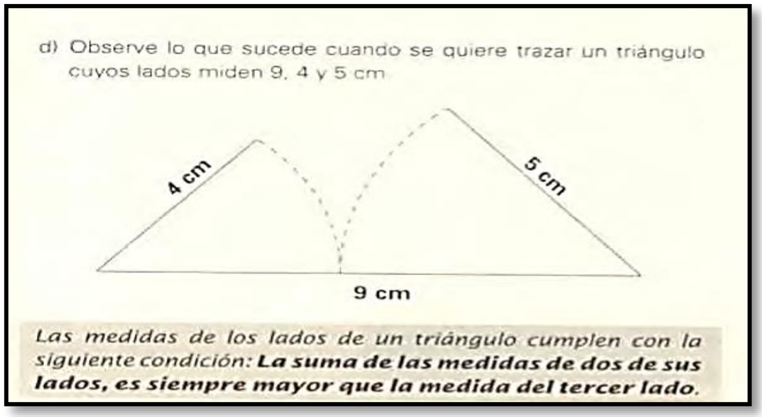


Figura 18. Ejemplo de tarea de Visualización. Fuente: Block *(1995, pág. 171)*

- *t3. Construcción.* Son tareas donde se requiere construir triángulos a partir de sus ángulos, de la longitud de sus lados o de su definición. Para resolver estas tareas se utiliza el geoplano, palillos de dientes, varillas de madera, tangram, papel doblado, escuadras, regla, compás y material recortable incluido en el paquete didáctico. En ocasiones, se solicita realizar la construcción a partir de una propiedad o criterio. Cabe destacar que en esta categoría de tipo de tareas se consideran también aquellas que proponen trazado, copiado y reproducción de figuras.
- *t4. Justificación.* Son tareas donde se demanda explicar cómo resolvió la tarea. Comúnmente se presentan después de una actividad de construcción o visualización. En aquellas donde se estudia el área de triángulos, sí se pide la explicación como punto de partida para determinar los procedimientos de obtención de la fórmula.
- *t5. Clasificación*. Son tareas que piden organizar tipos de triángulos en función de sus ángulos y/o medidas de sus lados. Frecuentemente se plantean después de una construcción o de haber definido una propiedad o criterio de los triángulos.
- *t6. Descomposición.* Son tareas que parten de la visualización, en ellas se pide descomponer una figura en otra, por ejemplo, cuadriláteros que se descomponen en triángulos. También están las que piden manipular materiales concretos, recortar o doblar para formar una nueva figura.

- *t7. Verificación.* En éstas se utiliza el juego de geometría o la superposición de figuras para comprobar la tarea resuelta. También se integran las de repetición de ejercicios, ya que se emplean como una especie de práctica o verificación de lo aprendido, por ello se solicita repetir el procedimiento variando el tipo de triángulo o las medidas.

Para analizar los tipos de tareas en función de los componentes del ETG se contaron las actividades incluidas en cada secuencia de tareas[39] y las actividades complementarias[40] sugeridas, que favorecían una misma propiedad o criterio. Cabe destacar que están secuenciadas, aunque también hay las que pueden trabajarse por separado.

Otro criterio del análisis consistió en identificar las que potenciaran el ETG, por esta razón se darán ejemplos de aquellas que movilizan las génesis y favorecen la circulación de los componentes del ETG y que son contrarias a aquellas que se centran sólo en un elemento del espacio de trabajo. Añádase a esto, que se analizó su ubicación en un determinado paradigma geométrico. En la tabla 5, pueden observarse los tipos de tareas, la génesis que activan y el paradigma sobre el que se basan.

Tabla 5. Tareas geométricas incluidas en las asignaturas de Matemáticas y su Enseñanza I y II (Plan 97). Fuente: Elaboración propia.

Tipo de tarea geométrica	No. de tareas	Génesis que se activan	Circulación de los planos	Paradigma geométrico
Resolución de problemas	12	Figural e instrumental	Sem-Ins, Ins-Dis	GI/gII
Visualización	10	Figural	Sem-Ins, Sem-Dis	GI/gII
Construcción	30	Instrumental y figural	Sem-Ins	GI/gII
Justificación	12	Instrumental y discursiva	Ins-Dis, Sem-Dis	gI/GII
Clasificación	3	Figural	Sem-Dis	GI/gII

[39] Las secuencias de tareas corresponden al texto de Block (1995). En total son 13 actividades.
[40] Las actividades complementarias corresponden al texto de Martínez y Rivaya (1998). En total son 33 actividades.

Descomposición	8	Instrumental	Ins-Dis	GI/gII
Verificación	10	Instrumental, discursiva	Ins-Dis	GI/gII

Como se puede apreciar (tabla 5), la mayoría de las tareas son de construcción y activan las génesis instrumental y figural y aunque predomina el uso de artefactos simbólicos, las justificaciones solicitadas no promueven la demostración, lo cual es importante para favorecer el razonamiento geométrico en los estudiantes de nivel superior, pues el futuro profesor de educación primaria debe tener un conocimiento disciplinar de las asignaturas a impartir. Otro punto destacable es que las tareas de resolución de problemas no siempre se ubican como primer momento del proceso de estudio de un contenido y por ello en muchas ocasiones no se pide se resuelvan con procedimientos informales, en su mayoría tienen la intención de verificar una propiedad ya estudiada.

Se debe agregar que la mayoría de tareas que se proponen en este material son similares a las que se incluyen en los libros de texto de los alumnos, y otras que se indica desarrollar con los estudiantes se sugiere aplicarlas igual con los niños. Por otra parte, a pesar de que para desarrollar el razonamiento geométrico es necesario resolver tareas ligadas con las entradas del “constructor” y el “inventor” (visualización no icónica), las cuales requieren argumentos discursivos sobre las propiedades de las figuras, este tipo es el más escaso en el ETG propuesto en el Plan 97. También llama la atención el paradigma geométrico dominante, el GI, porque de acuerdo con Montoya, Henríquez, Menares y Barra (s/f), en este paradigma no está permitido el uso de los artefactos como medio de prueba, sólo se utilizan para realizar las construcciones.

Ahora, con relación a la circulación de planos, se puede notar que no siempre se activan los cuatro componentes de un ETG, por lo general la tareas solamente hacen énfasis en algunos. Un ejemplo de una tarea típica en la que no se circula por todos los planos se muestra en la figura 19, ésta es una actividad relacionada con la condición fundamental para la construcción de triángulos, incluye la justificación y es posible generar diversos tipos de prueba, pero no se propone un espacio para la validación de la prueba, el texto del profesor en formación lo conduce directamente hacia esa validación.

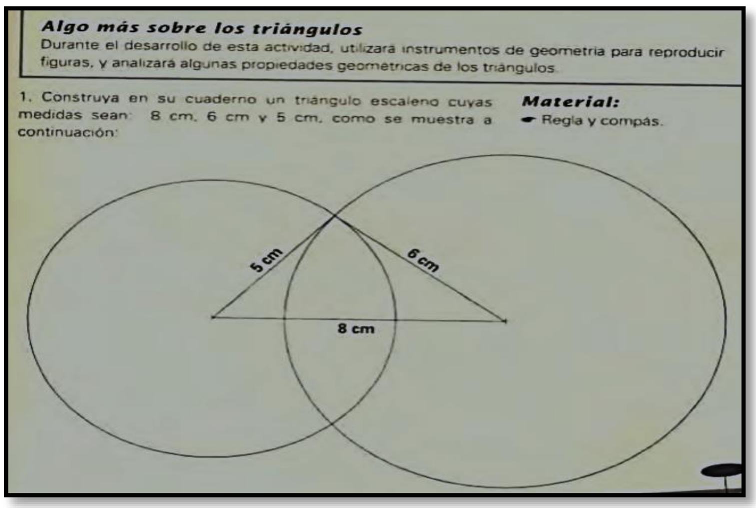
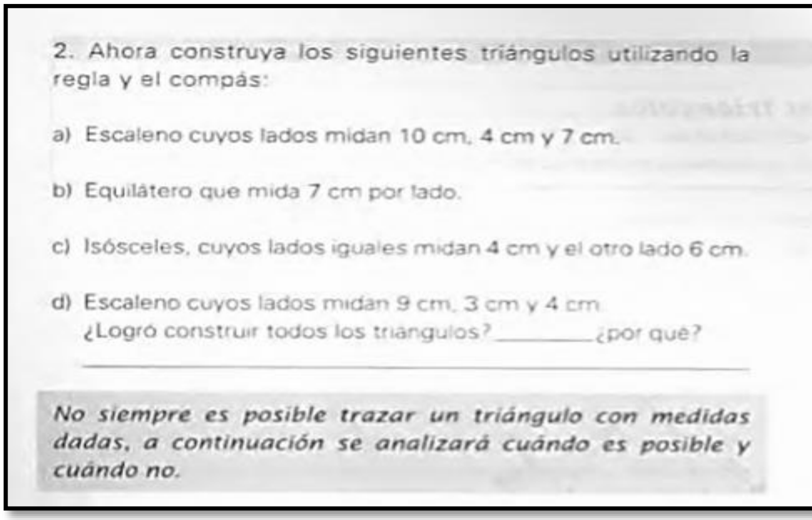


Figura 19. Ejemplo de secuencia didáctica con una tarea de construcción. Fuente: Block *(1995, pág. 169)*.

En esta tarea se pide construir un triángulo escaleno pero hasta el momento no propone describir la justificación del proceso de construcción, forma parte de una secuencia didáctica completa pero sería importante considerar incluir la argumentación de los procesos realizados desde el inicio para identificar el nivel de avance en los tipos de pruebas que pueden ser incluidos. También se activa la génesis figural a través de la visualización icónica, en razón de lo anterior Duval (2005) señala que la visualización implica la relación entre visualización de las formas y lenguaje discursivo (que no se solicita en esta tarea). Si bien es cierto que las figuras posibilitan el trabajo heurístico, en este caso se considera una aprehensión perceptiva solamente. Igualmente se activa la génesis instrumental al solicitar la construcción mediante artefactos materiales (regla y compás). Por estas características podría decirse que por los componentes movilizados la tarea se inscribe en el plano semiótico-instrumental y propicia el momento de descubrimiento, en cambio, luego de esta primera consigna se plantean otras actividades que son analizados a continuación.


2. Ahora construya los siguientes triángulos utilizando la regla y el compás:

a) Escaleno cuyos lados midan 10 cm, 4 cm y 7 cm.

b) Equilátero que mida 7 cm por lado.

c) Isósceles, cuyos lados iguales midan 4 cm y el otro lado 6 cm.

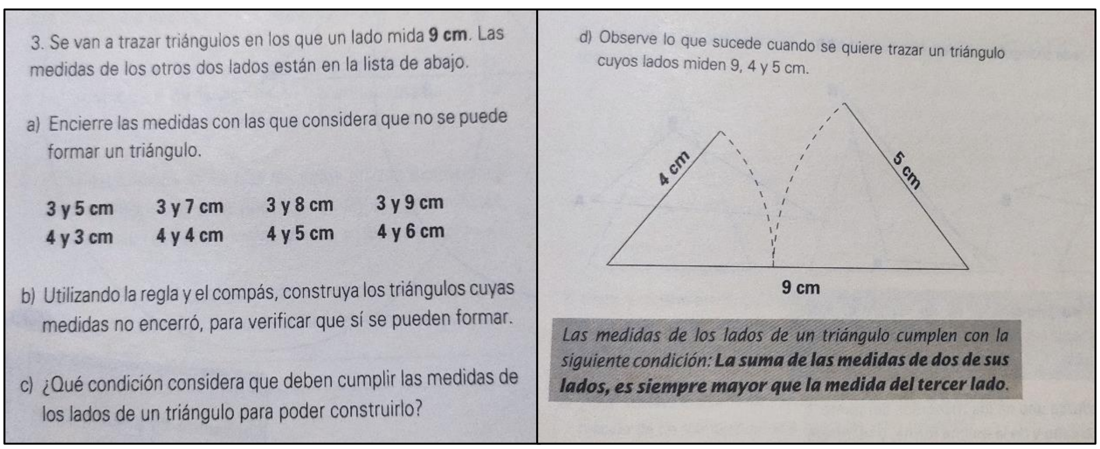
d) Escaleno cuyos lados midan 9 cm, 3 cm y 4 cm.
¿Logró construir todos los triángulos? ________ ¿por qué?

No siempre es posible trazar un triángulo con medidas dadas, a continuación se analizará cuándo es posible y cuándo no.

Figura 20. Continuación de secuencia didáctica con tarea de construcción. Fuente: Block *(1995, pág. 170)*.

Dichas cuestiones permiten advertir que la tarea (figura 20) se inscribe en el plano Instrumental-Discursivo, debido a la movilización de los componentes (construcción, artefactos, referencial y prueba), los que a su vez propician la fase del razonamiento, asumimos entonces que se solicita una explicación en relación al componente prueba ya que se pide justificar a partir de la construcción de otros triángulos. En este caso retomamos a Balacheff (2000) y clasificarla en una prueba pragmática del tipo “Empirismo ingenuo”, ya que se valida a partir de casos particulares, al solicitar que a partir de tres triángulos diferentes se deduzca la condición de construcción.

Hasta este punto puede apreciarse que las tareas no favorecen totalmente el razonamiento geométrico pues los discursos están explícitos en el material del estudiante y no necesita deducirlos, es decir, si la actividad considerara la validación en un contexto de discusión grupal para someter a juicio los argumentos de los futuros profesores, podríamos decir que favorece en gran medida el razonamiento geométrico, pero contar con las propiedades escritas en los materiales de trabajo, limita un tanto este trabajo de reflexión. De acuerdo con Balacheff (1987), en el razonamiento geométrico se debe considerar la interacción social del individuo como contexto ideal que posibilita la discusión y los argumentos de los sujetos. En la clase, el formador podría aprovechar este momento para organizar la validación de las respuestas de los estudiantes, razón por la cual, habría de esperarse que la siguiente tarea, al ser parte de la misma actividad, permitiera la deducción de la condición.



3. Se van a trazar triángulos en los que un lado mida **9 cm**. Las medidas de los otros dos lados están en la lista de abajo.

a) Encierre las medidas con las que considera que no se puede formar un triángulo.

3 y 5 cm	**3 y 7 cm**	**3 y 8 cm**	**3 y 9 cm**
4 y 3 cm	**4 y 4 cm**	**4 y 5 cm**	**4 y 6 cm**

b) Utilizando la regla y el compás, construya los triángulos cuyas medidas no encerró, para verificar que sí se pueden formar.

c) ¿Qué condición considera que deben cumplir las medidas de los lados de un triángulo para poder construirlo?

d) Observe lo que sucede cuando se quiere trazar un triángulo cuyos lados miden 9, 4 y 5 cm.

Las medidas de los lados de un triángulo cumplen con la siguiente condición: ***La suma de las medidas de dos de sus lados, es siempre mayor que la medida del tercer lado.***

Figura 21. Parte final de la secuencia didáctica. Fuente: Block (1995, págs. 170, 171).

Como se puede ver en la figura 21, en esta tarea se encuentra la condición que rige la secuencia de tareas, no obstante y a pesar de que se ha dicho que se activan las tres génesis al establecer la relación con cada uno de los componentes[41], el hecho de que el referencial (suma de las

[41] Visualización, espacio real y local, artefactos, construcción, referencial y prueba.

medidas de los dos lados, es siempre mayor que la medida del tercer lado) se encuentre escrito en el texto del profesor en formación, limita la potencialidad de las tareas. Puede agregarse también que esta secuencia se centra fundamentalmente en el paradigma GI (Geometría natural) al solicitar pruebas de tipo pragmático, particularmente empirismo ingenuo y ejemplo genérico.

Debemos reconocer que las actividades del texto de Block (1995), formaban parte de un taller diseñado para profesores en servicio, por lo cual facilitar el acceso a las definiciones y conceptos era necesario, pero cabe aclarar que el análisis que se realiza en esta tesis sobre el documento está centrado en su utilización en el proceso de formación inicial, en este sentido, resulta importante identificar la potencialidad y limitaciones del mismo en cuanto a un trabajo en la perspectiva del ETG, con la finalidad de diseñar tareas que complementen la formación de los profesores durante la experimentación.

El análisis de las tareas geométricas sugiere que el ETG de referencia estructurado en el Plan 97 activa más las génesis figural e instrumental, pero la génesis discursiva en el contexto de una validación que someta a juicio los argumentos, no se propone por lo general para el desarrollo de las clases. Aunque en la formación de profesores de educación primaria podría pensarse que activar las génesis figural e instrumental basta para llevar a cabo la enseñanza de la geometría, la activación de una génesis discursiva que favorezca el razonamiento geométrico e incluir pruebas de tipo intelectual hasta llegar al nivel de demostración, contribuiría en mayor medida en la formación del profesor, esto es debido a que lo anterior le permitiría diseñar tareas para sus estudiantes que activen las tres génesis del ETG e integren un proceso de validación que lleve al uso de pruebas intelectuales, favoreciendo el desarrollo del razonamiento geométrico de los niños.

3.2.1.2. Tareas didácticas.

En correspondencia con la idea de una dualidad geométrico didáctica, el Plan de estudios 97 hace referencia a la necesidad de construir saberes didácticos con base en la consolidación de los conocimientos disciplinares, lo que permitiría recontextualizarlos y ponerlos en situaciones donde cada concepto cobre sentido para el alumno. En este tenor, dicho Plan expresa el siguiente propósito general:

> Para abordar el estudio de los aspectos didácticos de las matemáticas los estudiantes necesitan, por un lado, consolidar sus conocimientos sobre los contenidos básicos de la disciplina y, por otro, aprender las formas de enseñanza que propicien la construcción de aprendizajes permanentes y con significado en la escuela primaria. (SEP, 2001, pág. 12)

Siguiendo el sentido de ese propósito, el plan de estudios se fundamenta en las nociones de la Didáctica de las Matemáticas, la inclusión de términos como situaciones didácticas, variables didácticas, obstáculos epistemológicos, uso del error, etc., da cuenta de la filiación del programa con este campo de estudio; en lo específicamente didáctico, se incluyen los siguientes tipos de tareas:

- *td1. Analizar procedimientos, variables y/o dificultades de los alumnos.* Son tareas en las que se solicita reconocer las dificultades de los niños al resolver problemas. También se pide señalar las variables didácticas de la actividad y la manera en que puede utilizar el error para favorecer el aprendizaje.
- *td2. Analizar una situación o planeación didáctica.* Son tareas donde se identifica la relación entre el nivel de complejidad del contenido y el grado escolar que cursa el alumno. En ocasiones incluyen el análisis de los libros del maestro, los del alumno, los ficheros y demás materiales complementarios, con la finalidad de reconocer los contenidos geométricos incluidos. Un ejemplo de estos primeros tipos de tareas es la siguiente (figura 22):

1. Revise en el recortable de matemáticas primer grado, la forma de las piezas de los siguientes rompecabezas: recortable 15, 17, 18, 19, 21. También revise los rompecabezas que se construyen con las piezas del Tangram en el L. T. M. 1°, págs. 11 y 16.

- Intente destacar distintos grados de dificultad en los rompecabezas que se proponen para este grado.

2. Lea en el L. M. 1°, págs. 44 a 46 lo referente al "Armado de rompecabezas" y "Construcción de figuras con el Tangram".

Verifique si la graduación que usted hizo sobre el nivel de dificultad de los rompecabezas coincide con el señalado en el libro para el maestro.

3. Resuelva la lección "Adivina quién soy" del L. T. M. 3°, págs. 142 y 143.

En la lección se utilizan mensajes para describir figuras. Observe las características de las figuras que se trabajan y su descripción.

a) ¿Tiene las mismas características el mensaje que usted elaboró que los presentados en el libro, o son diferentes? Destaque las diferencias. ______________________

____

b) ¿Le fue útil la escuadra de papel al trazar la figura?

Figura 22. Ejemplo de Tareas tipo td1 y td2. Fuente: Block *(1995, págs. 176, 177)*

En esta secuencia (figura 22) se puede observar que la mayoría de tareas consisten en analizar las actividades incluidas en los materiales, para determinar la gradualidad de los contenidos es importante destacar la sugerencia de aplicar una secuencia en la escuela primaria cuando se menciona la relación entre lo que previamente hizo el estudiante y las lecciones que le siguen. Son varias tareas en las que subyace una estrategia de formación centrada en la transposición, pues se realiza el análisis didáctico de la actividad, también contiene trabajo para los momentos de aprendizaje y enseñanza, el primero se aborda cuando se pide el análisis de la gradualidad del contenido y el segundo cuando se reflexiona sobre la manera en la que se abordan las actividades en la escuela primaria.

Ahora, con relación a la configuración del ETG idóneo del profesor, esta secuencia favorece la activación de la génesis instrumental cuando sugiere utilizar un artefacto material (escuadra y el compás) y solicita la justificación de su uso, en cuanto a la génesis discursiva la verificación considera el uso de artefactos materiales, lo que la convierte en prueba pragmática. De acuerdo con Balacheff (2000) la palabra razonamiento designa la "actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información" (pág. 13), pero en el caso de las indicaciones de la actividad no se describe el momento en que el futuro profesor produzca el nuevo conocimiento, por ello habría de plantearse una actividad en la que se incluya una situación de validación de la proposición para que, eventualmente, se produzca una prueba de las características descritas en la consigna. Queda claro entonces que esta estrategia de formación se centra en la homología y plantea la activación de las tres génesis.

- *td3. Diseñar y/o rediseñar una situación didáctica.* En este tipo de tareas se pide analizar y rediseñar las actividades para la enseñanza estableciendo la relación entre el currículum de la escuela primaria y los conceptos estudiados, pero, se sugiere el diseño de una situación a partir de los ejemplos propuestos en el programa de estudios.
- *td4. Analizar referentes teóricos.* En estas tareas se pide analizar los referentes teóricos disciplinares y didácticos. En este plan de estudios un referente fundamental era el modelo de Van Hiele. También se integra a esta categoría lo que concierne a la lectura sobre la descripción de un contenido geométrico en particular.
- *td5. Diseñar sesiones de clase.* En este tipo de tarea se pide diseñar secuencias de actividades para la enseñanza. Predomina la reflexión sobre la pertinencia de aplicar estos contenidos en la escuela primaria. Este tipo de tareas predominan en el texto de Martínez y Rivaya (1998).
- *td6. Análisis, diseño y utilización de materiales didácticos.* En esta categoría se incluyen las tareas que piden describir los materiales escolares y su posible utilización con los niños, además sugieren elaborar determinados recursos para trabajar en la escuela primaria.

En la tabla 6 se muestran los tipos de tareas, el momento de reflexión que promueven (aprendizaje o enseñanza) y las estrategias de formación que predominan.

Tabla 6. Tareas didácticas incluidas en las asignaturas de Matemáticas y su Enseñanza I y II (Plan 97). Fuente: Elaboración propia.

Tipo de tarea didáctica	No. de tareas	Momento de Enza/Apje	Estrategia de formación
Analizar procedimientos, variables y/o dificultades de los alumnos.	12	Ambos	Transposición y homología
Analizar una situación o planeación didáctica.	25	Enseñanza	Transposición
Diseñar y/o rediseñar una situación didáctica.	10	Enseñanza	Homología
Analizar referentes teóricos.	10	Enseñanza	Cultural
Diseñar sesiones de clase.	30	Ambas	Transposición y Homología
Análisis, diseño, utilización de materiales didácticos.	12	Enseñanza	Homología

Como se puede ver (tabla 6), prevalecen los tipos de tarea donde se diseñan sesiones de clase y se analizan situaciones, lo que refleja la importancia que se otorga al trabajo en el aula, aunque también es relevante hacer énfasis en que el menor número de tareas tiene relación con el análisis de referentes teóricos, éste también es un rasgo que da cuenta de los propósitos de formación. En este sentido de acuerdo a la información que se observa en la tabla 6 y después del análisis realizado, podemos inferir que el Plan de estudios 97 hace énfasis en la dimensión didáctica, en cuanto a las estrategias de formación, aunque aparecen tareas que incluyen las de transposición con las de homología, son estas últimas las que aparecen de forma recurrente.

Otro dato relevante es que la mayoría de tareas se toman del texto de Block (1995) que tiene clara relación con el análisis didáctico, en este texto se incluyen una especie de lecciones en las que se ilustra el proceso de analizar y enseñar un contenido, en contraste el texto de Martínez y Rivaya (1998) se centra en presentar un amplio compendio de sugerencias para el profesor sin articular una secuencia completa de clase. Para ilustrar esta idea, a continuación se presentan dos ejemplos tomados de estos materiales, uno aporta al trabajo didáctico y hace énfasis en el ETG y el otro es más limitado en estos aspectos.

En la figura siguiente (figura 23), se muestra una secuencia incluida en el material de apoyo (Block, 1995) y podemos apreciar el análisis que solicita al profesor en formación sobre los niveles de complejidad que derivan de la relación entre saber y grado escolar. En este caso, el futuro profesor debe visualizar los aprendizajes esperados y la argumentación que puede solicitar en clase, además de reflexionar sobre la clasificación, reproducción, construcción y descripción en el aprendizaje de la geometría, en sí, desplegar sus argumentos sobre la enseñanza.

5. Resuelva en el L. T. M. 4°, pág. 80, la lección "Dibujos y perpendiculares".

¿Las dificultades que plantea la reproducción de las figuras de la página 80, ¿son adecuadas para el alumno de cuarto grado? Argumente su respuesta.

____

____

¿Qué tipo de triángulos se ven en la actividad?

____

¿Cuáles instrumentos geométricos utilizó para resolverla?

____

6. En la lección "El lugar del tesoro", pág. 142 del L. T. M. 4°, se utiliza el compás para hacer algunas composiciones geométricas. Dibuje otras composiciones y observe cómo pueden resultar figuras decorativas usando únicamente el compás.

7. Lea el apartado "Trazos y reproducción de figuras", págs.44 y 45 del L. M. 4°.

¿Qué se espera de los alumnos de cuarto grado sobre el análisis de las figuras?

____

La clasificación, reproducción, construcción y descripción oral y escrita de figuras, constituyen actividades básicas a lo largo de toda la primaria para el aprendizaje de la geometría.

Figura 23. Secuencia de tareas propuestas para el futuro profesor. Fuente Block *(1995, pág. 190)*

Con relación a la potencialidad del trabajo didáctico, en esta actividad se observa un primer momento para resolver las tareas que posteriormente el profesor planteará a los niños (figura 23). En dichas tareas se hace énfasis en los tipos de triángulos y en los procesos de construcción mediante artefactos materiales lo que favorece que se consolide el conocimiento disciplinar. Es importante señalar el análisis didáctico que realiza cuando reflexiona acerca de los procedimientos esperados de los alumnos y sobre la pertinencia de las dificultades planteadas en el libro, lo cual da apertura para que proponga posibles modificaciones a las tareas propuestas. Con base en lo anterior, podemos deducir que un análisis didáctico de la secuencia de tareas como el que se pide, puede considerarse como una actividad pertinente para realizar el proceso de transposición, aunque se pudiera complementar con discusiones colectivas cuya finalidad sea validar los argumentos. Como hemos mencionado, este análisis subraya el potencial de las tareas propuestas desde la mirada del marco teórico que aquí se asume.

Además, en la información de la parte sombreada se proponen actividades para la escuela primaria que tienen relación con la descripción de las figuras, es decir, sugiere el discurso como actividad para que el niño construya conocimiento sobre el contenido geométrico, aunque quizá sería más importante que se discuta en clase como parte fundamental del aprendizaje de la geometría, no solo como síntesis de aquellas tareas que ha llevado a cabo.

Un ejemplo diferente al anterior son las tareas que limitan el análisis didáctico. En el texto de Martínez y Rivaya (1998) se sugieren secuencias didácticas relativas al triángulo que buscan el equilibrio entre contenido y grado escolar de niños, en ellas se considera la enseñanza de una Geometría descriptiva basada en el reconocimiento de figuras geométricas, sus propiedades fundamentales, las relaciones entre propiedades, etc., y aunque no se profundiza en la demostración, sí considera las transformaciones geométricas. Para desarrollar tal secuencia, el programa de estudios señala que:

> Se haga una lectura colectiva y después, en equipos, traten de resolver algunas de las actividades complementarias que se plantean. De este trabajo puede resultar un inventario de situaciones que complementen las que hay en los libros de texto y en los ficheros. (SEP, 2001, pág. 31)

A pesar de que la resolución de las actividades complementarias se concibe como trabajo colectivo, no se propone una discusión con las respuestas, además el orden que se sugiere no es el idóneo para que el profesor en formación lo considere en su planificación debido a que sería mejor si se inicia a partir del análisis de los problemas.

Por otra parte, la secuencia que presenta el documento básico del curso explica el proceso de aprendizaje del niño y enseguida propone una sesión de "psicomotricidad" para el estudio del triángulo que retoma las nociones de línea y figuras geométricas vistas en el ciclo anterior, posterior a esto se propone una secuencia de actividades complementarias en el que se incluyen tareas del tipo *td4*, *td5* y *td6*:

> Sesión de psicomotricidad. Noción de triángulo [...]. Se reparten varillas de madera de distintas longitudes [...]. Construimos figuras de tres lados de distintas formas. Formamos figuras en el suelo a base de combinar triángulos [...]
> Construir con tres palillos de dientes todos los tipos posibles de triángulos. Ídem con cuatro palillos; con cinco, seis... (Un lado puede estar formado por varios palillos alineados).
> (Este es un problema que da sorpresas). Con cuatro palillos no se puede construir un triángulo, es decir, no hay triángulos que midan 1, 1 y 2. Una extensión de este problema es determinar ternas de números que correspondan a las longitudes de los lados al tratar de encontrar una relación entre ellas. Por ejemplo, con 5 palillos se puede formar un triángulo con la terna (1, 2, 2) que origina un triángulo isósceles, pero no con la terna (1, 1, 3). Con 6 palillos sirve la terna (2, 2, 2), pero no sirven las ternas (1, 1, 4) y (1, 2, 3)... (Martínez & Rivaya, 1998, págs. 78, 79)

Como podemos apreciar, en la secuencia anterior se promueve la visualización (sesión de psicomotricidad) y la construcción de figuras pero no se pide una explicación de lo realizado ni se pide al alumno que mencione el tipo de triángulo que es. La siguiente tarea, que consiste en delimitar la cantidad de palillos (artefactos materiales no geométricos) y realizar las combinaciones, favorece la construcción ya que se utiliza la transformación de figuras para identificar los tipos de triángulos. Es en la génesis discursiva donde es necesario ampliar las sugerencias o proponer opciones para que los niños justifiquen lo que están realizando pues las actividades se quedan en la fase de descubrimiento.

Es necesario subrayar que junto con el análisis de actividades de enseñanza, el profesor debiera también analizar las variables, los procesos y las dificultades de la actividad, es decir, profundizar en el análisis didáctico de la actividad. Este tipo de reflexión sobre lo didáctico se plantea recurrentemente en el texto básico de Block (1995). Básicamente, el momento que predomina en este segundo documento se relaciona con la enseñanza y la estrategia de formación es la homología, ya que sugiere al profesor que resuelva tareas similares a las que plantearía a los niños.

Un aspecto que da cuenta de esta estrategia de formación es que, en el ETG de referencia del Plan 97, las tareas se toman del libro del niño y del fichero de matemáticas,[42] en ellas el rol principal del profesor en formación es reflexionar sobre el momento de la enseñanza. Existe un considerable número de tareas geométricas pero no hay una sola en la que se pida diseñar o aplicar una situación didáctica para "probarla" con los niños y analizar lo sucedido. Otro aspecto importante es el papel de la demostración en la formación, en la mayoría de las tareas sugeridas para los niños no se piden justificaciones, algo similar ocurre en el caso de la formación, cuando el profesor en formación realiza actividades geométricas o revisa algún contenido específico, no se le piden pruebas intelectuales que le permita desarrollar su razonamiento geométrico.

3.2.2. El ETG en el Plan 2012.

En el Plan 2012 para las escuelas normales, el ETG se ubica en la asignatura *Geometría, su aprendizaje y enseñanza* que se cursa en el tercer semestre y a decir de los documentos oficiales, la finalidad es que el estudiante profundice y amplíe sus conocimientos matemáticos para que sienta la necesidad de asumirlos como problemas didácticos (SEP, 2013, pág. 10). El curso está estructurado en tres unidades: *Forma y espacio*; *Medida y cálculo geométrico; y La geometría como objeto de enseñanza en la escuela primaria*. Aunque se propone una amplia bibliografía de apoyo, las tareas incluidas en el programa de estudios se toman fundamentalmente de los textos *Matemáticas para la Educación Normal. Guía para el aprendizaje y enseñanza de la*

[42] El fichero de matemáticas es un compendio de actividades elaborado por la SEP como parte de los materiales de apoyo para la educación básica acordes al Plan de Estudios de 1993, proporcionado a los maestros en servicio.

geometría y la medición[43]*; Matemáticas para la Educación Normal, Tomos I al VI*[44]*;* y *Libros de Matemáticas para el nivel de Telesecundaria.*[45]

A partir de la revisión de estos documentos se pueden identificar las tareas geométricas y didácticas que se proponen en el ETG de referencia, cabe mencionarse que dicha revisión se hizo únicamente de las páginas de los textos cuyo estudio se sugiere en el programa del curso. Un primer aspecto que llama la atención es lo numeroso de los contenidos incluidos en el curso,[46] tan sólo la primera Unidad incluye el estudio de:

- Cuerpos y figuras geométricas: triángulos y cuadriláteros.
- Revisión de las propiedades del rectángulo, cuadrado y triángulo rectángulo.
- Ángulos y su medida: rectos, agudos y obtusos. Trazo con regla y compás.
- Triángulos: equiláteros, isósceles y escalenos.
- Construcción de triángulos con regla y compás. Congruencia de triángulos.
- Rectas paralelas y perpendiculares en el plano. Construcción con regla y compás.
- Clasificación de cuadriláteros con base en sus propiedades.
- Suma de los ángulos internos y externos de triángulos, cuadriláteros y otros polígonos.
- Prismas, pirámides y desarrollos planos.
- Clasificación de prismas y pirámides. Poliedros.
- Semejanza de triángulos. Dibujo a escala.
- Circunferencia, círculo y esfera.
- Ángulos de la circunferencia: teorema del ángulo central.
- Simetría axial y central. Rotación y traslación.

[43] (Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, 2012);
[44] (Isoda & Cedillo, 2012)
[45] (SEP, 2004), aunque es un texto del nivel de educación secundaria, varias actividades que este material contiene son sugeridas en el programa del curso para resolverse en las clases por parte de los futuros profesores o como referencia de situaciones que puede plantear el formador, por lo tanto, se considera prudente hacer una revisión de las mismas.
[46] En el Programa de estudios se sugiere explícitamente utilizar tiempos extraclase para cumplir con las actividades.

En la tabla 7, se puede ver la distribución de tareas en el programa señalado.

Tabla 7. Tareas geométricas y didácticas incluidas en el curso de Geometría, su aprendizaje y enseñanza (Plan 2012). Fuente: Elaboración propia.

Descritas de forma general en el programa de la asignatura		**Incluidas en los textos analizados (opcionales)**
Tareas geométricas	Tareas didácticas	Tareas geométricas
11	32	123

En una primera observación superficial (tabla 7), parecería que el Plan de estudios 2012 hace mayor énfasis en las tareas didácticas, pero debe decirse que cada tarea geométrica a su vez se divide en varias actividades y lo que finalmente aparece es un sin fin de actividades geométricas para cada uno de los contenidos matemáticos que el profesor en formación debe resolver. Podemos inferir que la prioridad está centrada en el conocimiento matemático, ya sea mediante tareas de resolución de problemas o para identificar contenidos de la escuela primaria en las actividades propuestas, y en menor medida en lo que concierne a lo didáctico.

3.2.2.1 Tareas geométricas.

A diferencia del análisis del Plan 97, en este que corresponde al Plan 2012 sólo se han incluido tareas relacionadas con el triángulo debido al gran número de tareas geométricas que se incluyen en el curso. Cabe aclarar que no es obligatorio que los profesores en formación resuelvan todas las tareas incluidas ya que se ofrecen como un catálogo de actividades y será el formador quien seleccione las que considere más adecuadas, no obstante se ha decidido integrarlas en el análisis porque en conjunto dan cuenta de la orientación que se le da a la asignatura.[47] Los tipos de tareas geométricas relativas al triángulo son las siguientes:[48]

- *t1. Resolver problemas.* Son tareas donde resolver problemas implica aplicar los conocimientos adquiridos, también se incluyen escasamente problemas para deducir alguna propiedad, característica o concepto geométrico. Por lo general este tipo de tareas aparecen al final de una secuencia de actividades previas.
- *t2. Visualización.* Son tareas en las que se muestran imágenes u objetos concretos y se pide identificar el contenido a estudiar mediante la visualización icónica. En otros casos se enuncian las características de las figuras para luego resolver actividades. También se utiliza la proyección de imágenes interactivas para deducir de propiedades como acción inicial o como fase final.
- *t3. Descripción o verificación.* Son tareas en las que se solicita describir lo más significativo de la tarea realizada, en algunos casos se incluye un razonamiento inductivo. Estas tareas se distinguen de aquellas que implican el uso de la argumentación debido a que solamente se solicita explicar la respuesta, no que la relacione con otras, incluso, se le pide verificar con artefactos materiales de manera frecuente, razón por la que en esta categoría incluimos la verificación para el análisis.

---

[47] En las secuencias incluidas en el programa de estudios frecuentemente se dice: "Realice actividades diseñadas por el profesor (formador) del grupo" (SEP, 2013, pág. 16), con ello se deja abierta la posibilidad de utilizar una gran variedad de tareas extraídas de los documentos base.

[48] Se incluyen también en el curso momentos de evaluación, se sugiere aplicar exámenes para evaluar el dominio del contenido disciplinar, además de la elaboración de resúmenes y la presentación de los conceptos como congruencia de triángulos y otros, construyendo un glosario para el estudiante.

- *t4. Construcción.* Son tareas en las que se solicita la construcción de figuras geométricas a partir de indicaciones dadas, en esta categoría se incluye la construcción utilizando la medición, el trazado y la reproducción de figuras en lápiz y papel mediante el uso de artefactos no geométricos como hojas, popotes, etc., y artefactos geométricos como la regla, escuadra y compás o el software geométrico de Geogebra. Además de integrar tareas que implican la superposición, transformación y descomposición de figuras. La siguiente secuencia de tareas es un ejemplo de las de este tipo (figura 24).

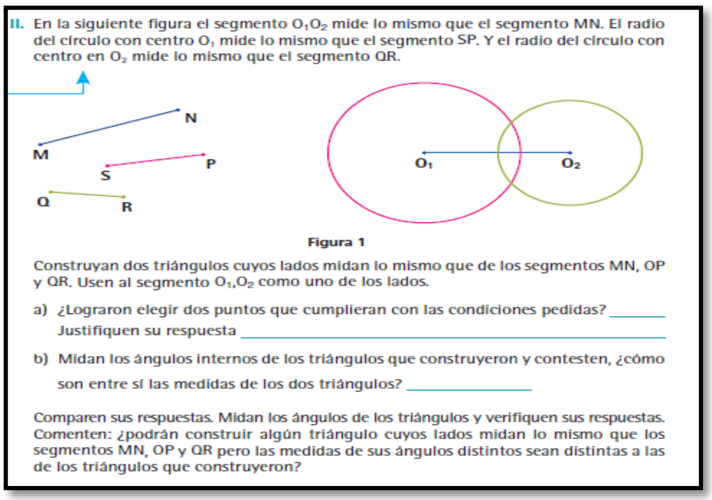

II. En la siguiente figura el segmento O_1O_2 mide lo mismo que el segmento MN. El radio del círculo con centro O_1 mide lo mismo que el segmento SP. Y el radio del círculo con centro en O_2 mide lo mismo que el segmento QR.

Figura 1

Construyan dos triángulos cuyos lados midan lo mismo que de los segmentos MN, OP y QR. Usen al segmento O_1,O_2 como uno de los lados.

a) ¿Lograron elegir dos puntos que cumplieran con las condiciones pedidas? ______ Justifiquen su respuesta ______

b) Midan los ángulos internos de los triángulos que construyeron y contesten, ¿cómo son entre sí las medidas de los dos triángulos? ______

Comparen sus respuestas. Midan los ángulos de los triángulos y verifiquen sus respuestas. Comenten: ¿podrán construir algún triángulo cuyos lados midan lo mismo que los segmentos MN, OP y QR pero las medidas de sus ángulos distintos sean distintas a las de los triángulos que construyeron?

Figura 24. Ejemplo de tarea del tipo Construcción (t4). Fuente: *(SEP, 2007)*

Como se ha trabajado previamente la congruencia de triángulos, el propósito de la tarea es llevar al alumno hacia la definición de figuras congruentes (figura 24). La construcción de los triángulos está restringida por la medida de los segmentos e incluye la justificación con apoyo de la regla y el compás (artefacto material). Se activa la génesis instrumental mediante los artefactos y la construcción y se orienta hacia una prueba pragmática[49] mediada por los

[49] Principalmente la de empirismo ingenuo fundada en una validación a partir de una serie de casos verificados.

materiales concretos. Tanto en las actividades que debe resolver el profesor en formación como en las que debe analizar, las tareas de construcción son un factor común.

- *t5. Argumentación, justificación y/o demostración.* En estas tareas se pide una argumentación a partir de pruebas intelectuales que enuncien propiedades o teoremas con el propósito de que el conocimiento geométrico del profesor en formación se sustente en deducciones cuya validez sea socialmente aceptada, incluye también algunas donde se solicita al futuro profesor que demuestre una propiedad o teorema. Ejemplo de este tipo de tareas es la siguiente (figura 25):

> En el contenido de la página 78 se declara: "En un triángulo isósceles, hay 2 ángulos que miden lo mismo. En un triángulo equilátero, cada uno de sus 3 ángulos mide 60°".
> Respecto a la imagen se dice: *A* y *B* son los centros de las circunferencias, *BD* y *AE* son diámetros. Se pregunta: ¿qué tipo de triángulo es *CDB*?
> Responde la pregunta, pero no midiendo sobre la imagen, sino argumentando la validez de tu respuesta con base en las conceptos expuestos en estas páginas.

Figura 25. Ejemplo de tarea tipo Demostración (t5). Fuente: *(Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, 2012, pág. 53)*

A esta tarea (figura 25) le preceden actividades donde se pide deducir las propiedades que se pretenden estudiar y analizar las actividades propuestas para los niños. Un aspecto importante es que se propone la argumentación o justificación casi siempre al finalizar las actividades además de que la respuesta está escrita en el mismo documento, con ello se limita el trabajo de validación ya que la prueba debe centrarse en la argumentación a partir de la enunciación de propiedades y teoremas. La tabla 8 muestra el número de cada tipo de tareas, la génesis que activan y el paradigma sobre el que se basan. Para fines de sintetizar la información, se enuncian los elementos que predominan en la mayoría de las tareas, es decir, algunas de ellas no desarrollan totalmente lo enunciado.

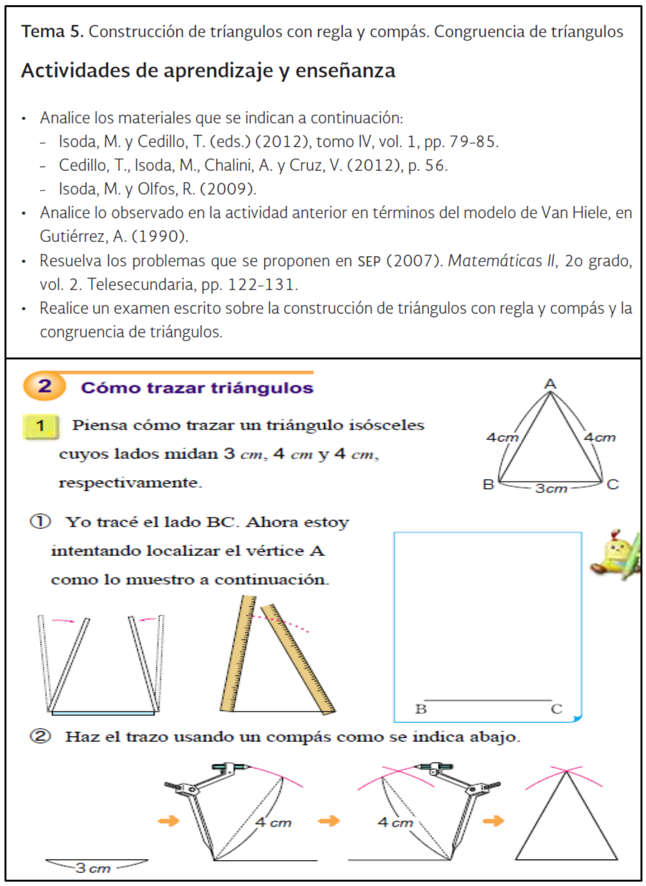
Tabla 8. Tareas geométricas incluidas en el curso Geometría, su aprendizaje y enseñanza (Plan 2012). Fuente: Elaboración propia.

Tipo de tarea geométrica	No. de tareas	Génesis que se activan	Circulación de los planos	Paradigma geométrico
Resolución de problemas	20	Figural e instrumental	Sem-Ins, Ins-Dis	GI/gII
Visualización	25	Figural	Sem-Ins	GI/gII
Descripción o verificación	30	Instrumental y figural	Sem-Ins	GI/gII
Construcción	40	Instrumental y discursiva	Ins-Dis, Sem-Dis	GI/gII, gI/GII
Argumentación, justificación y/o demostración.	8	Instrumental y discursiva	Sem-Dis	GI/gII

Puede verse en la tabla 8 el predominio de las tareas de construcción en las que se incluyen acciones tales como trazar, reproducir, dibujar, doblar papel, manipular materiales concretos y utilizar artefactos interactivos. Fundamentalmente activan las génesis instrumental y discursiva debido a que las pruebas que se piden para expresar argumentos son pragmáticas de tipo empirismo ingenuo y ejemplo genérico, sólo en ocasiones se pide prueba intelectual de tipo cálculo sobre el enunciado, en algunas ocasiones se fundan en una lógica formal y en muchas se solicita la validación basada en conocimientos institucionales como conjunto de definiciones, teoremas, etc.

En lo relativo a la génesis instrumental, ésta se activa principalmente involucrando el uso de artefactos dinámicos como el Geogebra y otros materiales como la regla y el compás. La génesis figural en tanto elemento central para la deducción de teoremas, criterios o propiedades tiene una presencia escasa y a pesar de que se incluye en algunas tareas, la validación mediante razonamiento discursivo es lo que se privilegia, lo que da cuenta de que el paradigma dominante es la geometría axiomática natural (GII). Por otra parte, pocas veces se solicita la justificación de los procedimientos de construcción y no necesariamente se exige que se deduzcan de la experimentación, además, es común encontrar la información teórica en los mismos documentos y se deja de lado la validación para llegar al razonamiento geométrico, en repetidas ocasiones se sugiere sólo verificar o comprobar las afirmaciones teóricas.

Para el análisis del Plan 97 se seleccionaron dos secuencias del ETG, en el caso del Plan 2012 se presenta un solo ejemplo que hace referencia a las potencialidades y los límites de este espacio de trabajo, la tarea es: *Construcción de triángulos con regla y compás. Congruencia de triángulos* de la cual se muestran algunos fragmentos a continuación.


Tema 5. Construcción de triángulos con regla y compás. Congruencia de triángulos

Actividades de aprendizaje y enseñanza

- Analice los materiales que se indican a continuación:
  - Isoda, M. y Cedillo, T. (eds.) (2012), tomo IV, vol. 1, pp. 79-85.
  - Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A. y Cruz, V. (2012), p. 56.
  - Isoda, M. y Olfos, R. (2009).
- Analice lo observado en la actividad anterior en términos del modelo de Van Hiele, en Gutiérrez, A. (1990).
- Resuelva los problemas que se proponen en SEP (2007). *Matemáticas II*, 2o grado, vol. 2. Telesecundaria, pp. 122-131.
- Realice un examen escrito sobre la construcción de triángulos con regla y compás y la congruencia de triángulos.

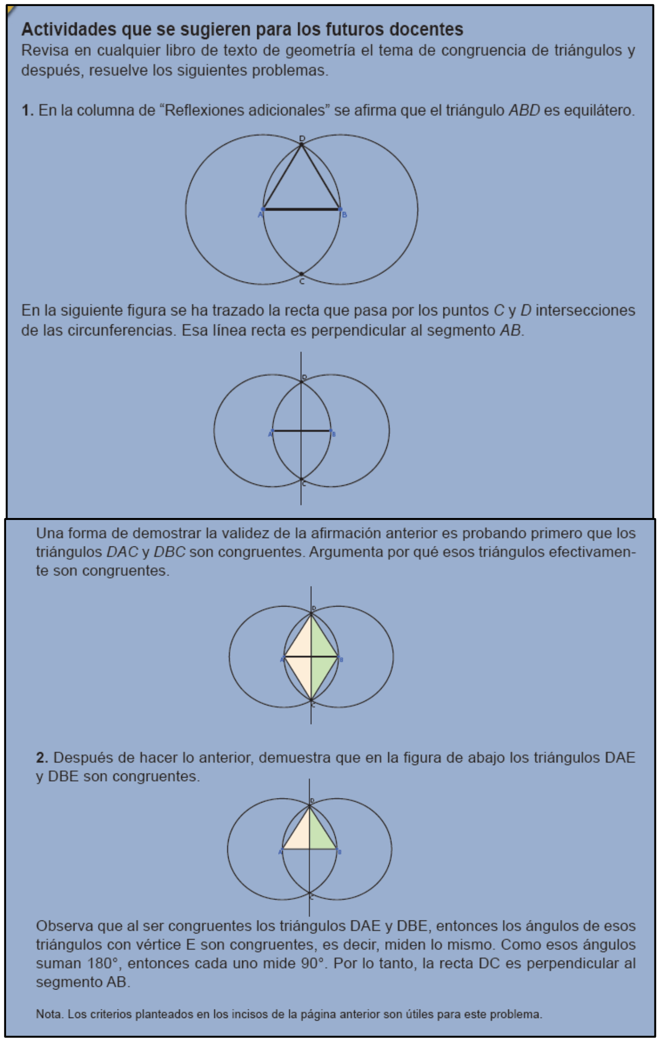
Figura 26. Actividades propuestas para la Construcción de triángulos. Fuentes: *(SEP, 2013, pág. 23)*; *(Isoda & Cedillo, 2012, pág. 79)*

En la imagen que corresponde a la parte superior de la figura 26, se observa la secuencia de tareas que propone el programa del curso de Geometría para el estudio de la construcción de triángulos con regla y compás. En ella se indica que el futuro profesor habrá de analizar una actividad de los materiales de apoyo, en este caso el tomo IV volumen 1 de los textos de Isoda y Cedillo (2012), ejemplo de las actividades de dichos materiales se muestra en la imagen inferior de la figura 26, en la cual podemos observar que se activan la génesis figural e instrumental y se pueden utilizar artefactos materiales (compás), el punto de partida es la visualización icónica ya que muestra la figura del triángulo isósceles.

Hasta este punto, la tarea analizada se inscribe en una circulación de los planos semiótico instrumental y epistemológico, ya que se centra en un mismo tipo de triángulo, pero al pedir reflexionar sobre la manera de trazar el triángulo y enseguida mostrar el ejemplo, se puede limitar la experimentación del geómetra. Para complementar la secuencia, el texto de Cedillo et al. (2012), describe lo siguiente:

> Esos casos configuran el contenido del tema de congruencia de triángulos, cuyo estudio culmina en el nivel de bachillerato. En el nivel de educación primaria sólo se empieza a esbozar a partir de la siguiente pregunta: “si un triángulo tiene tres lados y tres ángulos, ¿cuántos y cuáles de estos elementos necesitas conocer como mínimo para reproducir ese triángulo?” (Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, pág. 56)

Para consolidar el tema estudiado se propone lo siguiente:



Actividades que se sugieren para los futuros docentes

Revisa en cualquier libro de texto de geometría el tema de congruencia de triángulos y después, resuelve los siguientes problemas.

1. En la columna de "Reflexiones adicionales" se afirma que el triángulo *ABD* es equilátero.

En la siguiente figura se ha trazado la recta que pasa por los puntos *C* y *D* intersecciones de las circunferencias. Esa línea recta es perpendicular al segmento *AB*.

Una forma de demostrar la validez de la afirmación anterior es probando primero que los triángulos *DAC* y *DBC* son congruentes. Argumenta por qué esos triángulos efectivamente son congruentes.

2. Después de hacer lo anterior, demuestra que en la figura de abajo los triángulos DAE y DBE son congruentes.

Observa que al ser congruentes los triángulos DAE y DBE, entonces los ángulos de esos triángulos con vértice E son congruentes, es decir, miden lo mismo. Como esos ángulos suman 180°, entonces cada uno mide 90°. Por lo tanto, la recta DC es perpendicular al segmento AB.

Nota. Los criterios planteados en los incisos de la página anterior son útiles para este problema.

Figura 27. Actividades propuestas para el futuro profesor. Fuente: *(Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, 2012, pág. 53)*

Como podemos observar en la figura 27, las actividades propuestas para el docente se inscriben en el plano semiótico discursivo, al orientar al profesor en formación a justificar mediante la revisión teórica de los conceptos, y posteriormente cerrar la secuencia al sugerir que resuelva problemas a partir del tema trabajado en lecciones previas, es decir, solamente verificar lo aprendido.

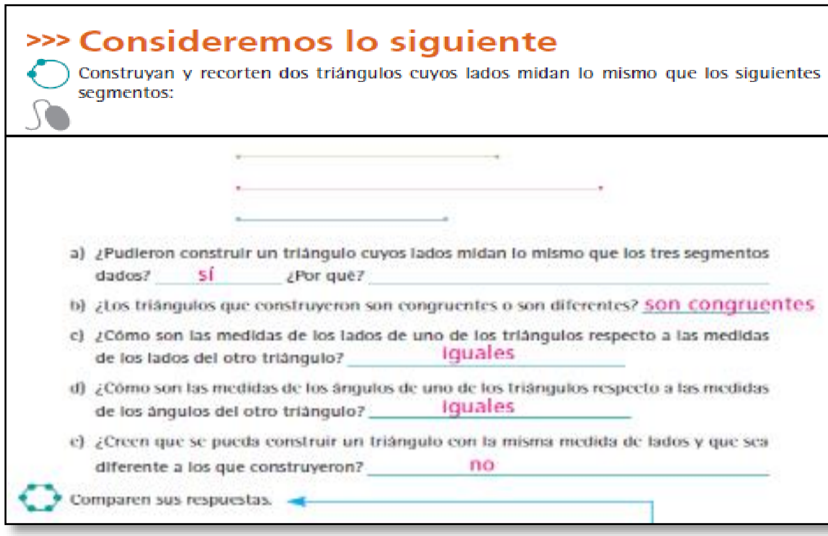


Figura 28. Tarea propuesta en el libro de Telesecundaria. Fuente: *(SEP, 2008)*

Dentro de la secuencia de tareas, se encuentra descrita la realización de una actividad por parte de los futuros profesores, contenida en los materiales de apoyo (libro de telesecundaria para segundo grado). En esta tarea (figura 28), y de acuerdo al orden propuesto en el curso de Geometría, se pretende que el profesor en formación utilice los conocimientos ya adquiridos favoreciendo la circulación en el plano semiótico discursivo, ya que orienta la justificación mediante los argumentos analizados y coloca el criterio de construcción como punto de partida. La prueba solicitada es pragmática y se relaciona con la verificación mediante artefactos y lectura del referencial teórico estudiado.

3.2.2.2. Tareas didácticas.

En las tareas didácticas del curso el “Estudio de Clases”[50] ocupa un lugar central, esta metodología plantea el diseño de situaciones de enseñanza mediante el trabajo colegiado entre profesores y propone evaluar el logro del aprendizaje de los niños y el plan que se elaboró y no

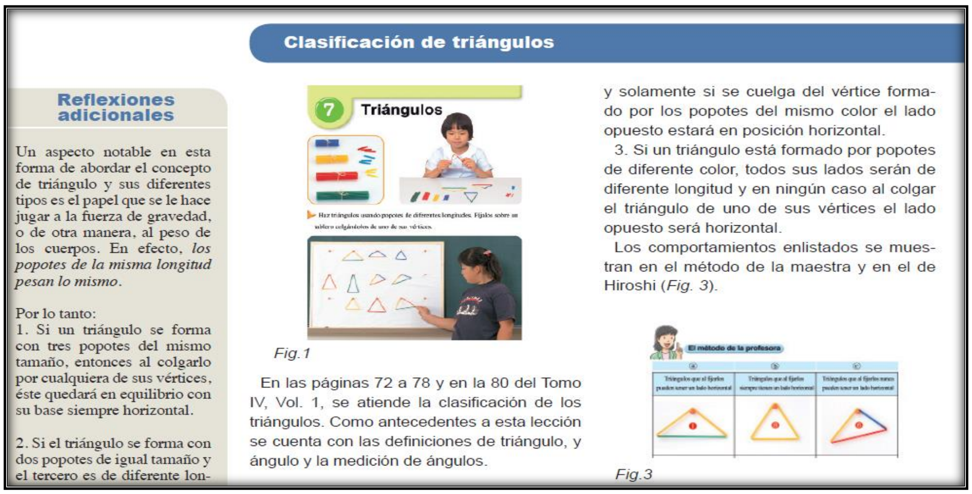
[50] Para profundizar sobre la propuesta del “Estudio de clases” sugerida en el curso de Geometría, su aprendizaje y enseñanza, consultar el documento de (Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, 2012).

el desempeño del maestro, además de propiciar la reflexión sobre el desempeño docente, ya que se observa la práctica del profesor por todo el colectivo y éste hace notas sobre todo lo que favorece o no el aprendizaje. Para apoyar el diseño de situaciones, la bibliografía del curso propone apoyarse en la Teoría de Situaciones Didácticas Brousseau (2007) aunque sus conceptos sobre la gestión de la clase no son estudiados. Desde la perspectiva del "Estudio de clases", el profesor debe proponer tareas y preguntas que propicien que sus alumnos aprendan por sí mismos siguiendo las siguientes fases:

- Fase 1 *Presentación del problema y predicciones* (perspectivas para la solución);
- Fase 2 Solucionan problemas por sí mismos;
- Fase 3 Solucionan problemas por sí mismos y Fase 4 Integración (reflexión).

Otro rasgo de las tareas didácticas tiene que ver con la estructura del curso, en las dos primeras unidades se plantean principalmente tareas geométricas y es hasta la tercera (última) que aparecen tareas didácticas en las que se propone el análisis de los materiales de la escuela primaria. Esta última unidad se organiza de la siguiente manera: a) análisis del plan de estudios de la escuela primaria (eje forma, espacio y medida); b) identificar las dificultades que enfrentan los niños con las nociones de geometría y medición; c) plantear estrategias didácticas para solucionar esas dificultades; d) diseñar secuencias didácticas y material de apoyo que correspondan con el "Estudio de clases"; el desarrollo de la unidad se plantea mediante un trabajo colectivo. En el programa de estudios 2012 se incluyen los siguientes tipos de tareas.

- *td1. Análisis de materiales de apoyo.* Son tareas en las que se pide identificar conceptos, elaborar textos argumentativos, presentaciones digitales o ensayos que compartirán con los compañeros de grupo. En las actividades más frecuentes se pide identificar un contenido en una secuencia de actividades y reflexionar sobre las posibilidades de aplicar esa secuencia con los niños. Los documentos que se revisan son: los textos de la bibliografía básica del curso, programas de estudio de educación primaria, materiales y recursos didácticos de apoyo a la práctica docente. Un ejemplo de este tipo de tareas es el siguiente (figura 29):



Clasificación de triángulos

Reflexiones adicionales

Un aspecto notable en esta forma de abordar el concepto de triángulo y sus diferentes tipos es el papel que se le hace jugar a la fuerza de gravedad, o de otra manera, al peso de los cuerpos. En efecto, *los popotes de la misma longitud pesan lo mismo*.

Por lo tanto:
1. Si un triángulo se forma con tres popotes del mismo tamaño, entonces al colgarlo por cualquiera de sus vértices, éste quedará en equilibrio con su base siempre horizontal.

2. Si el triángulo se forma con dos popotes de igual tamaño y el tercero es de diferente lon-

Fig.1

En las páginas 72 a 78 y en la 80 del Tomo IV, Vol. 1, se atiende la clasificación de los triángulos. Como antecedentes a esta lección se cuenta con las definiciones de triángulo, y ángulo y la medición de ángulos.

y solamente si se cuelga del vértice formado por los popotes del mismo color el lado opuesto estará en posición horizontal.

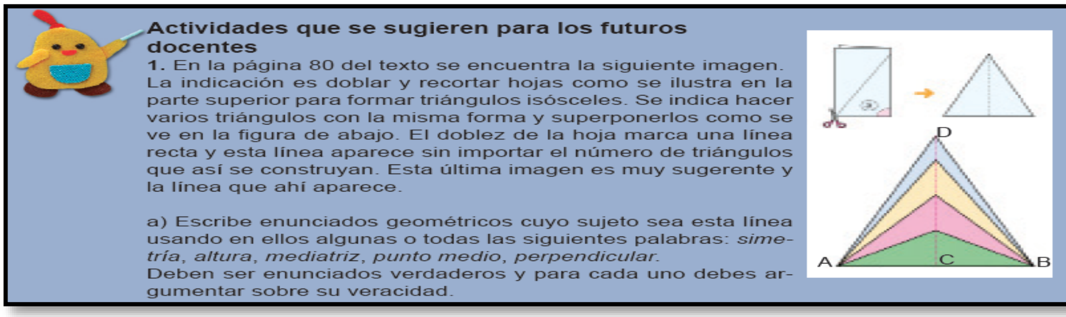
3. Si un triángulo está formado por popotes de diferente color, todos sus lados serán de diferente longitud y en ningún caso al colgar el triángulo de uno de sus vértices el lado opuesto será horizontal.

Los comportamientos enlistados se muestran en el método de la maestra y en el de Hiroshi (*Fig. 3*).

Fig.3

Figura 29. Tareas que proponen el estudio de la Clasificación de triángulos. Fuente: *(Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, 2012)*

Es posible apreciar en la figura 29 que se analizan las actividades sugeridas para los niños con el fin de identificar los conceptos geométricos involucrados, también se puede distinguir la manera como se aborda la visualización y la construcción de figuras, esto es, como un punto de partida para clasificar triángulos. Si bien es cierto que el tratamiento didáctico del contenido pudiera ser efectivo para la gestión didáctica, la secuencia que se sugiere se desvía un poco de lo que se ha estado analizando en el apartado de reflexiones adicionales.[51]


Actividades que se sugieren para los futuros docentes

1. En la página 80 del texto se encuentra la siguiente imagen. La indicación es doblar y recortar hojas como se ilustra en la parte superior para formar triángulos isósceles. Se indica hacer varios triángulos con la misma forma y superponerlos como se ve en la figura de abajo. El doblez de la hoja marca una línea recta y esta línea aparece sin importar el número de triángulos que así se construyan. Esta última imagen es muy sugerente y la línea que ahí aparece.

a) Escribe enunciados geométricos cuyo sujeto sea esta línea usando en ellos algunas o todas las siguientes palabras: *simetría, altura, mediatriz, punto medio, perpendicular.* Deben ser enunciados verdaderos y para cada uno debes argumentar sobre su veracidad.

Figura 30. Tareas para el docente sobre la Clasificación de triángulos. Fuente: *(Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, 2012)*

- *td2. Analizar demandas cognitivas, nociones geométricas, concepciones erróneas y probables errores de los niños*. En este tipo de tareas se pide apoyarse en la experiencia personal antes de entrar a la Escuela Normal o la que han obtenido durante los periodos de práctica profesional para anticipar lo que podría suceder.
- *td3. Diseñar secuencias didácticas.* En este tipo de tareas, con base en el estudio de clases, se pide se diseñen y rediseñen secuencias didácticas. Es importante mencionar que el análisis post aplicación de las secuencias sería una de las tareas que mayor significado aportaría en su formación, ya que en este análisis podría involucrar el dominio teórico y matemático de los contenidos señalados en el programa de estudios. Podemos identificar que cuando se propone el diseño de una situación no se reflexiona sobre la pertinencia de la misma, tampoco se contestan cuestiones como: ¿qué resultados se obtienen en la aplicación práctica?, ¿qué sucede en la práctica en el aula del futuro

[51] La secuencia de tareas para los alumnos de primaria puede consultarse en (Isoda & Cedillo, 2012), volumen 4.1, páginas 72-78; las sugerencias de análisis para el futuro profesor se pueden consultar en (Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, 2012, págs. 50, 51)

profesor?, ¿cuál es la función del formador en ello?, o ¿qué modificaciones podrían considerarse al curso de Geometría en este tenor?

- *td4. Analizar las teorías de enseñanza y aprendizaje de la geometría.* Los análisis que se piden en estas tareas se centran en los modelos de Van Hiele y lo que describe Lovell (1977) sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos. En éstas predomina la indagación sobre los conceptos, la elaboración de ensayos, exposiciones o resúmenes, actividades que bien podrían clasificarse como estrategias no profesionales según la tipología de Kuzniak. Un ejemplo se muestra en la figura 31.

Evidencias	Criterios de desempeño
• Elaboración de un ensayo relativo al método de deducción empleado en el tema de Semejanza de triángulos. Dibujo a escala. El trabajo deberá tener como referencia el tratamiento de la deducción según el modelo de Van Hiele propuesto en Gutiérrez, A. (1990).	• Incluye título, autor, introducción, desarrollo del tema, conclusiones y bibliografía o referencias de las fuentes utilizadas. Cada uno de los cuatro últimos aspectos se valoran con: 1, baja calidad; 2, calidad media; 3, calidad buena; 4, calidad excelente.
• Presentación del resumen sobre el tema Semejanza de triángulos. Dibujo a escala.	• Incluye introducción, desarrollo, conclusiones y análisis crítico. Cada uno de los cuatro aspectos se valoran con: 1, baja calidad; 2, calidad media; 3, calidad buena; 4, calidad excelente.

Figura 31. Ejemplo de tarea con base en el análisis de teorías. Fuente: *(SEP, 2013, pág. 37)*

En la tabla 9 se muestran los tipos de tareas, el número total de las mismas y el momento (aprendizaje o enseñanza) en que hacen énfasis.

Tabla 9. Tareas didácticas incluidas en el curso de Geometría, su aprendizaje y enseñanza (Plan 2012). Fuente: Elaboración propia.

Tipo de tarea didáctica	No. de tareas	Momento deEnza/Apje	Estrategia de formación
Análisis de bibliografía y materiales de apoyo.	15	Enseñanza	Culturales
Analizar demandas cognitivas, nociones geométricas, concepciones erróneas y probables errores de los niños.	5	Aprendizaje	Culturales y transposición
Diseñe propuestas o secuencias didácticas.	7	Enseñanza	Homología
Analizar las teorías de enseñanza y aprendizaje de geometría.	5	Enseñanza y aprendizaje	Culturales

Puede verse que (tabla 9), en lo que toca a las tareas didácticas se hace mayor énfasis en la revisión de materiales bibliográficos y mayoritariamente se centran en el momento de enseñanza ya que recuperan las secuencias de clases sugeridas. Las estrategias de formación que subyacen son las culturales y no centran su prioridad en la formación profesional a pesar de que se analizan los posibles errores de los alumnos, el tratamiento didáctico de los contenidos y/o las actividades sugeridas para los niños.

Para dar un ejemplo de lo relacionado con el trabajo didáctico que proponen los programas de estudio, describimos la secuencia para analizar su potencial en la formación. Ésta se incluye en la unidad I del programa del curso de Geometría[52] y se estudia el contenido *Suma de los ángulos internos y externos de triángulos*, y es la siguiente (figura 32):

Tema 8. Suma de los ángulos internos y externos de triángulos, cuadriláteros y otros polígonos

Actividades de aprendizaje y enseñanza

- Analice los materiales que se indican a continuación:
  - Isoda, M. y Cedillo, T. (eds.) (2012), tomo V, vol. 1, pp. 99-107.
  - Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A. y Cruz, V. (2012), pp. 70 y 72.
- Analice lo observado en la actividad anterior en términos del modelo de Van Hiele, en Gutiérrez, A. (1990).
- Use el programa de geometría dinámica de Geogebra para realizar las construcciones geométricas que se muestran en:
  - SEP (2006). *Matemáticas I*, 1er grado, vol. 1. Telesecundaria, pp. 160-167.
  - SEP (2007). *Matemáticas II*, 2o grado, vol. 1. Telesecundaria, pp. 62-69.
  - Descargar Geogebra en http://www.geogebra.org/cms/
- Examen escrito para valorar los avances de los estudiantes en la suma de los ángulos internos y externos de triángulos, cuadriláteros y otros polígonos.

Figura 32. Secuencia de tareas propuestas en el curso de Geometría. Fuente: *(SEP, 2013, pág. 30)*

Como podemos observar en la figura 32, la primera parte señala un análisis de las actividades propuestas en los materiales de apoyo que se sugiere se pueden aplicar a los niños de primaria, además de relacionar lo que identifiquen con base en los referentes teóricos analizados previamente (Modelo Van Hiele), sin embargo, nuevamente se centra el trabajo en las

[52] Programa del Curso de Geometría, su aprendizaje y enseñanza (SEP, 2013).

actividades geométricas siendo escaso el trabajo didáctico. Un fragmento de la actividad que deben analizar los futuros profesores se muestra en la figura 33.

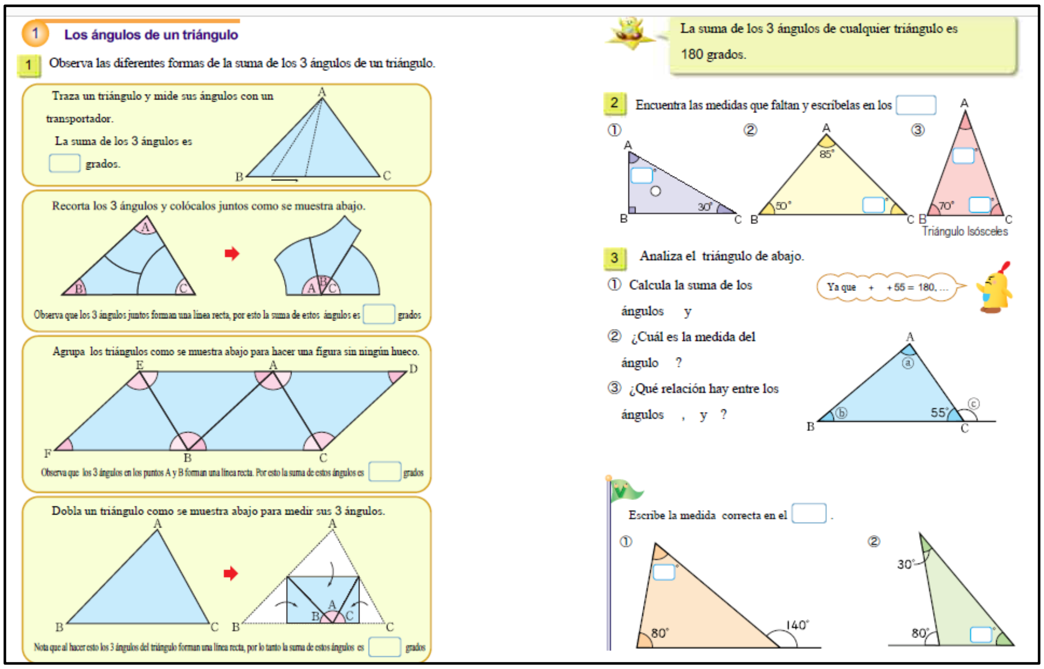


Figura 33. Actividad propuesta para su análisis en el curso de Geometría. Fuente: *(Isoda & Cedillo, 2012, pág. 100. 101)*

En términos generales, la secuencia de actividades de la figura 33, promueve la activación de la génesis instrumental mediante el trazado de triángulos utilizando artefactos materiales, la génesis figural se activa mediante la visualización icónica de los triángulos y sus medidas para llegar a la conjetura, en relación a la génesis discursiva no se encuentra presente (sin embrgo en las que se propone realice el futuro profesor sí la incluye). La secuencia de tareas descrita en el curso (figura 32), solicita además la construcción de triángulos empleando Geogebra.

Queda de manifiesto que aunque las actividades geométricas de esta secuencia pueden potenciar el razonamiento geométrico activando las tres génesis porque favorece la circulación de los tres planos de la relación horizontal de los componentes de un ETG, en cuanto al tratamiento didáctico de la misma, se obstaculiza mediante el orden en que se presentan las actividades y el escaso análisis de los conceptos didácticos involucrados, pues se enfatiza en el dominio disciplinar del contenido geométrico por parte del futuro profesor.

Además, al observar la estructura del curso (unidades), la cual se presenta al inicio del apartado de análisis didáctico, se puede inferir que los contenidos disciplinares parecen ser la preocupación central, aunque este conocimiento no basta para desarrollar la capacidad de diseñar situaciones de enseñanza. Luego de que el profesor en formación resuelve tareas geométricas similares a las que se plantean a los niños, se intenta vincular teoría y práctica mediante el diseño de secuencias didácticas, pero esas secuencias no se aplican ni se les analiza en un contexto real, con ello se deja de lado el acercamiento a la práctica y a la reflexión de la misma.[53] Lo anterior describe la ausencia más notable en la dimensión didáctica del curso.

Derivado del análisis anterior al Espacio de Referencia en la formación inicial del profesor, es posible suponer que un proceso de formación desde la perspectiva del ETG debe brindar importancia a cada uno de los espacios de trabajo, observamos que el espacio de referencia sí define los contenidos matemáticos que habrán de trabajarse en la formación inicial, no obstante resulta importante poner mayor énfasis en el espacio personal del profesor cuando resuelve las tareas geométricas propuestas y la forma en que transpone los saberes que ha adquirido en el espacio idóneo que construye para el trabajo en la escuela primaria, promover un equilibrio en ellos permitirá una gestión efectiva del profesor en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

[53] En el curso del tercer semestre se estructuran dos jornadas de prácticas profesionales, en éstas los futuros profesores van a las escuelas primarias a desarrollar su "iniciación al trabajo docente" y no obstante que pueden enseñar contenidos matemáticos en estas jornadas, no hay una correspondencia exacta con aquellos que están estudiando en las asignaturas ligadas a las matemáticas de ese semestre.

3.2.3. El ETG en la escuela primaria. Los programas de estudio.

La reforma del 2009 a la educación básica en México trajo consigo una malla curricular organizada en campos formativos.[54] En el campo “Pensamiento matemático” se ubican los cursos ligados a las matemáticas y en ellos se postula el enfoque basado en competencias, la resolución de problemas y a la Teoría de las Situaciones Didácticas como eje metodológico de la enseñanza. En lo que toca a la geometría, el estudio se centra en explorar características y propiedades de las figuras geométricas, el trabajo deductivo de los alumnos y el conocimiento de los principios básicos de la ubicación espacial y el cálculo geométrico.

Para caracterizar el ETG de referencia, enlistaremos los contenidos geométricos y aprendizajes esperados inscritos en el currículum obligatorio de educación básica, además de los propósitos generales, debido a que en ellos se exponen los contenidos a desarrollarse en el nivel de educación primaria. Las orientaciones para el tratamiento didáctico de dichos contenidos se encuentran presentes en los libros para el maestro y estos conforman el espacio idóneo que se analizará en el capítulo siguiente. Para el caso de primero y segundo grado, es el programa de “Aprendizajes Clave” 2018 y de tercero a sexto el programa de estudios 2011.

[54] Los campos formativos en esta malla curricular son Lenguaje y comunicación; Pensamiento matemático; Exploración y comprensión del mundo natural y social; y Desarrollo personal y para la convivencia.

La tabla 10 presenta los contenidos obligatorios para el estudio de la geometría en educación primaria.

Tabla 10. Contenidos geométricos para su estudio en la escuela primaria. Fuente: Elaboración propia con base en Programa de Estudios de Educación Primaria *(SEP, 2011)*.

Propósitos de la educación primaria:

Que conozcan y usen las propiedades básicas de ángulos y diferentes tipos de rectas, así como del círculo, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares e irregulares, prismas, pirámides, cono, cilindro y esfera, al realizar algunas construcciones y calcular medidas.

Eje: **Forma, espacio y medida**			
Temas	Estándares curriculares	Estudio de la geometría	**Contenidos**
3er grado **2.1. Figuras y cuerpos geométricos.** **2.2. Ubicación espacial** **2.3. Medida.**	2.2.1. Mide y compara longitudes utilizando unidades no convencionales y algunas convencionales comunes (m, cm).	Forma, espacio y medida integra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la geometría y la medición en la educación primaria: •La exploración de las características y propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos. •La generación de condiciones para el tránsito a un trabajo con características deductivas. •El conocimiento de los principios básicos de la ubicación espacial y el cálculo geométrico.	Figuras y cuerpos: Identificación de ángulos como resultado de cambios de dirección. Obtención de ángulos de 90° y 45°, a través del doblado de papel. Reproducción de los ángulos en papel.
4° a 6° grados	2.1.1. Explica las características de diferentes tipos de rectas,		**Figuras y cuerpos:**

2.1. Figuras y cuerpos geométricos. **2.2. Ubicación espacial.** **2.3. Medida.**	ángulos, polígonos y cuerpos geométricos. 2.2.1. Utiliza sistemas de referencia convencionales para ubicar puntos o describir su ubicación en planos, mapas y en el primer cuadrante del plano cartesiano. 2.3.2. Usa fórmulas para calcular perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros.		**Representación plana de cuerpos vistos desde diferentes puntos de referencia.** **Clasificación de triángulos con base en la medida de sus lados y ángulos. Identificación de cuadriláteros que se forman al unir dos triángulos.** Localización y trazo de las alturas en diferentes triángulos. Construcción y uso de una fórmula para calcular el área del triángulo y el trapecio. Armado y desarmado de figuras en otras diferentes. Análisis y comparación del área y el perímetro de la figura original, y la que se obtuvo.

En la tabla 11 se muestra la información sobre los contenidos obligatorios para el estudio de la geometría en educación primaria de los grado de primero y segundo.

Tabla 11. Contenidos geométricos para su estudio en la escuela primaria, primero y segundo grados. Fuente: Elaboración propia con base en Programa de Estudios Aprendizajes Clave *(SEP, 2018)*.

<table>
<tr><td colspan="3">Propósitos de la educación primaria:

Conocer y usar las propiedades básicas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculos y prismas.

Calcular y estimar el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros, y estimar e interpretar medidas expresadas con distintos tipos de unidad.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Eje: Forma, espacio y medida</td></tr>
<tr><td>Temas</td><td>Aprendizajes esperados</td><td>Estudio de la geometría</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1° y 2° grados

Ubicación espacial

Figuras y cuerpos geométricos

Magnitudes y medidas</td><td>Construye y describe figuras y cuerpos geométricos.

1° Construye configuraciones utilizando figuras geométricas.</td><td rowspan="2">Este eje incluye los Aprendizajes esperados relacionados con el espacio, las formas geométricas y la medición.

Las experiencias dentro del ámbito geométrico y métrico ayudarán a los alumnos a comprender, describir y representar el entorno en el que viven, así como resolver problemas y desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo.

Tanto en la primaria como en la secundaria, los alumnos tendrán que apropiarse paulatinamente de un vocabulario geométrico que les permita comunicar sus anticipaciones y sus validaciones.</td></tr>
<tr><td>2° Construye y describe figuras y cuerpos geométricos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nota:

Los contenidos particulares de cada grado se organizan mediante trayectos formativos, los cuales se analizarán en el siguiente capítulo.</td></tr>
</table>

De esta manera, concluimos el análisis de lo que concierne al ETG de referencia en la formación inicial de los profesores y en la escuela primaria, lo que permitirá identificar la relación que ambos tienen con el espacio personal e idóneo del profesor, siendo el punto de discusión en los capítulos posteriores una vez que se realice la experimentación de la propuesta de formación.

CAPÍTULO IV
LOS TEXTOS ESCOLARES, LA ENSEÑANZA ESPONTÁNEA (ETG IDÓNEO) Y EL ETG PARA LA FORMACIÓN.

Como se ha expuesto, el ETG de referencia debe organizarse para tornarse en un espacio de trabajo idóneo y efectivo en una determinada institución, en el caso de la formación, este espacio de trabajo debe considerar dos dimensiones. Una primera dimensión se liga con la enseñanza en la escuela primaria y su espacio idóneo se plasma en los textos escolares en tanto recursos de apoyo para la enseñanza que se reflejan en el espacio idóneo "áulico" del profesor[55].

La segunda dimensión es la propuesta de formación que esta tesis propone y consiste configurar un Espacio de Trabajo Geométrico para propiciar una enseñanza efectiva de la geometría en las aulas multigrado. Para este fin se diseñaron dos situaciones de referencia desde la perspectiva del ETG consideradas como situaciones potenciales de aprendizaje para el profesor en tanto que les permite configurar su propio Espacio de Trabajo Geométrico Idóneo a partir de la reestructuración de las situaciones geométricas que hubieron de resolver.

Como se ha visto en capítulos anteriores, en las actividades para el trabajo con la geometría que se incluyen los programas de formación inicial y continua pocas veces se activan las tres génesis (semiótica, instrumental y particularmente la discursiva) que caracterizan a un ETG, por ello se considera que en nuestra propuesta de formación es importante plantear situaciones que activen dichas génesis durante el trabajo matemático.

[55] A este espacio le hemos llamado *Espacio de trabajo idóneo espontáneo* y en él se analiza la relación entre las actividades planteadas por el profesor y el espacio idóneo que se plasma en los textos escolares. En el momento del trabajo espontáneo, el profesor aún no ha sido formado desde la perspectiva del ETG.

Ahora bien, el ETG idóneo estructurado por el profesor depende en gran medida de su ETG personal, puesto que en el espacio idóneo también moviliza los conocimientos que construye en su ETG personal. Al mismo tiempo, en su rol como diseñador de un ETG para los geómetras (niños), el profesor interpreta lo que plantean los ETG de referencia e idóneo para orientar la planeación y el desarrollo de sus clases.

En síntesis, el objetivo del presente capítulo es dar cuenta de las dos dimensiones que forman parte del ETG Idóneo. Para ello, en el primer apartado se describe el ETG contenido en los textos escolares y se analiza su potencialidad como posible elemento para la configuración de un ETG Idóneo del profesor. En un segundo apartado se describe lo sucedido en el aula de una profesora en formación y se analiza la relación entre los ETG de referencia, el de su formación y el de la escuela primaria (programas de estudio y textos escolares).

Al cierre de este capítulo, en el tercer apartado se muestran las dos situaciones de referencia que serán empleadas en el proceso de experimentación y se describe cada uno de los momentos que integran dicho proceso.

De estas razones anteriores derivan ciertas consideraciones para la configuración de nuestro ETG idóneo para la formación de profesores, la primera es que habría de organizarse en dos momentos. En el primero[56] se planteó una tarea geométrica a los futuros profesores que cursaban el tercer semestre de la licenciatura en educación primaria, específicamente la asignatura *Geometría: su aprendizaje y enseñanza*, uno de los criterios de selección de este semestre es que cursaban la asignatura en que se centra la investigación, además de que la investigadora era la formadora que impartía dicha asignatura en dos grupos distintos. Además, ninguno era sujeto de la investigación, lo que permitía lograr la finalidad de la aplicación, la cual era solamente analizar la pertinencia y eficacia de la tarea, especialmente se buscaba estudiar si se lograba la circulación entre componentes y la activación de las génesis, principalmente la discursiva, con

[56] Este primer momento es llamado de pre experimentación.

los resultados obtenidos se llevaron a cabo adecuaciones de las actividades para diseñar las situaciones de referencia que finalmente se trabajaron con los profesores que conformaban el grupo de estudio. El segundo momento fue la experimentación de nuestra propuesta con los sujetos de estudio[57], los cuales son tres futuros profesores que cursan el último grado de la licenciatura y dos profesores en servicio con experiencia en grupos multigrado.

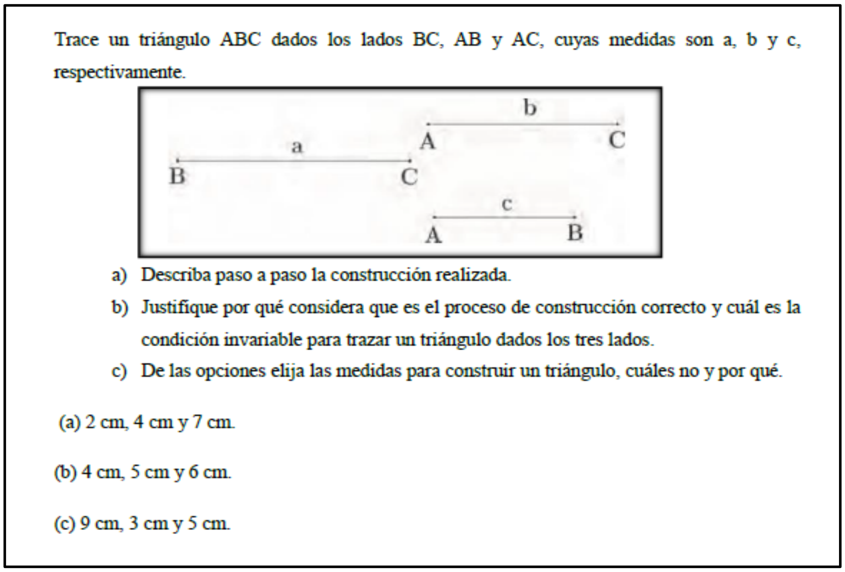
La tarea geométrica planteada[58] está centrada en el criterio de construcción de un triángulo, dados sus tres lados. El objetivo fundamental es probar[59] que, en todo triángulo, la medida de cualquier lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia. Se esperan pruebas de tipo intelectual de acuerdo a la tipología propuesta por Balacheff (2000), donde se privilegie el paradigma GII, en el tránsito de gI/GII, es decir, se espera que el geómetra (profesores) se apoye de un problema heurístico con base experimental y al generalizar las técnicas empleadas conciba las propiedades y criterios involucrados. Por lo tanto, se usará el trazado, la transformación y la visualización de las figuras. A continuación se describe la tarea geométrica en cuestión.

---

[57] El proceso y los resultados de la puesta a prueba de la experimentación con los sujetos de estudio, se describen en los siguientes capítulos.

[58] La secuencia de tareas se diseñó adaptando lo propuesto en el documento Geometría Euclidiana. Guías de clase para 45 lecciones (Correa, Muñoz, & Villegas, 2012).

[59] En esta investigación se coincide con las concepciones sobre demostración de Balacheff y Duval, por ser los referentes que considera Kuzniak para profundizar en la entrada probatoria (génesis discursiva). Sin embargo, se reconoce la existencia de diversas definiciones señaladas por autores como Itzcovich y Van Hiele.



Trace un triángulo ABC dados los lados BC, AB y AC, cuyas medidas son a, b y c, respectivamente.

a) Describa paso a paso la construcción realizada.
b) Justifique por qué considera que es el proceso de construcción correcto y cuál es la condición invariable para trazar un triángulo dados los tres lados.
c) De las opciones elija las medidas para construir un triángulo, cuáles no y por qué.

(a) 2 cm, 4 cm y 7 cm.

(b) 4 cm, 5 cm y 6 cm.

(c) 9 cm, 3 cm y 5 cm.

Figura 34. Tarea geométrica (fase pre experimentación). Fuente: *(Correa, Muñoz, & Villegas, 2012)*

De las indicaciones que tiene la tarea (figura 34), se trabaja en un primer momento los incisos a y b. Se espera que tal vez, el geómetra trace un segmento de recta BC de longitud a (imagen de la derecha). Luego desde sus extremos y con radios b y c traza dos arcos que al cortarse determinan el tercer vértice A que se une con los extremos BC y se obtienen los otros dos lados del triángulo.

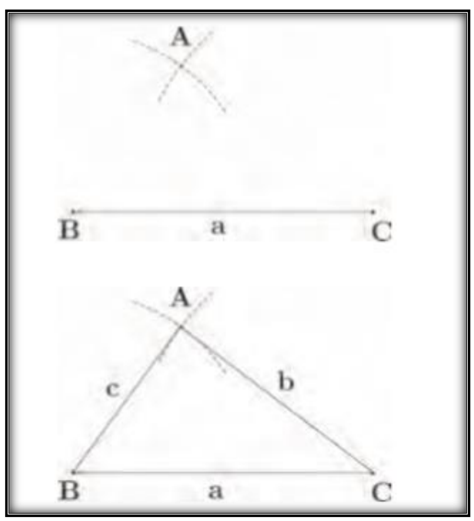


Figura 35. Posible solución (tarea geométrica pre experimentación). Fuente: *(Correa, Muñoz, & Villegas, 2012)*

Sin embargo, el geómetra también puede medir los segmentos para trazar el triángulo empleando la regla graduada o probablemente experimente colocando los tres segmentos en diversas posiciones (figura 35). Ahora, si valida su respuesta apoyándose en el trazo y la medida de los segmentos, se activaría la génesis instrumental y estaría privilegiándose la GI. Para cambiar esta situación podría cuestionársele si siempre sucederá lo mismo o qué sucedería si cambian las medidas de los segmentos, con ello, se estaría encauzando el trabajo hacía el paradigma GII porque tendría que razonar sobre una serie de propiedades además del criterio de construcción del triángulo, por ejemplo, pueden entrar en juego propiedades como: la suma de los ángulos internos de los triángulos es de 180° y la medida de los tres lados en el triángulo escaleno es igual.

La validación de los resultados es un momento fundamental de la tarea, en éste, los participantes argumentan las respuestas y analizan en colectivo las condiciones para la construcción de los triángulos de acuerdo con las medidas propuestas para llegar a la institucionalización del saber. En este sentido Balacheff (2000)señala:

> Sostenemos entonces que la toma de una decisión sobre la validez de un enunciado es legítima cuando se confirma como necesaria en contraposición a otros enunciados que son sólo posibles, aunque lo anterior no aparezca de manera explícita. Así, el proceso de validación, independientemente de que se cumpla o no en la explicitación de una prueba, está fundado en el análisis del pro y el contra, en otras palabras, en las contradicciones potenciales. Por lo anterior, este proceso es esencialmente dialéctico. Este hecho es aún más evidente en un contexto de debate, en el juego de las pruebas y las refutaciones. Por otro lado, fuera del contexto social, la elaboración de una prueba pasa por un análisis crítico y proviene de la dialéctica misma: una prueba rigurosa y definitiva es una prueba que no será refutada; incluso para algunos, una prueba que no sería refutable (pág. 34)

Es decir, en la medida que durante la validación, las justificaciones se confirman o modifiquen se activan los saberes interiorizados previamente. En el primer momento de validación, el cual es cuando terminan de responder a los incisos a y b de la tarea, se espera que los profesores enuncien el criterio, de no ser así o para ponerlo a prueba, se procede a plantear el inciso c, con la finalidad de que se justifique si siempre aplicaría o existiría alguna variante, en el segundo momento de la validación se espera que se institucionalice el criterio de construcción a partir de la reflexión grupal.

Cuando esta tarea fue aplicada con los futuros profesores, los momentos de validación jugaron un rol fundamental para que se lograra el objetivo, cabe señalar que la tarea sufrió modificaciones después de la aplicación considerando los posibles errores o dificultades en su diseño que limitaron en algún momento el trabajo con los futuros profesores, no obstante, los resultados obtenidos con la tarea reflejaron el conocimiento del contenido por parte de los estudiantes (en su mayoría correcto). Podemos concluir entonces, que esta tarea arrojó los resultados esperados, por lo que se consideró pertinente incluir la tarea geométrica en las situaciones de referencia. [60]

Enseguida, se presenta en la tabla 12 el análisis de la tarea, puede observar el énfasis sobre la activación de la génesis discursiva mediante la validación grupal. Esta característica es la parte fundamental de las situaciones de referencia que se diseñaron para la experimentación. Además, en la tabla 12, también se puntualizan las fases de circulación de los planos que movilizan los distintos componentes a nivel cognitivo y epistemológico, así como la forma en que se pensó la activación de las génesis durante su aplicación.

[60] En este trabajo sólo se presenta la tarea diseñada y no los resultados ya que el ETG personal de los participantes no constituye un punto de análisis en esta tesis porque el único objetivo era revisar la pertinencia de la tarea para luego diseñar la propuesta de formación que habría de ser puesta a prueba.

Tabla 12. Elementos del ETG y características generales de la tarea geométrica (fase pre experimentación). Fuente: Elaboración propia.

Elementos y características de la tarea geométrica	
Propósito	Construir un triángulo dado los tres segmentos, deduciendo la condición para que dados tres segmentos de recta se pueda construir un triángulo con ellos es que la medida de cualquiera de los segmentos sea menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia.
Génesis figural	Mediante la visualización no icónica de un triángulo que habrá de construir. Enfatiza la entrada perceptiva pues muestra los segmentos para la resolución del problema.
Génesis instrumental	En este caso se emplean primeramente los segmentos dados como el artefacto no simbólico que el geómetra empleará para la construcción con los instrumentos materiales a los cuales decidirá recurrir. El uso de la medida como recurso para la construcción es una de las posibles respuestas, así como el adecuado uso de los instrumentos geométricos a partir de los conocimientos que se poseen.
Génesis discursiva	En la descripción del procedimiento, se espera que exista una validación de la tipología de prueba intelectual de demostración al finalizar la tarea, o bien se transite por los diversos tipos de prueba (pragmáticas e intelectuales) hasta llegar a la confrontación de argumentos; se gestiona el recurrir al lenguaje geométrico al señalar escrita u oralmente las propiedades y criterios involucrados en el proceso de construcción.
Paradigma geométrico	GII pero si el geómetra basa sus respuestas en la construcción, predominará el GI
Circulación de planos	En un primer momento Descubrimiento y Exploración (Sem-dis), al resolver el problema geométrico, enseguida el Razonamiento y Justificación (Ins-dis) al solicitar que describa la forma en que lo construye y el plano de Presentación y comunicación (Sem-dis), se explicitará al justificar las respuestas de todas las actividades. Es importante considerar que cada una de las fases tiene ciertas indicaciones e interrogantes que llevan al geómetra al razonamiento del conocimiento geométrico.
Contenidos del programa de formación relacionados	Condiciones para la construcción de triángulos, características y propiedades de los triángulos.

Una vez que se han puntualizado estos elementos, se precisa de identificar el potencial del ETG Idóneo que proponen los textos escolares para el diseño de las clases en la enseñanza del triángulo.

4.1. EL ETG IDÓNEO EN LA ESCUELA PRIMARIA. LOS TEXTOS ESCOLARES

Para gestionar una enseñanza efectiva el profesor requiere comprender los conocimientos que debe enseñar, de acuerdo con Brousseau (1986, citado en (Broitman & Itzcovich, 2004), el saber es un producto cultural de una institución, además, los saberes tienen su referencia en la disciplina y la comunidad matemática.

La selección y secuencia de los saberes matemáticos "a enseñar" forma parte del proceso de transposición didáctica y su enseñanza es siempre la realización de un proyecto social (Chevallard, 1997). La textualización de este saber consiste en incluir en libros de texto y materiales escolares ciertas normas para la progresión y adquisición del conocimiento. La manera como se incorporan los saberes geométricos sobre el triángulo y las formas en las que se propone su enseñanza son el objeto de nuestro análisis en este apartado, se trata de analizar los dispositivos con los que cuenta el profesor para dilucidar los "saberes a enseñar" y las maneras para enseñarlos. En este sentido, el ETG idóneo potencial que se plasme en estos textos escolares, tiene relación con la matemática que se ha descrito en el ETG de referencia, sobre este punto, Kuzniak (2006) hace énfasis en la claridad que debe tener el profesor sobre la naturaleza matemática del saber y el paradigma que se pone en juego en el ETG idóneo.

Cabe destacar, que las actividades diseñadas por los docentes están mediadas por las orientaciones proporcionadas en los textos escolares los cuales determinan en gran medida la distancia que existe entre los contenidos incluidos en el ETG de referencia y la realidad en las aulas.

En México, todos los profesores de educación primaria reciben el "libro para el maestro" donde se describen los contenidos, las intenciones didácticas y los propósitos de las actividades que se incluyen en el libro del alumno. Desde 2009 hasta 2012, los libros de texto de los niños fueron elaborados de acuerdo con los contenidos del Programa de Estudios 2011, sin embargo en 2013 se editaron nuevos libros para el alumno y el maestro sin que hubiera habido cambios en los programas de estudio, por esta razón actualmente no coinciden plenamente los contenidos del libro del maestro con el orden sugerido en los del Programa de Estudios.

Además, a finales del ciclo escolar 2017-2018 se implementó un nuevo plan de estudios, conocido como "Aprendizajes Clave" y por la premura de los cambios en la educación primaria, los libros del maestro y del alumno de primero y segundo grados fueron diferentes a los de 3º,4º,5º y6º grados, generalmente, en los libros para el maestro se incluyen cuatro secciones fundamentales:

- *Las intenciones didácticas.* Donde se describen los recursos, las ideas, los procedimientos y los saberes que se deben poner en juego en relación con cada desafío del libro para el alumno. En algunos casos se mencionan los saberes geométricos que se deben lograr.
- *La consigna*. Se describe la actividad sugerida, la forma en que pueden organizarse los alumnos y en ocasiones las restricciones.
- *Las consideraciones previas*. Se proponen elementos para que el docente apoye a los alumnos (explicaciones breves de conceptos, posibles procedimientos, errores o dificultades, etc.)
- *Las observaciones posteriores*. La intención es que el profesor reflexione sobre su práctica y la eficacia de la misma.

En el caso del Programa "Aprendizajes Clave", se distribuyeron los materiales para el profesor y el alumno en el mes de julio de 2018, en ellos también se incluye un apartado sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas[61], por ejemplo en el eje de *forma, espacio y medida* se describen las recomendaciones para trabajo con la geometría. En otro apartado se incluyen las sugerencias didácticas, a saber: orientaciones curriculares, propósito y descripción de cada trayecto (que integra a su vez lecciones sobre el mismo aprendizaje esperado), el tiempo

[61] La organización es similar en las demás disciplinas, pero matemáticas es la de interés para esta investigación.

de realización y finalmente las intenciones didácticas y orientaciones de desarrollo de cada lección (SEP, 2018).

Bajo estas consideraciones se analizará la relación entre el libro del alumno y del maestro, pues en este último se sugiere el tratamiento didáctico de los contenidos, el análisis del ETG idóneo se concentrará en los contenidos geométricos involucrados en este trabajo y en las tareas didácticas y geométricas que proponen ambos documentos.

Entre las recomendaciones generales del libro para el maestro (Plan 2011) se señala la necesidad de realizar un análisis a priori de los desafíos matemáticos,[62] ya que "…es trascendental que el docente, previamente a la clase, resuelva el problema de la consigna, analice las consideraciones previas y realice los ajustes necesarios" (SEP, 2014, pág. 8), sin embargo no hay una propuesta clara sobre el diseño de situaciones didácticas para aplicarse antes de usar el libro de texto. Tampoco propone dar continuidad a las situaciones donde no se incluye la institucionalización del saber y en algunos casos (como en el libro de sexto grado), no se recuperan las nociones estudiadas en el grado anterior, todas estas decisiones quedan a criterio del profesor.

En el programa "Aprendizajes Clave" del 2018, los contenidos en el primer grado son las figuras geométricas en general, no hay contenidos específicos sobre el triángulo por lo que se considerarán en el análisis todas las tareas que incluyen ese contenido. En segundo grado, los trayectos del eje de forma, espacio y medida se dividen en el aprendizaje de figuras geométricas y de los cuerpos geométricos, aquí se incluye el triángulo como una de las primeras figuras geométricas que el niño debe reconocer, clasificar y nombrar. A diferencia del plan 2011, los trayectos se presentan de una manera secuenciada.

[62] El libro del niño, más que dividirse en lecciones se estructura con un conjunto de "desafíos matemáticos", que no son otra cosa que problemas relacionados con los contenidos del programa de estudios.

Antes de continuar, habremos de insistir que de acuerdo con la teoría de los paradigmas geométricos y el espacio de trabajo geométrico de Kuzniak (citado en Henríquez, (2014), para asegurarse que un estudiante ha comprendido la lógica de una prueba en geometría, debe ser expresada con palabras, por esta razón es necesario un discurso para argumentar y convencer, esta probatoria del aprendizaje está centrada en la actividad cognitiva que exige la articulación entre visualización y razonamiento discursivo. Esto es, la génesis discursiva exige un proceso de prueba, por ejemplo, probar que la suma de los ángulos de un triángulo son 180°. También esta prueba se encuentra en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, cuando se hace presente el discurso demostrativo del alumno en la situación de validación. Identificar si aparece este discurso en las tareas que se proponen en los libro de texto, demostrará la potencialidad de las mismas.

Además, en opinión de Kuzniak (citado en De la Torre, (2008), la geometría elemental está compuesta por tres paradigmas: geometría natural (GI), geometría axiomática natural (GII) y geometría axiomática formalista (GIII). La noción de espacio de trabajo geométrico de este autor, toma el sentido de espacio del pensamiento insertando objetos, instrumentos y una finalidad para el trabajo geométrico sustentada en la elección de un paradigma, por lo que el paradigma que predomina en los libros de texto resulta importante, pues orienta al profesor en el diseño del espacio idóneo para la enseñanza de la geometría.

Por otra parte, los Programas de Estudios (2011 y 2018) proponen secuencias de los aprendizajes esperados, es decir, la mayoría de los contenidos que aparecen desde el primer grado van creciendo en complejidad en los grados subsecuentes. Con base en esta organización los programas favorecen el trabajo en grupos unigrado pues los niños cuentan con todo el ciclo escolar para adquirir los conocimientos que emplearán en el siguiente año. Sin embargo, el trabajo en el aula multigrado debe desarrollarse de manera distinta, pues el profesor debe trabajar con niños de todos los grados al mismo tiempo y lograr los aprendizajes esperados de cada uno de los grados en un mismo ciclo escolar.

El diseño de una "clase única" para todos los grados es una de las alternativas que facilitan y optimizan el trabajo docente aunque su diseño implica una revisión profunda de los contenidos de todos los grados escolares[63] y vincular las orientaciones sobre la enseñanza y los contenidos de ambos programas, esto es, se requiere identificar el ETG idóneo potencial plasmado en uno y otro documento, de esta manera el profesor podrá estructurar "clases multigrado" que pueda plantear a los niños de distintos grados escolares.

Para el análisis de los libros de texto las categorías[64] se organizaron de la siguiente manera: *orientaciones didácticas* propuestas para el tratamiento de los contenidos (en relación a la intención didáctica, los contenidos geométricos involucrados, las intervenciones que se sugieren al profesor y las situaciones didácticas propuestas); los tipos de *tareas geométricas* que se indican para los niños (con base en los componentes del ETG), las *génesis que se activan* en las tareas propuestas, la *circulación de los planos* y, finalmente, el *paradigma geométrico* que predomina. Principalmente se trata de identificar la relación entre las tareas diseñadas y lo propuesto en el ETG de referencia, así como el potencial de las mismas para que el profesor diseñe situaciones de enseñanza de manera efectiva. Una síntesis de los hallazgos obtenidos se puede apreciar en las siguientes tablas (tablas 13 y 14). Es importante aclarar que el análisis de primero y segundo grados se realizó tomando como referencia el programa "Aprendizajes Clave 2018", y el de tercero, cuarto, quinto y sexto grados se hizo tomando como referencia el "Programa de estudios 2011".

[63] Bajo este razonamiento es que se mencionó previamente la necesidad de un programa de estudios o textos escolares propios para los grupos multigrado, debido a lo complejo que resulta esto para el profesor.

[64] Es importante recordar que se tomaron en cuenta solamente aquellas tareas que tienen relación con los contenidos geométricos del triángulo.

Tabla 13. Análisis de los libros de Primero y Segundo grados. Fuente: Elaboración propia con base en Programa Aprendizajes Clave 2018.

Grado	Orientaciones didácticas	Tareas geométricas	Génesis que se activan	Circulación de los planos	Paradigma geométrico
1°	Generar espacios de validación con los niños. Emplear los términos geométricos correctos. Hacer énfasis en el papel activo del niño, no en la adquisición de vocabulario geométrico. Utilizar materiales concretos. Desarrollar la percepción geométrica. Posibles procedimientos, errores y obstáculos de los niños al resolver la actividad. Promover las explicaciones de clasificación. Ejemplificar procesos	Reproducción de una figura dada Identificar figuras Descomposición de una figura en otras Visualización de figuras Construcción de nuevas configuraciones Recortar y doblar para construir figuras Nombrar figuras Explicar la clasificación de figuras Reconocer forma, tamaño y posición de las figuras Construir y expresar oralmente y por escrito criterios de clasificación de figuras Clasificar figuras similares con base a criterios Construcción con base en instrucciones gráficas	Instrumental Figural	Semiótico-instrumental y epistemológico Semiplano Semiótico-referencial (no circulan todos los componentes)	GI/gII
2°	Propiciar el fortalecimiento de la percepción geométrica. Orientar al uso del vocabulario correcto pero no hacer énfasis en el dominio por parte de los niños Favorecer la habilidad de visualización Orientar por medio de preguntas el reconocimiento de las figuras	Identificar características de las figuras a partir de la descripción de las mismas Visualizar figuras para su clasificación Clasificar figuras con base en sus características Comunicar características y posición de figuras Identificar los triángulos como figuras de tres lados Utilizar el vocabulario geométrico al nombrar al triángulo por su nombre Composición y descomposición de figuras Reproducción y creación de figuras Descripción de figuras.	Figural Instrumental Discursiva	Instrumental-discursiva Semiplano semiótico-referencial	GI/gII

En la tabla anterior (tabla 13), en la columna de tareas geométricas puede observarse una marcada progresión de los contenidos, es decir, la visualización de figuras y la identificación de sus características son tareas que se complejizan un poco más en el segundo grado.

En lo correspondiente a las orientaciones didácticas, destaca la sugerencia de utilizar material concreto para la visualización y construcción, aunque esta última se presenta en menor medida por lo que, la génesis figural es la que más se activa en las tareas de estos grados. Si bien es cierto que aparecen acciones como comunicar, nombrar, expresar y explicar, el común denominador es favorecer la percepción geométrica. En este sentido, el encargado de enunciar las diferentes propiedades y/o criterios que se estudian es el profesor, al niño no se le “exige” que lo haga para validar o probar sus explicaciones.

En la circulación de los planos se observa que en algunos casos no circulan todos los componentes, por ejemplo en primer grado, cuando se pide que nombren y expliquen algunas características se movilizan los componentes visualización, espacio real y local, y referencial, por lo tanto, la circulación es un semiplano semiótico-referencial en el que no se solicita algún tipo de prueba para validar los argumentos, sólo se hace mediante la visualización y el reconocimiento de las figuras, en consecuencia, movilizar el componente prueba queda a consideración del profesor.

Podemos concluir entonces que en estos dos primeros grados la visualización es parte fundamental del trabajo geométrico y se utiliza muy poco el vocabulario geométrico ya que por lo general, las actividades dejan al profesor la responsabilidad de institucionalizarlo. Este hallazgo marca una diferencia con los textos escolares del Plan 2011, pues en ellos no aparecía este aspecto frecuentemente, sin embargo sigue presente un enfoque de razonamiento geométrico gradual, en otras palabras, no se considera que los niños pequeños puedan enunciar criterios o propiedades como argumentos, sino que solamente es posible trabajar con ellos la visualización y percepción geométrica.

No obstante lo anterior, desde la perspectiva teórica del ETG se puede deducir que, a partir de la movilización del componente prueba, mediante la validación grupal en el aula multigrado, es posible que los niños pequeños desarrollen un razonamiento geométrico basado en la argumentación de propiedades y criterios geométricos.

Tabla 14. Análisis de los libros de Tercero, Cuarto, Quinto y Sexto grados. Fuente: Elaboración propia con base en Programa de Estudios 2011.

Grado	Orientaciones didácticas	Tareas geométricas	Génesis que se activan	Circulación de los planos	Paradigma geométrico
3°	Que los trazos sean congruentes y de igual longitud. Orientar el trazo de los segmentos a partir de indicaciones escritas. Facilitar un modelo concreto para facilitar la validación de la actividad. Conceptos como líneas congruentes, figuras geométricas y polígonos. Posibles procedimientos de los alumnos.	Trazar a partir de instrucciones escritas. Visualizar segmentos. Trazar segmentos empleando artefactos materiales.	Instrumental Figural	Semiótico-instrumental	GI/gII
4°	Enriquecer las definiciones de los tipos de triángulos. Orientar en la verificación y trazado de los triángulos empleando los artefactos materiales para la medición. Se cuenta con las definiciones de los conceptos. Orientar la discusión y análisis de la clasificación de triángulos.	Clasificar triángulos a partir de definiciones. Descripción de triángulos con base a las características. Manipular, superponer y construir figuras con material concreto. Trazar utilizando reglas, compás, escuadra y plegado de papel. Trazar a partir de una secuencia ordenada. Verificación mediante construcción y medición. Transformación de triángulos en cuadriláteros.	Figural Instrumental Discursiva	Semiótico-instrumental, Semiplano instrumental-referencial. El semiótico-discursivo se trabaja con la verificación empírica	GI/gII

		Discurso descriptivo para identificar los triángulos. Discurso descriptivo para compartir con otro.			
5°	Orientar mediante preguntas en la puesta en común para que reconozcan las bases del triángulo. Apoyar en el trazado de las alturas. Se proporcionan los contenidos básicos y los que se deben adquirir en sesiones posteriores como congruencia de triángulos. Orientar mediante preguntas el trazado del triángulo.	Construcción a partir de instrucciones (artefacto simbólico) Superposición, yuxtaposición y reconstrucción de figuras Descomposición de figuras Visualización de figuras y propiedades Construcción con base en medidas establecidas Trazar, identificar y clasificar Deducir la fórmula del área del triángulo Usar la fórmula del triángulo Trazar triángulos en una circunferencia Verificación de enunciados	Figural Instrumental Discursiva	Semiótico-instrumental Semiótico-discursivo Instrumental-discursivo	GII/gI en las actividades iniciales GI/gII En las deducciones (aunque no se pide prueba intelectual para ello)
6°	Proponer modelos a los niños para que deduzcan las fórmulas.	Identificar ejes de simetría en los triángulos Deducir fórmulas a partir de la triángulo Dibujar una figura siguiendo un modelo Reproducción de figuras a escala	Figural Instrumental	Semiótico-instrumental Instrumental-discursivo	GI/gII

Con base en lo que se observa en la tabla 14, la mayoría de las actividades planteadas para estos grados se mueven entre los paradigmas GI y GII, fundamentalmente proponen utilizar instrumentos y objetos para reconocer, manipular, reproducir y construir las figuras geométricas. Se observa también que la medición y el cálculo son tareas recurrentes, inician con el estudio del segmento como base para luego trazar figuras. El papel propuesto para el profesor es orientar el proceso de validación de los niños para la que generen pruebas pragmáticas (principalmente el ejemplo genérico y el empirismo ingenuo).

En tercer grado se hacen planteamientos más concretos sobre contenidos geométricos, esto avanza secuencialmente en los grados subsecuentes, es decir, la génesis discursiva sustentada en pruebas intelectuales o el paradigma GII se considera propio de los grados superiores. En este sentido, es pertinente reflexionar la manera en la que el profesor multigrado puede trabajar simultáneamente con niños de distinto grado.

En cuarto grado, la clasificación y el trazado de triángulos se centran en la definición incluida en el libro, no hay tareas previas al conocimiento de estos conceptos y no se solicita un discurso argumentativo para explicitar las tareas realizadas. La congruencia de los triángulos rectángulos sólo se explica en el libro para el maestro.

Podemos apreciar en la tabla 14, que la mayoría de los conceptos relacionados con el triángulo aparecen en quinto grado, hay un amplio número de tareas en las que se pide trazar y localizar las alturas como tareas previas a la deducción de la fórmula para calcular el área. Por otra parte a pesar de que la transformación y la verificación son procedimientos mediante los que se genera la demostración y el discurso, el tipo de pruebas que predominan son las pragmáticas y en pocas ocasiones aparecen las intelectuales del tipo cálculo sobre el enunciado.

En quinto grado se pide trazar las rectas notables del triángulo aunque se omiten los puntos notables, estos contenidos no se incluyen en los libros del niño pero aparecen en los programas de formación. Con la comprensión de estos puntos notables, el docente podría diseñar situaciones didácticas para favorecer el razonamiento geométrico y sentar las bases de conceptos geométricos subsecuentes. Sin embargo, en sexto grado solamente se estudian los conceptos de simetría, área y perímetro para identificar y reconfigurar figuras utilizando el tangram. Los saberes adquiridos en el grado inferior quedan sin profundizar.

En síntesis, los artefactos mayormente sugeridos en los textos escolares son de tipo material (reglas, escuadras, compás), los de tipo simbólico (enunciados o propiedades) no aparecen con frecuencia y cuando lo hacen, por lo general se pide la verificación mediante regla, escuadra y compás. Otro aspecto relevante es que no se plantean circulaciones completas entre los planos del ETG, aunque aparecen en algunas lecciones no están en una misma situación. Este rasgo es congruente con los programas de formación del profesor, en ellos tampoco se consideran estas circulaciones en una misma secuencia de tareas. Con ello podemos deducir que el proceso de prueba se presenta de manera escasa en las tareas y no se relacionan con los otros componentes de los planos del ETG.

Ahora bien, para un proceso de transposición didáctica adecuado deben comprenderse los saberes sabios de referencia y las relaciones entre conceptos, teoremas, propiedades o postulados que se construyen con las nociones básicas. En este sentido, el libro es el recurso más próximo con el que cuenta el profesor para realizar este proceso, sin embargo, se presentan ciertos factores que lo dificultan: algunas de las actividades propuestas no tienen una secuencia adecuada de tercero a sexto grado (por ejemplo de quinto a sexto, no hay una secuencia clara de los contenidos además de que se omiten algunos de ellos para continuar su estudio en el grado subsecuente), los contenidos complican la didactización de los mismos, el estudio de los conceptos se deja a medias durante el trayecto escolar, se confiere la responsabilidad al profesor de abordar los contenidos con situaciones previas y existe una escasa definición de conceptos y definiciones por lo que la formalización del saber en juego queda a criterio del profesor en la mayoría de las tareas propuestas (particularmente en los primeros grados del Programa Aprendizajes Clave 2018, donde, a pesar de que se describe el propósito de la geometría, no se incluyen los conceptos y definiciones como en el Plan 2011).

En los hallazgos es posible subrayar que las actividades propuestas se basan en la visualización de figuras y demandan el uso de artefactos para construir o para verificar. Las fases preponderantes son la de descubrimiento y exploración (sem-dis) así como la de justificación y razonamiento (ins-dis), sin embargo, existen momentos en que se solicita al niño que explique y justifique el resultado de sus respuestas, con ello se activan las génesis semiótica y discursiva mediante la intervención del docente. Es importante insistir en que esta intervención es un poco ambigua para el profesor, pues en ocasiones se le sugiere que defina claramente el saber involucrado pero no propone de qué manera. Se puede decir que las sugerencias didácticas son confusas y no orientan adecuadamente el diseño de una situación didáctica como tal. En este sentido, se dificulta el proceso de transposición que pueda realizar el docente pues en su mayoría concluyen con la explicación del tema y la comparación de respuestas.

El hecho que el libro para el maestro contenga una serie de definiciones y proposiciones ligadas a las tareas para el niño puede ser un buen recurso, siempre y cuando no se planteara como una información meramente teórica para el profesor. Aunque en las sugerencias de tercero a sexto grado se sugiere que el docente decida en qué momentos diseñar algunas situaciones didácticas de introducción o complementariedad al tema, esta tarea queda a criterio del profesor. Pero conforme se trabajan los distintos temas, los desafíos se tornan más complejos y para validar e institucionalizar parece pertinente que el profesor plantee otras situaciones que favorezcan la profundización en los contenidos. En el caso de los primeros grados, se describe ampliamente el papel del profesor y los propósitos en la enseñanza de la geometría, sin embargo, en relación a la hipótesis derivada de la perspectiva teórica del ETG, a los niños de los primeros grados sólo se les pide recurrir al discurso como argumento para llegar al razonamiento geométrico.

Ahora bien, si el objetivo de los programas y libros de texto es convertirse en un ETG idóneo para el profesor, puede decirse que cumplen medianamente con su propósito, pues si bien dan cuenta de los contenidos y conceptos involucrados en los desafíos (aunque no en todos es así), se quedan cortos como dispositivo que favorezca el ETG Idóneo para el profesor puesto que se reducen a dar una información general. Como los desafíos y la secuencia de lecciones están dictadas en los textos, se limita la tarea del profesor para la estructuración de situaciones o fases menos rígidas. Sobre la relación que existe entre los textos escolares y la matemática que se ha descrito en el ETG de referencia, encontramos que algunos contenidos que se proponen en la formación del profesor no aparecen en las tareas y orientaciones de los textos escolares, sobre todo, no se enmarca la relación que existe entre los contenidos adquiridos en la formación y los que se estudian en la escuela primaria.

4.2 EL ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO ESPONTÁNEO

Para configurar un ETG en el aula el profesor interpreta el ETG de referencia y a partir del ETG idóneo potencial[65] que aparece en sus materiales escolares diseña un ETG idóneo para la enseñanza de los conceptos geométricos. No obstante, cuando aún no conoce las posibilidades que le brinda la perspectiva de los Espacios de Trabajo Geométrico, desarrolla una práctica que se basa en sus conocimientos empíricos. Esa práctica también puede ser analizada a través de las nociones de la perspectiva teórica asumida y parece razonable realizarlo porque caracterizar las tareas implementadas por los profesores para la enseñanza del triángulo con base en los componentes y génesis del ETG, permitirá comprender la relación entre los espacios de trabajo y las nociones sobre las que habría que poner mayor énfasis en los procesos de formación de profesores.

Con este objetivo se observaron las prácticas en el aula de cuatro futuros profesores de educación primaria que aún no habían sido formados bajo esta perspectiva teórica, el criterio de selección fundamental es que hubiesen destacado académicamente en los cursos del trayecto de matemáticas y tenido un avance significativo durante el trayecto de la práctica profesional, además de ser alumnos de quinto semestre que estuvieran realizando las prácticas profesionales en escuelas bidocentes y/o unitarias, el análisis del trabajo en el aula y que los jóvenes no hubiesen tenido acercamiento con el marco teórico del ETG, es la razón por la que se ha

[65] Con relación al término potencial, nos referimos a lo que se encuentra planificado en los programas de referencia (planes de estudio de formación de profesores y de educación primaria), sobre los contenidos matemáticos que habrán de estudiarse en cada grado y nivel escolar.

denominado a este momento como *Espacio de Trabajo Geométrico Espontáneo*[66]. Para fines de esta investigación se describe solamente la práctica de una futura profesora (FP), este análisis fue realizado cuando enseñaba temas de la geometría elemental como: cuerpos y figuras geométricas: triángulos y equiláteros, clasificación de los triángulos: equiláteros, isósceles y escalenos con base en sus propiedades (tabla 15). Para recuperar lo que sucedía en sus clases, debieron videograbarse tres sesiones que formaban parte de una misma secuencia didáctica, de igual manera, se revisaron sus planes de clase y las producciones de los niños.

Tabla 15. Especificaciones generales de la planificación de la profesora Lucía. Fuente: Elaboración propia.

Grados	**Contenidos del programa de primaria**	**Contenidos del programa de formación relacionados**
4°, 5° y 6°	4° Identificación de las caras de objetos y cuerpos geométricos, a partir de sus representaciones planas y viceversa. 5° Resuelve problemas que implican el uso de las características y propiedades de triángulos y cuadriláteros. Calcula el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros.	Cuerpos y figuras geométricas: triángulos y equiláteros. Revisión de las propiedades del rectángulo, cuadrado y triángulo rectángulo. Triángulos: equiláteros, isósceles y escalenos. Clasificación de cuadriláteros con base en sus propiedades.

Para el análisis de las clases se identificaron los episodios donde aparece una tarea relacionada con el contenido geométrico. Como se mencionó anteriormente, para categorizar, delimitar y clasificar lo concerniente a las tareas didácticas y geométricas de acuerdo al rol del profesor y del estudiante, es importante definir las acepciones de cada una de ellas, en este tenor, se retoma a Verdugo (2017), quien define de manera general una tarea como una actividad intelectual que permite activar el ETG entre sus planos, polos y génesis, vista desde dos dimensiones, el deber del docente y del alumno; además de la visión de Nechache (2016), sobre la tarea matemática, la cual considera es cualquier pregunta, actividad o problema realizada en un determinado

[66] El término espontáneo se refiere a lo que ocurre en el aula con relación al trabajo didáctico del profesor y puede ser futuros profesores o profesores en servicio que no hayan tenido acercamiento previo a los conceptos teóricos del ETG.

contexto. Bajo estas consideraciones se analizan las tareas que la profesora propone a los niños durante las clases. Los rasgos principales que se consideraron son: *los componentes del ETG*, la *circulación entre los componentes de los planos* y, el *paradigma geométrico dominante*. En la tabla 16 puede verse la relación entre contenidos de la escuela primaria y la escuela Normal y la secuencia de tareas que planteó la maestra.

Tabla 16. Tareas planteadas por la profesora en formación durante el desarrollo de la clase. Fuente: Elaboración propia.

Contenidos (Primaria)	**Contenidos (licenciatura)**	**Objetivo del episodios de clase**	**Tarea (t)**
4° Grado Identificar caras de objetos y cuerpos geométricos, a partir de sus representaciones planas y viceversa.	Cuerpos y figuras geométricas: triángulos y equiláteros. Revisión de las propiedades del rectángulo, cuadrado y triángulo rectángulo.	**Preparación del medio.** **Exploración de conocimientos previos.**	***t1*** Identificar características de las figuras geométricas a partir de las caras planas de objetos.
	Cuerpos y figuras geométricas: triángulos y equiláteros.	Ejercitar de las características de las figuras.	***t2*** Describir por escrito las características de las figuras geométricas.
	Clasificación de cuadriláteros con base en sus propiedades.	Revisar comparar las figuras encontradas en equipos.	***t3*** Justificar las propiedades de las figuras encontradas.
5° Grado Resuelve problemas que implican el uso de las características y propiedades de triángulos y cuadriláteros.	Propiedades del rectángulo, cuadrado y triángulo rectángulo. Triángulos: equiláteros, isósceles y escalenos. Construcción de triángulos con regla y compás.	Validar grupalmente las respuestas de los equipos. Construir grupalmente triángulos. Llenar una hoja de trabajo sobre triángulos.	***t4*** Clasificar figuras de acuerdo con sus lados y ángulos. ***t5*** Construir un triángulo y trazar sus alturas.

Para organizar su secuencia de tareas, la profesora Lucía[67] revisó materiales sobre la planificación en grupos multigrado donde se hacía énfasis en la interdisciplinariedad, por ello intenta vincular un contenido de cuarto grado de la asignatura de Historia con Matemáticas. También diseña las actividades para que sean trabajadas de manera grupal por los niños de 4º, 5º y 6º grados, puede apreciarse en la tabla de contenidos (tabla 16), que no se encuentran presentes los de sexto pero los alumnos de este grado sí se encuentran considerados en el trabajo grupal, como se ha mencionado, el maestro del aula multigrado tiene la flexibilidad de organizar los temas que trabajará con los niños, tomando en cuenta la relación que exista entre ellos, en el caso de Lucía, para esta secuencia didáctica integra solamente correspondientes a cuarto y quinto pues en ese momento de avance de sus alumnos no podía relacionar un contenido de sexto, pero en otras planeaciones toma como punto de referencia lo que concierne a este grado escolar y lo desarrolla con los demás grados con distintos niveles de complejidad, esta decisión parece orientarse por la revisión que hizo acerca de la gradualidad del contenido matemático en los programas de estudio de educación primaria.

4.2.1 Análisis de la tarea t1.

Durante la primera clase Lucía explora los conocimientos previos de los niños al mostrarles objetos propios de las culturas mesoamericanas,[68] su objetivo es que los niños identifiquen las figuras que se encuentran en las imágenes. Al concluir, les solicita elaborar en casa una lista de las figuras que identificaron y escribir sus las características. El desarrollo de esta tarea se puede observar en el siguiente fragmento.

> FP: ¿Ustedes creen que habrá sido difícil construir todos estos objetos y pirámides?
> Aos: ¡No, porque era fácil que consiguieran las piedras y el barro!
> FP: ¿Cómo los pudieron construir, que formas tienen? (señalando la piedra del sol)
> Ao: Pues con las manos.
> FP: Sí, pero, ¿qué forma tiene? (vuelve a señalar la imagen de la piedra del sol)
> Aa: Ese objeto que es la piedra del sol, tiene forma de un sol.

[67] Para efectos de resguardar su identidad llamaremos Lucía a la Futura Profesora (FP)
[68] El tema de las culturas había sido estudiado en una sesión previa de la asignatura de Historia.

> FP: ¿Y cómo se le llama a esa forma?
> Aos: Es un círculo
> FP: ¿Solamente tiene forma de un círculo o tiene más formas?
> Ao: Tiene otras formas adentro como triángulos y cuadrados.
> FP: ¿Y en esta otra qué formas pueden ver niños? (señalando la cabeza olmeca)
> Aa: Pues la cabeza es media redonda, tiene un rectángulo en la frente.
> Ao: ¡Sí y la nariz es un triángulo, y los ojos son ovalados!
> FP: ¿Y en esta niños? (señalando la pirámide de Teotihuacán)
> Ao: ¡Yo maestra yoooo!, tiene triángulos la pirámide y los escalones de abajo son como rectángulos.
> FP: ¡Bien niños y ¿cuál es el nombre con el que conocemos a todas estas formas?!
> // Los niños se muestran dudosos y permanecen en silencio//
> Aos: Se llaman... (Se quedan pesando)
> FP: ¿A ver niños, en matemáticas cómo les llamamos a estas formas?
> Aos: ¡Ahhh… se llaman figuras geométricas!
> FP: Bien, ven que sí teníamos la respuesta ¿Y qué tanto conocemos de estas figuras? (comienza a trazar sobre el pizarrón un cuadro de dos columnas con los subtítulos de figura en la primera y descripción en la segunda).
> FP: Bueno niños para ello realizaremos esta actividad en la cual colocaremos en la primera columna el nombre de las figuras que identificamos y en la segunda columna la descripción de cada una de estas figuras con el número de lados y todas las características que conozcan.

En un principio, Lucía activa la circulación de los componentes del ETG mediante la génesis figural con la visualización icónica, cuando pide identificar las figuras geométricas en las imágenes. Solicita que nombren las figuras, pero para la justificación sigue predominando la visualización como validación ya que no se emplea ningún instrumento ni pide descripción de características. En este caso se presenta el componente *espacio real y local* pues el niño trabaja con una parte del modelo y se refiere a los objetos resultantes (imágenes donde identifica las figuras geométricas), además hay objetos físicos representados mediante el dibujo. A partir de esto, se puede apreciar que la tarea se ubica en el paradigma GI. Una manera de potenciar esta tarea relativa sería incluyendo la enunciación de propiedades y características generales de las figuras, podemos observar que la profesora lo hace al final de la actividad al colocar el nombre, la descripción y las características, pero lo omite en la parte de la discusión o búsqueda de figuras por lo que no promueve que los estudiantes justifiquen su discurso en todo momento.

Para complementar, debe mencionarse que Lucía plantea la introducción al tema al relacionar la construcción de las pirámides con la forma que tienen: *¿Cómo los pudieron construir*, *que formas tienen?*, aunque puede verse que intenta orientar la respuesta cuando señala una de las imágenes, el discurso empleado puede confundir al niño, al indicar la manera en que pudieron construir los objetos, esto puede llevar a los niños a pensar en los materiales y no en la forma de la figura. Cuando utiliza la palabra "forma", el niño la asocia con el sol, el objeto representado en la imagen, podemos observar entonces el empleo de objetos reales. De acuerdo a Houdement y Kuzniak (2006),

> Los objetos geométricos son un componente esencial del espacio de trabajo geométrico y los diferentes puntos de vista sobre su naturaleza exacta dependen del modelo teórico que los define y del espacio de soporte en el que se encuentran ubicado. [...] El espacio que interviene en la geometría se construye en estrecha relación con el espacio real que él reconstruye o que revela de manera diferente de acuerdo con los diferentes paradigmas. El espacio del que estamos hablando aquí es similar al que Malafosse (2002, p. 44) descrito bajo el nombre de espacio de realidad, es decir un conjunto compuesto objetos reales y eventos existentes fuera del pensamiento del sujeto, y sobre los cuales llevar tanto la actividad psíquica de los individuos como la actividad de pensamiento de comunidades culturales. (pág. 186).

Con ello podemos inferir que emplear imágenes de objetos reales como lo hace Lucía es una acción apropiada, aunque se pudo potenciar la situación mediante la activación de la génesis discursiva a partir de la enunciación de propiedades de las figuras. En el fragmento se observa como Lucía vuelve a señalar las imágenes para que los niños centren la atención en lo que ella espera (la forma), hasta lograr que el niño mencione las figuras geométricas.

Por otra parte, esta actividad se relaciona con la entrada del botánico (botanise), la cual es evidente e inmediata pues se reconoce y nombra las formas más elementales de la geometría plana, se observan las características entre formas similares y/o diferentes y las propiedades se distinguen a partir de características visuales. Cabe señalar, que para Duval (citado en Henríquez, (2014), la actividad del botánico no es geométrica, pues la observación podría ser representada con una copia a mano alzada sin requerir la utilización de algún instrumento. En este caso, para los fines de una exploración de conocimientos previos Lucía logra de cierta manera su objetivo, lo que es importante es que el logro del objetivo como tal es limitado.

4.2.2. Análisis de las tareas t2 y t3.

En la siguiente sesión, con el apoyo de la tabla que elaboraron los niños en la primera tarea, Lucía organiza a los niños en equipos de tres y les pide nombrar las figuras encontradas y la descripción de cada una, podría decirse que ésta es una fase de formulación porque solicita justifiquen el registro de cada figura. Posteriormente dialoga con los equipos y solicita integrar las figuras faltantes.

> FP: ¿Cuáles figuras tienen? (se acerca los equipos haciendo cuestionamientos sobre la tarea realizada)
> Ao: Yo tengo un cuadrado, un triángulo y un rombo.
> FP: A ver, ¿dónde lo encontramos? (señala las imágenes)
> Ao: Aquí, mire, este es un cuadrado
> Ao: Yo no lo miro.
> Aa: No, ese es un cuadrado
> FP: ¿Por qué lo dices?, A lo mejor por la posición que tiene la figura, ¿verdad?, bueno, ¿qué podría ser?
> Ao: No es un rombo
> FP: Si lo vemos de esta forma, pues si puede ser un rombo.
> Ao: No, pero no puede ser. Yo no lo miro.
> FP: ¿Y cómo supieron qué figura era?, ¿en qué se fijaron?
> Ao: Yo me fijé en sus lados, mire maestra, este es un cuadrado, uno dos tres, cuatro (señala los lados de la figura).
> FP: Muy bien, ¿y eso escribieron en su tabla donde les pedí la descripción?
> Aos: Sí...
> FP: A ver dime, de esta figura que encontraste ¿qué pusiste en la tabla? (señala un triángulo)
> Ao: Triángulo en el nombre y acá le puse que tiene tres lados
> FP: ¿Qué más le podemos poner en la descripción?
> Ao: Que sus lados no son iguales
> FP: ¿Por qué dices que no son iguales?, ¿de qué tipo de triángulo se tratará? (el alumno no responde, observa la figura)
> FP: ¿Serán todos su triángulos iguales?
> Ao: No
> FP: Dime, si no son iguales ¿cuánto medirá cada uno?

> Ao: Este es más largo y estos más cortos
> FP: ¿Y cuánto miden sus lados? (el niño comienza a medir utilizando la regla)
> FP: ¿A ver y si lo medimos cómo sabríamos qué tipo de triángulo es?, ¿ustedes anotaron eso? (dirige la pregunta a todo el equipo, pero no hay oportunidad e responder ya que la solicitan fuera del salón y se tiene que retirar)
> FP: Bueno, revisen eso y pongan lo que les falta

Puede observarse en el fragmento anterior, cuando un alumno plantea una interrogante sobre la diferencia entre un cuadrado y un rombo, Lucía da la respuesta y alude a la posición de la figura, con su participación (*Si lo vemos de esta forma, pues si puede ser un rombo*), se está generando una falsa idea sobre la diferencia entre rombo y cuadrado, con ello deja de lado un posible tratamiento didáctico del error, incluso, cuando aparece la duda entre el rombo y el cuadrado (*No, pero no puede ser. Yo no lo miro),* no los cuestiona sobre ello, cambia de tema y centra el análisis en un ejemplo particular. También es importante mencionar que la maestra señala la posición de las figuras geométricas como un elemento que las determina, así como el número de lados como la característica única que define a una figura geométrica, pero no profundiza en este aspecto, tampoco hay indicios ser un tema estudiado anteriormente.

Con relación a los componentes, puede apreciarse que la visualización se hace presente cuando Lucía pide la descripción de las figuras y al requerir la explicación entra en juego una justificación, este elemento se presenta con bastante frecuencia en los programas de formación inicial y las tareas analizadas en el capítulo anterior dan cuenta como las orientaciones didácticas para el profesor en formación la consideran parte fundamental del trabajo geométrico. También puede observarse la manera en que Lucía cuestiona a un alumno (el alumno señala que el triángulo tiene tres lados) y busca ampliar ese argumento al recuperar la idea del niño acerca de la diferencia entre los lados, por ello su cuestionamiento cambia, *¿cómo podría saber el tipo de triángulo que es?*, en este momento aparece el componente de construcción basado en la medición del triángulo. Lucía sugiere la técnica de la medición y la regla como artefacto, esta acción es congruente con los programas de formación y los libros para el maestro de educación primaria, puesto que utilizar la regla como artefacto para comprobar las características de las figuras es una tarea que recurrentemente aparece en estos materiales.

Podría pensarse en un primer momento, que Lucía pretende favorecer un tipo de prueba mental para que el niño valide a partir de acciones y conocimientos, sin embargo, al no obtener respuesta, los conduce a usar la medición para encontrar la solución, hacia una prueba de tipo ejemplo genérico. Esta conducción muestra que el uso de pruebas intelectuales no es la más viable, pues el uso de vocabulario geométrico para que el niño valide sus afirmaciones es considerado como una actividad final de las tareas geométricas. Recordemos que conforme a la categorización propuesta por Balacheff (2000), las pruebas intelectuales provienen de una forma particular de razonar, donde se articulan cadenas de argumentos para favorecerlas desde la formación del profesor mediante una producción de lenguaje simbólico.

Puede decirse también que en ambas tareas se promueve la circulación entre los planos semiótico-instrumental (de descubrimiento) y epistemológico, y también hay indicios de circulación hacia el plano semiótico-discursivo, el componente prueba se encuentra en la descripción escrita y la validación de los argumentos mediante el trabajo en equipos. En este caso, el paradigma que predomina es GI/gII, pues primero se solicita la descripción de las figuras (características y propiedades) para luego realizar la verificación de la descripción mediante la medición de las figuras. Es importante recalcar, que el diseño del espacio idóneo de Lucía se ve influenciado por en el espacio de referencia e idóneo de las instituciones.

4.2.3. Análisis de la tarea t4.

Una vez los equipos han terminado de llenar la tabla, como se puede ver en el siguiente fragmento, Lucía organiza la socialización de los resultados, es decir, la discusión colectiva sobre los hallazgos de los niños.

> FP: A ver niños, ya que completaron todas las figuras que encontraron en las imágenes, ¿Quién me dice qué características tiene el triángulo?
> Ao: Tiene tres lados rectos...pero dos los tiene igual y el de abajo no.
> FP: ¿Siempre es lo mismo, que tiene dos lados iguales y otro no?
> Aos: Nooo
> FP: ¿Por qué no?
> Aa: A veces los lados son del mismo tamaño
> FP: ¿Alguien se acuerda qué vimos sobre los triángulos y sus lados?
> Aa: Que hay tres tipos de triángulos, el escaleno, el isósceles y el equilátero.
> FP: Entonces podemos establecerlo como una característica que hay tres tipos de triángulo según el tamaño de sus lados.
> Aos: Siiiiiii
> FP: ¿Qué más tiene un triángulo?
> Ao: Ángulos rectos.
> FP: ¿Todos los triángulos tienen sus ángulos rectos?
> Ao: Maestra, hay uno que tiene todos sus ángulos del mismo tamaño.
> FP: Entonces, ¿todos los triángulos tienen sus ángulos iguales?
> Aos: Noooo
> FP: Bueno, eso lo vamos a ver más adelante.

Podemos apreciar, a manera de una institucionalización y bajo la conducción de Lucía, como los niños reconocen las características y propiedades de los triángulos mediante los argumentos colectivos, es el caso de la clasificación de los triángulos de acuerdo a sus lados, no obstante podemos apreciar también que un alumno enuncia como definición del triángulo que tiene tres lados rectos, pero no se discute si siempre tres lados rectos lo forman, o qué sería necesario de incluir en esta afirmación; también puede verse que Lucía posterga la clasificación por sus ángulos ya que en el libro del maestro, el estudio de ese contenido se propone sesiones posteriores.

En este episodio de la clase, Lucía intenta dar un carácter formal a las características y propiedades del triángulo, pero no articula las génesis que se activaron con la construcción. A decir de Duval (citado en Henríquez, 2014), esta entrada es necesaria ya que en la geometría, las particularidades de las figuras (por lo menos las formas elementales o euclidianas) deben ser edificables por medio de instrumentos manipulables o sustitutos (regla, compás, software). Mediante los instrumentos, los alumnos pueden identificar y/o verificar las propiedades de las figuras y experimentar para constatar que las características mencionadas no son meramente perceptivas, sino que se basan en la comprobación de propiedades y criterios propios de la figura. En el caso de Lucía, la verificación mediante los instrumentos se realizó solo para medir los triángulos y clasificarlos para llenar la tabla, pero no recurre a la verificación para validar grupalmente, en este sentido, se observa que la tarea que plantea Lucía está incompleta en relación a la activación de las génesis.

En lo que toca al tipo de paradigma geométrico dominante se observa un tránsito entre GI/gII, porque se emplea el discurso para describir las características de las figuras geométricas, aunque se recurre a la medición para la comprobación, acción que desde la tarea anterior se sugirió. En el trabajo con la génesis discursiva, la acción de Lucía es un "repaso" porque el contenido corresponde a cuarto grado y ha sido estudiado en lecciones previas, no obstante aún hay alumnos que no identifican las características y propiedades de las figuras, a pesar de ello Lucía no valida ni institucionaliza este saber, de hacerlo, quedaría como saber de referencia que permitiría a los niños aprehender de mejor manera el contenido siguiente, resolver problemas para aplicar el saber adquirido, que corresponde a los temas de quinto grado.

4.2.4. Análisis de la tarea t5.

La secuencia de tareas de Lucía incluye el trabajo con el área del triángulo, sin embargo, antes ella consideró necesario el estudio de ciertos contenidos, por esta razón para el análisis sólo se toma aquello que diseñó para la construcción del triángulo y el trazo de sus alturas, incluyendo los puntos notables. Esta complejidad generó en Lucía la necesidad de trabajar las tareas en dos sesiones. En el siguiente fragmento se puede apreciar el momento donde precisa a los niños la construcción.

> FP: ¿Recuerdan qué habíamos visto sobre los diferentes tipos de triángulos?
> Aos: Sí maestra, hay tres tipos de triángulos, el isósceles, el escaleno y el equilátero.
> Ao: Sí, el equilátero tiene todos sus lados iguales maestra.
> Aa1: Sí maestra y el isósceles tiene dos lados iguales.
> Aa2: Y el escaleno es el que tiene todos sus lados diferentes.

> FP: ¿Ahora creen que será posible que se pueda trazar un triángulo con un compás?
> Aos: ¡Sí! (unos) ¡No! (otros)
> FP: Bueno, ahora les probaré que sí se puede, y les voy a explicar, pónganme atención.
> //María coloca una hoja de maquina en el pizarrón y explica//
> FP: Primero se traza una línea horizontal de 8 cm sobre la hoja y será la base del triángulo (Pide a los alumnos se coloquen enfrente del pizarrón para apreciar mejor el proceso, anota en el pizarrón, "otro de los lados medirá 7cm y el otro de 9cm")
> FP: Ahora voy a abrir el compás con esta medida de 7 cm, para eso voy a medir con la regla y colocaré la punta metálica en un extremo del segmento que ya tracé, pongo una pequeña marca hasta donde, voy a hacer el mismo procedimiento con la otra medida de 9 cm en el otro extremo y donde se cruzan coy a poner un punto, luego uno los vértices del triángulo para que el punto quede dentro
> //los alumnos se muestran confundidos//
> Aos: ¡No le entendimos maestra! Está muy difícil
> //Vuelve a explicar//
> FP: ¿Con esta explicación sí logramos entender un poquito más, todos traen su compás y regla?
> Aos: ¡Ya más o menos entendimos!
> Ao: ¡Yo sí traigo regla y compas! (se escuchan murmullos) ¡a mí me falta el compás! (más murmullos).
> //María pasa y les proporciona algunos instrumentos y regresa al frente del pizarrón, escribe… "los triángulos que deberán de construir con esta técnica, serán el triángulo #1 con medidas de 10 cm, 6cm y 2 cm, triángulo #2 con medidas de 8 cm 4cm y 3cm y el triángulo # 3 con medidas 9 cm, 1cm y 6 cm"//
> FP: Los intentaremos construir utilizando la regla y el compás y lo haremos de la forma como ya todos vieron que se explicó en el pizarrón.
> //Los alumnos intentan a construir los triángulos usando regla y compas//
> FP: ¿Cómo vamos niños si estamos logrando construir los triángulos?
> Aos: ¡Es que no se puede maestra!, ¡está bien difícil no se pueden armar los triángulos!
> FP: Volvamos a intentar niños colocando otro lado como base para ver si se puede.
> //Como observa que no pueden realizar la tarea la suspende //
> FP: Bueno, por ahora dejaremos este tema, vamos a guardar lo que hicimos y después les sigo explicando.

Logramos identificar que Lucía explica y ejemplifica la técnica, para ello pone en juego un conocimiento abordado en el programa de formación (el criterio de construcción de triángulos dados sus tres lados). Puede inferirse que su intención era relacionar este criterio de construcción con el conocimiento sobre los tipos de triángulos de acuerdo al tamaño de sus lados. Otra dificultad que se genera y se debe trabajar, es cuando la profesora indica que: *Primero se traza* *una línea horizontal de 8 cm sobre la hoja y será la base del triángulo*; debido a que la base no tiene que ser horizontal, en realidad la base de un triángulo puede ser cualquiera de sus lados. La técnica del copiado genera el uso de artefactos materiales (en este caso la regla y el compás) para activar la génesis instrumental y es en ese momento que inicia la circulación del plano semiótico-instrumental así como el plano epistemológico (espacio real y local, artefactos y referencial). Sin embargo, la explicación de Lucía no es suficiente para lograr que los niños construyan los triángulos, razón por la que cual suspende la actividad.

Con base en lo descrito en el ETG de referencia en el que se centra su proceso de formación (programa de estudios de la licenciatura), Lucía ha construido ciertos conocimientos geométricos, como el criterio de construcción de triángulos, por ello intenta establecer la relación entre ese criterio y sus clases en la escuela primaria, sin embargo, el tratamiento didáctico que le da es un indicio de que en dicho proceso de formación no se ha favorecido una transposición didáctica adecuada. Además, en el ETG idóneo de la escuela primaria (libros para el maestro) no aparece una orientación metodológica sobre la relación de este criterio con alguno de los desafíos matemáticos. Por esta razón, el potencial de la actividad no es aprovechado en su totalidad. Lo que ha planteado Lucía hasta ahora parece sugerir la necesidad de una formación que le permita conceptualizar la naturaleza de un ETG, debe reconocerse que el desarrollo de la clase moviliza los componentes del plano epistemológico (espacio real y local, artefactos y referencial), así como el componente visualización, más no activa en su totalidad las tres génesis que propiciará el logro de una razonamiento geométrico en los estudiantes, el conocimiento y comprensión de la importancia de todos los elementos del ETG favorecerían por ende el diseño de las tareas que proponga la profesora para el trabajo en el aula.

En el siguiente fragmento, nuevamente se observa como Lucía inicia la tarea preguntando sobre el tema a trabajar, las alturas en un triángulo. Su intención es rescatar los conocimientos previos de los alumnos y examinar si son capaces de trazar las tres alturas del triángulo. Con la hoja de trabajo activa la génesis figural a partir de la visualización icónica, aunque los niños sólo trazan una altura, luego Lucía plantea algunas interrogantes en el momento de la socialización para intentar movilizar los saberes de los niños sobre el tema, pero al final opta por mostrarles la técnica con la cual se resuelve la tarea.

> FP: Bien niños y ahora que reconocimos los tipos de triángulos, ¿creen que será posible que podamos encontrar donde tienen su altura?
> Aos: ¡Sí nada más le marcamos una línea a la mitad!
> FP: ¿Están seguros niños? pues entonces para ver esto haremos una actividad que dice el titulo así: ¡Para al área de un triángulo llegar, por las alturas hay que pasar! Y las instrucciones dicen lo siguiente, con tu regla intenta trazar la altura de los siguientes triángulos que se presentan a continuación y así mismo debajo de los mismo identifica de qué tipo se trata, y enseguida deberán de contestar las preguntas que debajo de esta activad se presentan. ¿Quedó claro lo que harán?
> Aos: Sííí
> //Reparte hojas de trabajo donde se incluyen ejemplos de triángulos//
> FP: ¡Entonces comencemos cada uno en su lugar, de manera individual y sin voltear a ver al compañerito de un lado!
> // Da tiempo para que los alumnos realicen la actividad, una vez que terminan comienza con la socialización de respuestas//
> FP: ¿A ver niños están seguros que si logramos trazar la altura de los triángulos de la mejor manera? ¿Cuántas alturas lograron trazar en cada uno de sus triángulos?
> Aos: ¡Pues una maestra!
> Ao: Sí maestra mire solo tiene una altura (el alumno muestra los triángulos de la actividad en los cuales ha identificado su altura).
> FP: ¿Están seguros niños, y si yo les digo que son más?, ¿Qué pasaría si este triángulo que acabo de dibujar aquí que es igualito al que tienen en su actividad le trazamos la altura donde sería?
> //Dibujar sobre el pizarrón el primer triángulo que es escaleno//
> FP: A ver Felipe pase usted a trazar la altura de este triángulo.
> //Le da la regla, el niño traza la altura desde la mitad de uno de sus lados (que considera como base), a la punta//
> FP: ¿Ustedes cómo ven niños Felipe si trazo bien la altura del triángulo, ustedes también lo hicieron así?
> Aos: ¡Sí maestra así lo hicimos!
> FP: ¿Y qué pasaría si yo giro el triángulo hacia el lado derecho y que quedara este lado como base también podríamos trazar la altura con esta base? (señala un lado diferente del que consideraron como base)
> Ao1: Ah, sí es cierto, de este lado también se puede trazar otra altura

> FP: Si lo volvemos a girar y queda el otro lado como base se tiene otra altura (mientras explica va marcando cada triángulo de colores diferentes)
> FP: ¿Entonces cuántas alturas tienen los triángulos?
> Aos: ¡Tres maestra!
> FP: Muy bien, son tres alturas las que tiene el triángulo. ¿Hay una forma de saber si las trazamos correctamente?, ¿saben que las tres alturas deben de cruzarse y donde se cruzan?, ¿niños, saben cómo se llama este punto?
> Aa: Pues punto nada más maestra no.
> Aos: Sí o como se llama.
> FP: Se llama ortocentro niños, ¿no se les olvida?
> Aos: ¡No maestra no se nos olvida!
> FP: ¡A ver si es cierto como se llama el punto donde se cruzan las tres alturas de un triángulo!
> Aos: ¡Ortocentro!
> FP: A ver, ahora terminen ustedes solitos de trazar las alturas que faltan y poner el ortocentro
> //Los niños llenan la hoja de trabajo, Lucía las recoge y concluye la actividad//

La copia es una construcción orientada por el uso de los artefactos, por tal motivo en esta tarea no existe un proceso de prueba. Las dos últimas tareas de la secuencia siguen la misma lógica, parten de los ejemplos y las técnicas que muestra la profesora, sólo se diferencian en lo concerniente al espacio real y local. En este último episodio se observa el plano de descubrimiento semiótico-instrumental que moviliza los componentes visualización, espacio real y local, construcción y artefactos y el plano epistemológico, orientado mediante el discurso oral y la explicación de la profesora puntualizando el referencial puesto en juego, pero no activa el componente prueba para completar la circulación del plano instrumental-discursivo. Además, es posible observar una definición de altura de los triángulos por parte de un estudiante asociándola solamente a uno de los lados del triángulo (*Sí maestra mire solo tiene una altura*), esto se produjo posiblemente cuando se habla de trazar una sola base que es la horizontal.

Un rasgo que debe subrayarse es la forma como Lucía incluye en su clase al ortocentro, el cual no está presente en el ETG idóneo para la escuela primaria (programas y libros del maestro). El intento por relacionar contenidos presentes en diferentes ETG (de formación y de la escuela primaria) parece obedecer a la confusión sobre su doble rol, de alumna en la escuela normal y de profesora en la escuela primaria.

En relación a los productos de los alumnos, recuérdese que la primera consigna fue que trazaran solo las alturas del triángulo y como no lo lograron Lucía optó por mostrarles la técnica y explicar el proceso, por lo tanto, los niños modificaron sus respuestas luego de la explicación, por ello es probable que las respuestas brindadas por los niños tengan una relación directa con el discurso de la profesora.

En los productos de los niños, de manera general se pudo observar una variación en el nombre que dieron a los triángulos, algunos no corresponden con el triángulo de la imagen, este punto es relevante debido a que permanecen conocimientos erróneos a pesar de que Lucía "institucionalizó" el contenido desde tareas previas. Como Lucía no propició un análisis con base en la justificación de las características y propiedades de cada triángulo (movilización del componente prueba y referencial. Activación de la génesis discursiva), dejó de lado el tratamiento didáctico de dichos errores. Podemos inferir también que la hoja de trabajo sólo tenía la intención de saber si los niños lograban nombrarlos correctamente, por ello Lucía no revisó las respuestas grupalmente. Para ilustrar las reflexiones anteriores y algunos elementos particulares que se encontraron, a continuación se muestran tres ejemplos de productos de los niños (uno por cada grado).

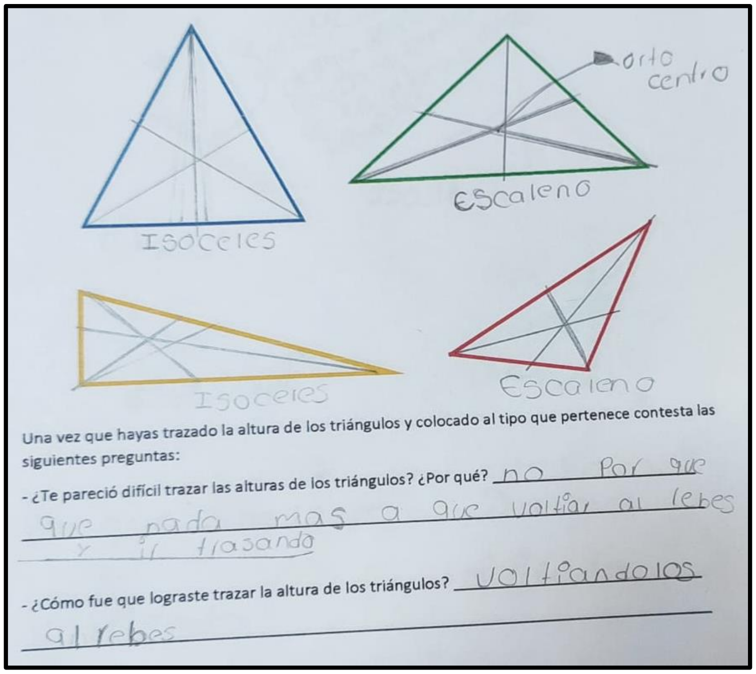


Figura 36. Ejemplo 1 de tarea resuelta en la sesión (4° grado).

De acuerdo con la figura 36, el niño intenta marcar el ortocentro y unir las alturas, aunque no en todos los casos lo realiza adecuadamente. Por otra parte, en su discurso no alude al uso de los instrumentos para el trazado, sino a una estrategia presente en la explicación de la maestra. Para nombrar los triángulos de acuerdo con sus lados se apoya en la visualización y por ello no todos son correctos, no señala el triángulo equilátero que se encuentra en la imagen (extremo superior izquierdo). Recurrir a los diversos tipos de prueba, entre ellas las pragmáticas como punto de partida, permitiría que en este caso, el alumno empleara la medición para comprobar si es el tipo de triángulo que él menciona. Otro ejemplo diferente se muestra a continuación (figura 37).

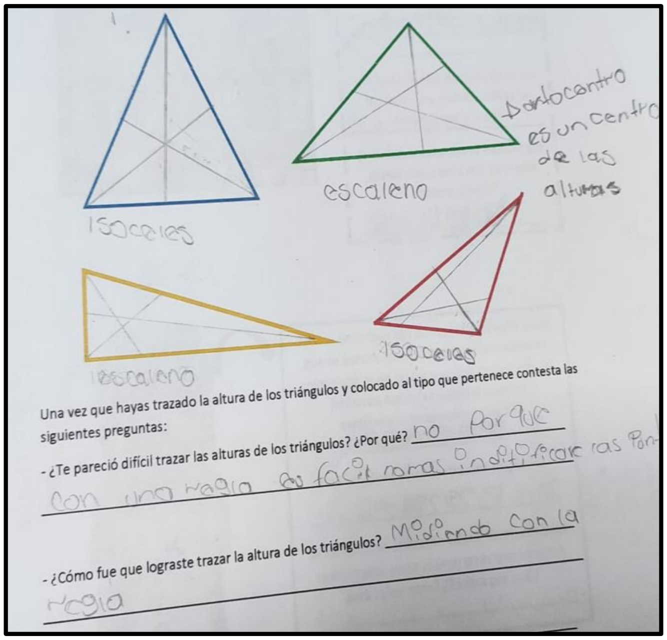


Figura 37. Ejemplo 2 de tarea resuelta en la sesión (Quinto grado).

Se aprecia en la figura 37, que el niño no traza adecuadamente las alturas en todos los triángulos, por ende, no marca el punto donde se cortan. Cabe señalar que este niño modificó sus respuestas después de la explicación de la profesora, incluso menciona que “con una regla es fácil, nomás identifiqué los puntos” y que logró trazarlas “midiendo con la regla”. Otro aspecto interesante es el nombre que da a los triángulos, se apoya en la visualización por lo tanto no todos son correctos, lo que puede derivarse tal vez de no haber solicitado en las tareas previas una justificación sobre la clasificación de los triángulos que propiciara la movilización del componente prueba durante los momentos de validación.

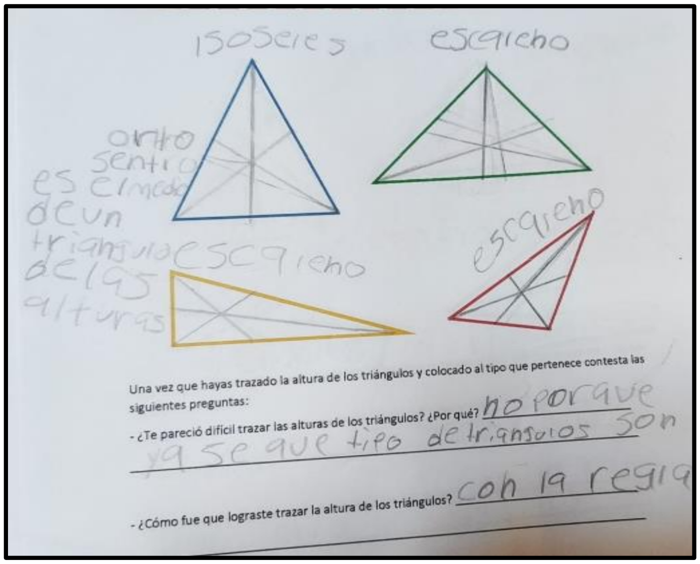


Figura 38. Ejemplo 3 de tarea resuelta en la sesión (6° grado).

En esta imagen (figura 38), se observa que el niño corrigió sus trazos para hacer coincidir el ortocentro y las alturas. También incluye una definición, posiblemente construida a partir del discurso de la profesora o de sus saberes previos, pues es alumno de sexto grado. Además, hace referencia al conocimiento que posee respecto de los tipos de triángulos y señala que con base en esta característica y el uso de la regla identificó las alturas.

Una vez analizado el ETG Idóneo Espontáneo de la futura profesora Lucía en el que incluye actividades para los alumnos de todos los grados, se observa que su secuencia favorece moderadamente el trabajo en el grupo multigrado, ya que selecciona contenidos que pueden adaptarse a diferentes grados escolares, además de que considera el nivel de avance de los diversos grados para que este factor influya en los resultados obtenidos, lo anterior favorece el diseño de la clase. Con ello Lucía manifiesta el conocimiento adquirido en el curso de *Planificación de ambientes de aprendizaje para grupos multigrado*, sin embargo, es importante señalar que aunque manifiesta el dominio del contenido geométrico no lo hace con el conocimiento didáctico, ya que durante sus clases sólo se limita a explicar las respuestas correctas.

Derivado del análisis, podemos asumir que Lucía activa frecuentemente la génesis figural apoyándose en la visualización icónica de las figuras geométricas, pero no activa la génesis instrumental que permitiría al niño reflexionar sobre las propiedades y características de las mismas. Conforme avanza en su secuencia Lucía moviliza el componente construcción, pero es Lucía quien les muestra la técnica a los niños. Ahora bien, desde la hipótesis principal de teoría de los ETG, cuando el sujeto activa todas las génesis realiza una acción que le permite la construcción suficientemente completa del objeto matemático, en este sentido, lograr que el niño active todas las génesis es la acción fundamental que se busca mediante la estructuración de un ETG.

La activación de una o las tres génesis, se encuentra vinculada a la percepción que tenga el maestro sobre ellas y respecto a la manera como se relacionan en la circulación de los componentes del ETG. Estas percepciones influyen en la decisión de activarlas o no durante el proceso de enseñanza, es el caso de Lucía quien no activa la génesis instrumental porque la considera parte de un “repaso” del tema y cuando en la clase hay un tema nuevo tampoco provoca la activación de la génesis discursiva. Es por la razón anterior que para estructurar un ETG es necesario que el profesor conozca y comprenda cada una de las génesis, ya que de esta manera podrá diseñar tareas en las que el alumno utilice lo instrumental, se apoye en lo figural y elabore una prueba discursiva. De acuerdo al grado escolar en que se encuentre el niño será el tipo de prueba que se incluya en la tarea.

Podemos decir que el ETG Espontáneo refleja la relación que existe entre el conocimiento adquirido en la formación inicial y continua, y la manera como se pone en juego durante el diseño y el desarrollo de sus clases, esto es observable cuando aparecen contenidos geométricos y didácticos que Lucía estudió en la Escuela Normal. Otra característica de su clase es la forma en que intenta vincular esta información con las orientaciones metodológicas que proporciona el ETG Idóneo de la escuela primaria. Al parecer diseña sus situaciones didácticas con base en dichas orientaciones, la activación sólo de algunas génesis parece demostrarlo. También resulta importante mencionar que los conocimientos del ETG personal de los profesores deben reflejarse en el diseño del ETG idóneo y aunque esto aparece en algunos momentos de la clase, no son suficientes para desarrollar de manera efectiva la enseñanza de los contenidos geométricos.

Podemos concluir, que el presente apartado expone la relación entre el Espacio de Trabajo Idóneo proporcionado por las instituciones y el Espacio Idóneo configurado por el profesor. Sin embargo, la transposición didáctica no se ha favorecido adecuadamente. Asimismo, la activación de la génesis discursiva como elemento fundamental para el razonamiento geométrico, no es una acción a la que recurra la profesora con frecuencia, como tampoco aparece de manera constante en su proceso de formación. Con este análisis como parte de los insumos, se diseñó el espacio idóneo para la formación a cuyo análisis se dedicará el siguiente capítulo.

4.3. LA CONFIGURACIÓN DEL ESPACIO DE TRABAJO IDÓNEO PARA LA FORMACIÓN. LAS SITUACIONES DE REFERENCIA

Una vez analizados los espacios de referencia e idóneo propuestos por las instituciones y el ETG espontáneo que se configura en las aulas, en congruencia con el objetivo de estructurar un Espacio de trabajo Geométrico para la formación de profesores, en este apartado se describen dos situaciones didácticas de referencia que se plantearon en conjunto a los sujetos de la investigación (tres futuros profesores que realizaban sus prácticas profesionales con grupos multigrado y dos profesores en servicio que laboran en escuelas de esta modalidad) y que proponen el trabajo con elementos básicos de la geometría euclidiana, específicamente con el triángulo. Para diseñarlas se revisaron los programas de estudio de la escuela normal y la escuela primaria. La idea es que estas situaciones funcionaran como dispositivo de formación con un doble objetivo: geométrico y otro didáctico.

Para cumplir con el primer objetivo se plantearon tareas geométricas a los profesores que participan en la investigación y como la finalidad era observar su ETG personal, se analizaron sus acciones como geómetras, es decir, como aprendices de matemáticas en el contexto de un espacio de trabajo geométrico. Para cumplir con el segundo objetivo se les sugirieron tareas didácticas, la intención era que diseñaran un ETG Idóneo efectivo para la enseñanza de la geometría en grupos multigrado de la escuela primaria, utilizando fundamentalmente la reconstrucción de las tareas geométricas que resolvieron en el espacio de formación, esta particularidad permitirá caracterizar la manera en la que se relacionan los ETG idóneo y personal cuando desarrollan sus clases en el aula, que es el propósito central de la presente investigación, y así determinar la pertinencia de esta perspectiva teórica en el proceso de formación de los profesores.

Finalmente, la configuración de esta propuesta de formación también consideró la inclusión de la estrategia profesional de transposición. A decir de Chevallard (citado en Kuzniak (1994), esta estrategia se centra en el saber de referencia y en el pasaje del saber del profesor al saber enseñado, por lo tanto, en esta tesis se pretende articular el trabajo del profesor en tres momentos: aprendiz, analista, y diseñador; la razón de considerar estos momentos es debido a que durante el proceso de formación inicial, los estudiantes de la licenciatura aprenden en clases lo referente a la disciplina a enseñar (rol de aprendiz) pero a su vez se plantean tareas didácticas que habrá llevar a cabo en su papel de profesor (diseñar el trabajo en el aula a partir del análisis de los materiales y conocimientos con los que cuenta, además de analizar sus intervenciones en el grupo escolar), consideramos que este proceso de formación permite realizar un trabajo matemático y didáctico. La descripción de dichos momentos se enuncia más adelante.

Diseñar situaciones de referencia cuyo objetivo es activar las tres génesis del ETG durante las fases del trabajo matemático y favorecer el proceso de visualización no icónica con relación a los razonamientos argumentativos que se solicitan al geómetra, significa privilegiar el paradigma de la geometría axiomática natural (GII) durante la argumentación de las propiedades y características del saber en juego, aunque las actividades incluidas pueden ser desarrolladas también desde el paradigma de la geometría natural (GI).

Por otra parte, el componente prueba, forma parte importante de las situaciones propuestas debido a que, como se ha mencionado, en los programas de formación y de educación básica aparece escasamente a pesar de las posibilidades que podría otorgar al profesor para favorecer el razonamiento geométrico en el aula multigrado. Los momentos que se siguieron en el desarrollo de la experimentación son los siguientes:

Momento 1. El profesor como aprendiz

Esta fase se desarrolló en tres sesiones, en ellas los tres futuros profesores y los dos profesores en servicio resolvieron las dos situaciones de referencia diseñadas, el objetivo era identificar el conocimiento del contenido geométrico que poseen los profesores que ha sido adquirido durante su formación. Además, se validaron colectivamente las afirmaciones que realizaron para contribuir al dominio matemático, también se solicitó su argumentación individual. Estas tareas matemáticas se relacionan con el saber teórico porque se incluyó una actividad en la que se pedía el análisis de los planteamientos teóricos sobre la enseñanza de la geometría propuestos en la perspectiva del ETM_G, este análisis movilizó el razonamiento sobre los conceptos fundamentales de la teoría y profundizó en la importancia de la activación de las tres génesis además de puntualizar la diferencia entre los discursos solicitados a los niños mediante el componente prueba.

Momento 2. El profesor analista

Una vez estudiado el marco teórico de referencia, se analizaron las situaciones de referencia y los ETG de referencia e idóneo de la escuela primaria. Dicho análisis se desarrolló mediante el trabajo en conjunto de los tres futuros profesores que estuvieran realizando sus prácticas profesionales en grupos multigrado y dos los profesores en servicio con experiencia en multigrado. Primero analizaron las situaciones de referencia utilizando los conceptos de los ETM_G para determinar su pertinencia en la educación primaria. En segundo lugar, se analizó la manera como los programas de estudio plantean el estudio del triángulo y, en los libros del maestro y alumno se revisaron las orientaciones metodológicas. En este momento se consideró fundamental la validación de los argumentos de los profesores, el intercambio de saberes adquiridos en la formación inicial y la experiencia en la práctica que han realizado en los grupos multigrado, además de la validación grupal para institucionalizar los saberes adquiridos hasta el momento.

Momento 3. El profesor como diseñador

En esta fase se promueve el papel del profesor como diseñador[69] de situaciones didácticas para trabajar en las aulas multigrado, para ello se revisan las acciones de los momentos anteriores, se identifican los contenidos geométricos de cada grado con los que trabajan y se examinan las propuestas didácticas sugeridas en los libros del maestro. La planificación se desarrolló en equipos mixtos de profesores, es decir que se conformaron por futuros profesores y profesores en servicio que atienden ciclos iguales o similares, como se mencionó previamente, los futuros profesores llevaban a cabo sus prácticas en grupos multigrado, pero cada uno de ellos hizo las adaptaciones necesarias de acuerdo a las características y nivel de logro académico de sus niños. De igual manera, los equipos hicieron las modificaciones necesarias con base en sus conocimientos y su experiencia en la práctica docente. En este momento se realizó el seguimiento al trabajo en el aula de dos de los sujetos de investigación para determinar la efectividad de la propuesta de formación.

Concluimos que, desarrollar estas actividades contribuye a la formación de un profesional capaz de transponer adecuadamente los saberes geométricos, ya que a partir de las situaciones didácticas diseñadas, los profesores deben activar las distintas génesis de un ETM_G y favorecer

[69] Configuración del espacio idóneo del profesor en formación.

las circulaciones que desarrollen plenamente el dominio geométrico, tarea que consideramos relevante pues a decir de Montoya (citado en Montoya, Mena y Mena, (2016)

> El ETM-idóneo del profesor en la formación inicial muestra una debilidad en la transposición de la demostración en geometría, es decir, que desde ya es difícil esperar un idóneo del profesional que active la génesis discursiva y logre una circulación apropiada entre el referencial y la prueba" (pág. 192).

A continuación se presentan las tareas geométricas propuestas[70], se incluye la descripción de su potencialidad en relación a los elementos teóricos del ETG. La solución de las mismas conformó una primera parte del momento del profesor como aprendiz. El tratamiento didáctico de las tareas se profundiza en el siguiente capítulo.

4.3.1. Primera tarea. "Adivina y construye el triángulo"

Esta situación se centra en la descripción de las características y propiedades de un triángulo y la relación que existe con su construcción. Inicia proporcionando a cada profesor una tarjeta en la que aparecen diversos triángulos, también se les dan hojas blancas y se ponen a su disposición juegos de geometría, luego se les lanza la siguiente consigna:

"Cada uno de ustedes seleccionará uno de los triángulos de la tarjeta que se les entregó sin que los demás sepamos la que eligieron, enseguida escriban en la tarjeta en blanco la secuencia ordenada que hay que seguir para que se construya el triángulo elegido, después entreguen esas instrucciones a uno de sus compañeros para que lo dibuje en una hoja blanca, pueden utilizar los instrumentos geométricos si así lo consideran. Recuerden ser lo más precisos posible en sus indicaciones y emplear los conocimientos que poseen sobre los triángulos para que sea más clara la descripción, y se pueda identificar cuál es el que habrá de construirse".

[70] El diseño de las situaciones de referencia fueron adaptaciones de propuestas didácticas descritas en (Sadovsky, Parra, Itzcovich, & Broitman, 1998); (Documento Nº 3 Diseño Curricular, 2001); (SEP, 2006). El orden final de cada actividad y contenidos involucrados fueron definidos por la investigadora.

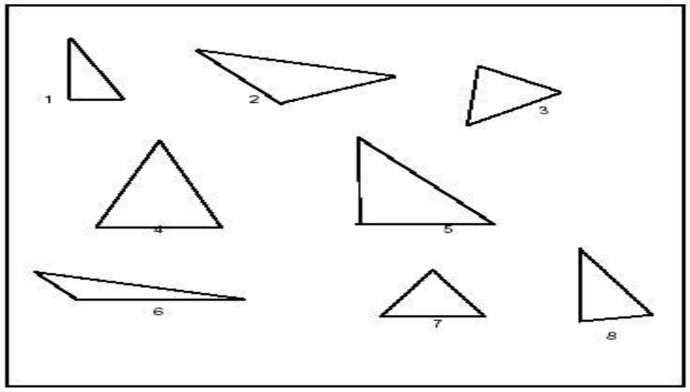


Figura 39. Tarjeta del juego "Adivinar y construir el triángulo". Fuente: *(Sadovsky, Parra, Itzcovich, & Broitman, 1998)*

En esta actividad (figura 39) se pide construir el triángulo descrito y escribir un texto con los pasos realizados y la justificación de cada uno de ellos. Una vez que terminan de dibujar se pide verificar si el triángulo trazado coincide con el que el compañero seleccionó en la tarjeta. En esta fase la formadora plantea interrogantes como: ¿lograron construir el triángulo que se les indicó?, ¿cómo pueden comprobar que es el mismo triángulo?, ¿por qué creen que pasó?, ¿qué consideran fue lo que faltó o era necesario saber para poder construir el triángulo?, ¿qué conocimientos eran necesarios poseer para elaborar las instrucciones?, ¿qué conceptos sobre el triángulo les faltó o les ayudó para la construcción? En la medida que son solicitadas las justificaciones, se escriben algunos ejemplos en el pizarrón.

Es de esperarse que al confrontar resultados, los profesores utilicen instrumentos o la superposición de los triángulos cortando los que tienen en la hoja. Al efectuar la puesta en común es importante analizar sus procedimientos y mencionar las características de los triángulos que no fueron seleccionados. En grupo, reflexionar sobre, ¿todos los triángulos que se encuentran en la tarjeta son iguales?, ¿por qué?, ¿todos podrán construirse igual?, ¿qué es diferente o qué es igual?

Posteriormente, los profesores deberían elaborar una tabla donde escribirían lo que saben de cada uno de los triángulos, podían numerar o nombrar los triángulos pero también sería necesario que la justificación tenga relación a las propiedades y características del triángulo en cuestión. En este momento, se validan las afirmaciones de los profesores mediante el trabajo grupal, la finalidad era institucionalizar las propiedades y criterios estudiados.

Para finalizar, se responde a preguntas (por escrito) derivadas de la actividad. La "hoja de trabajo" contiene las siguientes cuestiones: ¿Cuál es el contenido de geometría central en la actividad?, ¿Qué otros contenidos de geometría se incluyen en la actividad?, ¿Si trabajaran esta actividad con sus alumnos, qué conocimientos se enseñarían?, ¿Consideran que podrían aplicar esta actividad tal cual con sus alumnos o deberían modificarla?... Si es el caso ¿Por qué la modificarían y qué cambios le harían?, ¿Cuáles estrategias podrían utilizar para ayudar a sus alumnos a que reflexionen sobre la clasificación de triángulos por sus lados o sus ángulos?, ¿Cómo desarrollarían la actividad con grupos pequeños de primero o segundo grado?, ¿Qué conocimientos, experiencias y vocabulario deben tener los niños para poder hacer esta actividad?, ¿Han aplicado alguna situación similar?, en caso afirmativo, ¿podrían explicarla?, ¿Cómo abordarían este contenido en el grupo multigrado que atienden para trabajarlo con todos los grados al mismo tiempo?, ¿Cuáles contenidos de cada grado se relacionan con el contenido central?, ¿Qué tipo de actividades le pondrían a cada uno de los grados?, ¿Qué le pedirían a cada grado para que probaran o argumentaran sus respuestas? A continuación se presenta en la tabla 17 los elementos y características de la situación.

Tabla 17. Análisis de la primera situación de referencia. Fuente: Elaboración propia.

Primera tarea matemática: “Adivinar y construir el triángulo”	
Propósito	Identificar los conocimientos que poseen los profesores respecto a los triángulos, sus características, propiedades generales y la clasificación de los mismos con base en los lados y ángulos.
Génesis figural	Se activa por medio de la visualización icónica con las imágenes de los triángulos que contiene la tarjeta.
Génesis instrumental	En esta actividad se privilegia el procedimiento de construcción utilizando los tradicionales materiales (juego de geometría), aunque se sugiere el empleo de artefactos simbólicos al pedir que se enuncien propiedades o características que contribuyan a la descripción.
Génesis discursiva	Para la primera parte de esta actividad se aceptará la prueba pragmática de empirismo ingenuo debido a que construirán el triángulo en función de las indicaciones que el compañero describa y podrá hacer uso de los artefactos para argumentar el proceso de construcción y las características del triángulo. En la segunda parte, que consiste en la validación de los argumentos, se solicita la prueba tipo intelectual de experiencia mental, debido a que las razones y argumentos solicitados están basados en las acciones previamente interiorizadas, puesto que se solicita la enunciación de propiedades para institucionalizar el saber sin emplear la verificación instrumental. Este tipo de prueba constituye la base para realizar demostraciones matemáticas.
Paradigma geométrico	Existe un tránsito entre el paradigma GI como fase heurística inicial y el paradigma GII como parte de la validación de las respuestas en la actividad final.
Circulación de planos	Plano Semiótico-instrumental (descubrimiento y exploración). Esta circulación se suscita cuando entran en juego los componentes de visualización, espacio real y local, construcción y artefactos. Semiótico-discursivo (Comunicación y Presentación). Cuando se solicita la descripción de las indicaciones para construir el triángulo, no se indica como factor determinante el uso de artefactos sino que queda a disposición del profesor, por lo tanto los componentes que se activan son visualización, espacio real y local, referencial y prueba. Instrumental-discursivo (Justificación y razonamiento). Al solicitar la construcción del triángulo a partir de la descripción y la justificación en relación a la técnica de construcción, se propicia el razonamiento, por lo tanto, la circulación se inscribe en el plano instrumental discursivo. Los componentes involucrados son artefacto, construcción, referencial y prueba.
Contenidos relacionados con el	La suma de todos los ángulos interiores de un triángulo da siempre 180º ($A + B + C = 180º$). Un lado de un triángulo es siempre menor a la suma de los otros dos lados ($a < b + c$), pero mayor que su diferencia ($a > b - c$).

programa de formación, contenidos de educación primaria, propiedades y criterios de triángulo.	Usando como datos lados y ángulos: Para determinar un triángulo es preciso conocer tres de sus elementos y al menos uno ha de ser un lado. El ángulo exterior de un triángulo es iguales a la suma de los ángulos interiores no adyacentes (a = A + B). Elementos básicos del triángulo (vértices, lados y ángulos). Noción de triángulo. Propiedades relativas a los ángulos, a los lados y relaciones entre lados y ángulos; tipos de triángulos. Triángulos: equiláteros, isósceles y escalenos. Construcción de triángulos con regla y compás. Congruencia de triángulos. Clasificación de triángulos con base en la medida de sus lados y ángulos. Construye y describe figuras geométricas.

En la tabla 17 puede observarse la flexibilidad en el tipo de pruebas solicitadas, si bien es cierto que la finalidad es que empleen pruebas de tipo intelectual principalmente la de demostración, el objetivo de esta situación es identificar los conocimientos previos del profesor, por ello la opción de emplear pruebas pragmáticas permite caracterizar el espacio personal del geómetra. En la tabla también se describe la forma en que se activan las distintas génesis que componen el ETG y la relación entre los paradigmas involucrados en la tarea, determinando el énfasis en el GII.

4.3.2. Segunda tarea. "Las piscinas de Pablo"

Esta situación se centra en la construcción de triángulos dados sus tres lados, el objetivo es deducir la propiedad que señala que las medidas de las longitudes de los lados de un triángulo no pueden ser cualesquiera sino que, para que pueda construirse un triángulo la longitud de cada lado tiene que ser menor que la suma de los otros dos, o lo que es lo mismo, cada lado debe ser mayor que la diferencia de los otros dos. Con base en ello, la intención fundamental de la tarea es que el profesor movilice los conocimientos que posee para llegar a este razonamiento. Para iniciar el trabajo con la tarea se proporcionó a los profesores un juego de geometría y una hoja con un problema a resolver. La consigna era la siguiente:

"Resuelvan individualmente el siguiente problema, pueden emplear los instrumentos geométricos que consideren necesarios, pero es indispensable la justificación escrita de sus respuestas y en qué se basaron para ello. El problema dice así: Pablo tiene la posibilidad de

construir una piscina triangular en el patio de su casa. Tiene disponible una de las esquinas del mismo. Para aprovechar el espacio calcula que puede hacerla con estas medidas 2m, 3m y 7m, pero también piensa que sería buena idea hacerla con estas otras medidas 3m, 4m y 9m. Hagamos el dibujo con los dos juegos de medidas disponibles y justifiquemos por escrito cuáles serían más adecuadas".

En esta tarea se espera que los profesores deduzcan la imposibilidad de construir la piscina con las medidas dadas. En este caso, la construcción es el recurso para identificar la presencia de una relación entre medidas de los lados de un triángulo, algunos posibles dibujos podrán ser similares a los siguientes (figura 40):

Figura 40. Trazos posibles en la construcción de los triángulos. Fuente: *(Documento Nº 3 Diseño Curricular, 2001)*

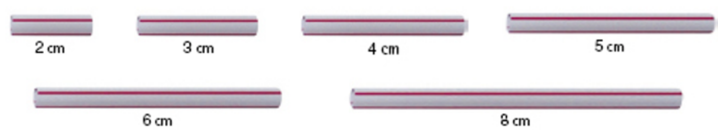
Una vez resuelto el problema, se llevará a cabo la comparación de las respuestas y procedimientos, en ese momento la formadora plantea preguntas como: ¿pudieron dibujar las dos piscinas?, ¿por qué?¿cuál fue la piscina que mejor se adapta a las necesidades de Pablo?, ¿por qué no se pudieron construir las opciones?, ¿tendrá algo que ver la longitud de los lados?, ¿qué pasaría si no se dieran medidas específicas?, ¿qué deberíamos hacer para poder construir una piscina triangular?, ¿qué le modificaríamos al problema para que exista una única solución?, ¿cuál es la mejor opción que le darían a Pablo para hacer la construcción?, enseguida se solicitan algunos ejemplos que son dibujados en el pizarrón con el objetivo de observar y analizar los distintos procedimientos empleados y llegar así a la institucionalización del criterio geométrico.

En esta fase es probable que se mencione la posibilidad que todas o algunas medidas fueran iguales, es fundamental cuestionar al respecto para que consideren otras características de los triángulos o las condiciones para construirlos de acuerdo al tipo específico (por ejemplo el triángulo equilátero). Esta situación activa la génesis discursiva porque se deben apoyar los argumentos en las propiedades de los triángulos y los criterios de construcción, sin embargo, es probable que los profesores no recurran a dichos conceptos.

Durante la justificación es posible que el razonamiento se apoye en el trazo del triángulo solamente, en ese caso la prueba es pragmática empírica, sin embargo el objetivo central de la puesta en común es propiciar la aparición de una prueba de demostración a partir del componente referencial, para ello se solicitará que enuncien el criterio de construcción o algunas propiedades de los triángulos. Si no se logra eso, se solicitará demostrarlo mediante otras medidas posibles para la construcción, además de cuestionar si la longitud de cada lado tiene relación con la construcción. Como se puede inferir, la situación se ubica en el paradigma GI, aunque el paradigma privilegiado es GII ya que el razonamiento de validación no se acepta a partir de la construcción y medición de los triángulos, sino al enunciar el criterio de construcción del triángulo y de sus características. No obstante, en el caso de que los profesores no deduzcan el criterio de construcción, se planteará una actividad que permita esta reflexión, es decir, el tránsito de una prueba pragmática a una prueba intelectual que privilegia el proceso cognitivo de construcción.

Luego del problema de la piscina, se proporcionarán popotes a los profesores y se pedirá que los recorten de acuerdo a una serie de medidas indicadas en una tabla. La idea es que este material permita de manera inducir un método general para la construcción del triángulo a partir de tres segmentos dados.

Si se tienen estos popotes con estas medidas, ¿con cuáles combinaciones será posible trazar un triángulo?



Medidas de los popotes	¿Es posible formar el triángulo?	Justifica tu respuesta	Si lograste construirlo, ¿qué tipo de triángulo es?

Figura 41. Hoja de trabajo. Actividad "popotes". Fuente: *(SEP, 2006)*

La consigna para la actividad con los popotes es la siguiente:

"Con apoyo de los popotes prueba las distintas combinaciones para construir triángulos con las medidas que se sugieren en la tabla y complete la información determinando los triángulos que se pueden construir y los que no, justifique por escrito sus respuestas, además escriba cuáles son los tipos de triángulo que se han registrado. A partir de los resultados que obtenga, describa la relación que existe entre las longitudes de los lados de un triángulo y su posible construcción".

Luego se ponen en común los resultados y se analizan las tablas con base en las siguientes cuestiones: ¿qué condiciones se necesitan para poder construir triángulos?, ¿cómo podemos demostrar esta condición sin necesidad de emplear algún instrumento?

Estas interrogantes tienen por objetivo orientar la discusión hacia los criterios de construcción de los triángulos y es fundamental la validación grupal de sus argumentos y la reflexión sobre el empleo de instrumentos para la verificación, por tanto es necesario enunciar el criterio de construcción. Finalmente, se les pedirá responder una "hoja de trabajo" con las siguientes cuestiones: ¿Qué contenidos geométricos se aprecian en la actividad?, ¿Qué contenidos geométricos de los grados que atienden se incluyen en la actividad?, ¿Consideran que la actividad se puede plantear para todos los grados que atienden?, ¿Por qué?, ¿Qué modificaciones harían para que pudiera trabajarse al mismo tiempo con todos los grados? Enseguida se pueden ver en la tabla los elementos y características de la situación.

Tabla 18. Análisis de la segunda situación de referencia. Fuente: Elaboración propia.

Segunda tarea matemática: "”Las piscinas de Pablo”	
Propósito	A partir del estudio del criterio de construcción de triángulos dados sus tres lados, deducir la propiedad que señala que las medidas de las longitudes de los lados de un triángulo no pueden ser cualquiera.
Génesis figural	Se activa la visualización no icónica, debido a que está asociada a la figura como un objeto simbólico. La representación mental se constituye por medio de signos, es decir, a partir de las medidas de los triángulos solicitados.
Génesis instrumental	El proceso cognitivo privilegiado en un principio es la construcción. El paradigma puesto en juego determinará el uso de los artefactos, en este caso se parte de un problema (artefacto simbólico) pero se permite que en la construcción se use el juego de geometría (artefacto material) si se considera necesario, recordemos que un artefacto se convierte en un instrumento cuando el sujeto construye una serie de esquemas para su uso, es decir, la decisión de emplear el juego de geometría está asociado con el conocimiento que posee el profesor para construir un triángulo empleando estos materiales.
Génesis discursiva	Se activa la génesis discursiva mediante el planteamiento del problema argumentando la resolución del mismo. Se favorece el componente prueba, predomina una prueba intelectual de tipo experiencia mental al propiciar el razonamiento independiente de un representante particular. Con ello se pretende lograr una demostración cuya validación se centre en la deducción del criterio de construcción.
Paradigma geométrico	Predomina el GII pero la tarea transita en una fase heurística que se integra en el paradigma GI.

Circulación de planos	La circulación del plano Semiótico instrumental (sem-ins), suscita la movilización de los componentes de visualización, espacio real y local, construcción y artefactos al plantear el problema, sin embargo al incluir el componente prueba para argumentar la respuesta en el criterio de construcción (referencial) es que se inscribe una circulación del plano Instrumental discursivo (ins-dis). La comunicación del criterio de construcción, plano Semiótico discursivo (sem-dis), orienta a la activación de los cuatro componentes: espacio real y local, visualización, referencial y prueba, es decir, que esta tarea, integra las distintas fases de trabajo para el logro del razonamiento geométrico.
Contenidos relacionados con el programa de formación, contenidos de educación primaria, propiedades y criterios de triángulo.	Construye y describe figuras y cuerpos geométricos. Clasificación de triángulos con base en la medida de sus lados y ángulos. Construcción de triángulos con regla y compás. Condición fundamental de construcción de triángulos. Criterio de construcción de triángulos dados sus tres lados.

Entre lo más significativo que puede subrayarse en la tabla 18, es la intención de provocar la utilización de artefactos y la de establecer la transición de las pruebas pragmáticas a las intelectuales. También puede observarse cómo se plantea la circulación de los planos y el tránsito entre los paradigmas GI y GII, cabe señalar que la activación de la génesis discursiva se considera fundamental, por lo tanto, es en ella donde se detallan las distintas acciones que se realizan para favorecer el razonamiento geométrico. El desarrollo de las tres génesis es otro de los elementos que se detallan en la síntesis.

Lo descrito hasta el momento permitirá tener una noción general de los conocimientos matemáticos que poseen los profesores para el diseño de un ETG idóneo. Las tareas expuestas dan cuenta de los elementos teóricos revisados en la perspectiva teórica de la formación y como se ha mencionado, el potencial de cada una de ellas podrá observarse una vez que se analice el ETG personal de los profesores en la solución de estas situaciones.

CAPÍTULO V
EL ETG PERSONAL DE LOS PROFESORES. EL APRENDIZ DE GEÓMETRA

La hipótesis central en la perspectiva teórica del ETM_G, señala que mediante la activación de las distintas génesis (figural, instrumental y discursiva) se favorece el aprendizaje de la geometría y como se ha mencionado, la activación de la génesis discursiva es la que menos aparece en los textos escolares y programas de formación del profesor. En estos documentos el docente se apoya para diseñar las clases, por lo tanto existe la probabilidad de que ésta no sea contemplada al trabajar la enseñanza de la geometría. En lo que concierne al aula multigrado, dicha génesis puede considerarse como uno de los elementos que permite diseñar o seleccionar situaciones didácticas para que los niños de distintos grados escolares logren el aprendizaje del contenido geométrico, pues mediante la revisión del componente referencial es posible solicitar diversos tipos de pruebas en congruencia con el nivel cognitivo de cada uno de los estudiantes. Introducir estos elementos al aula, reside en el reconocimiento de la importancia que tienen.

Ahora bien, dicha circulación es observable en el Espacio de Trabajo Geométrico del profesor (personal e idóneo) y en el análisis de estos elementos, por esta razón, para dar cuenta de la eficacia de una formación bajo esta perspectiva teórica resulta fundamental indagar la relación entre ambos. Una particularidad de la experimentación que aquí se propone, es el trabajo colaborativo con los sujetos participantes, de los cinco que integran el grupo de formación, tres son estudiantes del octavo semestre de la licenciatura en educación primaria (Plan de estudios 2012) y los dos restantes son profesores en servicio egresados de la licenciatura en educación primaria (Plan 97).[71] Por lo que se pretende analizar los elementos más importantes durante este

[71] La caracterización y objetivo de la selección de los sujetos se encuentra de forma más amplia en la Introducción de esta tesis, donde se describe la metodología de la investigación.

trabajo conjunto entre profesores con diferente programa de formación inicial. Para diferenciar los diálogos que corresponden a cada sujeto se numeraron de la siguiente manera, la investigadora o formadora I; a los que se encuentran en servicio se les denominará PS 1 y 2; y aquellos que se encuentran cursando la licenciatura, serán FP 1,2 y 3.[72]

Para dar cuenta de los resultados de la experimentación, hemos organizado los hallazgos en tres grandes bloques. Durante el primer bloque (que concierne a este capítulo en particular), de inicio se presenta el análisis del espacio personal de los profesores que son sujetos de estudio en la investigación durante la resolución de las tareas geométricas, el momento que denominamos "el profesor como aprendiz". Esta parte examina los conocimientos disciplinares que poseen, su importancia radica en que son esenciales para que el docente logre una adecuada transposición, pues el estudiante en formación replica lo realizado y desarrolla técnicas mientras se nutre de un cuerpo de conocimientos matemáticos.

Posteriormente, un segundo bloque (capítulo seis) da cuenta del rol del profesor en el momento que se convierte en "analista" de las situaciones de referencia y en "diseñador" de situaciones de enseñanza para desarrollarlas en su grupo multigrado. Este análisis hace énfasis en la apropiación teórica y diferencias asociadas a la experiencia que han adquirido los profesores que son sujetos de estudio, tanto en su formación inicial como durante en el proceso de experimentación y la manera en que esto contribuye al diseño de los planes de clase. Un tercer bloque (capítulo siete y capítulo ocho), analiza las prácticas de dos profesores en el aula (una futura profesora y una profesora en servicio), lo que permite visualizar el proceso de transposición didáctica y el tránsito entre lo adquirido en los ETG personal e idóneo que ha diseñado. Todo lo anterior, tiene la finalidad de determinar el nivel de pertinencia de esta propuesta.

[72] Las claves aquí expuestas serán utilizadas de aquí en adelante durante el análisis de los resultados.

Recuérdese que el ETG personal es el espacio definido por un geómetra, en este caso el profesor, para reflexionar sobre conocimientos que despliega cuando resuelve una tarea matemática, analizarlo permite identificar los conocimientos que posee y pone en práctica al realizar la actividad geométrica. Las tareas a realizar por parte del geómetra incluyen la activación de las génesis y la circulación de los planos verticales y horizontales que componen el ETG, en esta investigación, se pone al geómetra a realizar dos tareas matemáticas en las primeras sesiones de la experimentación. Ambas fueron descritas de manera sintética en el capítulo anterior, y algunas propiedades que movilizan implícitamente se pueden señalar con Thompson (1993, pág. 79),

- Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°;
- En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados son iguales;
- Un triángulo tiene tres lados y tres ángulos. Para construir un triángulo hay que conocer tres de esos datos, siendo al menos uno de ellos un lado.
- Construcción de un triángulo conociendo los tres lados.
- Construcción de un triángulo, conocidos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Construcción de un triángulo conocido un lado y sus dos ángulos contiguos.
- Un lado de un triángulo es siempre menor a la suma de los otros dos lados ($a < b + c$), pero mayor que su diferencia ($a > b - c$).
- La suma de todos los ángulos interiores de un triángulo da siempre 180º.
- A mayor lado en un triángulo se opone también mayor ángulo.
- En un triángulo con lados iguales, sus ángulos opuestos son también iguales. (página 79)

La primera tarea incluye como saberes geométricos[73], la clasificación de triángulos por la longitud de sus lados y los tipos de ángulos así como algunas de sus propiedades. El primer episodio consistió en explorar los conocimientos previos de los sujetos de estudio en situaciones

[73] Dichos saberes se obtendrán por medio de la descripción individual y la discusión en colectivo.

que implicaban identificar y construir triángulos además de justificar la pertinencia de sus construcciones. Para ello, se proporcionó una tarjeta con imágenes de varios triángulos, seleccionaban uno y elaboraban un escrito con las características y las instrucciones para su construcción, luego debían intercambiar la tarjeta, para que un compañero construyera la figura siguiendo las instrucciones. Una vez concluida la construcción, se confrontaron los argumentos[74] para identificar si el triángulo trazado coincide con el seleccionado inicialmente. En este episodio, los profesores se podrían apoyar en la utilización de instrumentos o la superposición de los triángulos recortando los que estaban impresos en las tarjetas.

El análisis de las características y propiedades de los triángulos que pudiesen haber omitido en la validación anterior (intercambio de resultados por parejas), se llevó a cabo grupalmente y se lograron institucionalizar los saberes geométricos involucrados a partir de las aportaciones del colectivo. Posteriormente, completaron individualmente una tabla escribiendo todo lo que saben de cada uno de los triángulos, justificando el triángulo descrito y sus propiedades.

5.1. LA PRODUCCIÓN DE ENUNCIADOS Y EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DEL PROFESOR

En el proceso de articular los planos horizontales (epistemológico y cognitivo) del ETG surgen tres relaciones bidireccionales llamadas génesis (instrumental, figural y discursiva), además Kuzniak y Nechache (citados en (Pizarro, 2018), plantean que, para que el trabajo geométrico pueda considerarse completo habrá de circular mediante tres planos verticales en correspondencia a las génesis que los delimitan. Dichos planos actúan sobre las bases de ciertas génesis y sus relaciones con el plano epistemológico y cognitivo, el primer plano [Sem-Ins] se sustenta con las génesis semiotica e instrumental, el segundo [Sem-Dis] con la semiótica y

[74] La validación fue coordinada por la investigadora mediante una serie de cuestionamientos que provocaron la identificación del saber disciplinar, la situación se describe en el capítulo IV.

discursiva y el tercero [Ins-Dis] con la instrumental y discursiva. Esta última circulación vertical puede observarse en la siguiente figura, donde “V” es visualización, “E” el espacio real y local, “C” la construcción, “A” los artefactos, “R” referencial y “P” la prueba.

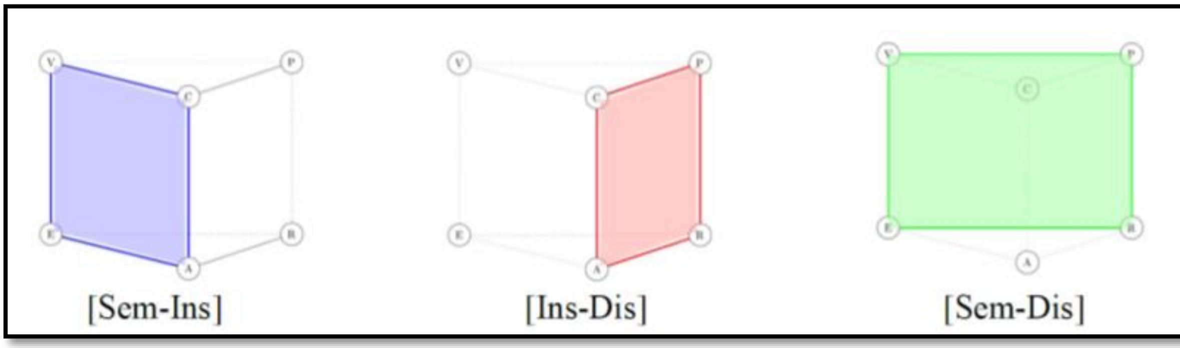


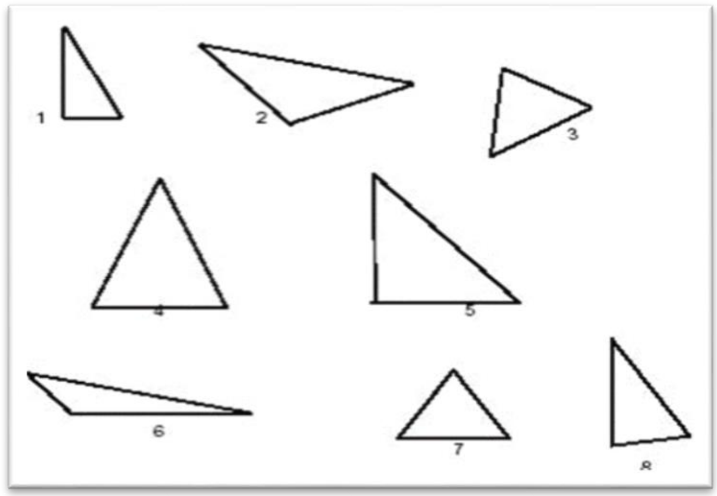
Figura 42. Niveles verticales de las circulaciones en el ETM. Fuente: Kuzniak y Nechache (2015)

En la figura 42 se observan los componentes que son movilizados en cada una de las circulaciones, sin embargo hay ocasiones en que solamente se encuentran presentes algunos polos durante la tarea, en esos casos se denomina semiplano.

En la primera actividad propuesta al grupo de formación (tabla 19), el trabajo geométrico circula en el plano epistemológico, las figuras constituyen el espacio real y local del cual se valen los profesores para enunciar las propiedades generales y posiblemente algunos de los criterios de construcción de los triángulos cuando organizan el discurso geométrico que corresponde al referencial, con ello activan los saberes previos que poseen.

Los artefactos se dejaron a criterio de los profesores del grupo porque al plantear la actividad no se especificó cuáles artefactos debían utilizar o de qué manera podrían utilizarse. En lo que corresponde al plano cognitivo, la elaboración del discurso se apoya en la visualización icónica para describir las características de cada triángulo con respecto a sus lados, ángulos o las propiedades identificadas, la descripción del proceso de construcción conlleva a su vez un proceso de argumentación tanto en la descripción inicial del primer profesor como en el docente que lo construye.

Tabla 19. Primera actividad propuesta a los profesores en la sesión colectiva inicial. Fuente: Elaboración propia.

Enunciado de la tarea	*Imágenes en la tarjeta*
"Cada uno de ustedes seleccionará uno de los triángulos de la tarjeta sin que los demás sepamos cuál eligieron. *Enseguida escriban en la hoja en blanco la secuencia ordenada a seguir para que se construya el triángulo elegido.* *Después entreguen las instrucciones a uno de sus compañeros para que lo dibuje en una hoja blanca.* *Pueden utilizar los instrumentos geométricos si así lo consideran.* *Recuerden ser lo más precisos posible en sus indicaciones para que sea más clara la descripción".*	

Como se puede apreciar (tabla 19), la visualización desempeña un papel heurístico cuando se pide que elaboren las instrucciones porque la atención se centra en la descripción de las propiedades de las figuras de acuerdo a las formas de visualización (Ver Cap. II). La entrada *botanise* se hace presente porque se reconocen las formas elementales de la geometría plana en el momento que se intercambian las tarjetas, pero la actividad se clasifica como tarea del *constructeur* puesto que se privilegia la construcción utilizando artefactos. Mediante esta tarea se ponen en juego propiedades geométricas, es decir se experimentará con ella para descubrir la propiedad geométrica involucrada (plano Sem-ins, descubrimiento y exploración).

Por otra parte, al incluir la descripción (justificación) se activa la génesis discursiva para comunicar los resultados (plano Sem-dis, Comunicación y Presentación), en este caso se aceptarán pruebas pragmáticas ya que construirán el triángulo en función de las indicaciones, a la par se desarrollará la fase de Justificación y razonamiento (Ins-dis) al relacionar la construcción con el discurso recibido.

Es importante recordar que los sujetos participantes han tenido ya una formación respecto al saber geométrico en cuestión, es por ello que el objetivo no es favorecer el dominio disciplinar, aunque al resolver una situación problemática como la planteada, habrá necesariamente un proceso de reflexión, análisis, confirmación o eliminación de sus hipótesis, por lo tanto existe un aprendizaje; fundamentalmente se trata de identificar los conocimientos que adquirieron durante su formación inicial y que utilizan para diseñar sus sesiones clase. En este sentido, sus escritos son considerados como manifestaciones de sus conocimientos de los profesores, los cuales serán validados en momentos posteriores cuando se organice la discusión grupal para la confrontación de resultados.

5.1.1. Discurso y Formación. El caso del triángulo rectángulo.

En los escritos iniciales los profesores registraron las instrucciones para la construcción del triángulo elegido reflejando un discurso geométrico que incluye algunas propiedades de los triángulos señaladas a priori de la actividad. Además, se logra identificar en ellos características generales y los criterios de lados y ángulos para su clasificación. Cabe resaltar que también se observan ciertas diferencias, al parecer relacionadas con la naturaleza de las tareas incluidas en los programas de formación. Un ejemplo de esto, se puede ver en el escrito de PS2:

> Instrucciones del PS2 para dibujar el triángulo 1
> “El triángulo que tienes que hacer: Tiene 3 lados diferentes. Tiene un ángulo de 90°. Uno de sus lados es una diagonal. Su base es pequeña. Es la mitad de un triángulo más grande. Asemeja la vela de un barco”

En el discurso anterior se señala el componente referencial cuando se mencionan elementos propios de un triángulo rectángulo (por la medida de uno de sus ángulos) que también es escaleno (por la medida de los lados), es decir, se mencionan propiedades de un *triángulo rectángulo escaleno*. Señala que uno de los lados es la base pero no aclara que cualquiera de los lados puede considerarse como base de un triángulo, indica que un lado es una diagonal pero no describe más (tampoco se le cuestionó a cuál se refería) y los enunciados que complementan las instrucciones de construcción no aluden a otra propiedad o característica geométrica que oriente adecuadamente la tarea. Por las razones anteriores, puede decirse que para PS2, el rol del dibujo puede resultar más significativo que la técnica, es decir, considera importante orientar para completar la construcción (“asemeja la vela de un barco”), con base al dibujo de un objeto en particular, más allá de las técnicas propias del proceso de construcción de este tipo de triángulos.

La instrucción está centrada en los conocimientos del profesor y básicamente contiene un lenguaje natural, esto es, al analizar los contenidos geométricos que se incluyen en la formación de PS2 (Plan 97), se concluye que las tareas matemáticas de formación no consideraban siempre la argumentación de ciertas propiedades geométricas porque centraban más la atención en las tareas de diseño de situaciones didácticas, probablemente esta es la razón de no integrar en el discurso la técnica de construcción de los triángulos.

Durante la confrontación de resultados, se analizó el texto del PS2 para verificar cuál era el triángulo al que hacía referencia, esto se observa siguiente fragmento de registro.

> I: ¿Lograron identificar y construir el triángulo que les tocó?, empecemos con usted maestra.
> //La maestra (FP1) lee la descripción de PS2//
> FP1: Estoy indecisa sobre el triángulo que me tocó, estoy entre el 1 y el 5 porque los dos tienen ángulos de 90° como dice la tarjeta con la descripción, pero luego dice que es la mitad de un triángulo más grande y no alcanzo a distinguir a qué se refiere con la mitad de otro.
> I: Entonces, ¿Cuál es el triángulo correcto? (Pregunta a PS2)
> PS2: El que yo elegí es el 1.
> //Interviene otra profesora (PS1) para mencionar que identificó el triángulo correcto a partir de la descripción //
> PS1: Yo sí supe que es el 1, porque con dos de ellos se puede formar un rectángulo, es un triángulo escaleno con un ángulo recto; el 5 también es escaleno porque tiene los lados desiguales, pero no puede ser la mitad de otro de los triángulos que hay en la tarjeta.

Como se puede apreciar, PS1 realiza lo que Duval (2005) llama aprehensión operatoria, ya que para emitir su argumento recurre a la reconfiguración de la figura inicial que es la imagen del triángulo (visualización icónica) para pensarlo como la mitad de un rectángulo (visualización no icónica) cuando se menciona que es más pequeño pero no necesariamente con relación a uno de los triángulos de la tarjeta, es decir, hace una transformación mental de lo que ha observado en la imagen para asociarlo con una figura geométrica distinta, derivada de la primera, esto tiene sentido con lo que Duval señala "En una figura geométrica existen más gestalts constituyentes y más subconfiguraciones posibles que aquellas que fueron explícitamente movilizadas para su construcción o las que son explícitamente nombradas en la hipótesis (Duval, 1995, pág. 182, citado en (Duval R. , 2001). El trabajo con estas reconfiguraciones estuvo presente en las tareas geométricas que se plantearon a PS1 en su formación (Plan 97), ejemplo de ellas es la que explicaba, "cualquier triángulo se puede convertir en un rectángulo o en un romboide, agregándole un triángulo igual" (Block, 1995, pág. 222)

A partir de la visualización de la figura inicial se conectan los conocimientos interiorizados de PS1 con lo que percibe, vinculando la aprehensión discursiva asociada con las características del triángulo rectángulo escaleno, la aprehensión operatoria suele ser la más compleja y menos consciente. En este caso, observar la figura fue suficiente para entender una situación geométrica, pero, ¿sucederá lo mismo con el niño al presentarle solamente la figura?, ¿de qué manera el alumno puede "ver" lo mismo que la profesora sin que tenga que señalárselo?, es probable que de acuerdo al grado escolar en que se encuentre o los conocimientos que tenga emita un discurso similar al de PS1, o bien, que a partir del dominio matemático sería PS1 quien oriente a los estudiantes a "ver" lo mismo, resulta complejo saber si existe una forma natural de ver las figuras y la manera en que se establece la relación entre ellas, pues a decir de Duval (2001) existen relaciones entre el discurso interno y el razonamiento. Si bien es cierto, que el propósito de esta actividad no era su deconstrucción o reconstrucción, sí se identifica como problema heurístico que moviliza los conocimientos del profesor para que argumente sus respuestas.

Ahora bien, el programa de *Geometría, su aprendizaje y enseñanza* (Plan 2012), como se ha mencionado, pone el mayor acento en el estudio de los contenidos geométricos, es decir, el estudiante primero debe realizar actividades matemáticas para después reflexionar sobre tales contenidos para diseñar las secuencias de enseñanza. La siguiente descripción corresponde a una profesora que ha sido formada con este programa de estudios:

> Instrucciones de FP2 para dibujar el triángulo
> "Para iniciar, primero se tendrá que trazar la base la cual conllevará una línea recta, en posición horizontal.
> Por consiguiente, se realizará el trazo de otra línea que irá perpendicular a la primera línea, colocándola en el lado izquierdo donde el choque de las líneas se corte sin prolongarlas, tratando de que esta línea perpendicular quede de la misma medida que la primera línea horizontal y de igual forma recta, donde ambas líneas formen un ángulo de 90°.
> Por último se trazará la tercera línea que dará la forma del triángulo, tomando el extremo derecho de la línea base y el extremo superior de la línea vertical, y se realizará el trazo de esta línea de un extremo a otro".

Como puede apreciarse, en las instrucciones de FP2 también se incluyen elementos que indican que es un triángulo rectángulo (el ángulo de 90º), sin embargo existe una diferencia con las instrucciones anteriores porque en este caso hace énfasis en la medida de los lados, señala que dos serán de igual longitud (*triángulo rectángulo isósceles)*, sin embargo, la descripción corresponde al triángulo número 5, que es un triángulo rectángulo escaleno, en este punto podemos señalar que FP2 se basa sólo en la visualización de la figura para determinar que los lados son de la misma longitud, pero en la verificación empleando la medición se observa que no es así.

Cada manera de visualizar corresponde a un tipo particular de comprensión, en esta actividad, a partir de la visualización icónica FP2 constata mediante la percepción inmediata el tipo de triángulo que en su conocimiento básico reconoce, pero quien trazará el triángulo partir de las instrucciones lo comprobará con un instrumento de medición. Ambas se apoyan en la visualización para construir su argumento, la manera en que cada una lo realiza, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, tal vez se relacione con los conocimientos adquiridos en su formación.

> I: ¿Qué consideró para redactar las instrucciones para la construcción de su triángulo?
> FP2: Que la maestra pudiera darse cuenta que el triángulo que escogí era el número 5 y que es isósceles. Traté de que hiciera las líneas que necesitaba y formara el ángulo correcto aunque no usara ninguna de las reglas.
> I: ¿Entonces es un triángulo isósceles?
> FP2: Sí
> //Interviene otra futura profesora//
> FP1: No, es un triángulo escaleno porque no miden lo mismo todos sus lados. Es que cuando leí su instrucción me quedé con la duda, porque yo observo que los lados no miden lo mismo, tuve que medir y no era así.
> I: Con lo descrito en la tarjeta, ¿cree que se loga construir el triángulo?
> FP1: Sí, pero no era el tipo de triángulo que ella decía.
> I: ¿Qué sugiere utilizar para poder construirlo?
> FP1: Solamente la regla y el transportador, pero primero se mide.

Es posible ver, que el discurso argumentativo de FP2 sobre la secuencia para la construcción debería haber incluido el criterio de construcción de triángulos: conocido uno de sus ángulos (el de 90°) señalar la medida de dos lados (Thompson, 1993), aunque en la consigna de la actividad no existía restricción para el uso de artefactos, pero resultaba imperativo que los profesores recurrieran a los saberes que poseen y con base en ellos redactaran sus instrucciones. Dicha secuencia permitiría trazar el triángulo escaleno empleando escuadras y compás o escuadras y transportador, pero no se explicita en su discurso y el desconocimiento de los profesores respecto de estos criterios de construcción provocan que no se lleven a cabo. Por el estatus que se da a la construcción como medio de prueba, presente en el discurso de FP1, puede decirse que se emplea entonces una prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo, y por lo tanto, dicha construcción se inscribe en el paradigma GI.

Con relación a este aspecto, debe tenerse en cuenta, que en el programa de formación (Plan 2012), en una de las actividades se pide que los estudiantes reflexionen sobre los criterios de construcción de triángulos y cuadriláteros, y analizar las condiciones de construcción empleando la regla y el compás[75], por esta razón, puede inferirse que las instrucciones de FP2 tal vez tengan cierta influencia de esas actividades. No obstante, en el momento de la validación no lo justifica de esta manera, basó su respuesta sin corroborarla derivando con ello un supuesto falso nombrándolo como isósceles siendo escaleno, es decir, no empleó la medición para verificar la respuesta.

Se ha dicho que en el programa de formación (Plan 2012) se da prioridad al dominio disciplinar del futuro, y si bien es cierto que en el caso de FP2 no se describen todas las propiedades y criterios necesarios para la construcción del triángulo elegido y que además hay un error en la clasificación del triángulo de acuerdo a la medida de sus lados, también lo es que recupera hasta cierto punto el proceso para construir el triángulo elegido, hecho que le facilitó a FP1 construirlo (como se puede observar en el anterior fragmento de registro) a pesar de las discrepancias entre figura e instrucciones. Al parecer entonces, puede observarse de manera general que existe una diferencia entre los conocimientos de los profesores formados en el Plan 97 y los del Plan 2012, principalmente debido a que en el Plan 97 este tema se incluía solamente en uno de los bloques de la asignatura de Matemáticas y su Enseñanza I, mientras que en el Plan 2012, el curso de Geometría, su aprendizaje y enseñanza tiene una duración de un semestre completo; debemos reconocer que el Plan de estudios es solamente una variable que tenga relación con este hecho, aunado además a la experiencia con el trabajo de estos temas o el nivel de conocimiento adquirido durante la formación inicial. Pero es probable que esta diferencia se refleje también en el diseño de las situaciones de enseñanza, ya que, como se ha señalado, existe una relación entre el Espacio Personal y el Espacio Idóneo del profesor.

En cuanto a la circulación de los planos en este caso, se hace presente la interacción entre la visualización, el espacio real y local, y el referencial y prueba, es decir en el plano [Sem-Dis] donde la prueba está centrada en el lenguaje natural del profesor cuando describe las

[75] Véase el capítulo III en el análisis a los programas de formación inicial 2012 para ampliar la información al respecto.

instrucciones y enuncia las características o propiedades de la figura. Esta interacción se sitúa en una explicación que requería ser reconocida y aceptada por los demás para identificar y construir el triángulo, por esta razón se hacen presentes pruebas pragmáticas ligada a la acción y la experiencia, así como pruebas intelectuales con relación a los argumentos. En las instrucciones de PS2 se observa el "ejemplo genérico" al justificar la afirmación considerando el objeto como representante de todos los objetos que componen a dicha afirmación y en las instrucciones de FP2 se observa el "cálculo sobre el enunciado" cuando se utilizan propiedades explícitas que son usuales en el saber geométrico en cuestión.

En el sentido de las ideas anteriores, si el razonamiento es considerado por Balacheff (2000) para designar "la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información" (pág. 13), al aparecer enunciados como *tiene un ángulo de 90°* y *donde ambas líneas formen un ángulo de 90°*, entonces el discurso del profesor permite el razonamiento de otro sujeto al utilizar esta información e identificar que es un tipo de triángulo en particular. Sin embargo, para el nivel en que se encuentran y con base en lo adquirido durante su formación inicial, su discurso geométrico es escaso (al recurrir solamente a los enunciados antes expuestos) y por lo regular escrito con un lenguaje natural, reflejando así un distanciamiento entre este discurso con una justificación argumentativa formal.

En general, los planes de formación inicial escasamente incluyen la reflexión durante el proceso de prueba para llegar a la formalización del saber, con ello se generan problemáticas en relación a los argumentos que se emplean por parte de los futuros profesores, además la concepción de rigor matemático depende de cada institución escolar por lo que es importante institucionalizarlo durante la apropiación del contenido matemático. Se requiere entonces, de un proceso de validación y someter a prueba los argumentos expuestos por los futuros profesores, con esto entendemos que el proceso de prueba requiere de una construcción cognitiva que debería ser desarrollada en la formación.

5.1.2. Visualización, artefactos y discurso. El caso del triángulo equilátero.

En un momento de la actividad, se generó el proceso mediante el cual los profesores identificaron y construyeron el triángulo, también en este lapso de estableció el diálogo para contrastar los triángulos descritos y construidos. Este momento se inscribe en el plano [Ins-Dis] donde se articulan los artefactos, la construcción, el referencial y prueba, aunque también circula en el plano [Sem-Ins] porque en la justificación interactúan el espacio real y local, la visualización, la construcción y los artefactos, para dar cuenta de la relación entre los dos procesos semióticos: visualización de las formas y lenguaje para representarlas. El punto central de la actividad es la justificación de la técnica de construcción y el desarrollo del razonamiento matemático, por ello el análisis subrayará si la prueba se basa en la experimentación -con instrumentos para verificar- o en el referencial teórico (inmerso en el discurso).

Lo primero que debe destacarse es que los cinco profesores del grupo utilizaron escuadras y transportador para construir el triángulo, pero no el compás, además la medición no fue la única técnica, una de las profesoras utilizó la superposición, sobrepuso la figura de la tarjeta con el triángulo construido para constatar que había construido el triángulo correcto, se puede inferir que el uso del referencial teórico en las instrucciones permitió el empleo de los artefactos.

La génesis instrumental tiene su base en el uso de los artefactos, en el intercambio de instrucciones, los artefactos son simbólicos y materiales, puesto que los profesores contaban con escuadras, reglas, transportador y compás así como con las propiedades y características enunciadas en el texto. Asimismo el paradigma puesto en juego define el uso a los artefactos, en esta acción se favoreció el paradigma GI (Geometría natural) ya que los artefactos materiales se emplearon para verificar o ilustrar las características de las instrucciones. Durante la confrontación de resultados, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, dos de las participantes presentaron una discrepancia respecto al triángulo seleccionado.

I: ¿Cuál es el triángulo que le tocó maestra?
PS1: A mí me describieron un triángulo equilátero y lo hice, pero no hay ninguno que corresponda. Yo voy a hacer lo que aquí dice, aunque no coincida con el tipo de triángulo.
I: ¿Cómo supo que no era un triángulo equilátero?
PS1: Yo lo fui midiendo
//Se observa que la profesora primero colocó la figura recortada de la tarjeta y le realizó dobleces para corroborar que era equilátero, enseguida tomó la regla para medir cada uno de los lados//
I: ¿Podría leer la descripción?
PS1: Todos estamos arriba de algo, porque necesitamos una base, por eso lo primero que tenemos que hacer es trazar una línea como base, luego le vamos a poner una casita encima de la base, donde cada uno de sus lados sea del mismo tamaño, yo por eso dije en cuanto lo leí que es un triángulo equilátero aunque aquí (señala la hoja) no existe ninguno que sea equilátero, ya le medí.
I: ¿En qué se basó usted para hacer su descripción?
//Pregunta a la futura profesora que hizo las instrucciones //
FP3: Yo hice mi descripción de esa manera porque cuando me daban geometría en la normal el maestro nos decía que utilizáramos elementos del entorno, por ejemplo, ¿qué forma tiene la ventana?, ¿sobre qué estábamos parados y a qué figura se parece?, ¿a qué se parece el sol?, pero intenté describir un triángulo equilátero ya que tiene todos sus lados iguales.
I: ¿Entonces cuál es el triángulo que describió?
FP3: El 7
PS1: No es el 7, se parece, pero no es. Aunque está muy cerca de ser equilátero tiene un centímetro de diferencia.
I: ¿De qué manera podríamos comprobar que es el triángulo que nos dijeron en la tarjeta?
PS1: En mi caso yo lo medí de sus lados, porque entendí que era equilátero, pero necesitaba comprobar si realmente coincide con el que está en la tarjeta.
I: ¿Por qué consideran que se dio esta confusión con este triángulo en particular?
PS2: Estamos acostumbrados a representar los triángulos en la misma posición siempre, cuando alguien nos menciona la palabra triángulo, se nos viene a la mente la imagen típica que se parece a una casita, y cuando nos la cambian de posición nos quedamos con la duda si es o no.
I: ¿Consideran pues que es importante haber colocado estos tipos de triángulos en distintas posiciones y no haberles mencionado sus medidas?
PS1: Sí, porque pudimos darnos cuenta de cómo nos confundimos si no ponemos atención a las características.
I: ¿De qué otra manera podría haberse trabajado esta actividad para que pueda hacerse con sus niños?

> FP1: Que no solamente vean las imágenes, sino que las construyan o las manipulen con el geoplano, con palitos, o popotes. Para que comprueben si es el triángulo correcto.
> I: ¿Y si no fuese posible utilizar material concreto o en este caso, las reglas para medir, cómo podríamos verificar que sea un triángulo equilátero?
> FP2: Pues todos sabemos que un triángulo equilátero tiene sus tres lados iguales, eso no cambia. Aunque aquí en la hoja sí teníamos que comprobar con las reglas para saber si es o no, porque al verlo de pronto sí se cree que es equilátero, por eso es importante cambiarle a los niños la posición en las clases, no ponerles siempre lo mismo.
> PS2: Estamos acostumbrados a ponerles el típico triángulo siempre a los niños.

Habría que enfatizar como los artefactos en este momento ayudaron a la justificación del discurso geométrico y a la verificación de la técnica empleada para su construcción, razón por la cual en el análisis a priori se consideró como pruebas aceptadas las pragmáticas. Aunque la percepción de la figura por medio del dibujo es frecuentemente empleada para la descripción, (por ejemplo FP3 “observó” la imagen y dedujo que era un triángulo equilátero), PS1 utilizó una prueba pragmática como justificación, tal como se esperaba; empleó un artefacto material (la regla), y asoció el referencial medida de los lados, así encontró la solución del problema. También conviene subrayar la forma en que se hace presente la génesis instrumental y cómo se transforma el artefacto en instrumento, se observa claramente el proceso de reconocimiento de las funciones del artefacto (instrumentalización según Trouche, citado en Henríquez, (2014) y la construcción mental del sujeto al utilizarlo, lo que lo lleva a comprender la actividad (instrumentación de acuerdo a Trouche citado en Henríquez, 2014).

Otro aspecto relevante es que, para aceptar que la figura de la tarjeta correspondía a un triángulo equilátero por la simple constatación perceptual inmediata, FP1 realizó una deconstrucción instrumental apoyándose en la génesis discursiva. En este sentido, podemos señalar que la prueba pragmática inicialmente empleada por PS1 le permitió usar el marco deductivo (definiciones y propiedades matemáticas que posee) para adoptar un formalismo preciso que le llevó a identificar el triángulo correcto, es así, que el lenguaje juega un papel predominante. Puede decirse entonces, que hay indicios de un tránsito entre GI/gII al buscar la información necesaria en el referente teórico.

En la enseñanza resulta fundamental poder establecer la diferencia entre utilizar una figura como esquema representativo o como objeto de manipulación, en este episodio se empleó como ilustrativa asociada a la aprehensión discursiva, sin embargo el razonamiento de la profesora la lleva a percibir algo más que la representación estereotipada del triángulo equilátero. Fue importante el momento de la discusión en grupo para poder esclarecer el uso que en ocasiones se hace a las figuras en el aula, por ejemplo, los profesores en servicio con base en la experiencia del trabajo en el aula exponen sus ideas y las aportaciones de los futuros profesores a partir del dominio disciplinar que en su programa de formación inicial han adquirido, posibilita la modificación de emplear las figuras geométricas variando la "típica" representación, y basar los argumentos en las propiedades y características de los triángulos. Podemos decir entonces, que el trabajo en colectivo con profesores con programas de formación inicial distintos, ha permitido hasta el momento que los conocimientos se modifiquen a partir de las interacciones en la resolución de tareas.

5.1.3. Validación del discurso geométrico, la transformación.

En la perspectiva teórica del ETG se reconocen las ideas de Balacheff (2000) sobre el razonamiento y se toma como referente fundamental en esta tesis. Cuando se prueba un teorema o propiedad, la tipología de prueba definida por Balacheff permite analizar de mejor manera las explicaciones emitidas por los profesores e identificar el razonamiento de validación involucrado, por esta razón lo que a continuación se analiza (en el momento de cierre de la primera actividad) es la transformación del discurso geométrico de los profesores. Para concluir la tarea relativa a la identificación, descripción y construcción de triángulos, los profesores debían describir todos los triángulos contenidos en la tarjeta enunciando sus características y propiedades. Luego de que lo hicieran individualmente se confrontan sus respuestas porque como se ha mencionado, la validación es determinante para desarrollar el razonamiento geométrico.

Uno de los principales medios para transformar una situación de decisión a una situación de validación tiene que ver con someterla a debate para garantizar o desconocer su validez, en el discurso inicial de los profesores sólo se solicitaba la justificación por medio de un ejemplo genérico (el triángulo seleccionado), aunque para identificar las otras propiedades involucradas y definir las características del triángulo isósceles se hacía necesaria una justificación a partir de otros ejemplos similares. Esta acción se puede apreciar en el momento de validación, específicamente cuando FP3 describe los triángulos 5 y 7 y cómo se puede apreciar en el siguiente fragmento, FP3 reconoce la confusión que genera la representación de la figura.

> Discurso de FP3 sobre los triángulos 5 y 7
> “Tal vez los niños, por la base, se pueden dejar llevar por un triángulo escaleno o nosotros mismos caemos en el error, pero una vez más, comprobado, es un triángulo isósceles por tener dos lados iguales (figura 5). Como ya se mencionó se puede percibir un “triángulo equilátero” pero se comprobó con trazos de sus medidas que es un isósceles (triángulo 7)”.

Cabe señalar que, para realizar las descripciones, los profesores echaron mano de la medición y de los argumentos que en momentos anteriores habían desplegado, es por esta razón que la mayoría de sus descripciones incluidas en la tabla muestran mucho de las discusiones anteriores, es en este sentido que hablamos de una posible transformación de sus discursos iniciales.

Recuérdese que el objetivo de esta secuencia tenía que ver con identificar los conocimientos previos de los profesores al clasificar los triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y ángulos y lo que se observó fue que el tipo de prueba dominante fue el de empirismo ingenuo, pero aunque en menor medida, como se aprecia en la siguiente figura (figura 43), también apareció el de ejemplo genérico.

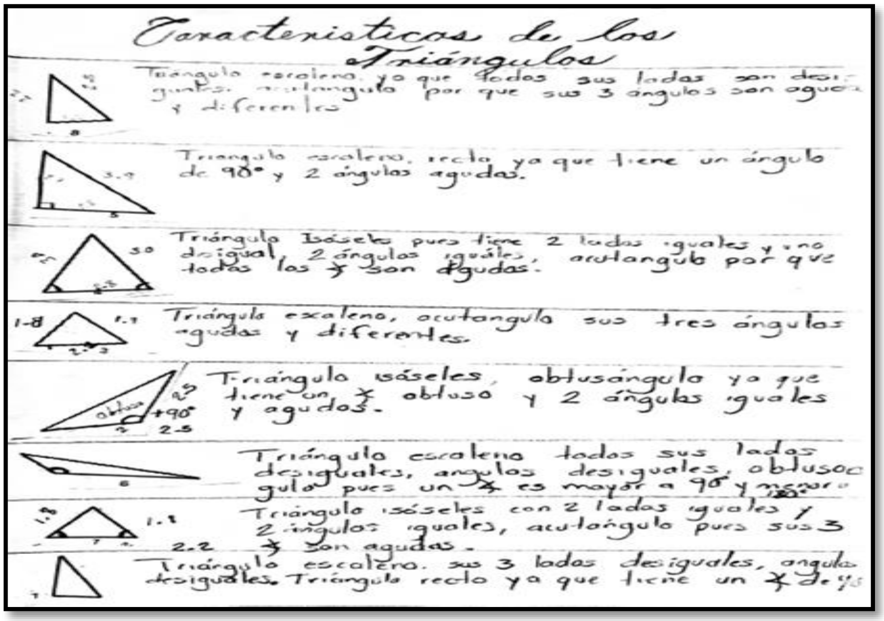


Figura 43. Ejemplo de respuestas finales. Sesión 1 Experimentación.

En la figura 43 se puede apreciar que el discurso del profesor se basa en la utilización de la regla y el transportador como artefactos y clasifica los triángulos a partir de la medida de los lados y de sus ángulos. Es importante resaltar la descripción del sexto triángulo, en la primera clasificación (por sus lados) se refiere a él como un triángulo escaleno pero no se observa que haya medido sus lados para comprobarlo, se apoya en la idea que todos los triángulos escalenos se caracterizan porque tienen sus lados desiguales. En lo que concierne a la clasificación por sus ángulos lo denomina obtusángulo y menciona que uno de sus ángulos es mayor de 90° pero menor de 180°, se infiere que ha medido para señalar esta característica. Algo similar ocurre con el octavo triángulo, no se observa ninguna medición de los lados o de los ángulos para justificar su descripción. Entonces, lo que aparece es una prueba pragmática de ejemplo genérico porque justifica sus afirmaciones considerando un ejemplo concreto como representante de los objetos que pertenecen a dicha afirmación. Es probable que este tipo de prueba permita el tránsito hacía una prueba de tipo intelectual en posteriores justificaciones.

Podemos concluir que en esta tarea, además de identificar el dominio del contenido que poseen los profesores, se habla de una transformación del discurso, en los textos iniciales los profesores mencionaban escasamente propiedades y se basaban en un lenguaje natural, al concluir los momentos de validación grupal completaron la descripción de los triángulos a partir de los conocimientos que poseían los otros profesores o la reflexión de sus primeros textos, pues la sesión no consideraba solamente la resolución de la actividad sino que incluía el análisis de las respuestas de forma grupal, por lo tanto, los discursos finales hacían referencia a ciertas propiedades y características, podemos decir que pasaron a otro nivel de lenguaje. Con lo anterior, es probable que se favorezca posteriormente, el diseño que realicen de situaciones didácticas, es decir, a la configuración de un Espacio de Trabajo idóneo para sus grupos multigrado.

5.2. EL SABER DE REFERENCIA, ENTRE LA GEOMETRÍA NATURAL (GI) Y LA GEOMETRÍA AXIOMÁTICA NATURAL (GII)

Una vez desarrolladas las actividades para reconocer los conocimientos de los profesores sobre las características y propiedades generales del triángulo, en una segunda sesión se efectuaron las tareas didácticas incluidas en la primera situación de referencia cuyos resultados se analizan en apartados más adelante. En una tercera sesión, (cuyo análisis es el contenido de este apartado), resuelven la segunda tarea que tiene la finalidad de favorecer el razonamiento geométrico del profesor haciendo énfasis en los tipos de prueba que pueden aparecer al dar respuesta a los problemas. Es importante subrayar la importancia de que en el proceso de formación, el profesor comprenda las posibilidades que los diversos tipos de prueba brindan para el diseño de sus clases, pero es preciso que esta comprensión se derive del trabajo en su ETG personal. En este apartado se incluyen los resultados de la segunda tarea matemática en la que se buscaba que los profesores dedujeran el criterio que señala que la suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es siempre mayor que la longitud del tercer lado y como complemento para que pueda construirse un triángulo, cualquier lado es mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos y menor que su suma.

En un principio, esta tarea implicó la resolución de los problemas sugiriendo la utilización de artefactos materiales para la solución, pero también se solicitó la justificación de las respuestas cuando no fue posible emplear dichos instrumentos. Se buscó concretar el objetivo de la situación mediante la validación que buscaba orientar la aparición de la enunciación del criterio matemático. La situación se organizó en dos momentos, en el primero se les pidió resolver un problema matemático y dar la justificación de su respuesta. El problema a resolver se aprecia en la siguiente figura (figura 44).

> *Pablo tiene la posibilidad de construir una piscina triangular en el patio de su casa. Tiene disponible una de las esquinas del mismo. Para aprovechar el espacio calcula que puede hacerla con estas medidas 2m, 3m y 7m, pero también piensa que sería buena idea hacerla con estas otras medidas 3m, 4m y 9m. Hagamos el dibujo con los dos juegos de medidas disponibles y justifiquemos por escrito cuáles serían más adecuadas".*

Figura 44. Primer problema. Situación de Referencia 2.

En el segundo momento, posterior al momento de discusión sobre las respuestas al primer problema, se les proporcionó una serie de medidas para que propusieran combinaciones posibles y no posibles de construcción de triángulos. Con ello se pretendía que concluyeran con la enunciación del criterio en que se centraba la situación de referencia, a partir de la validación grupal. La actividad de este momento se muestra en la figura siguiente (figura 45).

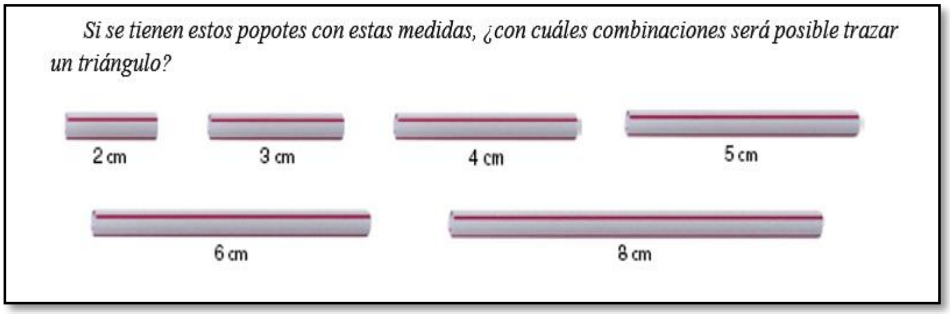


Figura 45. Segundo problema. Situación de Referencia 2.

Para dar respuesta al problema, se les pidió eligieran tres popotes, que registraran sus medidas (combinaciones), que mencionaran si era posible o no formar un triángulo, justificar su elección y mencionar el tipo de triángulo que se forma con las combinaciones que eligieron.

En los resultados de la situación es posible observar que las justificaciones de los profesores han evolucionado y consideran que la validez puede ser modificable en correspondencia con el contexto social en que se inscribe. Dicha evolución permite ver en las soluciones del problema elementos de los paradigmas GI y GII y como se ha mencionado, es más factible observar el tránsito entre ambos. Los matices entre cada paradigma permiten identificar dicho movimiento, en el caso de GI es válida la deducción a partir de la experimentación basada en el dibujo, mientras que en GII dicha experimentación puede apoyarse en el dibujo o las figuras pero la validación debe centrarse en los axiomas, razón por la cual, la visualización y la construcción juegan un papel esencial para tal transición.

Del mismo modo, hemos encontrado que en la formación inicial de profesores se propone el uso de instrumentos geométricos para destacar el papel que juegan las construcciones geométricas y el dibujo en la organización de los argumentos, es decir, la construcción como medio de prueba se pone al centro, por lo que es razonable que los profesores utilicen dichos instrumentos.

Ahora, en lo que a esta situación de referencia concierne, los momentos de validación resultaron fundamentales para observar la evolución de los argumentos de los profesores y también para que lograran enunciar el criterio geométrico involucrado en la tarea. Mediante el razonamiento de los profesores sus argumentos es posible observar el tránsito entre los paradigmas GI y GII

5.2.1. El saber de referencia en la justificación del profesor.

Como se ha mencionado, el ETG personal permite identificar los conocimientos matemáticos que posee el profesor; al resolver las tareas matemáticas, el geómetra utiliza los conocimientos que tiene previos a su proceso de formación inicial, así como los de carácter informal de los que se ha apropiado en el transcurso de su vida y los desarrollados durante su práctica profesional, pero fundamentalmente, recurre a lo que ha adquirido en su formación inicial, en correspondencia con esta idea, este apartado analiza la manera como dichos conocimientos estudiados en los planes de formación (Planes 97 y 2012) se hacen presentes en los discursos justificatorios.

Para la resolución del problema "La piscina de Pablo" se puso a disposición de los profesores un juego de geometría pero no se les indicó que debían utilizarlo, tampoco se les dijo que instrumento utilizar. Después de la resolución individual, se organizó el momento de la validación donde se discutirían sus respuestas y justificaciones. Uno de los hallazgos más relevantes en ese momento fue el hecho de que, al intentar trazar los triángulos con los artefactos materiales[76], como se puede observar en el siguiente fragmento, FP2 se dio cuenta que no era posible.

> I: ¿Se pudo construir la piscina?
> PS1: No
> I: ¿Por qué?, ¿ninguna se pudo?, ¿alguien quiere compartir su respuesta?
> FP2: ¡Yo!...Ninguno de los dos juegos de medidas permite la construcción de la piscina, ya que al utilizar como base la medida mayor, las medidas de los otros dos lados en suma

[76] Para una mejor comprensión de la actividad, véase el capítulo IV en el apartado que describe las situaciones de referencia diseñadas.

> deben de ser mayor a esta medida para que el triángulo pueda formarse, y en esta situación no sucede así, ya que en el caso de las primeras medidas tomando como base el de 7m, y sumando los otros dos lados 2m más 3m, suman 5m y este es menor al lado mayor y en el caso de las segundas medidas al ser la medida mayor el de 9m , la suma de los lados 4m y 3m es menor.
> I: Bien, ya escuchamos la respuesta de la maestra, ¿alguien más o algo qué decir?, ¿están de acuerdo?
> //Se suscita una pausa silenciosa mientras observan sus hojas de respuestas hasta que finalmente PS1 en servicio comenta su respuesta//

En el discurso de FP2 aparece la condición para la construcción de triángulos dados sus tres lados, por un lado puede suponerse que a partir de la situación propuesta lo haya descubierto, o bien, que la explicitación de este saber tiene relación con aquello que ha adquirido durante su formación; sobre esto último, encontramos que en el programa 2012, la construcción de triángulos y su congruencia son contenidos que se estudian en la Unidad I del curso sobre geometría. Para el estudio de este contenido se incluyen varias tareas entre las que destaca la construcción, específicamente hay una secuencia de tareas donde se explica cómo construir un triángulo con la regla y compás dados sus tres lados[77], al parecer, por la influencia de esa explicación, de inmediato FP2 utiliza esos materiales para trazar el triángulo.

En esta acción se activan las génesis instrumental y figural, al movilizar los componentes de visualización, espacio real y local, la construcción y los artefactos. Sus relaciones circulan en el plano Semiótico-instrumental y en la respuesta se hace presente (en parte) su dominio del contenido (componente referencial) que ha sido estudiado durante su formación. Luego de esa respuesta, al no llegar a la institucionalización del saber validada por todos los profesores, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, la formadora solicita su solución a otro de los profesores.

[77] La secuencia de tareas y su explicación puede consultarse en (Cedillo, Isoda, Chalini, & Cruz, 2012, pág. 52) y (Isoda & Cedillo, 2012), tomo IV vol. 1, págs. 79-85.

> PS1: Yo le puse que con estas medidas no se logran construir los triángulos, y es que, en uno de ellos una de las medidas es muy superior, sobresale mucho de las otras medidas, y las otras medidas son casi iguales, entre esas medidas es muy poca la diferencia, entonces prácticamente están casi del mismo tamaño, por lo que la otra medida abre mucho, pero los otros dos lados son pequeños, pues no se puede porque ese ángulo quedaría muy abierto. (Mientras lee su justificación, con las manos simula los ángulos que se formarían). Entonces sería algo parecido a lo que dice la maestra.

Puede advertirse que la justificación de cada profesor tiene relación con lo que estudió en su formación y en ocasiones también se manifiesta la estrategia de formación mediante la que lo estudió, como ejemplo encontramos el fragmento anterior, aunque PS1 no enuncia completamente la condición de construcción, hace énfasis en las medidas de los lados y se apoya en otro contenido matemático (los ángulos).

Si bien en el plan 97 el énfasis se centra en la parte didáctica, también se incluyen tareas geométricas, para esta condición en particular la secuencia de tareas propuesta plantea la interrogante*: "¿Qué condición considera que deben cumplir las medidas de los lados de un triángulo para poder construirlo?"*, se incluyen algunos ejemplos y ejercicios para responder a esta interrogante, pero enseguida, se incluye explícitamente la condición cuando se dice en el mismo texto: "Las medidas de los lados de un triángulo cumplen con la siguiente condición: La suma de las medidas de dos de sus lados, es siempre mayor que la medida del tercer lado" (Block, 1995, pág. 171) es decir, durante la revisión de los materiales, en esta tarea no se plantea explícitamente un momento de discusión de resultados, sólo se incluye la condición escrita textualmente en el material, probablemente es la razón por la cual FP1 no refiere dicha condición en la justificación.

En este punto de la sesión, la formadora ya no realiza cuestionamientos, espera que los otros profesores den sus justificaciones y coincidan con lo expuesto desde un inicio, sin embargo no sucede, por esta razón, como se puede ver en el siguiente fragmento, mediante otro tipo de cuestionamientos propicia que mencionen las medidas que consideran viables para la construcción, con la finalidad de complementar la condición antes expuesta, hecho que sucedió en algunos casos.

> I: Entonces, si no se pudo construir con esas medidas, ¿cuál es la mejor opción que le darían a Pablo para hacer la construcción?
> PS1: Como dice, hagamos el dibujo con los dos juegos de medidas disponibles y justifiquemos por escrito cuáles serían las más adecuadas, entonces yo puse que ninguna es adecuada por lo que sugiero que sea un triángulo rectángulo porque dice que lo quiere en el patio trasero pero no dice de qué forma está el patio o qué medidas tiene, en caso de que el espacio disponible tenga una esquina de 90°, puede aprovechar la esquina que tenga mayor abertura.
> I: ¿Alguien más?
> PS2: A mi ninguno me salió, el primero uno de sus lados es 2m y 3m, pero 3 no es la mitad de 7, por eso no se puede, y como dijiste que íbamos a darle una mejor opción, propuse otras medidas. Que fueron 6, 4 y 7.
> PS1: Yo también usé otras medidas, porque no pude con esas que se mencionaban.
> I: ¿Qué consideraron para anotar esas medidas que proponen?
> PS2: Es que si no tuviéramos la limitante del terreno podemos hacer una piscina con mayor amplitud, o en otro caso podemos hacer uno de los lados curvos.
> PS1: Pero ya no sería una piscina triangular.

Ante la imposibilidad de la construcción, los argumentos de los profesores aluden al espacio que ocupa el terreno y a su forma para sugerir otra figura geométrica para la piscina. Otras razones que se proporcionan son los tipos de triángulos, suponen que cada tipo de triángulo se construye de forma distinta, pero sus explicaciones siguen utilizando un lenguaje natural con pequeños esbozos de lo que vieron anteriormente sobre la clasificación de los triángulos de acuerdo a sus lados y ángulos.

Como parte de la configuración de un ETG, las intervenciones de la investigadora pueden llegar a potenciar o limitar el discurso del profesor, eso puede observarse en el episodio y particularmente en el siguiente fragmento, la manera en que la formadora continúa planteando cuestionamientos al no obtener la respuesta sobre las longitudes que espera, es una acción que busca que los profesores desplieguen otro tipo de discursos.

> I: ¿Tendrá algo qué ver la longitud de los lados?, ¿cómo influyen?, ¿qué tendríamos qué hacer con esas medidas para que Pablo pudiera construir la piscina triangular?
> PS2: Podemos aumentar las medidas de los lados, por ejemplo en este que es 2, 3 y 7, podemos disminuir el 7 para que sea como de 2.3 para que se pueda.
> PS1: O disminuirlas
> //Los profesores proponen disminuir o aumentar las medidas de los lados//
> I: ¿Y qué hubiera pasado si yo no les hubiera dado las medidas específicas y solamente les hubiera pedido que construyeran la piscina?, ¿qué deben considerar para que sea posible construir la piscina triangular?
> PS1: Las características del triángulo que quieres, por ejemplo si lo quieres con mayor espacio o si se va a formar un rectángulo.
> PS1: También hay que ver primero el área, si primero dijéramos tenemos 90m2, a partir de eso podemos construirla. Eso sería encontrar una única solución al problema, porque le decimos de cuánto es el área y ya después lo construye.
> I: Pero si consideramos que solamente les vamos a dar las medidas, ¿qué le modificaríamos para que se pueda construir la piscina?
> PS1: Las medidas que demos.
> FP3: Modificaría las medidas del más grande, cambié 2, 3 y 3.5
> FP2: Yo le modificaría 7, 3 y 6. Porque si sumo 7 y 3 es más grande que 6.
> I: ¿Siempre es posible construir un triángulo cuando se dan las tres medidas?, ¿por qué creen?
> P: No
> //Como no obtiene la respuesta, la formadora opta por plantear una tarea complementaria//
> I: De acuerdo con lo que hemos revisado no podemos, entonces por favor escriban algunas combinaciones de medidas con las que se pueda construir el triángulo.

Se puede observar que los profesores refieren otro concepto, el área, y suponen que con ello puede ser factible la construcción del triángulo, sin embargo la definición del área de triángulo no es un concepto que se considere adecuado incluir en este momento de la situación, por esta razón la formadora omite la discusión sobre el área para no perder el énfasis en la condición de construcción basada en los lados.

También se observa que, mediante su intervención, la formadora intenta recuperar los argumentos que sobre los lados se han desplegado anteriormente, incluso las interrogantes llegan a ser un tanto directas sobre la posibilidad de construir un triángulo dado sus tres lados. Sin embargo, ante la falta de la respuesta esperada, propone una actividad complementaria, que los profesores formulen distintas combinaciones con las que se pueda construir la piscina. Suspender el momento de la validación, es probable que no sea la acción más adecuada, pero la intención de la formadora es que los profesores se percaten de la relación entre las magnitudes de los lados propuestos y la posibilidad de que puedan formar un triángulo

Ahora, para establecer las combinaciones, algunos profesores utilizan artefactos (en su mayoría la regla solamente) para trazar algunos segmentos e intentar hacer el dibujo del triángulo. Una vez que terminan se les dice que pueden modificarlas al concluir la siguiente actividad, resolver un problema donde también se incluyen distintas combinaciones de medidas.

Hasta el momento, podemos decir que en los discursos iniciales de los profesores se revela el saber de referencia que se incluye en los programas de formación, pero sus discursos también manifiestan la escasa activación de la génesis discursiva para construir los argumentos que se sugiere en dichos programas y que ha sido motivo de discusión en capítulos anteriores.

5.3. LOS TIPOS DE PRUEBA EN EL ESPACIO PERSONAL DEL PROFESOR

Derivado de la actividad anterior, se gestionó un nuevo momento de validación porque la actividad complementaria que les planteó era similar a la que habían resuelto. El objetivo fundamental de estas actividades era propiciar el surgimiento de diferentes tipos de prueba, con la idea era observar cuáles utilizaban los profesores para justificar sus respuestas y la manera como evolucionaban. Durante la resolución de ambos problemas, a pesar de que se proporcionó el material (lo cual formaba parte del diseño de la situación de referencia), algunos profesores no los utilizaron para comprobar sus respuestas, otros, inicialmente emplearon los artefactos materiales (la regla, compás o popotes) para medir y verificar las posibilidades de los segmentos aunque, por lo general recurrían a la suma y resta de las longitudes de los segmentos para saber si se podía construir un triángulo.

En el caso de los profesores de educación primaria, podríamos pensar que no requieren una formación sobre la demostración, sin embargo, con base en la descripción de la tipología de prueba asumida en esta tesis que se ha señalado en capítulos previos, podemos entender que una prueba intelectual del tipo demostración tendrá que ver con el rigor matemático que se estudie en determinada institución escolar, por lo que se considera prudente desarrollar un trabajo matemático que propicie el uso de estas pruebas donde el futuro profesor haga uso del lenguaje formal sustentado en teoremas o propiedades. Con base en estas ideas se pueden caracterizar las pruebas utilizados por los profesores, y en algunos casos, el tránsito entre los diferentes tipos.

En lo que concierne al primer problema (la piscina de Pablo), en la figura 46 se puede apreciar la justificación de FP1 y la manera como se evidencia el nivel de razonamiento que tiene hasta el momento.

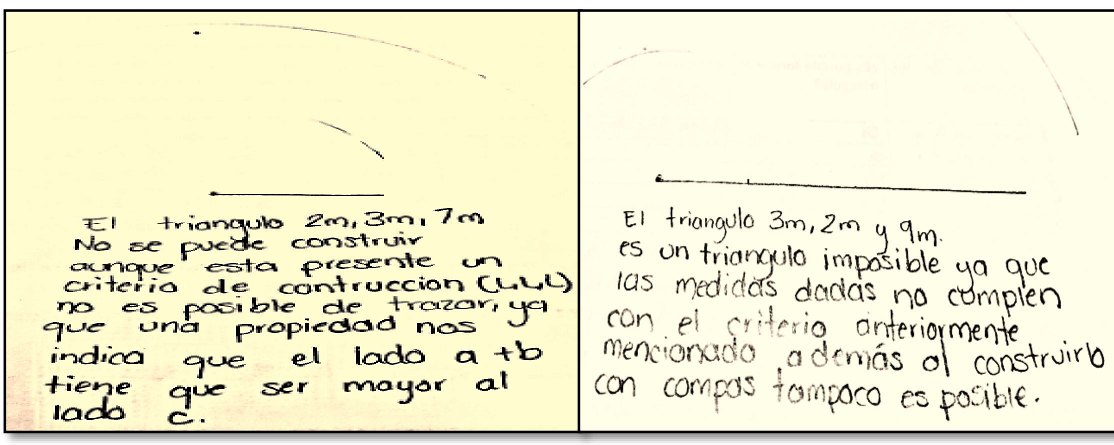


Figura 46. Justificación de FP1 del problema La piscina de Pablo.

Es posible apreciar (figura 46), en la primera justificación (izquierda), evidencia de que FP1 utilizó artefactos materiales (regla y compás) para realizar ciertos trazos que le permitieron justificar la imposibilidad de la construcción y aunque menciona un criterio relativo a los triángulos congruentes (L, L, L)[78] lo toma erróneamente como criterio de construcción. Para la segunda justificación (derecha), también utiliza artefactos (regla y compás) para verificar las posibilidades de la construcción y vuelve a hacer referencia al criterio (L, L, L) de congruencia. A pesar de ello, lo que hay que subrayar es que ya no utiliza un lenguaje natural en su argumento, sino que para expresar la existencia de una propiedad: *nos indica que el lado a+b tiene que ser mayor al lado c*. Cabe mencionar que dicho argumento apareció en el primer momento de validación grupal.

Lo que se observa en este caso entonces es una prueba de *experiencia mental*, es decir evoca ciertas propiedades y criterios, y mediante los trazos busca razones o pruebas de validez que justifiquen la propiedad que ha seleccionado. Este tipo de prueba se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante del objeto en particular. Estas "acciones interiorizadas se encuentran en la génesis de las operaciones necesarias para la elaboración de pruebas de un nivel más alto" (Balacheff, 2000, pág. 28) y se puede considerar viable que en las justificaciones subsecuentes se logre una prueba intelectual de demostración. Otra de las justificaciones, de FP3, también consideró algunos aspectos relacionados con los triángulos pero, como puede observarse en la siguiente figura, el trazado de los lados fue el medio de validación.

[78] Tercer criterio de congruencia de triángulos, lado, lado, lado, (L-L-L). Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de los triángulos son iguales los de otro respectivamente. (Correa, Muñoz, & Villegas, 2012, pág. 144)

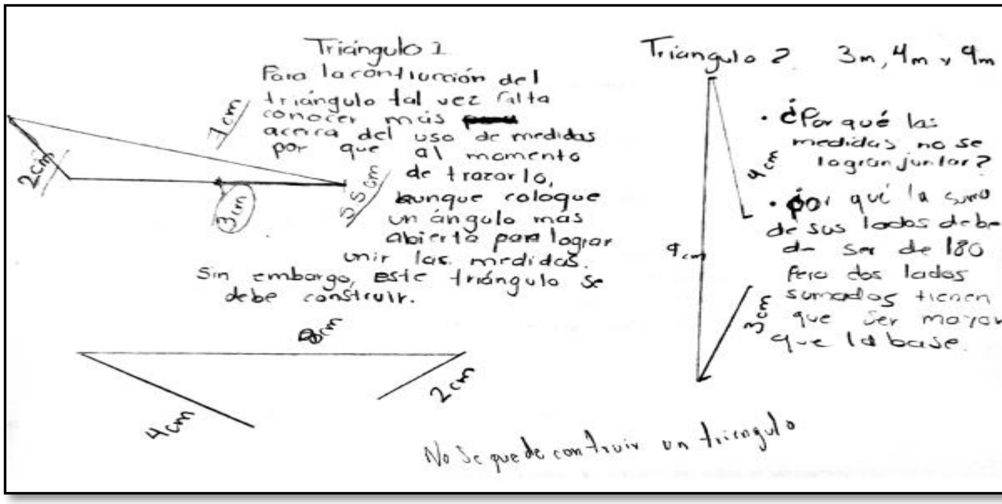


Figura 47. Justificación de FP3 del problema La piscina de Pablo.

Al igual que en el caso anterior, FP3 utiliza los artefactos (la regla) y evoca una propiedad conocida (la suma de los ángulos internos de un triángulo) que asocia erróneamente con los lados de los triángulos (ve figura 47), de esta manera combina esta propiedad con la que concierne a la relación entre la medida de los lados de un triángulo al escribir: *por qué la suma de sus lados debe ser de 180 pero dos lados sumados tiene que ser mayor que la base.* Esto último puede sentar las bases para referirse al criterio para la construcción de los triángulos dados sus tres lados, aunque no sea del todo correcto al señalar que existe una base. Esta prueba es de *tipo experiencia crucial* por la experimentación con los artefactos materiales. Mediante la experimentación, FP3 elige dos hipótesis, aunque solamente una es verdadera, la suma de dos lados debe ser mayor. Por lo tanto, al rechazar una hipótesis, no le es posible afirmar que la otra es verdadera, concluye entonces que no se puede construir el triángulo. En síntesis, por las propiedades enunciadas estas respuestas se ubican en el paradigma GI, ya que por un lado se refieren a la necesidad de usar el criterio que sustenta la tarea (GII) mientras por otro, admite el uso de instrumentos geométricos que es específico del GI.

Ambas justificaciones, de FP1 y FP2, buscan la validación mediante la construcción por medio de artefactos e instrumentos, considerando relacionarlas con los teoremas y propiedades como elementos de validación. Ahora, las justificaciones se orientan hacia una proposición que se quiere justificar y están centrados en el valor lógico de la proposición y no en su contenido, puesto que un razonamiento ligado al lenguaje no debe ser meramente perceptivo sino validado o refutado por la experiencia, o en este caso, por medio de la construcción. También se presentaron otras justificaciones (de PS1 y PS2) con ciertas similitudes entre sí. En la figura 48 puede verse la manera como PS1 utiliza la medición como recurso para verificar la construcción del triángulo.

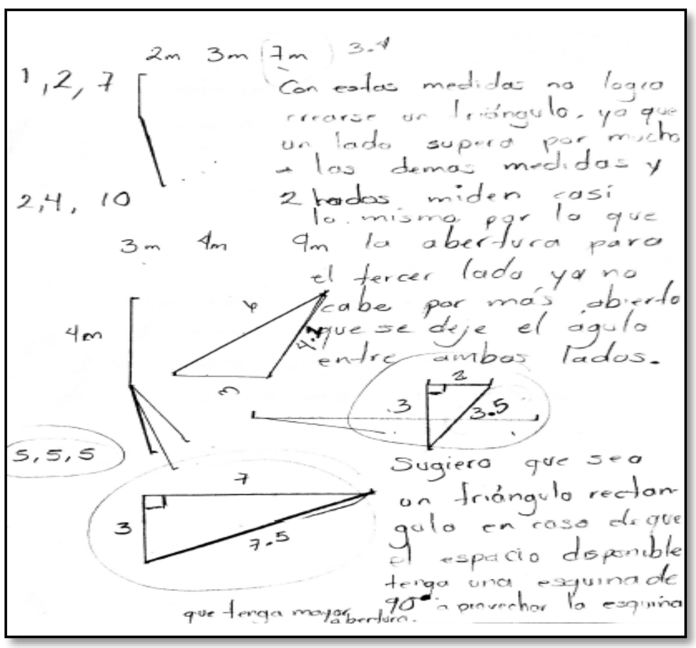


Figura 48. Justificación de PS1 del problema La piscina de Pablo.

Podemos observar (figura 48), que con el uso de la regla hace de la medición una experimentación basada en el ensayo y error, una vez que ha comprobado la imposibilidad de la construcción con las medidas dadas decide proponer otras que permitan dar una respuesta al problema. Puede decirse que su justificación se ubica dentro del paradigma GI por los elementos geométricos que menciona como el ángulo (*la abertura para el tercer lado ya no cabe más por más abierto que se deje... por lo tanto sugiero que sea un ángulo de 90º)* que decide incorporar a su solución. Es posible identificar además, que se está estableciendo una relación entre las medidas de los lados y los ángulos, lo cual alude a una relación con otras propiedades como las del triángulo rectángulo (y la medida de sus lados y ángulos).

En la siguiente figura (figura 49) puede verse una acción similar, también PS2 utiliza la medición para construir la prueba y al igual que PS1 el único instrumento que utiliza es la regla, a pesar ello, puede observarse que, cuando se percata de la imposibilidad del trazado, además de proponer medidas probables, rompe la consigna de la actividad al proponer un lado curvo.

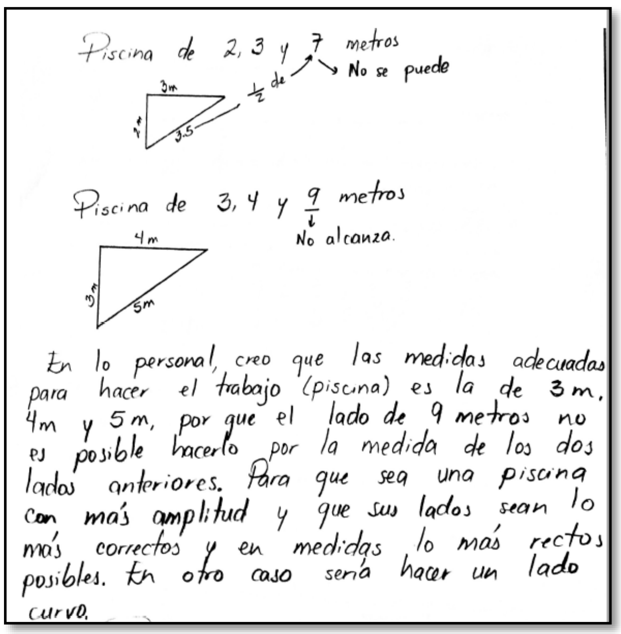


Figura 49. Justificación de PS2 del problema La piscina de Pablo.

Ambas justificaciones (figuras 48 y 49) se basan en la medición de los lados o ángulos, lo que permite afirmar que son pruebas pragmáticas del tipo *empirismo ingenuo* propias del paradigma GI, puesto que verifican la afirmación a partir de la medición que realizan en los triángulos y además la lectura de los datos y el objeto geométrico siempre se desarrollan con el dibujo, es decir, la visualización juega un importante rol. Este tipo de prueba representa una de las primeras formas de generalización, debido a que en un principio se centran en un ejemplo en particular, pero sientan las bases para despersonalizar sus características y posteriormente construir una generalización de las propiedades y criterios de los triángulos. En un sentido diferente se encuentra el caso de FP2 quien menciona parcialmente la condición para la construcción de triángulos dados sus tres lados, ella sostiene:

> Justificación de FP2. La piscina de Pablo
> Ninguno de los dos juegos de medidas permite la construcción de la piscina, ya que al utilizar como lado base la medida mayor, las medidas de los otros dos lados en suma deben ser mayor a esta medida para que el triángulo pueda formarse, y en esta situación no sucede así, ya que en el caso de las primeras medidas, tomando como lado base el de 7m, y sumando los otros dos lados 2m más 3m, suman 5m y este es menor al lado mayor y en el caso de las segundas medidas al ser la medida mayor el de 9m , la suma de los lados 4m y 3m es menor.

Lo relevante en este caso es que FP2 no utilizó instrumentos, aunque movilizó el componente construcción a través de artefactos simbólicos (la condición de construcción) con lenguaje formal. La justificación de FP2 es una prueba de tipo *cálculo sobre el enunciado,* puesto que su afirmación es totalmente independiente de la experiencia (que en este caso sería la construcción). Las pruebas de este tipo no incluyen ejemplos ni dibujos y utilizan el razonamiento con propiedades explícitas, no obstante que no todas sean ciertas, como en este caso que se enuncia la condición al mencionar que un lado debe ser mayor a la suma de los otros dos, pero es importante mencionar que para la existencia de los triángulos, hay que señalar que la medida de ese lado, debe también ser menor a la diferencia que exista entre los otros dos. Puede considerarse que la justificación de FP2, es lo más cercano a una prueba tipo demostración ya que la validación de la construcción está esencialmente vinculada al referente, más que a los artefactos o al espacio local y real.

Se puede concluir que, al parecer, en este problema (la piscina de pablo) los tipos de prueba utilizados por los profesores se relacionan con la manera en que se abordó el contenido en los programas de formación, es decir, si señalamos con Balacheff (1987, citado en Montoya (2014), que el uso de la demostración depende del status social que le da el profesor en servicio, entonces, mientras que los futuros profesores enuncian propiedades para sus justificaciones, los profesores en servicio proponen entre las soluciones la medición como recurso para la construcción de triángulos, probablemente porque en su formación es este el tipo de justificaciones que se utilizaban para validar o derivado de la experiencia que han tenido en el aula con estos temas. En este sentido señala Balacheff (1987, citado en Montoya, 2014) que, "la concepción de rigor matemático es un implícito que depende de la institución escolar, y su apropiación por parte de los alumnos requiere de una construcción cognitiva especial, no espontánea, y que debería ser enseñada" (pág. 233).

Ahora, las pruebas analizadas hasta aquí, son producto del trabajo individual de los profesores, pero, una vez que se realizó la discusión grupal sobre ellas se les pidió que resolvieran el segundo problema "Los popotes"[79], en éste la mayoría de los profesores ya no utiliza los instrumentos para la construcción, por lo general emplean los razonamientos consensuados en la discusión grupal para la verificación de las combinaciones de medidas de lados que hacen posible la construcción del triángulo. Solamente en una de las justificaciones (ver figura 50), permanecen la construcción del triángulo y la condición de construcción como fuente de validación.

[79] Recuérdese que en el problema "Popotes" se les mostraban popotes de medidas 2, 3, 4, 5, 6 y 8cm y se les pedía determinar las combinaciones de tres popotes con las que se podía construir un triángulo.

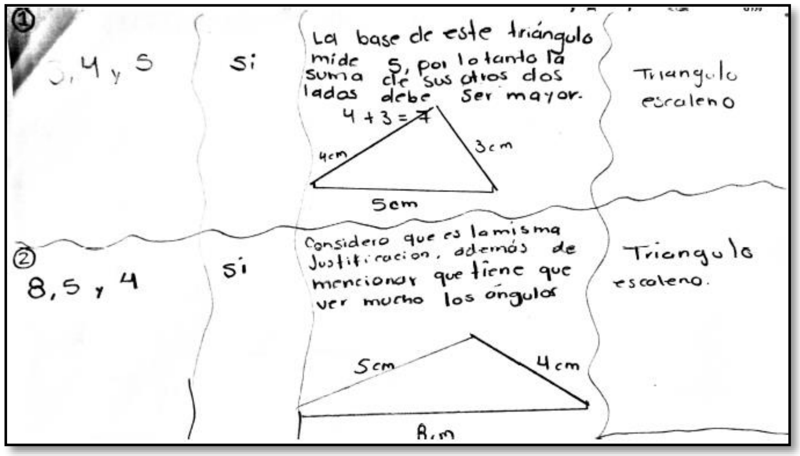


Figura 50. Justificación de FP3 del problema Los popotes

En la figura 50 se observa que FP3 hace referencia al criterio sobre la medida de los lados, pero traza el triángulo empleando los instrumentos como medio de verificación. Esta prueba es del tipo *ejemplo genérico* porque justifica la afirmación estableciendo un ejemplo concreto como representante de todos los objetos que pertenecen a dicha afirmación. Las razones de validez se centran en la transformación de un objeto (en este caso lo construye) para que sea un representante característico de determinada clase.

En otros casos se utiliza el razonamiento construido en la discusión grupal como fundamento de la prueba, es decir, la aceptación de la relación entre las longitudes de los lados como criterio que posibilita la construcción del triángulo. La figura 51 muestra el ejemplo de dos justificaciones de este tipo.

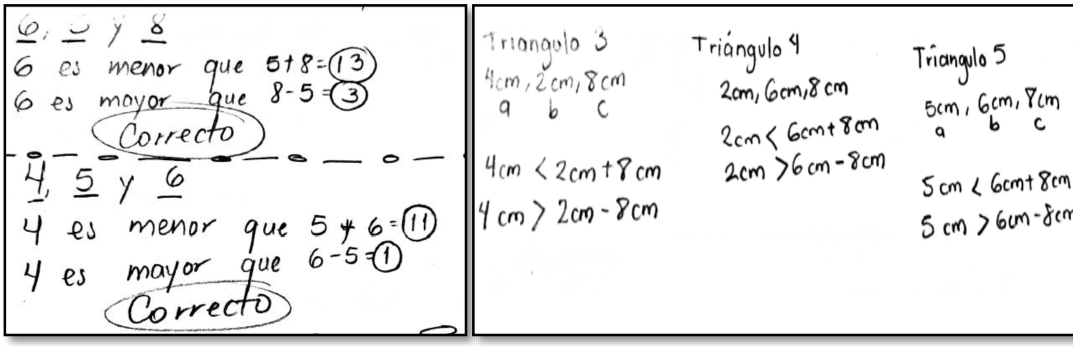


Figura 51. Justificación de PS2 y FP1 del problema Los popotes.

Además, en la figura 52 podemos apreciar una justificación del mismo tipo de las anteriores (figura 51), solamente que, a diferencia de ellas, en ésta se describe el proceso seguido.

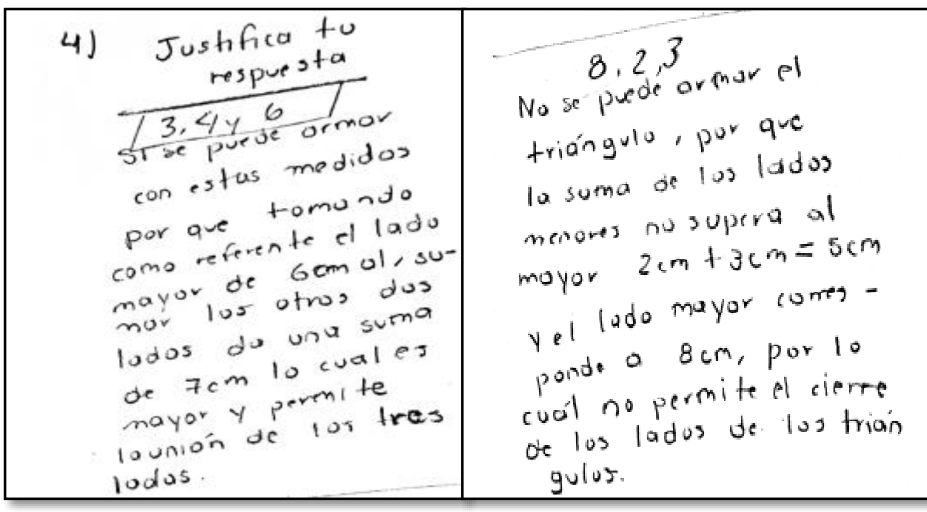


Figura 52. Justificación de FP2 del problema Los popotes.

Estas pruebas pueden considerarse de tipo *experiencia mental* ya que el razonamiento de los profesores se desliga de un representante en particular (los tipos de triángulo o el área del terreno) para expresarlas a partir de las acciones interiorizadas. Favorecer la aparición de este tipo de pruebas en el proceso de formación de los profesores constituye la base para que ellos, posteriormente realicen demostraciones matemáticas. Por lo tanto, es probable que el momento de la validación grupal haya permitido consolidar el conocimiento matemático del profesor al propiciar el uso de la prueba de demostración. Hasta el momento, una vez que se han estudiado las pruebas de los profesores, se observa un tránsito entre las diferentes pruebas presentadas en los dos problemas, concluyendo además que los momentos de validación permiten desarrollar el razonamiento geométrico.

5.3.1. Profesores, génesis discursiva e institucionalización del saber.

En correspondencia con los propósitos de esta situación de referencia, los lapsos de validación resultan fundamentales tanto para los procesos de pruebas de los profesores en tanto aprendices de geómetra, como en la reflexión sobre la importancia de activar la génesis discursiva en el ETG idóneo que habrán de desarrollar con los niños. Sobre el momento de la validación, Balacheff (2000) afirma que,

> El solo hecho de proponer un problema a los estudiantes no es suficiente para garantizar que pongan en marcha un proceso de validación. En una observación sistemática que se hizo a un gran número de estudiantes resolviendo problemas de geometría, Audibert (1982) señala que son muy pocos quienes realmente se interesan en un proceso de producción de prueba, y aún menos los que realizan una demostración [...] lo verdaderamente importante para nosotros son las características de las situaciones que determinan estos aspectos. (pág. 15)

Es por la razón anterior que se considera importante averiguar lo sucedido en los momentos de validación que se organizaron con los profesores luego de que encontraron las combinaciones posibles para resolver el problema de los *Popotes*. Como se puede observar en el siguiente fragmento, para iniciar la discusión se registraron algunas combinaciones en el pizarrón, separadas en posibles y no posibles.

> I: ¿Qué observan en estas combinaciones?, ¿qué similitud tienen las longitudes?, ¿por qué creen que con estos sí se pudo y con estos no?, ¿qué anotaron en sus justificaciones?,
> FP3: Lo que estábamos diciendo en un principio maestra, que cuando tienen un lado más grande se dificulta unir los otros dos.
> PS1: Porque la abertura del ángulo es mucho mayor.
> I: Entonces, cuando es demasiado grande, ¿y si les pido que construyan uno con las medidas 7, 4 y 3?

> PS1: No se va a poder
> I: ¿Por qué?
> FP2: Es que yo sigo con lo mismo maestra, tomo el lado mayor que es el 9, luego tomo los otros dos y los sumo, el 3 y el 4, y me da 7, entonces sí se puede porque tiene que ser igual o mayor, lo mismo hago en el 2, 4 y 8.
> I: ¿Tiene que ser el lado mayor?
> FP3: Sí
> I: A ver si lo escribí bien, el lado mayor debe ser igual o mayor que la suma de los otros dos. ¿Qué más?, ¿estamos de acuerdo?
> //La formadora escribe en el pizarrón lo dicho por FP2//

En el fragmento identificamos la idea construida hasta el momento, la cual es que uno de los lados debe ser mayor a la suma de los otros dos, sin embargo los profesores creen que esa condición es suficiente y que se aplica siempre al lado mayor, lo cual no es del todo correcta, por esta razón la formadora propone una combinación distinta con la que es posible construir un triángulo (7, 4 y 3), pero que no cumple con la condición enunciada, este contraejemplo ayuda a determinar que la respuesta inicial es falsa, al parecer, su objetivo es que los profesores reflexionen sobre la invalidez de la misma, porque esa circunstancia debe considerarse no sólo para el lado mayor sino para cualquier lado del triángulo, y siempre debe ser mayor no igual. De acuerdo a lo expuesto en la tipología de prueba de Balacheff (2000), en la validación se refutan los argumentos para determinar si son falsos o verdaderos a partir del análisis y discusión grupal, en este caso podemos señalar que el contraejemplo lo emplea la investigadora como un elemento para este proceso de validación. Dado lo anterior, podemos observar en el siguiente fragmento, la manera como la formadora sigue cuestionando a los profesores sobre lo mencionado FP2 acerca de la relación entre la longitud de los lados.

> PS1: Como sí se puede usar la misma medida varias veces, yo tengo otro ejemplo, 2, 2 y 2, pues sí se puede porque es un equilátero, y si dejamos dos lados de 2, entonces le podemos ir agregando 3, 4, 5, etc...
> I: ¿Entonces sería dando las medidas de dos lados?
> PS1: Sí, dadas las medidas de dos lados se puede construir un triángulo isósceles. Entonces, así le hice, ya nada más consideré un lado mayor, pero no tan mayor, por ejemplo si tengo un lado de 2 que no sobre pase la suma de los dos lados.
> I: Pero en este caso es con la medida de los tres lados.

FP2: Pero de 5 ya no
I: ¿Por qué de 5 ya no?
PS1: Sí se puede
FP2: No, no se puede, porque la suma no es igual ni menor.
PS1: Ah, no se crea maestra no se puede, porque 2 más 2 son 4 y el 5 ya no va.
FP1: Es que depende de los criterios de construcción que se nos den para poder generar el triángulo, aquí lo que vimos es que si te dan las medidas de los tres lados, no siempre se puede construir, por lo que acaban de decir, porque el lado mayor tiene que ser menor o igual a la suma de los otros dos. Pero si nos dan la medida de dos lados, ahí nos queda libre, puede ser como los que pusieron ahí, pero si nos ponen la restricción de que el vértice debe ser de 45°, es decir, el ángulo. Es lo que decía hace rato la maestra (PS1), que si nos daban la medida de los lados podíamos hacer el isósceles. Ese es otro criterio.
FP2: Es que ya le intenté el de 2, 2 y 5 pero no se puede.
PS1: Sí, es lo que dijo la maestra, ese no se puede.

Como se puede apreciar, FP1 refiere el criterio de construcción dados dos de sus lados[80] y propone un triángulo isósceles. A partir de esta afirmación, señala que puede "aumentar" el lado desigual para seguir haciendo otras combinaciones, aunque lo dicho se puede relacionar también con el ángulo como referente para la medida de los lados, se retoma el saber de referencia cuando en la discusión se observa como FP1 argumenta su postura al mencionar el criterio de construcción al que se refiere. Entonces, una de las condiciones necesarias para que un problema didáctico permita que el aprendiz de geómetra argumente su respuesta, es que esté presente un determinado saber de referencia. En este caso, FP1 logra argumentar porque conoce, aunque relativamente, los criterios de construcción de los triángulos, esto es, porque tiene un cierto saber de referencia.

El momento de la validación continúa y como se puede apreciar en el siguiente fragmento, mediante las conclusiones que el grupo va construyendo, la formadora retoma lo que concierne a la medida de los tres lados porque considera necesario entablar un proceso de prueba para la solución de un problema.

[80] El criterio completo es *Construir un triángulo conocidos dos lados y el ángulo formado por ellos* por lo tanto falta que se mencione el ángulo para completar el criterio.

I: Como dijo la maestra (FP1), en este caso es cuando se da la medida de los tres lados. Pero, ¿Qué pasaría en el caso del equilátero, que todos son de mismo tamaño?
FP1: Es que no tiene que ser el mayor, es el lado que sea. De lo que dijo la maestra (FP2), un lado debe ser menor de la suma de los otros dos, pero cualquier lado.
I: A ver, ¿puede dar un ejemplo?
FP1: En este (señala 4, 3 y 6), si tomo cualquiera de los lados, por ejemplo el 6 y sumo los otros dos, este lado es menor.
PS1: Pero en este ejemplo que yo puse no podía, no me sale, porque dicen que debe ser cualquier lado, yo tomé el lado 3, los otros lados son 4 y 2, la suma es mayor, pero de todos modos no se puede, ya le intenté hacer con la regla.
I: En ese caso que dice la maestra, ¿qué opinan?, les parece que revisemos los que tenemos en probables y no probables, y observemos que será entonces lo que no hemos observado en ellos.
//Los profesores, analizan varios ejemplos//

El grupo está muy cerca de validar la condición de construcción no adecuada, al mencionar que: *la suma de dos de los lados debe ser menor o igual al tercero*; en la lógica de refutar (demostrar la falsedad del argumento) mediante la búsqueda de contraejemplos (un ejemplo que no cumpla con la condición expuesta), se puede observar en el siguiente fragmento el análisis de otras combinaciones con la finalidad de comprobar la pertinencia de las mismas y que permitirá a los profesores observar que la condición que han validado no se cumple en todos los casos.

FP1: Ya revisé los ejemplos y me fijé que un lado debe ser menor que la suma de los otros dos, pero también debe ser más chico, por ejemplo en este de 6, 8 y 5. Tomé el 5, sumé el 6 y el 8, me dan 13, entonces es menor que la suma, pero también me fijé que el 5 es un número más grande que la distancia que hay entre el 6 y el 8.
FP3: A mí me pasó igual, también me fijé en eso, que cuando el número es más grande si se puede. Ya lo intenté con otras medidas y siempre pasa lo mismo.
I: Entonces, ¿qué le agregaríamos a lo que ya dijimos para que aplique en todos los casos?
FP1: Pues que cuando me dan tres medidas, cualquier lado debe ser menor que la suma de los otros dos, pero lo que mida ese lado también debe ser menor que los otros dos.
I: Si gustan verifiquen las combinaciones que hicieron para saber si aplica siempre lo que nos dice la maestra.
//Los profesores comprueban las combinaciones sin utilizar instrumentos, sólo aplicaron el criterio)

Al revisar de manera individual las combinaciones, FP1 y FP2 concluyen que no necesariamente debe ser el lado mayor el que cumpla tal condición, sino que cualesquiera y que además este lado debe ser igual o menor que la suma de los otros dos lados pero debe ser mayor que la diferencia entre los otros dos lados. Es probable que dicha reflexión haya surgido al movilizar el referencial (componente epistemológico), pues aunque parcialmente, ambas habían mencionado la condición desde el inicio de la actividad y pudieron "completar" el enunciado al observar la combinación que contradecía la condición incompleta. Puede observarse que luego de enunciarse la condición adecuada, la formadora no la pone a discusión pero en cambio propone a los profesores que comprueben si aplica en todos los casos.

> I: Bien, ¿y cómo lo pudieron comprobar?
> FP3: Pues sumé los lados y luego utilicé la regla y el compás para comprobarlo.
> PS2: Yo usé las reglas, ya ni los popotes recorté.
> FP2: Yo usé el compás
> I: Bien, ¿por qué usó el compás maestra y cómo lo usó?
> FP2: Es que recuerdo que nosotros vimos que para construir un triángulo usábamos la regla y el compás, tomábamos un lado cualquiera, trazamos una línea de esa medida, luego abríamos el compás del tamaño de otro de los lados y trazábamos un arco, lo poníamos en un extremo de la primera línea y luego hacíamos lo mismo con la medida del otro lado, y donde se cruzaran ahí los juntábamos para formar el triángulo.
> I: ¿Quién más lo realizó como la maestra?
> PS1: Pues sí, pero si se da la medida de un ángulo pues que use un transportador. Pero sí, me acuerdo que con eso se hace el triángulo. Yo no hice lo mismo, no usé el compás, solamente la regla.
> FP1: Es que de acuerdo a lo que vimos, donde nos dieron los tres lados, haríamos lo mismo que la maestra (FP2) para construir el triángulo.
> I: Bien, eso fue el uso que ustedes le dieron para construir el triángulo y también lo usaron para verificar su se podían construir los triángulos con las medidas que teníamos. Pero, ¿si no pudiéramos usar los instrumentos para comprobar si se puede construir el triángulo, de qué otra manera podemos justificar esto?
> FP1: Pues con lo que dijimos, revisar que cualquier lado cumpla la condición para que dados tres segmentos de recta se pueda construir un triángulo, que la medida de cualquiera de los segmentos sea menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia.

De acuerdo con Balacheff (1987), en el razonamiento geométrico debe considerarse la interacción social del individuo porque el contexto posibilita la discusión y los argumentos de los sujetos. Por ello la importancia de propiciar la validación para argumentar y convencer mediante el discurso, solicitar un discurso de prueba dependerá de la institución escolar y el paradigma involucrado en la tarea geométrica. En congruencia con lo que este mismo autor plantea acerca del papel de la comunidad en la aceptación o el rechazo de un razonamiento, podemos asumir que en el seno de esta situación de referencia, a la enunciación final de la condición se le puede llamar demostración.

Obsérvese en el fragmento que FP2 requiere la técnica de construcción que ha adquirido en la formación para comprobar la pertinencia de las medidas y si bien la usa como recurso para validar, como se pudo ver líneas atrás, no fue la base de su razonamiento. También se observa que la formadora solicita argumentos sobre el uso de instrumentos, su intención es conducir la reflexión hacía la conclusión de que no siempre son necesarios en el proceso de prueba y hacer énfasis en la demostración como validación que se apoya en conocimientos instituidos. Al final, a manera de institucionalización surgida de la reflexión del colectivo y en consenso, no solamente como el discurso de una sola profesora, aparece la condición de existencia del triángulo en voz de FP1: *la medida de cualquiera de los segmentos sea menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia.* Complementando así, la condición de construcción que se mencionó al inicio de la tarea implementada. En este caso el argumento o prueba es socialmente aceptada y el colectivo le otorga validez. En conclusión, esta es una prueba del tipo demostración y el hecho de haber llegado a ella por medio de la refutación en el colectivo, es lo que otorga el valor de su importancia en esta situación de referencia.

Una vez que los profesores habían culminado su momento de validación como aprendices de geómetra, era necesario también que reflexionaran esos momentos como profesores de niños, esto es, que recapacitaran sobre los intervalos de validación y sobre la evolución de los procesos de prueba como una parte fundamental de trabajo con la geometría, que habrían de promover con los niños. Una parte de tales razonamientos se pueden observar en el siguiente fragmento.

> I: En las actividades donde les he pedido que resuelvan problemas, ¿qué consideran que ha sido lo que más se les ha complicado?
> FP3: Creo que cuando nos pide que digamos cómo le hicimos, o recordar los contenidos.
> I: ¿Consideran que era necesario que analizáramos las respuestas entre todos?, ¿por qué?
> PS2: Sí es importante, porque ya cuando estuvimos platicando entendí y modifiqué mis respuestas.
> PS1: Sí, porque como dije hace rato, hay cosas que las maestras saben y yo no, y otras que yo sé pero ellas no.
> FP3: Sí es necesario maestra, debemos hacerlo nosotros y también con los niños, porque luego por eso algunos se quedan con las ideas equivocadas.
> I: ¿De qué manera propician estos momentos con sus alumnos?, ¿será necesario que siempre todos aprendan el contenido que están trabajando?
> FP1: Cuando entre todos revisamos lo que hicieron. Sí es necesario que lo aprendan, aunque a veces no todos lo logran y sobre todo en multigrado, porque son demasiados contenidos.
> PS: Pues yo los pongo a trabajar casi siempre separados, cuando puedo los junto, pero no siempre hacemos la revisión como se debe.
> FP2: Es muy importante que los niños digan sus respuestas y entre todos lleguemos a la conclusión porque así todos van a aprender o por lo menos la mayoría.
> I: ¿Y cuándo consideran que la mayoría o todos los niños aprenden los contenidos de geometría?
> PS2: Cuando pueden usar o mencionar el contenido que se está trabajando, de la manera que puedan por ejemplo con mis niños pequeños usamos mucho material.
> FP2: Pues cuando son capaces de decir el contenido o resolver problemas usando lo que aprendimos.

Dos puntos destacan en este análisis, el reconocimiento de que los momentos de validación son también oportunidades para aprender con y de los otros, tal es el caso de PS1 al expresar: *Sí, porque como dije hace rato, hay cosas que las maestras saben y yo no, y otras que yo sé pero ellas no;* y el reconocimiento de que estos momentos son necesarios también en su rol de profesores de niños, por ejemplo cuando FP3 señala: *Sí es necesario maestra, debemos hacerlo nosotros y también con los niños, porque luego por eso algunos se quedan con las ideas equivocadas*. Otro aspecto que se puede subrayar es que los profesores reconocen que tuvieron dificultad para mencionar la condición que se esperaba, y que algo similar ocurre con los alumnos.

Para finalizar con este análisis, se han mencionado en apartados anteriores las distintas posibilidades que brinda el trabajo colaborativo entre maestros en servicio y futuros profesores. Para reflexionar sobre las diferencias y similitudes respecto de los conocimientos que poseen y de la experiencia en el aula, en el siguiente fragmento se observa cómo, de forma espontánea, son los mismos profesores quienes recurren a este argumento.

> PS2: A mí no me tocó que me dieran clases así de matemáticas. Noto la diferencia que a ustedes les enseñan los conocimientos geométricos. //refiriéndose a las profesoras en formación//
> PS1: No, conmigo tampoco, se supone que eso yo lo debía saber desde la preparatoria, porque en las clases de la Normal no nos enseñaban esa parte. Nada más veíamos cómo enseñar, la didáctica. Si teníamos dudas sobre los temas de matemáticos, simplemente nos ponían a investigar.
> FP1: Nosotros sí vemos los contenidos geométricos en las clases.
> PS1: Aunque nosotros somos más prácticos porque como no sabíamos todas esas cosas, no nos da miedo experimentar y los jóvenes que estudiaron en este plan no se atreven.
> FP1: Yo creo que estos momentos son buenos para discutir porque podemos aprender lo que ustedes vieron y compartir. Porque la verdad ustedes son los que más saben y nosotros todavía nos falta mucha experiencia.
> PS1: Yo sugiero que esto serviría, pero que lo hagamos con los jóvenes practicantes, que nos dieran un tipo taller donde todos trabajáramos juntos. Por ejemplo para planear, porque ellos han visto cosas diferentes a lo que nosotros aprendimos pero nosotros hemos trabajado con diferentes niños y hemos aprendido otras cosas.

En el fragmento anterior, entre las reflexiones más relevantes se encuentra la importancia que los profesores en servicio dan al trabajo conjunto con futuros profesores. En esta manera de trabajar, entre las diferencias más significativas observadas se encuentra el hecho de que los tipos de prueba iniciales de las futuras profesoras iban encaminadas a la enunciación de un lenguaje formal empleando propiedades y criterios, mientras que los profesores en servicio utilizaban un lenguaje natural. Sin embargo, este hecho fue evolucionando en el mismo espacio de formación hasta lograr que, independientemente de su formación, todos los profesores transitaran hacía pruebas de tipo intelectual. En contra parte, la similitud más relevante es el hecho de que todos activan las génesis instrumental y recurren al uso de artefactos para buscar razones de la validación expuesta. Finalmente, para concluir sobre la génesis discursiva puede decirse con Gómez-Chacón et al que,

> La génesis discursiva de la prueba matemática utiliza las propiedades del sistema de referencia teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y para una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental. En la génesis discursiva de la prueba, las propiedades utilizadas en el razonamiento matemático dan el significado. El propósito de esta génesis es proceder a la validación del proceso bidireccional: un razonamiento discursivo apoyado en las propiedades del referencial teórico y de otra, la identificación de propiedades y definiciones que se deben incluir en el marco de referencia después de ser realizado un tratamiento instrumental o semiótico. La génesis discursiva de la prueba no agota todo lo relativo a las operaciones discursivas en matemáticas, donde es necesario distinguir tres niveles: la denominación de los objetos, el enunciado de propiedades y, finalmente, la deducción. La definición o la designación de los objetos es más una cuestión de registro del lenguaje y entra más en la dimensión puramente semiótica del trabajo matemático (Gómez- Chacón, Kuzniak, & Vivier, 2016, pág. 10).

Es así, como se pudo dar cuenta de la manera en que se activó la génesis discursiva mediante los momentos de validación con los profesores, asociando los componentes de prueba y referencial. En la perspectiva teórica de los ETG se consideran dos aportes sobre el razonamiento, en el primero de Duval, se dice que el razonamiento puede realizarse de dos maneras, desde las inferencias explícitas ligadas al lenguaje (lo discursivo) y desde los actos de exploración (acciones y manipulaciones), entonces el razonamiento se encuentra entrelazado al discurso del sujeto que busca construir el saber geométrico. En lo que sigue, se podrá identificar la manera en que lo desarrollado en el ETG personal del profesor se relaciona con lo que propone en el diseño de sus clases para favorecer el razonamiento geométrico con sus estudiantes.

CAPÍTULO VI
EL ESPACIO IDÓNEO DEL PROFESOR. EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EN EL DISEÑO DE LA CLASE.

El ETG Idóneo configurado por el profesor, se constituye a partir de la interpretación que realiza del Espacio de Referencia y del Espacio Idóneo propuesto en los textos escolares, pero además, va a depender del Espacio Personal del profesor. Es decir, una vez que el profesor ha planificado el espacio idóneo para trabajar en el aula, en los problemas que planteé a los niños denotará el trabajo matemático que ha desarrollado en su espacio personal. Por lo tanto, podemos señalar que un Espacio Idóneo efectivo, no es invariable y se modifica continuamente durante su desarrollo.

Del mismo modo, como se ha mencionado, para que el diseño del espacio sea realmente efectivo, el profesor debe tener conciencia de la naturaleza del trabajo matemático así como del paradigma puesto en juego, puesto que esto influirá en el desarrollo de la clase y sobre todo (en el caso de los grupos multigrado), en la activación de la génesis discursiva a partir de los tipos de prueba que solicitará a cada uno de los niños conforme al nivel cognitivo o grado escolar.

En el capítulo quinto se ha analizado el rol de aprendiz del profesor al resolver las situaciones matemáticas y ha permitido identificar el nivel de conocimiento matemático que poseen, sin embargo, tal como se describió en el proceso de experimentación (capítulo IV), también se le plantearon ciertas tareas didácticas, donde la discusión en colectivo fungió como detonante para el análisis y configuración del diseño idóneo. En esta siguiente fase de la experimentación las tareas didácticas se organizaron en dos bloques para su aplicación y análisis. El primero[81]tiene que ver con el nivel de apropiación que lograron los profesores mediante el análisis de los

[81] Éste se realizó después de que se leyó y discutió en colectivo el marco teórico del ETG.

materiales escolares además de la situación de referencia; en el segundo inicialmente se incluye, una serie de cuestionamientos que permite observar las adecuaciones que sugieren los maestros, enseguida, mediante el trabajo en equipo, se modifican las situaciones de referencia revisando colectivamente el programa escolar, todo esto con la finalidad de diseñar su plan de clase. En razón de lo anterior, consideramos importante retomar lo que menciona Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016) quienes señalan que,

> ... el Espacio Idóneo debe responder a dos condiciones: por una parte, posibilitar el trabajo en el paradigma correspondiente a la problemática considerada; de otra parte, estar bien construido, en el sentido en que sus diferentes componentes están organizadas de manera válida [...] La elección y la organización de las tareas propuestas a los alumnos por los profesores son esenciales en la constitución del ETM idóneo. Ofrece la posibilidad de resolver, de manera adecuada, lo que se les propone; es decir, conforme a las expectativas institucionales descritas de manera más o menos explícita en el ETM de referencia. (págs. 12, 13)

Dicho brevemente, a partir de las reflexiones y conclusiones a las que se lleguen en el proceso de diseñar el espacio idóneo, habremos de identificar la manera en que los profesores transponen los saberes adquiridos, tanto en la organización de los componentes del ETG en las actividades planeadas, como en la selección de las tareas que proponen en su plan de clase. Los resultados más relevantes componen el presente capítulo.

6.1. APROPIACIÓN TEÓRICA Y ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES

Como parte de las tareas didácticas se proporcionó a los profesores una síntesis de las ideas principales del marco teórico relativo al ETG, la finalidad era revisar los elementos teóricos que éste plantea. Después de una lectura individual, se llevó a cabo una revisión del texto en pequeños equipos y finalmente de manera grupal se llevó a cabo la institucionalización de los elementos teóricos fundamentales. Para el desarrollo de este proceso se destinaron dos sesiones con una duración de una y dos horas respectivamente. Para fines de esta tesis, no se consideró necesario integrar esta revisión del texto, debido a que lo esencial era identificar el nivel de aprehensión una vez que lo emplean para analizar y diseñar el espacio idóneo. Por lo tanto, una vez concluido el estudio de los conceptos centrales del marco teórico, se procedió a analizar la presencia de los elementos teóricos en los textos escolares de la educación primaria y en las situaciones de referencia que resolvieron, es decir, a analizar el potencial del espacio idóneo propuesto.

Primero, dichas discusiones se trabajaron en dos equipos, ambos revisaron la primera situación de referencia, pero también se propuso que cada uno explorara un determinado grado escolar, la selección de los grados fue decisión de la formadora tomando en cuenta el estudio a los textos escolares realizado en el capítulo III. Se seleccionó el quinto grado puesto que en los hallazgos se observó era el que contenía mayor cantidad de contenidos relacionados con el triángulo; en el caso de los grados inferiores se optó por el primer grado ya que en este grado no se hace énfasis en el dominio de vocabulario geométrico, sino que se deja a la responsabilidad del docente. Los equipos fueron conformados teniendo en cuenta que cada uno incluyera un profesor en servicio, las profesoras en formación se distribuyeron por afinidad, así, la revisión del libro del maestro de quinto grado quedó a cargo de PS1, FP1 y FP2 y la del libro de primer grado para PS2 y FP3.

Para facilitar el análisis se diseñó un formato que centra la atención en los elementos principales de la perspectiva teórica. Este formato contenía los mismos elementos para el análisis de ambos documentos (la situación y los libros), la única diferencia era que para la situación el primer apartado decía: *Propósito y contenidos de la situación didáctica*; mientras que para los libros establecía: *Propósito del trayecto o lección (nombre, eje, tema, aprendizaje esperado)*. La figura 53 muestra el formato mencionado.

Componentes del plano COGNITIVO	Actividad (es) de Visualización	
	Actividad (es) de Construcción	
	Actividad (es) de Prueba	
Componentes del plano EPISTEMOLÓGICO	Espacio real y local	
	Artefactos	
	Referencial	
Génesis activadas en la situación		
Paradigma que predomina y por qué		
Fases de circulación entre planos		

Figura 53. Formato para el análisis de la situación y los textos escolares. Fuente: Elaboración propia.

Entre los elementos que habrían de identificar estaban los componentes de los planos cognitivo y epistemológico, las génesis activadas en las distintas tareas propuestas y el paradigma que predomina en ellas. También se consideró pertinente integrar las fases de circulación entre planos aunque no se profundizó en este punto durante la revisión y discusión teórica.

6.1.1. Los elementos teóricos en la situación didáctica.

En el transcurso del análisis de la situación de referencia los argumentos de los profesores fueron similares, además, cuando tenían dudas en algunas ocasiones se consultaban entre equipos o las resolvían empleando el texto. En lo que sigue se muestran solamente las reflexiones derivadas de la discusión sobre la primera situación, ya que estas sentaron las bases para la revisión de los libros de texto. Cabe mencionarse que las cuestiones más relevantes durante este proceso se refirieron a ciertos elementos en particular, a continuación se describen de acuerdo con la forma en que se organizaron.

6.1.1.1. La visualización (icónica y no icónica)

La discusión entre los profesores permite apreciar la conceptualización del componente visualización, como se puede observar en el siguiente fragmento, una vez que los profesores leen las instrucciones para construir el triángulo, reconocen que, además de la representación este componente cognitivo se encuentra presente también en las imágenes de los triángulos.

> FP2: A ver, veamos cuáles son las actividades de visualización
> FP1: Cuando nos muestra la hojita con los distintos triángulos
> PS2: Oigan, me quedo pensando, dentro de la visualización no nada más estamos visualizando los que nos dan, sino que también cuando nos dan la descripción nosotros visualizamos de acuerdo a las características de algún tipo de triángulo que nos dan, esa también podría ser una visualización...
> FP2: Entonces se da en dos momentos, una es icónica y la otra no icónica
> PS1: Ajá, sí, exacto. Escribe entre paréntesis icónica.
> FP2: Podemos ponerle aquí abajito que en un segundo momento se dio la visualización.
> FP1: El segundo momento fue cuando visualizamos los triángulos de los que leímos la descripción.
> FP1: Al momento de la lectura de la descripción
> FP2: Cuando se llevó a cabo la lectura y ahí se usó una visualización icónica.
> PS1: Y mira, eso se va a relacionar con el espacio real y local, o sea porque lo visualizamos, de acuerdo a los conocimientos que tenemos de ellos, ¿o no? //cuestiona a sus compañeras en busca de aprobación//
> FP2: Ah, como los ángulos, la medida de los ángulos, los lados.

Podemos ver la manera como identifican la movilización de los conocimientos previos y su relación con la configuración mental de un determinado tipo de triángulo, es precisamente en ese sentido que complementan la idea, al señalar la forma en que este componente se relaciona con el espacio real y local, en síntesis, aún sin decirlo, comprenden la forma en que se activa la génesis figural en las tareas realizadas.

6.1.1.2. Los momentos de construcción y el uso de los artefactos

Es importante mencionar que el nivel de asociación entre los elementos teóricos y el tipo de tareas que se analizan, contribuye a que, en la configuración del espacio idóneo para el trabajo en el aula, se reconozca la necesidad de que estos elementos se encuentren presentes, como es el caso de la articulación entre artefactos y construcción, motivo de la discusión que se aprecia en el siguiente fragmento.

> FP1: Sí y con la construcción porque es cuando usamos los artefactos.
> PS1: Es cuando decimos la concepción que tenemos de los triángulos.
> PS1: Las actividades de construcción fue cuando construimos el triángulo
> FP1: Fueron dos ¿no?
> PS1: Sí también cuando hicimos la descripción. Pero mira, como aquí es la génesis instrumental, se supone que aquí en la construcción, una, cuando hicimos la descripción con los conocimientos previos, pones la redacción de acuerdo a lo que sabes de la construcción, y otro, donde la construyes de acuerdo a la descripción.
> FP1: También cuando usamos los instrumentos para medir todavía es construcción.
> FP2: Entonces es como un momento y el otro fue la construcción del triángulo a partir de las instrucciones.
> PS2: Y la última donde comprobamos todos los triángulos, o esa puede ser la prueba.

La activación de la génesis instrumental se define por la articulación y movilización de los componentes construcción y artefactos; y respecto a un instrumento Rabardel lo considera desde dos componentes, “un artefacto material o simbólico, y los esquemas de uso asociados [...] un artefacto se convierte en un instrumento cuando el sujeto construye una serie de esquemas para su uso” (1995, citado en (Pizarro, 2018, pág. 59). Desde esta perspectiva se pueden observar las reflexiones de los profesores sobre los momentos en que se moviliza el componente construcción y la relación con el tipo de artefactos que se emplearon, es cierto que en el lenguaje empleado por las profesoras aún se utiliza la palabra instrumentos como sinónimo de artefacto, pero también comienzan a establecer la diferencia entre un artefacto simbólico y uno material.

Asimismo, son capaces de reconocer el proceso cognitivo de la construcción a partir de la descripción, recordemos que la hipótesis de esta perspectiva teórica es que podemos separar los elementos para su análisis, pero en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría es necesario que se movilicen de manera dinámica todos y cada uno de ellos. La evidencia de que los profesores han comprendido esta hipótesis aparece cuando señalan la relación entre los componentes descritos hasta ahora (visualización, construcción y artefactos) así como lo que concierne a la prueba y el referencial.

6.1.1.3. El componente prueba y el referencial

Por otra parte, como se aprecia en el siguiente fragmento, la idea fundamental de la discusión, tiene qué ver con la manera cómo la construcción aporta al componente prueba, estos primeros indicios de la aprehensión teórica del profesor señalan que un discurso de prueba debe estar relacionado con el referencial de la tarea propuesta, en este caso la conclusión a la que llegan los profesores es que el contenido geométrico (la clasificación de triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y ángulos) debe estar presente.

> FP1: La prueba, porque con el discurso escrito decimos lo que conocemos, aquí también (se refiere a la construcción) entra lo de la comprobación cuando medimos con la regla.
> FP2: Pero la prueba es cuando también cada uno creía que era un tipo de triángulo.
> FP1: Entonces en la misma construcción hubo una prueba, una comprobación. Con la lluvia de ideas y los instrumentos.
> FP2: Entonces ya en artefacto vamos a poner lo que usamos
> PS1: La imagen, la hoja con imágenes, juego de geometría.
> FP1: También el problema puede ser un artefacto y ya en la actividad de prueba es la descripción de cada triángulo.
> PS1: ¿Y el referencial?
> FP1: Los elementos teóricos presentes, ah lo que decíamos, la clasificación de los triángulos por los lados y los ángulos. ¿Qué más?
> FP1: La suma de los ángulos internos, que es de 180°.

También, como se puede observar, deciden agregar una propiedad relativa a los lados de los triángulos, ya que esto apareció en las discusiones colectivas y les sirvió de sustento para hacer la clasificación. Sin mencionarlo literalmente en los diálogos, observamos que aparecen implícitamente en los comentarios sobre la articulación entre componentes que han señalado en las descripciones, sobre las génesis activadas en cada momento de la situación de referencia y sobre la circulación de los planos en la misma.

6.1.1.4. Tránsito entre paradigmas

En la descripción de la situación (capítulo IV) se menciona el tipo de paradigma que predomina en cada uno de los momentos, este rasgo de la situación, como se puede observar en el siguiente fragmento, también es identificado por los profesores.

> FP1: Paradigma que predomina y por qué, los paradigmas eran… (Consultan el texto)
> PS1: Yo pienso que la natural (GI), porque involucramos los materiales y objetos.
> FP1: No, pero también el GII porque los objetos geométricos son descritos mediante sus propiedades. Entonces le ponemos gI/GII, porque hicimos actividades del GI pero cuando concluimos la tabla ya debían de ser conceptos, entonces es el GII.
> PS1: Porque sí vimos los dos
> FP1: Porque en la validación dijimos las propiedades.
> PS1: Primero hubo GI y luego GII, sí porque se mezcla mucho lo conceptual, lo teórico.

Durante la discusión, puede verse el análisis del tránsito entre paradigmas GI y GII que se hace presente en las tareas y como en la geometría euclidiana es complicado separar ambos, también los profesores se percatan de tal dificultad por lo que deciden ponerle gI/GII, para dar cuenta de ella y de la transición entre ambos. En este caso, las actividades propuestas desde el paradigma GI proporcionan una heurística y una base de experimentación para llegar a la generalización, que es la característica del GII generaliza ciertas técnicas empleadas en la GI.

De los hallazgos obtenidos puede concluirse que durante las discusiones de los profesores, se observa el nivel de aprehensión teórica que han alcanzado. Resulta importante destacar la manera como identificaron los componentes desde lo individual y la articulación que existe entre ellos, es decir, para estudiar los componentes se orientan por el formato en el que se les plantean separados, pero la comprensión sobre la manera como se articulan se refleja en el momento que mencionan la relación que existe entre ellos. Con lo anterior, dan cuenta del proceso dinámico que propone el ETG, lo que es importante porque les permite avanzar de manera progresiva en la comprensión de los elementos teóricos mediante las discusiones, de ello se podrá dar cuenta en el siguiente apartado.

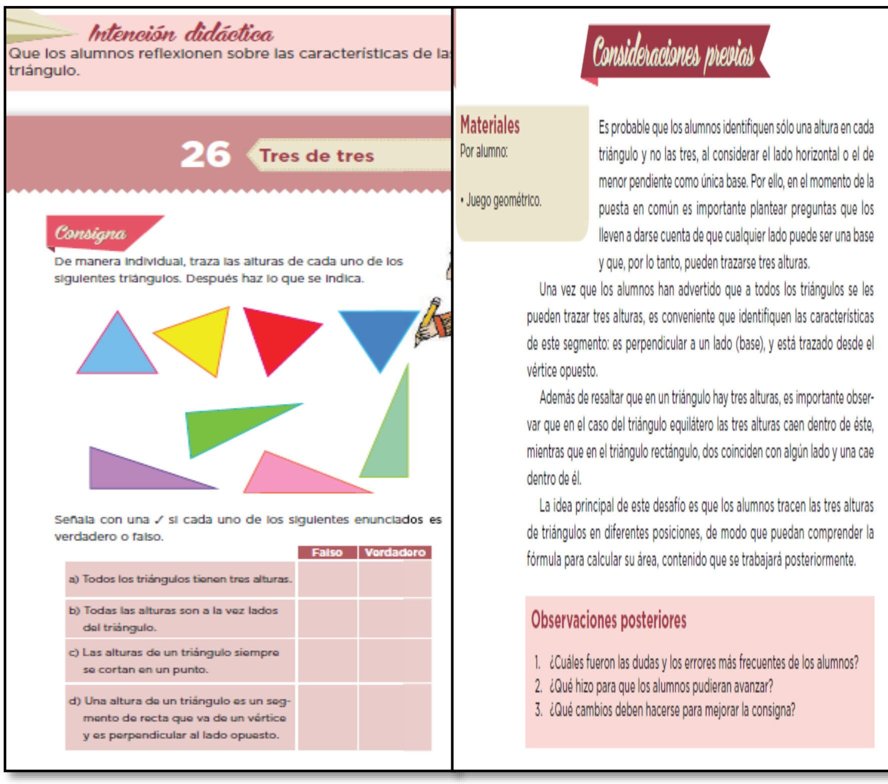
6.1.2. Tipos de prueba y génesis discursiva en el libro escolar.

Algo similar a las discusiones y reflexiones que se describieron en el apartado anterior sucedió durante el análisis de los libros de texto, para ello se les propuso revisar varias lecciones organizadas en secuencias de tareas articuladas en torno a un mismo tema, éste fue seleccionado por los profesores en servicio con relación a algo que ya hubieran trabajado o fuera del interés del equipo. Como criterio de selección se solicitó que escogieran contenidos relacionados con propiedades del triángulo, en el caso de quinto grado eligieron tres lecciones de un solo contenido, y en primer grado seleccionaron un trayecto que incluía cuatro lecciones para el logro de un mismo aprendizaje esperado.

La revisión del libro de primer grado fue un tanto breve porque mientras realizaban el análisis, se detenían para dialogar con el otro equipo y comprobar si las conclusiones a las que llegaban eran similares, es decir, un ejercicio de validación. Otro factor que limitó el trabajo del equipo que revisaba el libro de primer grado, fue que en él se incluye un apartado teórico muy amplio donde se describen las orientaciones generales sobre evaluación en matemáticas, antes de analizar el libro los profesores leyeron ese apartado porque no lo conocían,[82] por estas razones, no concluyeron la revisión de las lecciones.

[82] Es importante señalar que no retomaron algún apartado de dicha lectura para analizar las lecciones del trayecto que se les propuso, solamente querían conocer un poco más de este nuevo programa de estudios.

En el caso del libro de quinto grado la secuencia se articulaba en torno del contenido: *Localización y trazo de las alturas en diferentes triángulos* al cual, en el libro de texto se le dedican tres lecciones, cada una con una intención didáctica distinta. Para su análisis, el equipo optó por ir revisando una a una las lecciones que conformaban la secuencia de tareas completa. En la figura siguiente (figura 54) se observan las actividades propuestas en la primera lección del libro de quinto grado.



Intención didáctica

Que los alumnos reflexionen sobre las características de la altura de un triángulo.

26 Tres de tres

Consigna

De manera individual, traza las alturas de cada uno de los siguientes triángulos. Después haz lo que se indica.

Señala con una ✓ si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.

	Falso	Verdadero
a) Todos los triángulos tienen tres alturas.		
b) Todas las alturas son a la vez lados del triángulo.		
c) Las alturas de un triángulo siempre se cortan en un punto.		
d) Una altura de un triángulo es un segmento de recta que va de un vértice y es perpendicular al lado opuesto.		

Consideraciones previas

Materiales

Por alumno:

- Juego geométrico.

Es probable que los alumnos identifiquen sólo una altura en cada triángulo y no las tres, al considerar el lado horizontal o el de menor pendiente como única base. Por ello, en el momento de la puesta en común es importante plantear preguntas que los lleven a darse cuenta de que cualquier lado puede ser una base y que, por lo tanto, pueden trazarse tres alturas.

Una vez que los alumnos han advertido que a todos los triángulos se les pueden trazar tres alturas, es conveniente que identifiquen las características de este segmento: es perpendicular a un lado (base), y está trazado desde el vértice opuesto.

Además de resaltar que en un triángulo hay tres alturas, es importante observar que en el caso del triángulo equilátero las tres alturas caen dentro de éste, mientras que en el triángulo rectángulo, dos coinciden con algún lado y una cae dentro de él.

La idea principal de este desafío es que los alumnos tracen las tres alturas de triángulos en diferentes posiciones, de modo que puedan comprender la fórmula para calcular su área, contenido que se trabajará posteriormente.

Observaciones posteriores

1. ¿Cuáles fueron las dudas y los errores más frecuentes de los alumnos?
2. ¿Qué hizo para que los alumnos pudieran avanzar?
3. ¿Qué cambios deben hacerse para mejorar la consigna?

Figura 54. Lección 26. Libro de quinto grado. Fuente: *(SEP, 2016)*

Como se mencionó, las discusiones siguieron una lógica similar a las que se realizaron en torno de la situación de referencia, sin embargo lo más relevante en este caso fue la manera como identificaron los tipos de prueba en las tareas propuestas por el libro. Las discusiones sobre este tema son por demás relevantes porque en esta investigación se asume que en los grupos multigrado, la distinción entre los tipos de prueba que el profesor solicite a los alumnos influye en gran medida en el proceso que favorece el razonamiento geométrico.

Conforme a lo que se observa en el siguiente fragmento, los profesores identifican una prueba intelectual en la lección, la cual consideran de tipo demostración. Es interesante también observar la manera como, a partir de las imágenes que se muestran en la lección, relacionan la prueba con la elección que debe hacer el niño acerca de las características de los triángulos, el trazo y la localización de las alturas de un triángulo[83] (*Yo pienso que es una prueba intelectual porque a partir de los triángulos que le mostraron arriba tiene que elegir cuáles tienen las características”)*, es decir, articulan el referencial de la lección con la justificación del alumno.

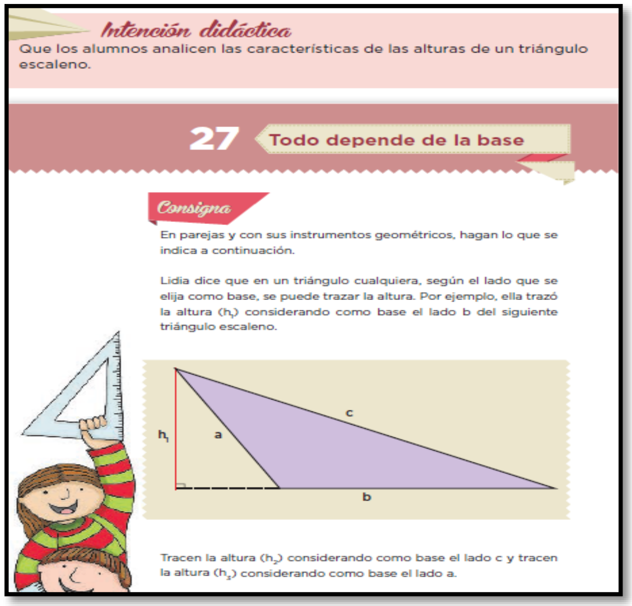
> PS1: Terminamos lo de visualización
> FP2: Sí, en las tres lecciones hay imágenes para identificar triángulos.
> FP1: Nos falta lo de prueba, vamos a revisar eso...
> PS1: Mmmm, bueno yo pienso que para resolver esta lección los niños tienen que tener varios conocimientos previos miren: alturas, segmento de recta, punto, perpendicular, vértice...
> //PS1 Muestra la lección a las demás profesoras//
> FP2: Yo pienso que es una prueba intelectual porque a partir de los triángulos que le mostraron arriba tiene que elegir cuáles tienen las características. Además le pide que trace las alturas y luego que conteste la tabla.
> FP1: Hay que leer las orientaciones
> //Comienza a leer y a la vez van reflexionando sobre algunas ideas o palabras que les llama la atención//
> FP2: Creo que es de demostración, aunque tampoco se pide discurso, nada más deja que diga cuál es. Es una demostración sin argumento.
> FP1: Pero en las orientaciones dice que habrá puesta en común y que el maestro les ayude con preguntas, entonces sí hay argumento.
> PS2: Pues a mí no me queda claro cómo le va a hacer el profesor para que sea una demostración o para que haga buenas preguntas. Además yo veo más contenidos en la tablita no solamente lo del trazo de las alturas. También lo de los tipos de triángulo y todo eso que les dije.
> FP1: Pero el niño no va a construir los triángulos, solamente va a deducir cuáles son de acuerdo a las características, aunque le dan la pista de las imágenes.

[83] Este es el contenido matemático y a su vez, el referencial en que se basa la secuencia de tareas

> PS1: Pero se les pide que tracen las alturas primero y luego que identifique las características.
> PS1: Cierto...entonces dejemos que en esta lección es una prueba intelectual y que la consideramos de demostración. Hay que anotar...

A decir de lo expuesto por Balacheff (2000), para determinar el tipo de prueba de una tarea como de demostración, es necesario establecer los criterios aceptados en la comunidad escolar; en el caso del análisis realizado por los profesores esto no puede percibirse mediante la actividad propuesta en el libro, por lo que hacen mención de que: *es una demostración sin argumento*, esta afirmación no es totalmente cierta y denota cierta confusión en los niveles de los tipos de prueba, no obstante sí se aprecia la importancia que otorgan al discurso y la utilización de otras propiedades y conceptos relacionados con el tema a estudiar para que el alumno justifique la respuesta. Otro elemento en la discusión es el énfasis que hacen los profesores en el hecho de que no basta con que el alumno identifique el triángulo y sus características, sino que debe participar en una *puesta en común* (validación grupal) para reconocer lo que ha aprendido. También resulta relevante la consideración que hacen acerca de las posibilidades de establecer una demostración como prueba en ese grado escolar porque, como se ha mencionado en capítulos anteriores, la prueba solicitada tiene relación con una concepción paradigmática congruente y aceptada en la institución donde los sujetos se desenvuelvan, en este caso los profesores de la educación primaria aceptan que será una demostración sólo si el niño es capaz de relacionar las características mencionadas en la tabla con el contenido geométrico que se está trabajando lo cual será sometido a juicio durante el proceso de validación. Estas discusiones entonces, dejan ver la importancia de promover el razonamiento argumentativo durante las clases de geometría.

Ahora, en el análisis de la siguiente lección (No. 27), los profesores no encontraron que se solicitara algún tipo de prueba a los niños, la consigna, como se puede ver en la figura 55, solamente pedía seguir grupalmente un proceso de construcción de alturas en un triángulo escaleno, razón por la que optaron no analizarla en términos de la prueba.



Intención didáctica

Que los alumnos analicen las características de las alturas de un triángulo escaleno.

27 Todo depende de la base

Consigna

En parejas y con sus instrumentos geométricos, hagan lo que se indica a continuación.

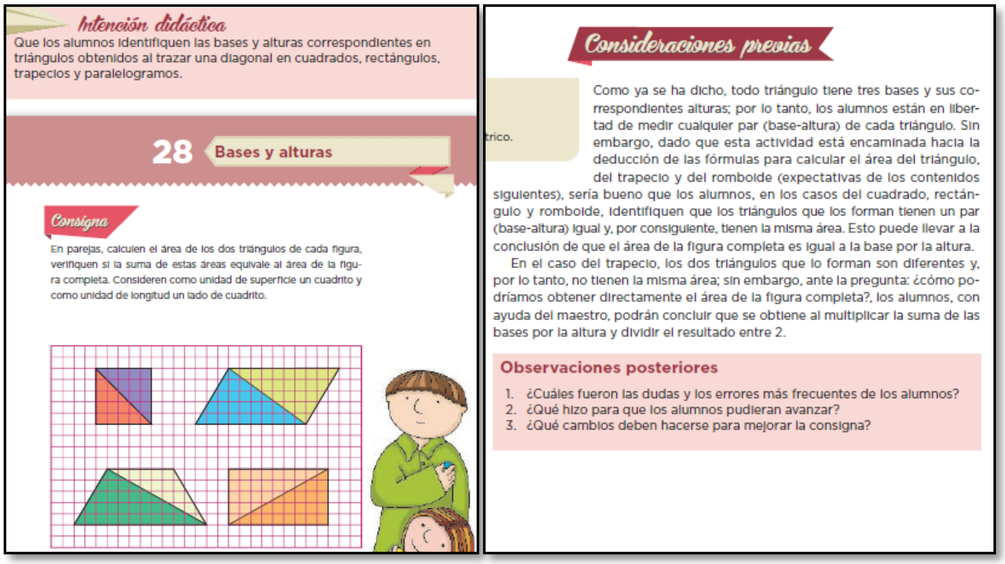
Lidia dice que en un triángulo cualquiera, según el lado que se elija como base, se puede trazar la altura. Por ejemplo, ella trazó la altura (h_1) considerando como base el lado b del siguiente triángulo escaleno.

Tracen la altura (h_2) considerando como base el lado c y tracen la altura (h_3) considerando como base el lado a.

Figura 55. Lección 27. Libro de quinto grado. Fuente: *(SEP, 2016)*

La lección propone realizar en parejas la actividad utilizando los instrumentos geométricos de la manera en que se les va indicando. No solicita una justificación de los resultados obtenidos y en las orientaciones didácticas solamente menciona que la dificultad de esta actividad es que para trazar una de las alturas se debe prolongar uno de los lados, y que se espera el niño pueda trazar las dos alturas (SEP, 2016), es decir, no dice con claridad la manera de analizar o discutir la tarea propuesta de tal manera que se llegue a la deducción del contenido o la intención didáctica de la lección.

En la figura 56 se presenta la lección no. 28, última en la secuencia que sobre este contenido incluye el libro de quinto grado.



Intención didáctica

Que los alumnos identifiquen las bases y alturas correspondientes en triángulos obtenidos al trazar una diagonal en cuadrados, rectángulos, trapecios y paralelogramos.

28 Bases y alturas

Consigna

En parejas, calculen el área de los dos triángulos de cada figura, verifiquen si la suma de estas áreas equivale al área de la figura completa. Consideren como unidad de superficie un cuadrito y como unidad de longitud un lado de cuadrito.

Consideraciones previas

trico.

Como ya se ha dicho, todo triángulo tiene tres bases y sus correspondientes alturas; por lo tanto, los alumnos están en libertad de medir cualquier par (base-altura) de cada triángulo. Sin embargo, dado que esta actividad está encaminada hacia la deducción de las fórmulas para calcular el área del triángulo, del trapecio y del romboide (expectativas de los contenidos siguientes), sería bueno que los alumnos, en los casos del cuadrado, rectángulo y romboide, identifiquen que los triángulos que los forman tienen un par (base-altura) igual y, por consiguiente, tienen la misma área. Esto puede llevar a la conclusión de que el área de la figura completa es igual a la base por la altura.

En el caso del trapecio, los dos triángulos que lo forman son diferentes y, por lo tanto, no tienen la misma área; sin embargo, ante la pregunta: ¿cómo podríamos obtener directamente el área de la figura completa?, los alumnos, con ayuda del maestro, podrán concluir que se obtiene al multiplicar la suma de las bases por la altura y dividir el resultado entre 2.

Observaciones posteriores

1. ¿Cuáles fueron las dudas y los errores más frecuentes de los alumnos?
2. ¿Qué hizo para que los alumnos pudieran avanzar?
3. ¿Qué cambios deben hacerse para mejorar la consigna?

Figura 56. Lección 28. Libro de quinto grado. Fuente: *(SEP, 2016)*

En las discusiones de análisis de la lección 28 del libro de texto de quinto grado, como se puede ver en el siguiente fragmento, los argumentos de los profesores estuvieron centrados en un solo tipo de prueba, la pragmática.

> PS1: A ver, sigamos con la última
> //Lectura de la consigna de la lección 28//
> FP1: Entonces es una prueba, porque va a comprobar, pero el discurso no está.
> FP2: Hay que revisar las consideraciones previas
> //Leen en voz alta las consideraciones previas//
> FP1: Entonces la última lección es para ver lo de las alturas y el área.
> FP2: Pero en ningún momento dice que socialicen las distintas respuestas
> PS1: Pero sí piden un tipo de prueba aunque no pidan un discurso al alumno
> FP1: Entonces de acuerdo a lo que piden le pondremos que es prueba pragmática donde usan la experimentación, entonces es la de ejemplo genérico. Aunque sea con ayuda del maestro, porque tienen que concluir que el área de todos los triángulos será siempre base por altura sobre dos, porque primero, lo hicieron con la suma de los dos triángulos para completar el romboide.

> FP2: Pero no se pide el discurso, solamente dice que concluirán junto con el maestro. No deja claro si ellos deben de argumentar la respuesta o solamente el maestro es quien lo debe hacer.
> FP1: Se activa el componente prueba pero no se articula con un discurso que implique la adquisición de los contenidos que pusimos en el referencial, ¿cómo se sabrá lo que el niño aprendió?
> PS2: Entonces nada más anotemos eso en la prueba. Prueba pragmática, ejemplo genérico, pero no se pide al alumno el discurso (argumentación).
> //En la hoja de conclusiones anotan: Argumentación. En esta la lección, fue necesario que hicieron el procedimiento para comprobar realmente permitía la deducción de la fórmula.//
> PS1: Vamos ahora a anotar lo de las génesis, ¿se activan todas?
> FP1: No, porque aparecen más las génesis figural e instrumental.
> PS2: Es que la génesis discursiva no se activó totalmente aunque hubo prueba.
> FP2: Sí, es que no hubo discusión de las fórmulas, lo de los conceptos, del trazo de las alturas, de los tipos de triángulo y todo lo que pusimos en el referencial. Cuando se dieron esas discusiones no decía exactamente cómo le va a hacer el maestro o hasta dónde deben aprender los niños. Entonces pongamos solamente las génesis figural e instrumental.

En el fragmento anterior puede observarse que la reflexión de los profesores se realiza con base en la comprensión teórica de los elementos del ETG, es decir, esta perspectiva les permite “mirar” una realidad que antes no veían, por esa razón es que pueden llegar a las conclusiones que consensan, por ejemplo, si bien aceptan que hay prueba en la actividad de la lección no dejan de subrayar que no se activa la génesis discursiva y que por ello es difícil saber lo que aprende el niño, también se percatan que no hay claridad sobre lo que puede hacer el profesor para estar al tanto. Con base en estas consideraciones surgidas de la discusión, reconocen que es necesario un discurso, oral o escrito, que propicie dar cuenta del nivel de razonamiento geométrico del estudiante en relación al contenido geométrico de la lección.

En el sentido de la idea anterior, Kuzniak, Montoya y Vivier (2015) apoyados además en las ideas de Miller (2007, citado en (Kuzniak, Montoya, & Vivier, 2015), reflexionan sobre la génesis discursiva del razonamiento y se preguntan,

> ¿Cómo asegurarse de que un estudiante ha comprendido la lógica de una prueba cuando no está expresada con palabras y descansa sobre recomposiciones de imágenes que pueden no ser más que ilusiones? Un discurso de explicitación es necesario y llega a ser indispensable para argumentar y para convencer. La articulación entre visualización y razonamiento supone la creación de espacios de trabajo geométrico en donde el razonamiento se apoya de manera explícita en diagramas, en una especie de razonamiento diagramático en el que imagen y discurso se apoyarían uno en el otro (Miller, 2007). Inevitablemente, la naturaleza y la importancia de las formulaciones escritas difieren de un paradigma a otro y, en los enfoques más axiomáticos, es posible afirmar que un objeto matemático no existe más que en y mediante su definición. (pág. 245)

De esta manera, podemos concluir que hasta este momento, el nivel de aprehensión teórica de las profesoras les permite reconocer la necesidad de activar las tres génesis en una enseñanza efectiva de la geometría, y además, que la génesis discursiva es esencial para poder favorecer el razonamiento geométrico en los estudiantes.

Como se había estipulado, durante el diseño de las clases y sobre todo, durante el desarrollo de esas clases con los niños se habría de analizar el nivel de incidencia del conocimiento didáctico desarrollado en las sesiones de formación sobre la acción del profesor en el aula, para determinar la pertinencia de la formación de profesores bajo esta perspectiva teórica, por esta razón, en el siguiente fragmento puede observarse que, a manera de institucionalización colectiva, la formadora realiza cuestionamientos para verificar si el nivel de comprensión ha sido el mismo o si existen discrepancias entre los libros analizados y la información de los profesores.

> I: ¿Cuáles tipos de actividades consideran que fueron los que predominan en lo que le propone al profesor el libro para el maestro?
> FP3: De construcción hay más actividades, sobre todo en las sesiones finales del trayecto. Porque en las primeras hay más visualización.
> //Hace referencia al libro de primer grado//
> PS2: Sí, y es el mismo maestro quien va ayudando a los niños durante las lecciones, primero a observar las figuras y luego a construirlas.
> PS1: En el de quinto hay más actividades de construcción y de visualización, pero también hay de prueba.
> FP2: Lo que no hay es un discurso o justificación de lo que hacen los niños.

> PS2: También hay visualización porque hay imágenes en las lecciones que ayudan al niño a construir el aprendizaje.
> I: ¿Y de acuerdo a lo que revisaron, en las lecciones se activan todas las génesis?
> PS2: No, en todas no. en algunas solamente se activa una.
> FP2: Nosotros creemos que se usan más la figural e instrumental. Porque la discursiva necesitaría que también tuviera un discurso de justificación del niño y no lo pide, o no dice como pedirlo.
> I: ¿Y consideran que se requiere la génesis discursiva para aprender geometría, por qué?
> PS1: ¡Claro!, es que si no, no nos damos cuenta de lo que aprendieron los niños. Necesitamos que los niños digan las conclusiones a las que lleguen y entre todos las discutamos para que los que no aprendieron el contenido en la clase, lo puedan comprender cuando hagamos la validación.
> FP1: Es que ya habíamos revisado que tienen que estar presentes las tres génesis para que haya un razonamiento.
> I: Sobre las orientaciones que contienen los libros de texto, ¿qué opinan de la información qué les brinda?, ¿cómo les ayudan a ustedes para que diseñen sus clases?
> PS1: Están medio confusas, sí dice orientaciones pero al final no deja claro qué debemos hacer.
> PS2: En el de primero también vienen las orientaciones, en el apartado de cómo ayudar, creo que sí viene un poco más claro, aunque nosotros vimos que el referencial o el contenido que se tiene que lograr no aparecen claramente.
> I: ¿Qué creen sería necesario que nosotros tomemos en cuenta para planear nuestras clases?
> PS1: Que estén presentes todos los componentes de los planos y que se activen las génesis. Para saber hasta dónde está aprendiendo el niño el tema.

Entre los puntos más sobresalientes se aprecia la comprensión de la importancia de activar las tres génesis para lograr un razonamiento geométrico. También es destacable que los profesores reconocen que la génesis discursiva es necesaria para llegar a un razonamiento geométrico que denote el nivel de logro de los niños. Esta tarea didáctica de revisión y análisis del espacio idóneo propuesto en los libros escolares, como se habrá podido ver, contribuye a que el profesor reflexione sobre posibles modificaciones al espacio idóneo que se le propone, ya que, podemos ver en los razonamientos de los profesores, no siempre el ETG idóneo que proponen los textos escolares es el mejor, además, en su rol de analista, el profesor identifica la potencialidad de las tareas propuestas en los libros de texto y puede con ello diseñar tareas o actividades que favorezcan el logro de los aprendizajes esperados. Asimismo, aunque los profesores que revisaron primer grado no concluyeron dicho análisis, las discusiones grupales sobre lo que analizaron aunado con lo revisado en quinto grado, permitieron que comprendieran los elementos teóricos, pues las actividades de ambos textos lo permitían. En resumen, es evidente que los profesores han logrado una comprensión de la perspectiva teórica adecuada y ésta, sin duda se verá reflejada en el proceso de diseño y elaboración de sus planes de clase, tarea que se analiza en la sección siguiente.

6.2. EL PROFESOR COMO DISEÑADOR DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

La configuración del ETG idóneo que hicieron los profesores, se realizó en una sesión de aproximadamente dos horas, en ésta revisaron los libros del maestro y el programa de estudios para identificar los contenidos que se relacionaban con las situaciones de referencia, aunque también podían agregar a su plan de clase otros contenidos que consideraran necesarios para lograr el aprendizaje esperado, también analizaron las respuestas y las modificaciones posibles que habían registrado en sus hojas de Trabajo,[84] todo ello para diseñar una clase para el grupo multigrado que atienden. Las acciones aquí descritas se realizaron en distintos equipos del momento de análisis, y para conformarlos se tomaron en cuenta los grados escolares que cada profesor atiende, en la tabla 20 se puede ver la manera como quedaron formados los equipos.

[84] Recuérdese que las situaciones de referencia incluían tareas geométricas y tareas didácticas, una de estas últimas, era una hoja de trabajo donde se planteaban preguntas a los profesores cuyas respuestas requerían que identificara los contenidos de las situaciones y propusiera modificaciones para trabajarlas con los niños. En el capítulo IV se describen las situaciones y se mencionan las preguntas de las hojas de trabajo.

Tabla 20. Organización de equipos de profesores para el diseño de la situación didáctica. Fuente: Elaboración propia.

Equipo 1	Profesor	Grados que atiene
	PS1	1° y 2°
	FP1	1°, 2° y 3°
	FP3	1° y 2°
Equipo 2	PS2	5° y 6°
	FP2	4°, 5° y 6°

Uno de los primeros aspectos a reflexionar en los equipos fue la forma como iban a trabajar, en ambos, las profesoras en formación comentaban que en las clases de matemáticas de la Escuela Normal se proponía la Teoría de Situaciones Didácticas[85] para la planificación de las clases y la metodología globalizada para los grupos multigrado, después de una breve discusión en colectivo se optó por realizar la planeación de acuerdo a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD de aquí en delante) razón por la que las profesoras en formación dieron una breve explicación a los profesores en servicio sobre los elementos que conforman el plan de clase y las fases o tipos de situación que propone la TSD. La intención no era que se diseñara con esta teoría, pero fue decisión de los profesores en servicio realizarlo de esta manera que ya habían trabajado las futuras profesoras.

Es importante recordar que entre los objetivos del presente estudio está el de identificar lo que aporta el trabajo colaborativo entre profesores en servicio y en formación, que cursaron su carrera con Planes de Estudio distintos. En este sentido, puede señalarse que el hecho de revisar una teoría propuesta desde la didáctica de las matemáticas, es uno de los saberes que, se busca,

[85] En el Plan 2012 se sugiere trabajar el diseño de planes desde el Estudio de Clase, sin embargo, también sugiere que se apoye en la Teoría de Situaciones Didácticas. En la Escuela Normal donde se ubica este estudio se considera esta opción. Por su parte los profesores en servicio planeaban mediante secuencias didácticas.

adquieran en este espacio de formación colectivo. En el siguiente fragmento puede verse la valoración de los profesores sobre este aspecto.

> PS2: Noto la diferencia entre lo que saben las maestras y lo que sabemos nosotros, a nosotros no nos dijeron que había una forma de planear la geometría o matemáticas, solamente hacíamos las actividades y ya, las aplicábamos.
> PS1: Por eso el otro día yo decía que una vez que aprendo todo esto y otras cosas, creo que soy mejor maestra, no que no lo fuera, porque tenía resultados y mis niños salían bien, solamente que comprendo mejor otras cosas.
> PS2: Falta preparación o que haya más talleres como esto, como lo globalizado, lo de las situaciones didácticas, lo del espacio de trabajo geométrico, es que todo eso favorece para que hagamos mejor las cosas.

Puede decirse que configurar una propuesta de formación que articule los conocimientos que poseen los profesores experimentados y los que están en formación, es un aporte a la formación de unos y otros. Resultado de esta colaboración y del trabajo en los dos equipos, se presentó el diseño de dos planificaciones de clase (una por equipo), sin embargo posteriormente cada profesor pudo hacerle modificaciones para ajustarla a las necesidades de su grupo multigrado o a sus consideraciones sobre lo que debería ser el trabajo geométrico. En el caso de las profesoras en formación, los cambios tuvieron que ver fundamentalmente con ajustar la metodología de planificación del trabajo multigrado, es decir, integraron a un método globalizado la situación didáctica del diseño que presentó el equipo. Por su parte, los profesores en servicio hicieron ajustes al conocimiento en correspondencia con las características de los niños de su grupo, especialmente considerando los saberes previos de los niños, fundamentalmente ampliaron la situación didáctica.

6.2.1. Las propuestas iniciales.

Otro momento en el proceso de diseño fue el intercambio de las hojas de trabajo que los profesores habían contestado previamente, en este momento los equipos analizaron las modificaciones a la situación que había propuesto cada profesor y los contenidos que habían identificado en ella, lo significativo es que las respuestas de todos los profesores fueron similares, es decir, mencionaban correctamente el contenido de la situación de referencia y todas las modificaciones propuestas se centraban en el uso de material concreto para facilitar el trabajo de los niños, por esta razón, cuando los equipos las leyeron, se optó por no discutirlas aunque se tomarán algunas ideas incluidas en ellas para el diseño de la clase.

Cabe señalar que la hoja de trabajo se contestó individualmente y que hasta este momento no se había revisado la perspectiva teórica del ETG, por esa razón se consideran respuestas preliminares derivadas de la formación inicial que recibieron, de la experiencia que han tenido en los grupos multigrado y de aquello que han desarrollado en su espacio personal a partir de las tareas geométricas que se les propuso resolver. La intención de las preguntas en el análisis las situaciones de referencia (véase pie de página 84) consistía principalmente en pedir a los profesores que observaran la relación entre las tareas matemáticas y lo que ellos desarrollaban o podrían desarrollar con sus estudiantes. En este sentido, básicamente los profesores lograron identificar el contenido central en la situación y los contenidos relacionados con él de acuerdo al programa de estudios de educación básica.

Respuestas en la hoja de trabajo. FP1

> P: ¿Cuál es el contenido de geometría central en la actividad?
> FP1: Identificación y propiedades de los triángulos. Condición de construcción de un triángulo dados sus tres lados.
> P: ¿Qué otros contenidos geométricos se incluyen en las tareas?
> FP1: Medida de los ángulos y clasificación de triángulos por sus lados y ángulos. Trazo de líneas rectas. Uso de instrumentos (transportador, regla, escuadra), criterios de construcción de triángulos.

Como puede apreciarse, en las respuestas de los profesores se puntualizan los contenidos geométricos que rescata FP1 y si bien es cierto que encuentra relación con algunos contenidos que se discutieron colectivamente, no distingue otros que complementan o se vinculan directamente con el contenido geométrico principal como *la suma de todos los ángulos interiores de un triángulo da siempre 180º (A + B + C = 180º) y los Elementos básicos del triángulo (vértices, lados y ángulos)* que, se espera que los mencione durante la discusión en equipos. Otro rasgo relevante es que FP1 alude al uso de instrumentos como contenido geométrico,[86] puede inferirse que su intención da cuenta del proceso de construcción de triángulos que ha aprendido durante su formación inicial y la manera en que piensa que los niños lo pueden resolver, dicho sea de paso, FP1 no utiliza la construcción con instrumentos como razón para sustentar sus justificaciones en las situaciones de referencia, sino que indica los criterios matemáticos (presenta pruebas de tipo experiencia mental), pero reconoce en primera instancia la probabilidad de que el alumno no lo haga igual que ella, en este sentido, puede decirse que es muy probable que en sus clases recurra a los instrumentos para favorecer el aprendizaje de sus alumnos.

Cuando el profesor se enfrenta a ciertos problemas geométricos y luego los transforma para convertirlos en tareas de enseñanza, se puede considerar que su acción es parte de un proceso de transposición didáctica, en el caso de FP1, las tareas que propone en el siguiente fragmento de su hoja de respuestas, son indicios de que considera importante que sus alumnos utilicen instrumentos para adquirir el contenido geométrico, es decir, sugiere la activación de una génesis instrumental que aterrice en el componente epistemológico referencial. Bajo esta idea, sería interesante identificar los tipos de prueba que solicitará a sus alumnos para que lleguen al razonamiento de los contenidos que trabajará en sus clases.

Respuestas a la hoja de trabajo FP1

> P: ¿Consideran que podrían aplicar esta actividad tal cual con sus alumnos o deberían modificarla? Si es el caso ¿por qué la modificarían y qué cambios le harían?
> FP1: Sí se podría aplicar la actividad pero previo a ello realizaría otras actividades como adivinanzas a partir de las características de los triángulos. Algunas estrategias que podría utilizar son la construcción de triángulos con material concreto a fin de que puedan comparar las medidas de ángulos y lados.
> P: ¿Cómo desarrollaría la actividad con grupos pequeños de primero o segundo grado?
> FP: Entregaría a los alumnos una bolsita con diferentes tipos de triángulos para que los alumnos identifiquen sus diferencias y semejanzas. Utilizando un tangram de triángulos

[86] En el Plan 97 aparece el uso de instrumentos como contenido de la siguiente forma: *Dibujo y trazos geométricos*. *Construcciones con regla y compás*. En el Plan 2012 se define así: *Construcción de triángulos con regla y compás.*

> para que los alumnos construyan una figura según su imaginación. Después pedir que identifiquen las características y semejanzas o diferencias.
> P: ¿Qué conocimientos deben tener los niños para poder hacer esta actividad?
> FP1: Vocabulario y conocimiento de que es línea, lado, figura geométrica, lenguaje sobre comparación, largo, corto, pequeño, grande.
> P: ¿Cómo abordarían este contenido en el grupo que atienden para trabajarlo con todos los grupos al mismo tiempo?
> FP1: El contenido de características y propiedades del triángulo lo abarcaría con mi grupo de 1°, 2° y 3°, a partir de una situación real, daría tratamiento a través del empleo de material didáctico como triángulos de distintas medidas para que los comparen y agrupen.

Es preciso recordar que una vez que el docente durante el proceso de formación se ubica como eventual profesor transforma en actividades de enseñanza las situaciones geométricas que había resuelto como aprendiz, es entonces que se hacen presentes las estrategias de transposición. Por lo tanto, a partir de las nociones iniciales de FP1 sobre la manera en que trabajaría esta situación de referencia con sus alumnos, distinguimos el diseño de una situación didáctica previa, en otras palabras, razona que de acuerdo al contenido geométrico y las características de su grupo[87] es fundamental diseñar actividades previas, pues existen contenidos que deberá ser trabajados antes de la clasificación de triángulos. Asimismo, en las modificaciones que sugiere predomina la génesis instrumental, pero también aparece la génesis figural cuando propone una actividad con el tangram y con los triángulos en bolsitas.

En este punto es de reconocerse que plantea solicitar una descripción a los niños (similar a lo que se le pidió a ella), actividad que también aparece en las sugerencias de los demás profesores, sin embargo, la diferencia es que entre los conocimientos que considera deben tener los niños FP1 menciona el "vocabulario". A partir de sus respuestas, puede inferirse que FP1 espera que los niños posean ciertas nociones geométricas formales ya que, al parecer, entre sus actividades solicitará justificaciones en la que se incluyan dichas nociones. Este punto debió ser motivo de

[87] En el capítulo III se mencionó que el conocimiento de los propósitos de la asignatura, de las técnicas de la enseñanza, de las características de los alumnos, etc., son saberes propios de su rol como profesor.

discusión posteriormente ya que se relaciona con el tipo de prueba que se habrá de solicitar a los niños.

En conclusión, puede decirse que en las discusiones y hojas de trabajo se refleja hasta el momento un adecuado tratamiento didáctico del contenido por parte del profesor, además las estrategias que proponen corresponden con las características de su grupo multigrado, es decir reflejan el conocimiento que los profesores ostentan acerca del programa de estudios de educación básica y de las características de los niños, por ello, es importante en un siguiente momento examinar si estas reflexiones iniciales se modifican como consecuencia del trabajo en el ETG que configuró la formadora y en el cual ellos desarrollaron algunas actividades.

6.2.2. Organización de contenidos y selección de tareas.

Durante el proceso de diseño de la situación didáctica, se observan aspectos relevantes como la selección de tareas por parte de los profesores. Dicha selección tiene relación con dos factores, uno de ellos fue el cumplimiento de los contenidos inscritos en los libros para el maestro y los programas de estudio, es decir, que los profesores buscan que sean tareas que correspondan a las expectativas institucionales descritas de manera más o menos explícita en el ETG de referencia y ETG idóneo de los textos escolares. Otro factor que incide en la elección de tareas, es que se encuentren presentes los elementos teóricos del ETG, este aspecto se analiza en los fragmentos siguientes.

> FP2: Entonces hay que ver los programas y los libros para el maestro, bueno yo tengo desde cuarto hasta sexto, esos voy a revisar.
> PS2: Pero yo también voy a considerar los contenidos de cuarto maestra, aunque tenga quinto y sexto nada más, porque mis niños están un poco atrasados.
> FP2: Aquí hay uno en cuarto mire. (Lee el contenido que considera se relaciona)
> PS2: Está bien maestra. Este contenido de quinto puede ser al final, para que vean primero los niños lo de la clasificación de triángulos. ¿Podemos dejar uno o ponemos dos?, bueno creo que podemos dejar los dos y entonces empezar con ese de cuarto, para ver los vértices, los lados, los ángulos y terminar con el de quinto.
> FP2: Muy bien, deje busco el de sexto.
> PS2: ¿Esto que estamos planeando tiene que ser para una sesión?

> FP2: No, es una situación didáctica que podemos darle continuidad en varias sesiones. También creo que podemos agregar un contenido de los prismas que viene en sexto.
> PS2: Creo que ahí ya entraríamos a otros contenidos. Estamos viendo lo de los triángulos y aunque sí se puede trabajar con los cuerpos geométricos, creo que se va a extender mucho. Por lo pronto considero mejor que lo dejemos así y busquemos otro que sí se relacione. Además, todavía no van a llegar a eso los niños de cuarto, el libro lo marca más adelante.

Se puede observar que, para elegir los contenidos a trabajar y el orden en que se integrarán a la situación didáctica, PS2 menciona que su grupo requiere la inclusión de un contenido de cuarto grado y por las características epistemológicas del contenido, optan porque sea el primero, (el contenido de 4° es la *Clasificación de los triángulos con base en la medida de sus lados y ángulos*[88]*)*. Posteriormente consideran prudente agregar el contenido de 5°, la *Construcción y uso de una fórmula para calcular el área de un triángulo y el trapecio*.

Es importante mencionar, que en el libro de quinto se incluye el contenido *Localización y trazo de las alturas del triángulo*, y que en la primera versión que hicieron los profesores no lo incluyeron, aunque esta decisión puede tener relación con el hecho de basarse en el libro de cuarto grado. Esta decisión cambió, una vez que hicieron las adecuaciones individualmente, ya que identificaron que de acuerdo al orden en los libros iba primero *localizar y trazar*, por lo que en este caso decidieron respetar lo que sugieren los programas de estudio.

Otro de los rasgos importantes, es que en esta situación didáctica PS2 no considera necesario relacionar el trabajo con cuerpos geométricos, en primer lugar, porque lo considera muy extenso y en segundo porque el hecho de que los programas de estudio lo sugieran en bloques distintos en los diferentes grados, es por ello que hace una graduación[89] de los contenidos seleccionados para poder integrar a los niños en una clase única.

---

[88] Este es uno de los contenidos en que se basa la primera situación de referencia.
[89] Se ha explicado en párrafos anteriores a lo que nos referimos con graduación de contenidos, particularmente en el capítulo IV.

En el trabajo con los grupos multigrado, la flexibilidad curricular forma parte del trabajo cotidiano del profesor, además de considerar lo que marcan los programas para cada grado, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, el profesor debe revisar el orden en que puede trabajarlo cuando diseña una clase única.

> FP1: Maestra, ya anotamos los contenidos de los dos grados, pero ¿y si no hay uno que se relacione pero que debe estar?, ¿lo puedo agregar?
> I: Sí, ustedes pueden agregar los contenidos que crean son necesarios para el logro del aprendizaje esperado.
> PS1: Sí, pero, ¿No tendremos que relacionarlo también con el objetivo que vimos contigo?, ¿o lo ponemos este como un primer momento?
> //Se refiere al contenido de la situación de referencia//
> FP1: Creo que es mejor si ponemos este y luego ya ponemos el de las características de los triángulos.
> //Deciden acomodar redacción del contenido en una intención didáctica extra de acuerdo a lo que se estudió en la situación de referencia//
> FP1: Ya veríamos lo de los lados con los niños de primero, ¿verdad?, con segundo y con tercero vemos los ángulos.
> PS2: Ajá

Algo similar sucedió con el equipo de los grados inferiores, con la diferencia que las profesoras consideraron prudente "adaptar" el contenido que se trabajó en la situación de referencia, debido a que los programas de primero y segundo no lo consideran. En el caso de tercer grado, no se les dificultó porque los contenidos sí tienen relación. También se observa que, al igual que en el equipo anterior, la organización considera el diseño de la clase única pero con contenidos diferentes de acuerdo al grado escolar.

En lo que concierne a la aplicación del ETG idóneo en el aula, de la escuela primaria se dará seguimiento a dos de las profesoras que integran este equipo (FP1 y PS1) ya que atienden a los grados pequeños, donde se ha mencionado que la génesis discursiva es escasa, además durante el diseño de la planificación se observó un análisis centrado en los elementos teóricos revisados y una amplia discusión sobre las modificaciones necesarias de acuerdo al nivel cognitivo de los niños, esto lo podremos identificar más adelante cuando se describan las tareas seleccionadas por ellas. Entonces, resulta importante analizar el espacio de trabajo idóneo didáctico para caracterizar el tránsito entre el espacio personal y el espacio idóneo que configuraron.

6.2.3. Los componentes del ETG en las tareas propuestas.

Una vez que los equipos iniciaron la redacción de sus planes de clase, lo hicieron siguiendo las fases que se proponen en la TSD, a la par, reflexionaban en dónde y cómo se encontrarían presentes los componentes del ETG al reconocer que no hay un orden para ellos pues es un proceso dinámico, bajo esta consideración los incluyeron en los distintos momentos de la situación de acuerdo a lo que pretendían favorecer en ellos.

Cabe mencionar que como parte de la planificación, se solicitó que elaboraran una actividad sencilla como preparación del "medio" para que les permitiera identificar los conocimientos que poseen los alumnos y así poder seleccionar la tarea que plantearían. Para ello hicieron un análisis a priori de lo que aportaría la actividad, lo cual se observa en la figura 57.

ANÁLISIS A PRIORI

En la etapa de rescate de conocimientos previos cuando los alumnos forman el avioncito y se les cuestiona sobre el tipo de figuras que son, probablemente los de tercer grado reconozcan más fácilmente que se tratan de triángulos, lo que ayudará a empezar a construir sus concepciones a los niños de 1° y 2°. Las preguntas realizadas permitirán recuperar lo que conocen acerca de las clasificaciones de estos por sus lados y ángulos, y ayudará a los niños de grados inferiores a construir algunos conceptos.

SITUACIÓN DIDÁCTICA: Los triángulos

PREPARACIÓN DEL MEDIO

Entregaré a cada alumno una hoja de papel para que forme un avión. Preguntaré a los alumnos:
¿Han construido alguna vez un avión?
¿Cómo se hace?
Pediré a un niño de los que contesten que si saben construir un avión (de tercero primordialmente), que nos apoye a dar las indicaciones al grupo sobre su construcción, de no haber algún voluntario, procederé a guiar la actividad para la construcción. Terminado el avión pediré que lo desdoblen y marquen con un plumón las líneas que se formaron. Solicitaré que observen las figuras formadas y preguntaré:
*¿Qué figuras se forman al desdoblar la hoja?
*¿Cómo se llaman estas figuras?
*¿Las conocen?
*¿Por qué creen que se llamen triángulos?
*¿Todas las figuras formadas son iguales?
*¿Sus lados son iguales en todas?
*¿Entonces se llamarán igual?
*¿Todos los triángulos son iguales?
*¿Por qué?

Figura 57. Fragmento del plan de clase elaborado por el Equipo 1.

Durante la discusión, PS1 proponía trabajar con el tangram directamente (que es la sugerencia del libro de texto), sin embargo FP1 comentó que como preparación del "medio" era necesario plantear una actividad diferente que permitiera identificar los conocimientos previos de los niños, en este mismo caso, FP3 propuso la construcción de un avioncito de papel que al desdoblarse pudieran observar los triángulos que se formaban. Dicha propuesta fue aceptada, y consideraron también que en este momento se encontraba presente la visualización de los triángulos, pero a partir de algo diferente, la identificación del triángulo en los dobleces del avión. Aunque no fuera la única figura geométrica que se formara en ellos mediante el doblado, los profesores asumieron que los niños no sólo deberían centrar la atención en las imágenes de los triángulos, sino en todas las figuras. Con relación a esta decisión, PS1 señala "*mis niños no se saben nada de las figuras, ni su nombre, las han visto pero no saben cómo se llaman, es más las confunden, por eso debo empezar con algo más sencillo*", frente a este argumento FP1 contesta *"pero los que sí saben ayudan, por eso yo le pongo acá en el análisis a priori que los de tercero deben de saber y apoyar a los que no, por eso es una actividad grupal".*

Estas reflexiones dan cuenta de la manera como los profesores proponen movilizar la visualización para propiciar que los niños manifiesten lo que saben acerca de los triángulos, lo que representa un indicio acerca de sus ideas sobre el papel que se le otorga a la discusión en grupo y la manera como ésta favorece el trabajo en el aula multigrado. Concerniente al componente de visualización puede apreciarse que, cuando diseñan la tarea central, la integran también en la fase de acción (de acuerdo con la TSD), incluso, como se puede ver en el siguiente fragmento, hacen una modificación en la situación de referencia para adaptarla al nivel de los alumnos.

> PS1: Hay que agregar la hoja con los triángulos que trabajamos con la maestra, pero, ¿la puedo modificar poniéndole colores?, ¿o tiene qué ser exactamente igual?
> I: ¿Por qué usar colores?
> PS1: Porque puedo usar un color diferente para cada uno, no los voy a repetir, por ejemplo morado, azul... yo lo quiero utilizar tanto para la referencia de que lo ubiquen y para que no digan como nosotros, el escaleno, el que tiene el ángulo agudo, o sea, si no,

> el morado, el amarillo, o sea como una asociación, y que sean diferentes para que se les haga llamativo
> FP1: Sí, en lugar de números pueden ser colores.
> PS1: Ándale, y ya cuando digan, yo escogí el morado, y el que describió cómo es el morado, cómo es el amarillo,
> FP1: Es como los números, se usan los colores para diferenciar los tipos de triángulos, pero que no afecte tanto la propiedad del triángulo, sino nada más para que los distingan.

En este punto, los profesores plantean la relación entre las imágenes y las características de los triángulos a partir de las adivinanzas en las que se incluye su descripción, pero no analizan lo que concierne al espacio real local (líneas, lados, vértices, ángulos) y por ello no se profundiza en la activación de la génesis figural, aunque sí reconocen la relación entre la visualización y la prueba. Puede afirmarse entonces que en el diseño de las tareas de enseñanza se lleva a cabo una transposición didáctica porque los profesores reconocen que el saber en juego (tipos de triángulo) tal vez no aparecerá en los niños, por lo que resulta conveniente diferenciar las figuras a partir de colores y apoyarse en sus descripciones pero, sin la inclusión de las propiedades del triángulo con las modificaciones a la situación.

Por otra parte, el tratamiento didáctico de los contenidos es fundamental para que el profesor diseñe un espacio de trabajo idóneo, es decir se requiere analizar la forma en que los alumnos realicen las tareas de enseñanza y las posibles dificultades a las que se enfrenten. El análisis de este aspecto, se profundizará una vez que se analicen las clases de las profesoras, para establecer las similitudes y diferencias que pueda haber generado esta propuesta de Formación. En el siguiente fragmento puede observarse la forma en que conceptualizan el componente prueba.

> FP1: La descripción sería la prueba
> PS1: Una descripción breve, ¿y si no me escriben?
> FP1: De todos modos hay que pedir la descripción pero no como escritura si no como lectura. Pueden justificar por qué relacionaron una descripción con un determinado tipo de triángulo. Ese sería el caso de los niños de primero. Yo a los de segundo y tercero les puedo pedir que la escriban.
> PS1: Sí, aunque más bien está bien que yo ya les lleve la adivinanza para que ellos asocien con cual triángulo, entonces ya se les va a hacer más fácil porque los triángulos están en colores.

> FP1: Yo estaba pensando en poner un tren con tres vagoncitos y luego por ejemplo poner, como la descripción de que el que tiene todos sus lados iguales se llama equilátero, y así con los demás, y que los niños con la tarjetita que tienen, escojan un triángulo, y que lo vayan ahí a poner donde ellos creen que van, según lo que ya vimos en clase.
> PS1: Sí me sirve. Y para poder ver el tema con las adivinanzas ya hechas, y que las asocien por ejemplo pudiéramos hacer un juego donde cada uno saque una adivinanza diferente y que ellos identifiquen con cuál, para que me sirva de lectura puedo pegarlas en el pizarrón, tener la hoja de triángulos grande de colores, y que digan, como que esta descripción se parece al rojo, al azul, que agarren el amarillo, y que vayamos creando entre todos ya que todos, puedo cuestionarlos, están de acuerdo, estará bien fulanito.

Ahora bien, en la actividad con las adivinanzas, como puede verse en el fragmento anterior destaca la búsqueda de los profesores de diversas estrategias para que los alumnos comuniquen aquello que los niños identifican en los triángulos (vagones de trenes, lectura de las adivinanzas, descripciones escritas, lectura grupal, hoja grande de los triángulos) en este sentido, podemos determinar que intentan activar la génesis discursiva, ya que la validación forma parte de las acciones que confirmarán los conocimientos que adquieran los niños. La acción de solicitar a los niños en la clase una justificación (oral o escrita), tiene que ver con el hecho de que, cuando los profesores analizaron el espacio idóneo de los textos escolares, se percataron que el tipo de tareas solicitadas incluía escasamente estas gestiones y que además, el papel del profesor aparecía algo confuso.

A este elemento, la justificación, ambos equipos le dieron prioridad tanto en sus diseños como en sus discusiones, puesto que lo consideran importante para identificar el nivel de razonamiento geométrico que tienen los alumnos y además, suponen, no es una acción que pueda desplegarse solamente al final de las clases, sino que puede hacerse durante los momentos que sean necesarios. Lo anterior puede observarse en la siguiente ilustración (figura 58) que muestra el análisis a priori de la primera versión de la planificación de los grados superiores.

ANÁLISIS A PRIORI

El alumno comenzará por elegir uno de los triángulos de los ejemplos entregados con anterioridad, para que un primer plano visualice la forma en que pueda dar las instrucciones para que otro compañero se capaz de llevar a cabo la construcción de dicho triangulo, en la realización de esta actividad es probable que de acuerdo a los conocimientos previos que cada uno de los niños pueda llegar a poseer se pueda denotar el uso de un lenguaje que conlleve a el uso de conceptos matemáticos: como pudiera ser la línea recta, los ejes de simetría, ángulos, áreas, y ya en un caso más avanzado que quizás el alumno ya posea un conocimiento más concreto en lo que refiere a la clasificación de los triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y sus ángulos. Es probable que por el hecho de que los alumnos sean de tres grados distintos y que como ya se mencionó por parte de los niños mayores se generé una descripción que conllevé conceptos matemáticos más amplios que a diferencia de los niños de 4° o incluso 5° por lo cual se presenten confusiones, para lo cual se debe prestar atención a visualizar la manera de intervenir para lograr que cada niño logre comprender la instrucción de su compañero.

Un obstáculo que se puede presentar en lo que respecta a la actividad de la descripción de todas las figuras, es que los niños tengan dificultades para describir las características de cada uno de los triángulos, que la descripción de cada triángulo sea repetitiva con la frase de que "es una figura de tres lados" y no se logre rescatar otras características que los diferencien.

Figura 58. Recorte de plan de clase del Equipo 2. Análisis a priori.

En el "análisis a priori" del fragmento anterior (figura 58) se observa que los profesores reconocen que, en la fase de socialización hay posibilidades que los niños empleen el lenguaje propio de los conceptos geométricos involucrados, de acuerdo con el grado escolar que cursan. En este sentido, señalan que el nivel a alcanzar es la clasificación de triángulos porque es el contenido de la primera actividad, pero esperan que en los discursos de los niños aparezcan conocimientos diferenciados por ser alumnos de distintos grados. Queda de manifiesto que el diseño de la "clase única" para grupos multigrado, permite al profesor articular los conocimientos que poseen los niños y pueda favorecer el razonamiento geométrico de acuerdo con el nivel cognitivo de los niños, hay indicios de que esta consideración ha sido tomada por los profesores y que por ello reconocen que los discursos y tipos de prueba que se pidan a los niños deben tener ciertas diferencias en congruencia con su nivel cognitivo de los niños y el grado escolar que cursan.

Puede observarse también el énfasis que los profesores hacen del rol del profesor durante la discusión, cuando señalan que el docente debe poner especial atención en sus intervenciones, pues con ellas debe favorecer que los niños comprendan la instrucción, en este sentido, las discusiones grupales están orientadas no solamente a los argumentos expuestos por los niños, sino en una intervención adecuada que permita la confrontación de ideas y la validación de justificaciones. Esta idea se encuentra asociada con el desarrollo de la experimentación, donde han modificado sus ideas iniciales a partir de las discusiones grupales.

En el análisis a priori siguiente puede observarse que se señalan los momentos de intervención del profesor e intentan clarificar los puntos centrales a discutir en clase (redacción de las instrucciones, palabras clave para favorecer la construcción del triángulo, dificultades en el proceso de construcción, utilización de los instrumentos, diferencias de los tipos de triángulos). Recuérdese que durante el análisis de las orientaciones didácticas de los libros para el maestro, el papel del profesor fue uno de los aspectos que reflexionaron debería describirse más puntualmente, sobre todo en lo que se refiere a permitir que los niños argumenten sus acciones. Es por esta razón que en este análisis "a priori" mencionan los momentos en que debe intervenir el docente para organizar y desarrollar la validación y llegar a la institucionalización del saber en juego, la clasificación de triángulos. De igual manera, como se puede ver en el fragmento siguiente (figura 59), consideran el uso del lenguaje como parte importante de su plan de clase.

FASE DE VALIDACIÓN

Una vez que se haya efectuado la realización de las actividades desprendidas de las dos consignas se dará apertura a un espacio en el que primeramente algunos alumnos den a conocer su experiencia en la redacción de las instrucciones para que su compañero lograra correctamente la construcción del triángulo, qué palabras utilizaron para la construcción de las instrucciones que consideraron que serían clave para que sus compañeros ayudaron a reconocer que se trataba del triángulo que ellos seleccionaron, de igual manera la forma en que redactaron las instrucciones como son las palabras que utilizan al inicio de cada instrucción (con la finalidad de que en relación con la vinculación al contenido de español acerca de las características y estructura de los instructivos reconozcan el uso de los verbos que indican la acción principal de la instrucción).
Por otro lado se pedirá a los alumnos que den a conocer su experiencia al seguir la instrucciones otro compañero, si lograron comprenderlas, si lograron construir rápidamente el triángulo o tuvieron dificultades, y finalmente cuestionar a los alumnos si una vez que se les indicó que utilizarán los instrumentos de medición sabían la manera en cómo utilizarlo y si a través de ello identificaron la diferencia entre un triángulo y otro, y si a pesar de estas diferencias todos los triángulos reciben el mismo nombre.

(A partir del último cuestionamiento se espera los alumnos hayan reconocido los tipos de triángulos de acuerdo a los lados y ángulos y esto pueda dar paso a la fase de institucionalización)

Figura 59. Fragmento del plan de clase del Equipo 2.

En el recorte de clase anterior (figura 59), puede observarse el énfasis que los profesores hacen en el lenguaje que esperan utilice el niño, es decir, reconocen que el referencial debe articularse con la prueba para activar la génesis discursiva y con ello desarrollar el razonamiento geométrico, esto significa que dan importancia al uso de un lenguaje formal basado en criterios y propiedades para con ello, favorecer la aparición de pruebas de tipo intelectual. Lo anterior también es evidencia de la importancia en su diseño de clase sobre el discurso de los niños ya que en la planeación se plantea la transición de un lenguaje natural a un lenguaje formal, de igual manera, como se puede observar, aprecian como necesaria la justificación respecto a la utilización de los artefactos en la movilización de la construcción, lo que puede considerarse como una decisión adecuada, ya que puede llegarse a la demostración a partir del tránsito entre pruebas pragmáticas e intelectuales que se genere en la validación.

En el fragmento siguiente, se observa como los profesores revisan que en el diseño de la clase se haya incluido la movilización de los componentes del ETG.

> FP3: Ahora, ¿qué seguiría?, falta la construcción.
> PS1: Aquí ya llevan algo de construcción las figuras, porque al momento de que asocien y que relacionen, la adivinanza con su triángulo, construyen.
> FP3: Los artefactos pueden ser el problema
> PS1: Que es la adivinanza...
> FP3: Pero que realicen algo
> FP1: Yo había pensado con los popotes.
> FP3: Los niños pequeños necesitan construir los triángulos, no basta con solo verlos
> PS1: No, los tienen que construir. Aunque yo digo que mentalmente debieron de construir la concepción de triángulo cuando leyeron la descripción, ese sería el primer momento, el segundo momento es cuando lo construyan con el material. Y que digan su argumento, que digan por qué. Que pasen y lo expongan. Así terminaría esta parte.

Cuando revisan si han integrado la construcción en su situación didáctica, se aprecia que la consideran un polo del plano cognitivo, es decir, reconocen que es un proceso mental que el geómetra realiza una vez que usa y le da sentido a los artefactos (materiales y simbólicos). Es por ello que los profesores señalan que la descripción (artefacto simbólico) propicia la construcción de una configuración mental de un determinado tipo de triángulo. Por lo tanto, el componente construcción se moviliza una vez que ha construido mentalmente la concepción del triángulo mediante la lectura de las descripciones.

Por otra parte, es de apreciarse que relacionan la construcción con la actividad de los popotes, aunque los profesores no utilizaron el material (popotes) para justificar la condición de construcción dados los tres lados, sí consideran que en la escuela primaria es importante la experimentación como recurso para llegar a la validación del contenido geométrico, es decir, determinan necesario se manipule material concreto para lograr el aprendizaje esperado. En este sentido observamos que propician el uso de los artefactos (popotes) para movilizar el componente construcción, en otras palabras, pretenden activar la génesis instrumental.

En conclusión, para diseñar un ETG idóneo, fue necesario que los profesores desplegaran los conocimientos que ya tenían, pero lo más importante, fue ineludible que echaran mano de los conocimientos que adquirieron mediante las tareas didácticas y matemáticas que se les plantearon en el ETG, además de la discusión entre los profesores respecto a la pertinencia de las actividades. En este tenor, ha podido observarse la progresión en sus conocimientos geométrico-didácticos, que les posibilitaron reconocer la manera en la que habrían de articular los componentes del ETG en su diseño de clase, particularmente es notable la manera que integran la génesis discursiva y los tipos de prueba en el aula multigrado.

Ahora bien, es cierto que en las discusiones analizadas no se identifican todos los elementos del ETG y los momentos de su aplicación, pero en las planificaciones diseñadas sí se observa la movilización que se hizo de cada uno de ellos y sobre todo en las prácticas en el aula, estas diferencias se mencionan en los capítulos siguientes, pero de manera lo general podemos mencionar que están asociadas a la organización del grupo multigrado con base en los conocimientos y experiencia que tiene cada profesor sobre este tema. Es por ello que resulta relevante analizar el ETG idóneo que gestionó el profesor en el aula de los niños y su relación con su ETG personal, los hallazgos de tal análisis se incluyen en los capítulos siguientes.

CAPÍTULO VII
LA TRANSICIÓN DEL ETG PERSONAL AL ETG IDÓNEO. EL PREDOMINIO DE LA VISUALIZACIÓN Y LA CONSTRUCCIÓN.

En los capítulos anteriores se han analizado los distintos espacios que conforman el ETG de los profesores, no obstante, para comprender el proceso de transposición didáctica que realiza el docente es fundamental caracterizar su trabajo didáctico. La transposición de los saberes que ha adquirido durante su formación, permiten suponer que el espacio idóneo no puede ser estático, pues una vez que se han planificado las situaciones didácticas, cuando se establece la relación entre maestro, alumno y saber en el aula, se suscitan una serie de fenómenos que probablemente no se pensaron en el diseño de la clase y que provocan intervenciones del profesor que inciden en el logro del aprendizaje.

Recuérdese que es precisamente en el espacio idóneo desarrollado en el aula donde cobra sentido el diseño de las situaciones de enseñanza que corresponden a los distintos criterios matemáticos que se estudian en una institución en particular; asimismo, mediante la observación de las tareas desarrolladas también puede caracterizarse la importancia de que el profesor reconozca el rol que tiene la activación de todas las génesis en la construcción de un espacio idóneo efectivo para la enseñanza de la geometría. Para determinar la pertinencia de la experimentación sobre la formación de profesores en el marco teórico del ETG, en el presente capítulo y el capítulo siguiente consideramos la distinción de dos cuestiones centrales para el análisis:

- ***¿De qué manera se activan los distintos componentes del ETG en las tareas implementadas para la enseñanza de los triángulos?***
- ***¿Cuáles son las acciones didácticas que se despliegan en el trabajo didáctico del profesor?***

Con base en lo anterior, podremos identificar la forma en que se hacen presentes los distintos componentes del ETG que se contemplaron durante el diseño de las situaciones didácticas así como las diversas acciones que el profesor realiza en el rol de profesor y que pueden obstaculizar o potencializar la actividad geométrica de los niños.

Para dar cuenta de los hallazgos se analizaron las clases de las profesoras[90], dividiendo las sesiones por episodios y se tomaron para el análisis sólo aquellos donde se observaron las tareas más relevantes que dan cuenta del tratamiento didáctico que dan a los contenidos. Con la finalidad de caracterizar el ETG idóneo para la enseñanza de la geometría, el presente capítulo corresponde particularmente al análisis del trabajo en el aula de una de las docentes.

La profesora María estudió su licenciatura en una Escuela Normal Rural cuando se desarrollaba el llamado Plan 97 y en cuyos programas de estudio incluía por primera vez en México el estudio de la didáctica de las matemáticas, también estudió una Maestría en Pedagogía de la Educación. Tiene 18 años trabajando en escuelas primarias y durante ese tiempo ha acumulado una experiencia de ocho años con grupos multigrado, en su entorno de trabajo tiene bien ganada la fama de ser una buena maestra y durante varios años sus alumnos han destacado constantemente obteniendo primeros lugares en concursos académicos de aprovechamiento, particularmente en matemáticas, además de que en la mayoría de sus años de servicio casi siempre le asignan los grupos de primero y segundo grados en las escuelas multigrado o de organización completa (donde se atiende un solo grado) en las que ha trabajado, las razones anteriores conforman el criterio de selección para que fuese sujeto de esta investigación.

Durante el diseño de las situaciones didácticas, se mencionó de las posibles modificaciones que cada uno de los profesores realizaría para aplicarla en los grupos de niños que atienden, en este sentido, María optó por integrar una situación didáctica previa a la ya diseñada. La primera secuencia de tareas la trabajó en dos sesiones clase y la segunda en tres sesiones clase, un total

[90] Como se mencionó en el capítulo anterior, para el seguimiento de la práctica en el aula, se consideraron a la PS1 y la FP1, las cuales se nombraron de manera ficticia María y Daniela respectivamente.

de cinco sesiones cada una con una duración aproximada de 45 minutos. Para esta adecuación, revisó los libros del alumno y el profesor de primero y segundo grados pues son los grados que integran su grupo. Al concluir con esta revisión, seleccionó los contenidos de los grados que se estudiarían e incluyó otros que consideró, tenían relación con el triángulo. Los contenidos comprendidos en sus clases pueden observarse en la tabla 21, también se aprecia el propósito central de las sesiones, éste consistía en que el niño de primero logre identificar y construir figuras geométricas (en este caso el triángulo), y el de segundo, además de lo anterior, que describa las características para identificarlo.

Tabla 21. Contenidos e intenciones didácticas en que se basan las situaciones didácticas de la profesora María. Fuente: Elaboración propia.

Grado	**Contenidos**	**Intenciones didácticas**
1°	Que los alumnos identifiquen a que figura geométrica se le llama triángulo. Construye configuraciones usando configuraciones geométricas.	Que reconozcan la forma y la posición de las figuras. Que identifique el triángulo por sus números de lados y la relación entre sus longitudes.
2°	Que los alumnos identifiquen las características del triángulo y la clasificación de acuerdo a sus lados. Construye y describe figuras y cuerpos geométricos.	Que usen las características del triángulo para identificarlo. Que identifique el triángulo por sus números de lados y la relación entre sus longitudes.

Como se ha mencionado, en las discusiones durante el proceso de experimentación con los profesores se planteó la importancia de utilizar distintos tipos de prueba de acuerdo al nivel de los alumnos, también se subrayó el papel de la validación para reconocer el nivel de logro de los contenidos expuestos, aunque la planificación sea una clase única. Parte fundamental de lo anterior es la claridad que los docentes tengan con relación a los contenidos que se estudien y el nivel de avance que pretenda alcanzar en los alumnos. En este sentido, María describe el propósito general de ambas situaciones de la siguiente manera: *Que los alumnos conozcan y* *experimenten con diferentes tipos de triángulos para llegar a la comprensión de su definición y logren clasificarlos por la medida de sus lados.*

También es importante mencionar que no utilizó el libro de texto para seleccionar las tareas, solamente aplicó la reconstrucción de las actividades realizadas en la situación de referencia y algunas que ella había trabajado anteriormente. En lo que sigue se analizará el desarrollo de las clases de María.

7.1. DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS. EL CRITERIO DE LOS LADOS

El propósito de la primera situación didáctica que planteó María era que los niños identificaran los tipos de triángulos y los clasificaran de acuerdo a sus lados, la razón para diseñar esta situación previa tiene que ver con lo que ella expresó durante el diseño, que los niños no tenían conocimientos sobre las figuras geométricas, por ello organiza la clase en episodios como: explicación del tema, experimentación con material concreto sobre los tipos de triángulo, comprensión del tema y valoración de lo aprendido de manera grupal.

Durante el primer episodio, María opta por incluir una tarea que ha utilizado para otros contenidos matemáticos y que en su opinión le ha dado buenos resultados. La tarea consiste en proyectar un video donde se describe la definición general de triángulo y se explica la clasificación de triángulos de acuerdo a sus lados. Conforme avanzaba la explicación del video, lo detenía para plantear interrogantes y dar explicaciones a los niños para que fuesen identificando la información proporcionada, tal como se puede observar en el siguiente recorte de registro.

> //Hace la primera pausa en el video//
> M: ¿Se fijaron, por qué se llaman equiláteros?, porque sus lados están muy iguales, miden lo...
> Aos: Mismo
> Ao: Y cuando formamos el triángulo, de aquí a aquí mide lo mismo, que de aquí para acá, y que de aquí para acá (señala la imagen que aparece en el video)
> Ao: Si lo desacomodo voy a ver que todos sus lados van a medir lo mismo
> M: Muy bien. Continuamos (pone el video en el siguiente tipo de triángulo). Quedamos que éste tiene dos lados iguales y uno diferente, por ejemplo aquí, este triángulo tiene dos lados grandes y uno...
> Aos: Pequeño
> //Durante la explicación, la profesora hace pausas para que los niños completen las frases, aunque es la docente quien realiza las explicaciones//
> PS: Pero también puede ser al revés, también puede ser que dos lados sean pequeños y uno grande, pero como va a tener dos lados iguales también se va a llamar...
> Ao: Equilátero (recuerda el que apareció en el video)
> M: Isósceles (lo corrige), acuérdense, isósceles cuando tiene dos lados...del mismo tamaño, continuamos (pone la siguiente parte del video)
> ¿Se fijaron, cómo se llama el triángulo que tiene sus tres lados diferentes?
> M: Escaleno, se llama escaleno y ahí los tres lados son dife...
> Aos: rentes
> M: Ninguno mide igual, ¿verdad que no?, no, son diferentes y también los vamos a poder hacer de muchas formas...

La decisión de utilizar el video, como se dijo antes, se debe a la concepción que tiene respecto a que los niños "no saben nada" de las figuras, había expresado esta idea en las discusiones de las sesiones de la experimentación, en ellas María externó en varias ocasiones que era difícil trabajar con los niños pequeños, sobre todo si no contaban con el conocimiento necesario. En contraparte, durante la aprehensión teórica logró comprender los elementos teóricos del ETG y su importancia en el diseño de tareas, lo que refleja que durante el proceso de formación de los profesores es necesario ampliar el análisis didáctico sobre la intervención del profesor en congruencia con las posibles respuestas de los niños, dicha ampliación permitiría el diseño de tareas que favorezcan la adquisición del conocimiento en los niños.

También puede apreciarse en el acápite que durante la explicación del video, los alumnos expresan algunas nociones erróneas sobre las definiciones dadas, es el caso del niño que menciona *equilátero* cuando la definición se refiere al isósceles. En este suceso, María decide no cuestionar al alumno para que fuese él mismo o los compañeros quienes observaran la diferencia entre ambas definiciones y reconocieran su error, lo que se observa entonces es que no hay una devolución[91] basada en cuestionamientos que permita al alumno reflexionar sobre las características de cada uno de los tipos de triángulos, ya que es María quién “corrige”, quien valida la respuesta del niño y es también ella la que brinda la respuesta correcta. Con esta intervención, es posible que se limite el potencial de la prueba, validación y discurso que puede generarse en el aula, con las actividades previamente diseñadas. Probablemente, aun cuando las definiciones se encuentren presentes en el video, propiciar espacios de discusión sobre ellas, contribuiría a que el estudiante pueda adquirir este conocimiento de forma significativa y no sólo como algo que deberá memorizar para emplearlo posteriormente.

La circulación que se realiza en esta tarea se da en el plano epistemológico al describir el referencial y en una especie de institucionalización[92] al inicio de la clase, María introduce este componente mediante las definiciones del video. A partir de la explicación brindada, circulan las distintas tareas que posteriormente plantea en esta situación didáctica, es decir, considera que a partir de que los niños “aprendan” las definiciones de los triángulos de acuerdo a sus lados, estarán en condiciones de realizar otras tareas derivadas de este conocimiento. Sin duda, esta decisión de María puede estar influenciada por una concepción que, como se mencionó, tiene relación con su formación inicial o con la experiencia que ha adquirido en el servicio, esto es, forma parte de un estilo que la docente ha construido en la práctica. No obstante, debe

[91] Se considera la “devolución” como parte de la acción docente, es un proceso en que se debe devolver al alumno la responsabilidad del problema que se le propone, desde Brousseau (2010), el maestro no solamente debe proponerle al estudiante una actividad, sino también que el estudiante se sienta responsable de obtener el resultado propuesto, y que acepte la idea de que la solución depende solo del ejercicio del conocimiento que él ya posee.

[92] De acuerdo con Brousseau (2007), la institucionalización tiene un objetivo, debe tomarse conciencia del conocimiento de manera oficial tanto por los alumnos como el profesor, sin embargo reconoce que todo puede reducirse a la institucionalización y que una situación clásica de enseñanza es un escenario donde ésta carece de sentido, pues se dice lo que se quiere que el alumno aprenda, se le explica y se verifica si lo aprendió.

mencionarse que en el análisis de la perspectiva teórica del ETG, María mostró que comprendía los distintos componentes del ETG y su papel en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, señalaba reiteradamente además, que el componente prueba era fundamental para poder conocer lo que habían aprendido los niños, esta comprensión al parecer, orienta el trabajo de María en las sesiones siguientes en las que propone tareas donde se pide a los niños construir, visualizar y probar. El diseño de este tipo de tareas forma parte de un proceso de avance de la profesora en su rol como docente, a partir de lo realizado durante el papel de aprendiz y diseñadora.

7.2. VISUALIZAR Y CONSTRUIR, LA FUNCIÓN DE LOS MATERIALES

En el segundo episodio, que corresponde a la segunda clase, María sugiere a los estudiantes "construir" un triángulo empleando palitos de madera, y durante la explicación de la tarea hace intentos por generar la participación de los niños, pero, como se puede observar en el siguiente fragmento, predomina la explicación de la maestra.

> Explicación de la tarea:
> M: Ahorita les voy a dar un material, son tres palitos, ¿qué figura me va a salir si los junto?, son tres, pues un triángulo. Pero le hace falta algo con qué pegar las esquinas, para pegar las esquinas vamos a usar unas bolitas muy pequeñas de plastilina, con su pareja que tienen a un lado en su banca, y cuando ya lo tengan formado se van a fijar qué tipo de triángulo será, antes de que lo formen se van a fijar si sus lados son iguales, por ejemplo este (muestra uno hecho), si tiene tres lados iguales, se llama equilátero, y si tiene dos lados se llama isósceles. Entonces primero se van a fijar en eso y luego ya lo van a formar y le van a poner el nombre.
> Voy a poner el video donde se ve la imagen de los tres tipos de triángulos, y a cada quien le va a tocar un triángulo diferente y ese van a tener que formar en su bina, recuerden si es equilátero todos sus lados son iguales, isósceles que tiene dos lados iguales y uno desigual o escaleno que tiene los tres diferentes, muy bien voy a empezar a dar el material.

Mientras explica la tarea, María entrega tres palitos de distinto tamaño para que formen triángulos y los identifiquen, como cada paquete de palitos corresponde a un tipo distinto de triángulo, espera que identifiquen mínimamente un triángulo de cada tipo. Recuérdese que en el propósito de la tarea ella señala el conocimiento y la experimentación como acciones que propiciarán la comprensión de los tipos de triángulos, aunque con la explicación previa, limita este propósito, es ahí donde se inscribe la actividad, porque considera necesario que los niños reproduzcan con material concreto los triángulos estudiados para que conozcan sus características.

Esta tarea se inscribe en el paradigma GI, porque se emplean objetos materiales que no son necesariamente instrumentos geométricos, como formar los triángulos en papel ayudándose de los palitos, en este caso, los triángulos son representados con artefactos concretos (palitos) que representan el objeto, por lo tanto los medios de prueba son materiales.

Durante la tarea, para formar los triángulos, inmediatamente los niños utilizan una técnica, "medir" los palitos poniéndolos encima uno de otro para saber si son del mismo tamaño y luego juntarlos entre sí, mientras los niños hacían eso, como se puede apreciar en el siguiente recorte de registro, María se acerca a las binas para revisar lo que hacen y hacerles algunos cuestionamientos o sugerencias.

> Ao: A mí me tocó, largo, los tres lados
> M: ¿Serán iguales o desiguales?
> Ao: Son iguales
> M: ¿Sí?
> Ao: Sí...
> M: Bueno primero van a ver que triángulo se puede formar, pero deben medir si tiene todos sus lados iguales desiguales. A ver fíjense, si tiene sus lados iguales, o tiene dos lados iguales y uno diferente, ¿cómo será su triángulo?, ¿cómo se llamará, equilátero que tiene todas sus líneas iguales, escaleno que tiene todos diferentes?
> Ao: Maestra mire (le señala un triángulo que ha formado)
> M: ¿Pero qué es? (vuelve a repetir todas las características) ¿a ver qué será?
> //El niño no responde, solamente observa la unión de los tres palitos//

> M: Fíjense quedamos que... (vuelve a repetir las definiciones de cada uno), entonces, ¿tiene dos iguales?
> Ao: No
> M: ¿Diferentes los tres?, a ver fíjate, observa los palitos
> //El niño observa como la maestra los compara poniendo uno encima del otro o a un lado, para definir si son de la misma media //
> Ao: No
> M: Mira, estos don iguales y uno diferente, ¿entonces cómo se llamará?
> Ao: Isósceles (contesta el niño)
> M: Escríbanle isósceles. Miren, les voy a dar plastilina para que hagan tres bolitas, ¿para qué ocupamos tres bolitas?
> //Nadie le responde y opta por explicar la funcionalidad de las bolitas de plastilina//
> M: Para que no se les despegue el triángulo, miren una va aquí y la otra va acá, para que lo puedan formar. En cada esquinita va a ir una bolita de plastilina, por ejemplo aquí donde se unen dos lados, va una bolita, aquí otra y aquí otra, esas bolitas cuando estén más grandes van a aprender que se llaman vértices que es donde se unen dos lados.
> //Mientras forman el triángulo, los niños lo pegan como les indica la maestra// M: Cuando ustedes sean niños más grandes aprenderán el significado del término vértices, pero no ahorita.

Cada vez que María se acerca a una bina, plantea preguntas para que los niños puedan nombrar el triángulo que formaron, se observa que su acción va más allá de propiciar la reflexión de los alumnos, opta por explicar una y otra vez las características de los triángulos hasta obtener la respuesta que espera. Al parecer, esta acción obedece a la idea de que los niños no serán capaces de identificar esta figura geométrica por sí mismos, "porque aún no los conocen", esta acción limita el trabajo del geómetra (los niños) porque no se les permite encontrar las similitudes y diferencias de los triángulos como producto de su trabajo, sino que les es dado por la maestra. Algo más que se puede observar en este episodio es la manera como introduce un nuevo contenido geométrico, el vértice, "el que une a dos lados", pero como se pudo apreciar, no considera que puedan reflexionar sobre él porque ese conocimiento, en su opinión, está fuera del alcance de los niños será para "después, cuando sean niños más grandes". En esa misma sesión, como se puede ver en las siguientes imágenes (figura 60), los niños intentan hacer coincidir los extremos de los palitos para armar el triángulo, tal como se los propuso.

Figura 60. Ejemplo de las estrategias de los alumnos para formar el triángulo.

En la imagen de la izquierda de la figura 60, se trata de un triángulo equilátero porque son palitos del mismo tamaño, de modo que puede considerarse que no tendría dificultad para formar el triángulo. En la imagen de la derecha (figura 60) los palitos son de distinto tamaño, se requería que el niño probara diferentes combinaciones para formar el triángulo,[93] lo relevante es que los niños utilizan la estrategia propuesta por la profesora, por esta razón esta tarea no les representó dificultades, además la visualización de los triángulos en el video facilitó su representación. Es decir, María moviliza el componente visualización cuando se apoya en la proyección de las imágenes de los triángulos mediante el video y propicia la reproducción de las mismas a partir de la manipulación de materiales concretos (los palitos); además, como proporciona el material con una medida previamente determinada, se logra apreciar en las imágenes que la acción de los niños consiste solamente en unirlos. En esta tarea, el propósito es solamente la reproducción de las figuras según el modelo que se observa en el video empleando los instrumentos no geométricos que son los palitos.

Lo anterior se relaciona con lo que expone Duval (2005) sobre visualización, indica que plantear a los estudiantes acciones en función de las figuras puede ser una actividad extensa y variada, ya que las variaciones de actividad se relacionan tanto con la tarea en cuestión (para reproducir

[93] Los resultados de esta actividad se analizan con mayor profundidad en apartados siguientes, específicamente cuando se analiza la confrontación de resultados y estrategias.

una figura según un modelo, para construirla, para realizar mediciones, para describirla, para que sea reconstruida por otro alumno) como con el modo de la actividad solicitada (modalidad concreta utilizando un material manipulable, modo de representación apegándose a las únicas producciones gráficas, o modalidad técnica mediante la imposición de ciertos instrumentos) (2005, pág. 9).

Ahora bien, la actividad anterior corresponde a la entrada considerada como la más evidente e inmediata, la del botánico (botanise) Duval (2005). En esta entrada se reconocen y nombran las formas más elementales de la geometría plana (tipos de triángulos por ejemplo), se observan las características entre formas similares y/o diferentes y las propiedades se distinguen a partir de características visuales del entorno. Cabe señalar, que para Duval (2005), la actividad del botánico no es geométrica pues la observación bien podría ser representada con una copia a mano alzada sin requerir la utilización de algún instrumento, tal como se pudo apreciar en el análisis anterior.

En la primera actividad que desarrolla María, intenta que los niños construyan triángulos para luego relacionar sus características y clasificarlos de acuerdo a sus lados, en momentos posteriores de la clase solicita a los niños una prueba pragmática, particularmente del tipo Empirisme naïf (empirismo ingenuo) esto es los niños validan después de verificar los casos que analizaron en el grupo. De acuerdo al nivel educativo, al grado escolar y a la institución, es un tipo de prueba aceptada, pero para que una prueba pragmática se transforme en prueba intelectual, es necesario que los alumnos modifiquen intencionadamente el lenguaje natural por el formalismo del lenguaje simbólico. Esto último no logra apreciarse en el episodio analizado, probablemente debido a que las intervenciones de la profesora fueron recurrentes.

7.3. SOCIALIZACIÓN Y VALIDACIÓN. LA VERIFICACIÓN DE LO APRENDIDO

Con las tareas que ha propuesto y con el discurso desplegado, María va configurando paulatinamente un paradigma que determina la naturaleza de su clase, la forma en que se representa, se opera y se valida el trabajo con el objeto geométrico (triángulo). Hasta el momento, la clase ha seguido el curso de la explicación de las características de los triángulos, su visualización y los intentos por formar triángulos con materiales concretos, puede decirse que al parecer, se estaría instituyendo un paradigma en el que los objetos matemáticos no se transforman en un objeto matemático operatorio, sino que se conoce al objeto en cuestión para su posterior utilización, lo anterior en razón de que se activa parcialmente la génesis figural pues la visualización se asocia con un lenguaje basado en la información dada y no con en el razonamiento del geómetra (el niño). Recordemos que la importancia de la génesis figural radica en que da significatividad a los objetos puramente matemáticos al convertirlos en objetos matemático operatorios (Nikolantonakis & Vivier, 2016), en relación al tipo de operación con las figuras que se presentan y el cómo se movilizan sus propiedades. Es decir, en el caso del objeto matemático triángulo, además del conocimiento de las definiciones de los tipos de triángulo, es necesario un razonamiento de las mismas. De acuerdo a los planteamientos de Brousseau (2000):

> Con frecuencia se concibe a la enseñanza como la parte de las relaciones entre el sistema educativo y el alumno que conciernen a la transmisión de un saber dado, y entonces se interpreta a la relación didáctica como una comunicación de informaciones. Este esquema tripolar está asociado habitualmente con una concepción de enseñanza en la que el profesor organiza el saber por enseñar en una serie de mensajes de los cuales el alumno toma lo que debe adquirir. (pág. 7)

Podría decirse entonces que hasta ahora, esta noción se encuentra presente en el trabajo didáctico de María, al gestionar la clase mediante la organización de los conocimientos que se consideran necesarios para las siguientes tareas a realizar.

Siguiendo esta lógica, en la secuencia con esta situación didáctica, el último momento de la segunda sesión le corresponde a la socialización[94] de los resultados, donde el niño habrá de expresar los argumentos del proceso de reproducción de los triángulos a sus compañeros de grupo, esto es, una vez que los niños han conocido la clasificación de los triángulos (video) y experimentado estrategias para formarlos con los palitos, es momento de que María identifique el nivel de aprendizaje de los niños. La exigencia de la socialización radica en que los alumnos no solamente se apropien del problema, sino que también compartan su significado, en el caso particular de esta clase, en esta actividad se complica la activación de la génesis discursiva porque, de acuerdo con la intencionalidad de María, para verificar el conocimiento de las definiciones de los triángulos, no es necesario justificar, explicar o demostrar[95].

Balacheff (1987, citado en (Pizarro, 2018), menciona que en las interacciones entre alumnos con diferentes niveles de razonamiento, es posible que se susciten obstáculos derivados de malas interpretaciones, incluso que al no llegar a consensos predominen puntos de vista de algunos de los alumnos. En este punto cobra sentido el rol del profesor durante el momento de la validación, porque a partir de la confrontación de los argumentos que expresen los estudiantes él puede propiciar el desarrollo de un proceso de prueba. En el caso de la clase de María, se presenta en particular un tipo de validación: la explicación; como un discurso subjetivo con base en los conocimientos y racionalidad de quien lo explica, principalmente centrado en un lenguaje natural (Pizarro, 2018) mas no una validación del tipo prueba, al no observarse una confrontación de los argumentos expresados que no considere algo más que la definición ya mencionada en el video. Sobre este punto, en el fragmento siguiente se observa la discusión sobre la clasificación de los triángulos que formó cada bina.

---

[94] De acuerdo a Balacheff la preeminencia de la argumentación se encuentra en el proceso de validación dentro de un contexto social, relacionado a su vez de manera operacional con su socialización. A lo largo de la socialización hay diversas situaciones de interacción que le permiten desarrollar y verificar formas de discurso y estrategias argumentativas eficaces. (Balacheff, 2000, pág. 179)

[95] Para la diferenciación de estos términos se puede revisar el capítulo II de esta tesis o lo propuesto por (Balacheff, 2000).

> //María acomoda los productos de la actividad colocando letreros con el nombre del triángulo en cada caso//
> M: A ver, aquí dice equilátero, ¿quién tiene triángulo equilátero?, sólo van a pasar los que tengan ese triángulo (Algunos niños se acercan pero no los acomoda hasta que vuelve a preguntar a todo el grupo). A ver los equiláteros qué tienen, tres lados iguales, a ver vamos a ver el de Tadeo, ¿tiene sus tres lados iguales? (lo muestra y los va señalando)
> Aos: No...
> M: No, es un escaleno, a ver el de Cristian ¿Sí es el equilátero?, ¿tú qué opinas? (le pregunta a los más distraídos)
> Ao: No...
> M: A ver fíjate bien, los equiláteros tiene sus tres lados iguales, ¿será equilátero?
> Aos: Sí
> M: ¿También el de Santiago? (Muestra el de otro alumno), ¿es un equilátero?
> Aa: No, es un escaleno
> M: Muy bien, es un escaleno, entonces vamos a ponerlo aquí (lo coloca en el cartel con el nombre respectivo). Muy bien, ahora sigue otro nombre (muestra el cartel que dice isósceles), ¿quién tiene por ahí triángulos isósceles?, ¿cómo eran?, ¿tenían qué?
> Aos: Una parte chiquita y otra grandota
> M: Un parte chiquita y una larga, ¿pero sus lados eran qué?... Dos lados iguales y uno desigual.
> //Hace lo mismo, muestra el producto al grupo, les pregunta si es, repite sus características y señala la longitud de los lados. De esta manera revisa todos hasta que acaba, en esta ocasión los niños ya no se acercan, esperan a que la maestra pase por las hojas.

Puede verse que a pesar de los cuestionamientos, todo se reduce al discurso de María sobre el nombre de los triángulos y el tamaño de sus lados, la génesis discursiva de los geómetras (niños) sigue sin aparecer. Como se señaló desde un inicio, el componente referencial predomina en las discusiones, sin embargo, también podemos apreciar que se realiza una semi circulación en el plano del descubrimiento cuando se moviliza el polo de visualización, a partir de la representación semiótica de la figura geométrica (triángulo) para dar a conocer a los niños la clasificación. No obstante, María no hace devoluciones, sólo preguntas puntuales, es decir, en lugar de cuestionarlos sobre las características de los triángulos, es ella quien las menciona, *A ver fíjate bien, los equiláteros tiene sus tres lados iguales, ¿será equilátero?*, así, la pregunta siempre se acompaña de la respuesta que deberían emitir los niños.

En adición a lo anterior, este episodio comienza con la institucionalización del conocimiento en juego a partir de las descripciones señaladas desde el inicio. Tratar de hacer que participen los niños a través de preguntas cerradas, hace que el proceso de devolución resulte insuficiente. En cuanto a la otra institucionalización, la del final de la sesión, María acepta como saber oficial la respuesta de los alumnos ya enunciada por ella. Una vez concluida la socialización, los productos quedan en el aula para su posterior apreciación, organizados como se muestra en las imágenes (figura 61).

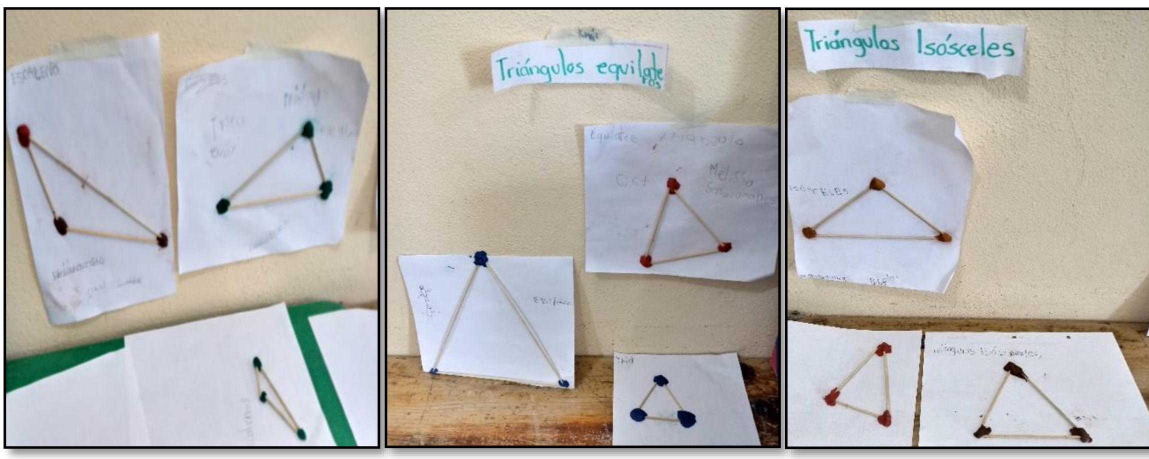


Figura 61. Organización de los productos después de la discusión grupal.

En las imágenes de la figura 61, encontramos de izquierda a derecha los triángulos escaleno, equilátero e isósceles respectivamente, es importante señalar que las medidas de las longitudes de los triángulos son variadas (esto fue propiciado por la docente ya que ella proporcionó los palitos previamente cortados). Estas evidencias permanecieron en el aula durante algunos días, pero para iniciar con la segunda situación, optó por retirarlos antes de empezar con la clase, probablemente para evitar que los niños recurrieran a ellos.

Se puede concluir que en esta primera situación didáctica el objetivo de la profesora se cumple medianamente, ya que logra "explicar" a los niños los conocimientos que ella piensa necesarios, era la "preocupación" que tenía. Con las tareas diseñadas, ha logrado parcialmente hacer visibles los distintos componentes de los planos cognitivo y epistemológico, pero no la activación de las génesis que dan sentido al proceso dinámico que debe estar presente en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Es importante destacar, que la segunda situación estuvo más apegada a lo que se había consensado en el trabajo en equipo en la sesión de diseño, es decir, tomó en cuenta las sugerencias y el análisis de la revisión teórica que surgió en las discusiones, por lo tanto se observa de manera más clara la movilización de los distintos elementos teóricos del ETG y los momentos de la situación didáctica.

7.4. ¿LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS O LA INSTITUCIONALIZACIÓN DEL SABER EN JUEGO?

En la segunda situación didáctica, durante la primera sesión, como actividad previa María junto con los alumnos construyen un avión de papel, el proceso de construcción permitía que al desdoblarlo, los niños trazaran líneas en los dobleces y con ellas se formaran figuras geométricas, particularmente triángulos. Mediante esta actividad María intentaba rescatar los conocimientos previos[96] de los niños, para luego adentrarlos en el tema a estudiar. En el siguiente fragmento puede apreciarse el momento en que solicita justifiquen la identificación de las figuras geométricas.

> M: Fíjense bien, ¿algún día ustedes han hecho un avión de papel?, ¿les gustaría hacer uno?, fíjense bien les voy a dar una hoja de papel para que con ella podamos hacer un avioncito.
> //Los niños comienzan a elaborar el avión siguiendo las indicaciones María, ella espera a que termine la mayoría para mencionar que luego podrán jugar con él y que antes realizarán una actividad//

[96] Recuérdese que en la situación didáctica anterior el propósito fue el estudio del triángulo y la clasificación por la longitud de sus lados.

M: Ahora lo vamos a desdoblar, ¿se fijan que cuando lo desdoblamos se forman líneas?, y esas las líneas ¿qué formaron?
Ao: La mía un triángulo
M: ¿Un triángulo, dónde?
Ao: Aquí (señala las líneas que forman el triángulo)
M: ¿Nada más hay uno?
Ao: Hay dos. Por las alas mire
M: A ver con sus colores van a delinear los triángulos o las formas que les salieron, ¿aparte de triángulos habrá otra forma por ahí?
Ao: A mí me salió un escaleno
M: ¿Un escaleno?, ¿sí son triángulos?, ¿por qué se llaman así?
Aos: Porque tienen tres lados
Aa: A mí me salieron diferentes triángulos, dos escalenos y uno que parece una pizza.
M: Oigan ¿y todas las figuras que están ahí son del mismo tamaño son iguales?
Aa: No, hay escalenos, este se parece a una pizza
Ao: Este se parece a un cuadrado
M: ¿Hay de diferentes formas?
Aa: Es escaleno (insiste la niña) y se parece a ese (señala una de las imágenes de los triángulos que puso la maestra en el pizarrón).
M: ¿Los triángulos que tienen en su hoja son iguales o son diferentes?
Ao: Algunos son iguales porque son hermanitos
M: Son hermanitos, ¿por qué?, ¿en qué se parecen?
Ao: En la forma y en que tienen tres lados.

En esta tarea no se pretende que los niños clasifiquen los triángulos o enuncien algunas características en particular, solamente que reconozcan la figura como tal, de modo que la activación de los conocimientos previos mediante la elaboración del avión permite identificar lo que saben los niños. Como puede observarse, los comentarios de los alumnos dan cuenta de que recuerdan lo que aprendió en las sesiones anteriores, en particular cuando mencionan al triángulo escaleno, lo que refleja el conocimiento adquirido en la primera situación (video y palitos). Es decir, podemos inferir como muy probable que cuando los alumnos hacen referencia al triángulo escaleno, lo hacen a partir de lo que se trabajó en la sesión previa diseñada por María.

Lo destacable es que cuando los profesores diseñaron la situación (avión), analizaban que ésta tendría que ser la primera situación en la secuencia y que no habría necesidad de incorporar el diseño de otra, como lo hizo María. Los profesores concluyeron eso durante la fase del diseño porque pensaron que habría muchas probabilidades de que los niños de ambos grados reconocieran los triángulos sin necesidad de una explicación previa. A pesar de la modificación que realizó al proyecto colectivo de la situación didáctica, en las discusiones se observó que la docente comprendió que la actividad del avión debía centrarse fundamentalmente en la definición del triángulo solamente y no en la clasificación de acuerdo a sus lados, por lo tanto, es posible que de esta reflexión se derive el hecho de que en ese momento, optara por no considerar las distintas participaciones que hacen alusión a esta característica y solamente enfatizar en la forma y tamaño del triángulo.

Como en el aula multigrado hay alumnos de distintos grados se puede recurrir a la memoria didáctica[97] para contribuir a la reflexión grupal. La memoria didáctica se pone de manifiesto cuando el profesor emplea informaciones relacionadas con conocimientos estudiados anteriormente. Recurrir a ella durante la planificación o el desarrollo de la clase, permite que la enseñanza se pueda adaptar a las necesidades y posibilidades de aprender que tienen los niños, es decir, se crean mejores condiciones para el aprendizaje, en este sentido, utilizarla adecuadamente favorece en mayor medida el nivel de comprensión que logren los niños. En esta ocasión, aún sin la situación didáctica inicial (video y palitos), debió contemplarse que los niños de segundo grado ya habían trabajado con las figuras geométricas y su conocimiento podría haber sido compartido con los demás, permitiendo que los niños de primer grado identificaran el triángulo.

[97] A decir de Brousseau y Centeno (1991, citados en (Ávila, 2001), “La memoria didáctica conduce al profesor a modificar sus decisiones en función de su pasado escolar común con sus alumnos, sin cambiar su sistema de decisión (el contrato en curso). El carácter "didáctico" de la memoria, deriva de que las decisiones modificadas conciernen a las relaciones de cada alumno con el saber en general y/o con un saber particular.” (Ávila, 2001, pág. 13)

Mediante la elaboración del avión, María activa las génesis figural e instrumental, la primera al movilizar el componente visualización en relación a la figura triángulo con base en las líneas (lados) como espacio real y local que sustenta la tarea. En lo concerniente a la génesis instrumental incorpora el uso de los artefactos para la elaborar el avión e identificar las figuras en los dobleces (problema a resolver), los trazos realizados en la hoja refieren al proceso mental de recordar lo que es un triángulo (componente de construcción). En cuanto a la génesis discursiva, no se activa durante el proceso de elaboración del avión, ya que, aunque solicita una explicación para que justifiquen sus acciones, no profundiza en ello ni emite comentarios afirmativos o negativos que refuten lo dicho por los alumnos, tampoco permite que sean otros niños los que pudieran aceptar o refutar las justificaciones y no es sino hasta el momento de la socialización que interviene nuevamente para puntualizar el saber en juego (referencial) pero no en relación al proceso que realizaron para identificarlo (procesos de prueba), sino para recordar la definición previamente estudiada, por tanto, no articula los componentes de prueba y referencial.

Al concluir la elaboración del avión, como podemos apreciar en la siguiente imagen (figura 62), no todos los niños logran formar exactamente triángulos con las líneas, pero la mayoría mínimamente lograron formal alguno, además no encontraron otras figuras geométricas, por ello cuando María cuestiona si encontraron alguna figura distinta, los niños no contestan. No obstante esta dificultad, la actividad fue adecuada para que la mayoría de los niños mencionaran la definición más general del triángulo, figura geométrica que tiene tres lados.

Figura 62. Ejemplos de los aviones elaborados por los niños.

Una vez que la mayoría de los alumnos elaboran su avión, como se puede apreciar en el siguiente acápite de registro, María procede con la revisión de los productos, en este momento se centra en preguntar si todas las figuras que aparecen en los dobleces son triángulos y cuántos triángulos encontraron en su avión.

> M: A ver ¿cuántos coloreaste en total Tadeo?, miren vamos a ver el trabajo de Tadeo, ¿cuántos tiene?, son 4 pero le faltó colorearlos, ¿y sí son triángulos?, ¿por qué? (Mientras pregunta muestra el trabajo de Tadeo)
> Aos: Sí...
> Ao: Porque tiene tres lados
> M: ¿Están todos de acuerdo?
> Aos: Sí
> M: ¿Por qué?
> Aa: Sí son triángulos, porque tienen tres lados.
> M: Bueno, hasta ahí se quedó la actividad, voy a recoger las hojas, vamos a seguir con otra actividad, lo bueno fue que ya se fijaron que los triángulos deben de tener tres lados para que se llamen triángulos.

Cuando el geómetra se enfrenta a la tarea geométrica (los niños) y despliega sus procedimientos mentales para resolverla, se hace presente el componente de visualización y como nos es posible apreciar, predomina la visualización que se despliega en el dominio geométrico, ésta se considera una de las actividades cognitivas más completas, pues inevitablemente el individuo debe ver, construir y razonar para aprehender los objetos geométricos, en este caso el triángulo.

Entre las formas de pensar la geometría, la intuición es la primera teoría que construye el geómetra respecto del objeto geométrico, recurre a ella cuando dibuja una figura o cuando la representa mentalmente, lo que le permite estudiar sus propiedades y tomar en cuenta las propiedades cualitativas que son el objeto propio de análisis, en este sentido la percepción está estrechamente relacionada con las propiedades, sin embargo, a decir de Duval (2005)

> El reconocimiento de los objetos representados no depende ante todo de la discriminación visual de las formas, sino de las suposiciones que se han realizado y que también controlarán la mirada sobre las figuras. Y este es otro tipo de actividad que se moviliza: la producción discursiva de declaraciones que están vinculadas entre sí para justificar, explicar o demostrar (pág. 8).

Es por ello que la enseñanza debe considerar entre sus objetivos no sólo la visualización, también es importante la producción de enunciados, y como se ha podido apreciar, ciertamente es que María provoca que los niños utilicen la visualización icónica, también lo es que no solicita justificaciones (producción de enunciados) que incorporen los supuestos construidos a través de la intuición, su preocupación didáctica está centrada en la producción de la definición únicamente, esto es: el triángulo es una figura que tiene tres lados.

La conclusión final de María, hace énfasis en el contenido matemático que subyace en la tarea, los triángulos tienen tres lados, aunque efectivamente los niños ya habían señalado dicha característica, la profesora ve la necesidad de reiterarlo para poder enlazar la actividad siguiente. Por tanto, el objetivo de la tarea no se cumple como tal, ya que era identificar los conocimientos previos de los niños sobre el tema, como se propuso desde el diseño en colectivo de la situación didáctica, puede considerarse más bien, como una tarea que consiste en una última institucionalización de lo adquirido en la situación diseñada por María, un recordatorio del saber en juego para su posterior utilización.

7.5. LAS ADIVINANZAS Y LA APARICIÓN DE LAS PRUEBAS PRAGMÁTICAS

En la secuencia de María, el episodio anterior (el avión) tenía como propósito introducir a los niños a la tarea central de la clase, que consistía en un juego de adivinanzas,[98] para desarrollar la actividad María coloca en el pizarrón carteles con adivinanzas escritas y triángulos de plástico de colores diferentes. Cada cartel hace alusión a los lados de un triángulo y se puede resolver identificando aquél al que se refiere. Para iniciar María lee las adivinanzas y pide a los niños que encuentren el triángulo que corresponde, con esto se activa la visualización icónica mediante la utilización de triángulos en material concreto.

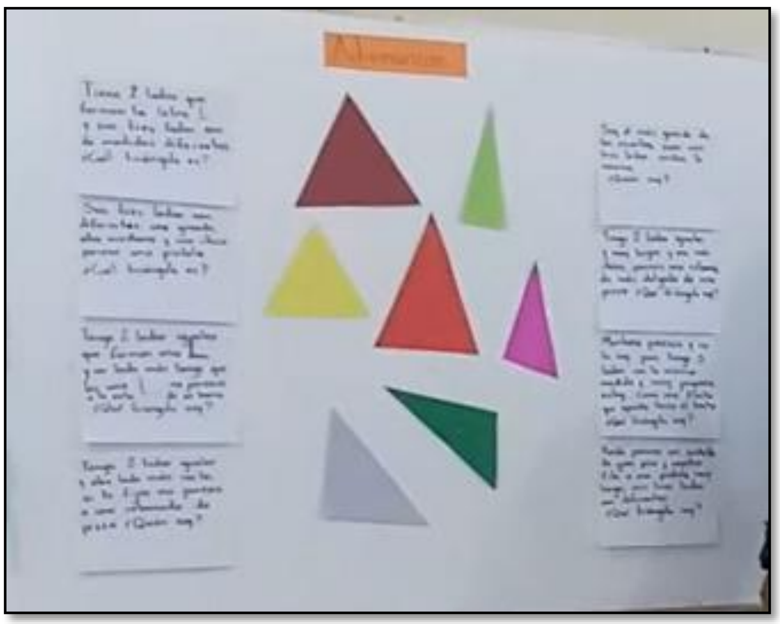


Figura 63. Acomodo de adivinanzas y triángulos.

[98] Esta actividad es la reconstrucción de la primera tarea matemática que realizaron los profesores durante la fase de experimentación.

Destaca en la imagen (figura 63) la manera en que los triángulos fueron ubicados, existe una diferencia muy pequeña en la posición como fueron colocados en el pizarrón la mayoría de ellos, casi todos se sitúan de una manera "típica" en la que, por lo común, uno de los lados se coloca completamente horizontal para que "visualmente" se perciba como la base, es posible que esta posición sea para que los niños identifiquen las características más fácilmente, pero también es probable que dicho acomodo limite la percepción de las mismas, la relación que existe entre el acomodo de las figuras y la identificación de características, se analiza más adelante cuando incide en algunas de las respuestas de los alumnos. En el siguiente fragmento puede apreciarse la manera como María gestiona la actividad.

> M: ¿Ya se fijaron en el pizarrón?, ¿qué hay?
> Aa: Triángulos
> M: Hay unos triángulos, y acá arriba les voy a leer lo que dice: "adivinanzas", ¿les gustaría jugar a las adivinanzas?
> Aos: Sí
> M: Bien, les voy a explicar de lo que se va a tratar el juego, yo voy a leer las adivinanzas que están en estas hojas, en cada hoja hay una adivinanza diferente y corresponde a una figura de estas (señala los triángulos y las hojas con las descripciones)
> M: ¿Estas figuras qué son?
> Aos: Son triángulos
> Ao: Figuras geométricas
> M: ¿Y cómo se llaman estas figuras geométricas que yo tengo aquí en el pizarrón?
> Aos: Triángulos
> M: Se llaman triángulos. Voy a leer una adivinanza y se va a tratar de que el que sepa la respuesta levanta su mano, ¿sí?, y vamos a ver quién adivina más cuál triángulo es.

Es posible ver que lo primero que hace María es dejar en claro que las figuras son triángulos, mientras que los niños mencionan que son figuras geométricas, es decir, los niños amplían la definición que enunciaron en la actividad del avión, ya que el término "figuras geométricas" no fue mencionado en aquel momento. Por otra parte, el hecho de que sea la profesora quien lea las adivinanzas tiene que ver con el bajo nivel de comprensión lectora que en su decir, tienen los niños. Una vez que ha clarificado la consigna procede al juego de adivinar, ejemplo de la manera en que lo realizó se muestra en el siguiente fragmento.

> M: Fíjense bien, la primera dice... "Es un triángulo que tiene dos lados que forman la letra L y sus tres lados son de medidas muy diferentes, ¿cuál triángulo es?" //Varios niños levantan la mano//
> Aa: Escaleno (grita una niña, mientras otra va y señala el triángulo color rosa)
> M: ¿Pero cuál será?, dice Citlalli que es este (señala el de color rosa). A ver fíjense bien.
> Aa: Es este (pasa otra niña y señala uno que forma una L, o sea un ángulo de 90°, de color gris)
> M: A ver, pero fíjense que todos sus lados no deben ser iguales, y que formen la letra L, a ver fíjense cuál.
> Aa: Este (vuelve a levantarse y señalar el triángulo gris)
> M: A ver, ¿pero este lado será diferente a este? (señala dos de los lados del triángulo elegido). Lo podemos medir con un marcador (usa un marcador para medir dos lados para que la niña vea que son del mismo tamaño), ¿sí son diferentes?
> //La niña no responde pero sigue marcando el perímetro del triángulo e insiste en que el gris es la respuesta correcta, se acerca otra niña y dice que es el rosa. El gris estaba en una posición que dejaba "ver" el ángulo, pero el rosa estaba en una posición en donde la niña no lograba observar ese ángulo //
> M: A ver, vamos a ver si este se parece a la L (toma el de color rosa y lo coloca encima de la L para que todos vean que al cambiar la posición se observa el ángulo), ¿y sus lados sí son diferentes?
> Aos: Sí...
> PS: A ver, ¿sí se parecen? (refiriéndose al ángulo y la letra L)
> Aos: Sí
> PS: ¿Y sus lados si son diferentes?, este es pequeño, este es más pequeño y este es más grande, ¿sí son diferentes? (recurre nuevamente a los marcadores para medir)
> Ao: Sí, son diferentes
> PS: Resulta que se parece a la L y todos sus lados son diferentes. ¿Entonces sí será esta la primera adivinanza?, ¿qué triángulo es?
> Aos: Sí
> Aa: Es un escaleno
> PS: Entonces la respuesta es un triángulo escaleno y es este (coloca el triángulo rosa junto al cartel de la respuesta)
> //Finalmente, al ver esto la niña deja de insistir en que el gris era el correcto//

En el fragmento observamos que inmediatamente una de las niñas menciona la respuesta correcta, sólo con escuchar la definición ubica que es un triángulo escaleno, pero frente a su respuesta María opta por no cuestionarla porque otra niña señala uno de los triángulos "equivocados", eso es lo destacable, que deja pasar la respuesta correcta para utilizar el "error" de la segunda alumna como detonante para la discusión grupal. Dadas las circunstancias, la gestión didáctica propicia la validación grupal, permitiendo así que se genere en el espacio de diálogo colectivo la reflexión sobre las características señaladas en la adivinanza y que no todos los triángulos cumplen con ellas, es decir, que había una respuesta única a esa adivinanza.

En la discusión, la niña mantiene su respuesta, es el triángulo gris (refiere al ángulo de 90°, a la letra L), lo señala en repetidas ocasiones, en cierta medida puede tomarse su respuesta como correcta ya que la adivinanza decía que dos de sus lados forman una L, aunque también que todos los lados son diferentes, lo que no cumple el triángulo gris. Es probable que la respuesta de la niña tenga que ver con la posición y el tamaño del triángulo gris (anteriormente se había observado la ubicación y el acomodo de las figuras en el pizarrón), porque el ángulo de 90° se percibe más y de forma inmediata en el triángulo gris que en el rosa por la posición en que se encuentra. Recuérdese que en las discusiones colectivas los profesores concluían que era frecuente que en las clases, se presentara a los niños las figuras geométricas en una misma posición, tal vez para facilitar su aprendizaje, pero, como hemos podido ver en este episodio, la uniformidad de posiciones limita la percepción global de las características de las figuras, de ahí, la importancia de usar figuras en diferentes posiciones durante la visualización, ya que en esta ocasión no bastó con ver el triángulo, fue necesario que María lo manipulara para que observaran sus características.

En este momento, la manipulación de los objetos materiales (imagen del triángulo) se considera como un acto relacionado con el componente construcción, el cambio de posición de la figura permite experimentar las propiedades geométricas y se puede tomar conciencia de que éstas no son solamente características perceptivas, como el caso del triángulo rosa que, cuando María lo “mueve”, se puede percibir que tiene también un ángulo de 90° al igual que el triángulo gris; es por estas razones que la elección de los instrumentos debe tomar en cuenta los objetivos de aprendizaje ya que son éstos los que permiten entrar progresivamente en la deconstrucción de las figuras, y a su vez, pueden ser explicadas a través de la descripción porque conlleva a un razonamiento.

Las imágenes de los triángulos son instrumentos que permiten manipulaciones como girarlos, y en este caso los moldes colocados por María son herramientas indispensables en la enseñanza de la geometría, ya que permiten el manejo de figuras superpuestas, generando una geometría más activa, lo anterior se observa cuando María toma el triángulo rosa, opción que señalaban algunos alumnos, para superponerlo en la letra L y que los niños aprecien que tiene un ángulo recto, esto es, recurre a la medición y superposición de figuras lo que le permite comparar los triángulos (gris y rosa) hasta encontrar el que reúna las características señaladas. Sin embargo, el hecho de que fuese María quien lo "moviera" de lugar y no el alumno, nos permite decir que se potencia medianamente la enunciación de las características por parte del niño, para el logro del razonamiento geométrico.

Una acción también propia de la construcción, se identifica cuando usa marcadores para medir y comprobar las respuestas de las adivinanzas, la medición es el medio de validación, aunque, debe subrayarse que la acción es realizada por la profesora y no por los niños. La medición se hace con artefactos (marcadores), instrumentos no geométricos que le permiten validar la superposición de las figuras y justificar la respuesta. En general, son actos que María emplea para la resolución de las tareas geométricas que se propusieron, pero por lo general, ella ocupa el lugar central de la actividad, lugar que debiera ser para el niño; es así, como se puede dar cuenta de la relación entre lo que el profesor desarrolla en su espacio personal y las decisiones que toma durante el espacio idóneo en el aula. Es importante señalar que siempre que aparece una dificultad para identificar un triángulo, como se puede ver en la figura 64, María utiliza la misma técnica, esto es, medir con los marcadores.

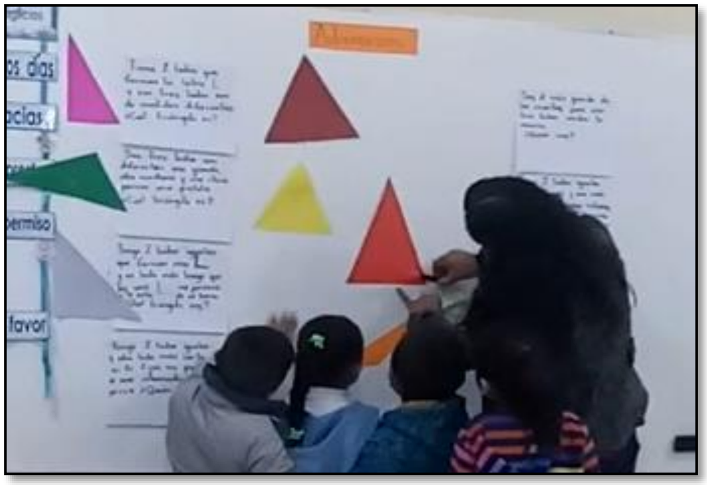


Figura 64. María mide los triángulos con los marcadores.

Como podemos darnos cuenta hasta el momento, durante la actividad de las adivinanzas, además de los componentes mencionados, la discusión ocupa un lugar importante en la clase, los cuestionamientos de María se orientan principalmente para que los niños observen la medida de los lados, por ejemplo*: ¿pero este lado será diferente a este?, ¿por qué?, ¿y sus lados sí son diferentes?, ¿ya se fijaron bien?*, con estas interrogantes intenta entablar un proceso dialéctico con los alumnos centrado en las contradicciones que puedan identificar al observar los triángulos, lo que al final de cuentas les permite llegar a la respuesta correcta, además, involucra a todo el grupo para que reafirme las características del triángulo seleccionado y no solamente al alumno con la respuesta errónea. De acuerdo a Balacheff (2000)

> La toma de una decisión sobre la validez de un enunciado es legítima cuando se confirma como necesaria en contraposición a otros enunciados que son sólo posibles, aunque lo anterior no aparezca de manera explícita. Así, el proceso de validación, independientemente de que se cumpla o no en la explicitación de una prueba, está fundado en el análisis del pro y el contra, en otras palabras, en las contradicciones potenciales. Por lo anterior, este proceso es esencialmente dialéctico. (pág. 34)

En razón de lo anterior, puede decirse que el hecho de acompañar las preguntas con las definiciones expresadas por ella misma, María limita la potencialidad que puede tener la discusión en esta actividad. Además, las gestiones didácticas realizadas durante la tarea, facilitaron que los alumnos agruparan de manera correcta cada adivinanza con el triángulo correspondiente.

En cuanto la tarea de asociar las adivinanzas con el triángulo correspondiente, podemos concluir que María acepta pruebas de tipo pragmático porque al estar ligadas a la acción y la experiencia, las justificaciones de los niños se realizan a través de la manipulación y observación de los objetos materiales concretos o de su representación.

7.6. "TRIÁNGULOS CON POPOTES". CONSTRUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

En la siguiente sesión María organiza a los alumnos por parejas, a cada niño le entrega una tarjeta con un triángulo y unos popotes, les pide que observen las figuras que ha puesto en el pizarrón[99], que escriban el nombre del triángulo que está en la tarjeta y que lo construyan utilizando popotes unidos con plastilina. Les explica "a cada quien le voy a entregar un triángulo, pero será trabajo en pareja, van a escoger un triángulo de los dos que tiene cada pareja y tratarán de armarlo exactamente como es". Les entrega además, tijeras para que recorten los popotes (en esta ocasión no entrega los materiales recortados, su intención es que los niños realicen la construcción a partir de la comparación de medidas entre los popotes y la imagen de la tarjeta). A partir de la consigna, se suscita el siguiente diálogo.

> Ao: ¿Los vamos a recortar a la mitad?
> M: No sé, ustedes los van a recortar a la medida que los necesiten para construir un triángulo igual que el que está en la hoja. Listos, no los vayan a recortar antes, primero tienen que medir y fijarse si su triángulo tiene dos o tres lados iguales. Al que ya tenga

[99] La profesora ha pegado en el pizarrón las imágenes de los triángulos, son las mismas utilizadas en la actividad de las adivinanzas pero ahora las ha clasificado y colocado el nombre de acuerdo a la longitud de sus lados.

> la figura formada con los popotes y que coincida con el tamaño de los lados les voy a dar la plastilina para que los formen en la hojita.
> //Los niños comienzan a superponer los popotes en los lados para calcular la medida en que los van a cortar, la mayoría lo hace sin dificultad, en algunos casos la maestra les indica que deben cortarlo de la medida que necesiten, se acerca a apoyarlos para hayan recortado la medida correcta, luego los unen y los colocan en las hojas, si tienen medidas erradas les da otro popote para que los recorten de nuevo//

Puede observarse que la consigna ha quedado clara y la tarea es sencilla, los niños colocan los popotes sobre cada lado del triángulo y los recortan para unirlos. La técnica sugerida para formar los triángulos permite identificar a los popotes como artefactos (instrumentos no geométricos) y el proceso de unirlos para formar el triángulo es el componente construcción. También se observa la importancia de la visualización icónica, una vez que los niños logran observar el triángulo que les tocó, son capaces de utilizar el material para reproducirlo. Al mencionar los lados como característica fundamental para cumplir con la tarea, esto se convierte en el espacio real y local que la sustenta. La intención de María es únicamente que construyan el triángulo y lo coloquen en la hoja, de manera que no pide prueba intelectual, aunque aparecen ciertas pruebas pragmáticas como el empirismo ingenuo y la experiencia crucial, porque se propicia la manipulación de los objetos y la experimentación para justificar las respuestas. No obstante, la discusión grupal permite que se enuncie el referencial[100], de esta manera se pone en marcha la circulación a través de los planos semiótico instrumental y epistemológico, y aunque se solicita enunciar las propiedades y características de los triángulos, la actividad sigue ubicándose en el paradigma GI.

Al finalizar la construcción se organiza la validación grupal, en ella, como podemos apreciar en el posterior acápite, los alumnos deben mostrar la imagen que les tocó, el triángulo que formaron con los popotes y responder a diversos cuestionamientos para ampliar la justificación sobre el tipo de triángulo que armaron.

---

[100] En este caso, el referencial que sustenta la situación didáctica es la definición de cada tipo de triángulo de acuerdo a las medidas de sus lados (escaleno, isósceles y equilátero).

M: ¿Cómo es su triángulo?, ¿y cómo son sus lados?
Ao: Son diferentes, estos son grandes y el de abajo es pequeño
M: ¿Están de acuerdo con él?, ¿sí está igual que el que le di? (muestra la imagen)
Aos: No
M: No, ¿por qué?, observen
//Algunos alumnos se acercan a ver el triángulo que le tocó al compañero y el que hizo//
Aa: No es igual porque al de abajo le faltó uno más largo porque todos sus lados son iguales
//Corrige al niño que había construido un isósceles en vez de un equilátero, la maestra pasa al frente a otra niña//
M: ¿Cómo es tu triángulo?, platícanos, ¿cómo son sus lados?
Aa: Hay dos lados iguales y otro es más pequeño
M: A ver si es cierto que tiene un lado más pequeño, véanlo, ¿cuál es el lado pequeño?
//Un niño (de la bina) lo acomoda para ver cuál es el lado pequeño//
M: ¿Cómo son sus lados?
Ao: Iguales
//La profesora solicita que observen a la pareja que lo construyó//
M: ¿Aquí cuál es el lado chiquito?
//La niña que formaba parte de la bina, se queda pensando y se da cuenta que ninguno es más chico//
M: ¿Tú Johana estás de acuerdo en que tiene el lado más pequeño?
Aa: No, ninguno, todos son iguales
M: Entonces, ¿cómo se llama?
Aa: Equilátero
M: ¿Cómo es tu triángulo?
Aos: Tiene todos sus lados diferentes
Ao: Es el escaleno
M: ¿Por qué dicen que es el escaleno?
Ao: Porque tiene sus tres lados diferentes
//pasa a algunas binas y les realiza preguntas similares//

Algunas preguntas que María plantea a todo el grupo son: *¿Este lado mide lo mismo que éste?, ¿Todos los lados son iguales?, ¿Sí se parece a la imagen que le entregué?, ¿Cómo podemos darnos cuenta si miden lo mismo?*, e intentan orientar a los niños, primero a establecer la diferencia entre los triángulos según la longitud de los lados, luego a comparar las imágenes del pizarrón con los triángulos construidos. Con ello se hace presente una acción devolvente de la profesora porque a través de sus cuestionamientos intenta que los niños modifiquen su lenguaje natural por el lenguaje centrado en propiedades geométricas, el nombre de los triángulos.

Sin duda, la validación grupal ha contribuido a que los niños movilicen los saberes adquiridos, pero además, no se limitan a reflexionar sobre éstos mediante la orientación de la profesora. En un momento de la clase y por razones administrativas, María deja solos a los niños[101] y les indica que sigan revisando sus triángulos, por tanto son ellos quienes se cuestionan entre sí para "revisar" los triángulos que formaron. Ejemplo de los comentarios que circulan entre los alumnos antes de que María regrese al aula y concluya con la actividad, se pueden apreciar en el siguiente fragmento de registro:

> Ao: Fíjense bien en los lados, este tiene iguales (un alumno se levanta para ir a la mesa de una bina que aún no pasa al frente)
> Ao: Este tiene unos más grandes (mientras comenta esto, el niño muestra el triángulo a su compañero de bina y al niño que se levantó a ayudarlos)
> Ao: Yo digo que sí está igual, deja te ayudo, mira (responde el niño que fue a ayudar a la bina)
> //Para ayudar a identificar el tamaño de los lados, el niño que apoya a la bina, toma otro popote de la mesa y lo pone sobre los lados de la imagen, lo recorta y lo empieza a poner encima de los otros lados//
> Ao: ¿Ves?, te dije que era igual, ¿entonces cuál triángulo es?
> Ao: El equilátero

El momento en que los niños discuten sin la maestra llama la atención debido a la alta probabilidad que se genera para que los alumnos reconozcan que las preguntas de la profesora son útiles para diferenciar los triángulos. Podemos identificar la acción devolvente de la profesora al indicar a los alumnos que sean ellos quienes concluyan la revisión de las construcciones; en este momento de la clase, el proceso de devolución plantea una diferencia significativa entre la gestión de una enseñanza guiada principalmente por María y la gestión de una enseñanza centrada en la actividad del alumno al apoyarse entre ellos para la realización de la tarea.

---

[101] Aunque en este caso la ausencia de la maestra tiene que ver con asuntos de índole administrativa en la escuela, dejar solos a los niños en el salón de clases para que continúen la discusión es la expresión más exacta de la devolución.

Se puede concluir que la reproducción de la figura usando materiales asociados a la visualización, permite poner el énfasis en las longitudes de los lados. De acuerdo con Duval (2005), el razonamiento se considera desde lo discursivo y desde las acciones y manipulaciones, en otras palabras, estos tipos de razonamiento sobre el contenido geométrico se asocian con la exploración o acción y con la utilización de un lenguaje. En el caso particular de esta tarea, fueron predominantes los actos de exploración, al emplear constantemente la manipulación como medio para la justificación. El nivel de razonamiento alcanzado con el diseño de las tareas y la acción de María se observa con mayor claridad en el último episodio de la situación didáctica.

7.7. LA INSTITUCIONALIZACIÓN DEL SABER

En la sesión final de la segunda situación didáctica, María coloca en el pizarrón un dibujo de un tren con tres vagones, cada vagón tiene el nombre de un tipo de triángulo (equilátero, isósceles y escaleno), luego, a algunos niños les da imágenes de distintos triángulos para que los acomoden en el vagón correspondiente. Antes de que los niños pasen a acomodarlas, ella lee unas tarjetas con la descripción de cada tipo de triángulo que también están pegadas en el pizarrón, pero sin un orden que indique el vagón al que corresponden, después lanza preguntas a todo el grupo. La intención con esta actividad era que los niños llegaran a la conclusión de que, aunque todas las figuras revisadas se llamen triángulos, existen diferentes tipos de ellos según sea la medida de sus lados. En el siguiente fragmento podemos observar la manera como la profesora pide a los niños ubicar los triángulos en el vagón y utilizar como argumento el discurso que da cuenta de la clasificación de los triángulos.

> M: Se van a fijar el tipo de triángulo que les tocó, ¿a alguno de ustedes le tocó un triángulo que tenga sus lados exactamente iguales?
> //Pasa una de las niñas, pero el triángulo no corresponde//
> M: ¿Sí es? (lo muestra al grupo)

Aos: No...
M: ¿Entonces cómo sabemos cuál es?
Aos: Porque todos los lados son iguales.
Ao: El mío sí es
M: A ver, pasa a ponerlo y explica por qué colocaste este triángulo en ese vagón y cómo son los triángulos equiláteros.
Ao: Los triángulos equiláteros tienen tres lados iguales, tienen el mismo tamaño.
M: Muy bien un aplauso, ahora pase alguien más, a ver, ¿y los triángulos isósceles cómo son?
Ao: Tienen dos lados iguales y uno diferente.
M: Muy bien, entonces si encontramos triángulos que tengan dos lados iguales y uno diferente cómo se van a llamar...
Aos: Isósceles
M: ¿Quién tiene uno así?
Aa: Yo (pasa la niña a colocarlo y es correcto)
M: Muy bien, a ver pasa hija, dinos como son los triángulos escalenos (le dice a otra alumna)
Aa: Los triángulos escalenos se forman porque tienen sus tres lados diferentes
M: ¿Quién tiene uno con todos los lados diferentes?
Ao: Yo mire
//muestra la imagen y con sus dedos marca la longitud de los lados, emplea su mano para dimensionar la distancia de cada uno//
M: A ver. ¿Todos sus lados son diferentes? (les muestra la imagen)
Aos: Sí...
M: Muy bien niños, entonces pon el triángulo donde debe ser (el niño lo hace correctamente). Si se fijan, esos nombres no van a cambiar por eso hay que fijarnos en sus lados para saber cómo se llaman.
//antes de que colocar el triángulo en los vagones, los niños usaron lápices o sus propias manos para verificar las medidas de los lados//

Cuando el profesor pone a la consideración del grupo los conocimientos que han desarrollado durante las tareas para llegar a una conclusión colectiva, puede decirse que su intención es la institucionalización, es decir, de convertir los conocimientos individuales de los niños en un saber colectivo y convencional, instituido socialmente, en este caso la clasificación de triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados.

Con base en lo observado, puede decirse que María solicita una prueba de tipo “experiencia mental”, ya que a partir de la validación, los niños despliegan un razonamiento que es independiente de la representación particular (del triángulo). Esta acción deja ver que gestiona la transición de pruebas pragmáticas (que ha solicitado en las tareas anteriores) a pruebas ligadas con la enunciación del contenido geométrico que se piden en esta tarea. Es decir, el geómetra (niño) se descontextualiza de los ejemplos particulares para presentar los resultados mediante una demostración que no depende de la persona y no cambia en ningún tiempo. Por la razón anterior, resulta importante que al resolver un problema se tomen en cuenta los criterios aceptados como prueba en una comunidad escolar (Henríquez, 2014), por ejemplo, en el caso de esta tarea propuesta a niños de primero y segundo grado de primaria, se tendría que reflexionar acerca del tipo de prueba que sería adecuado solicitar cuando la tarea geométrica a resolver estuviera relacionada con las propiedades de los cuadriláteros. Por último, se puede observar como a partir de la resolución de las distintas actividades previas, aunado a la gestión didáctica de María, se contribuye a que los niños asocien de manera correcta las definiciones de los triángulos. De esta manera la profesora concluye las situaciones didácticas que ha diseñado para su grupo.

7.8. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Entre los hallazgos más relevantes del análisis sobre el trabajo didáctico de María, están las pruebas pragmáticas que requiere durante el desarrollo de la situación didáctica, lo que da evidencia de la transición que genera su acción didáctica para que los niños pasen de las pruebas pragmáticas a las de tipo intelectual mediante la institucionalización del saber en juego. Resalta también el énfasis constante que María hace en las distintas tareas propuestas para que los alumnos logren adquirir los contenidos[102] incluidos en su planificación y para cumplir el propósito general que ella se había propuesto.

Sobre el logro de los contenidos, lo que observamos es que María toma en cuenta los argumentos que pueden desplegar los niños de manera general, es decir, el diseño de la "clase única" contempló los mismos tipos de prueba para ambos grados, por el "desconocimiento" que tenían los niños del contenido según la profesora. Como se observó en el concentrado de contenidos que elaboró de acuerdo al Programa de Estudios (ver tabla 21) para el diseño de su clase, los niños de primer grado solamente deberían identificar y construir las figuras geométricas, mientras que los niños de segundo, además de lo anterior, además debían describirlas, pero el diseño de la "clase única" permitió que también los niños de primero lograran describir y clasificar los triángulos según la longitud de sus lados. En las observaciones de sus clases, se puede identificar la manera en que gestionó la situación didáctica considerando las particularidades de su grupo multigrado para articular los contenidos y las tareas, además se percibe la reflexión que hizo de la revisión y análisis de los libros de texto efectuada en las sesiones de diseño colectivo.

En adición a lo anterior, es pertinente señalar otro aspecto importante es el tipo de intervenciones que María realiza, entre la primera y la segunda situación didáctica se pueden observar diferencias que muestran una evolución en su acción didáctica, particularmente en los cuestionamientos que realiza durante las orientaciones individuales y las discusiones grupales, lo que se hace evidente sobre todo en la institucionalización. Si bien en ambas situaciones gestiona la institucionalización mediante su propio discurso oral y escrito, en la segunda se observa una participación más activa de los alumnos, sobre todo cuando ellos mismos se apoyan en la revisión de las tareas y las preguntas se orientan a que sean los niños quienes logren

[102] Los contenidos y el propósito de las situaciones didácticas se encuentran en el apartado 7.1 de este capítulo.

identificar las características de los tipos de triangulo, contribuyendo de esta manera, a favorecer un razonamiento significativo.

En síntesis, se ha podido observar en las sesiones de María, que los componentes predominantes son la visualización y la construcción, siempre en función del plano epistemológico, es decir, las justificaciones de las acciones se despliegan constantemente en función del saber en juego: *la clasificación de los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados*. Además fue evidente que María tenía clara la necesidad de activar las tres génesis del ETG sin seguir alguna jerarquía entre ellas, lo que da cuenta que el análisis de la perspectiva teórica del ETG que hizo, le permitió comprender la importancia de activar dichas génesis, de manera general la secuencia implementada no fue del todo adecuada para el tipo de tareas y pruebas que requería el ETG, como pudo apreciarse en el análisis de cada episodio debido a las modificaciones realizadas por la profesora, con relación a las situaciones diseñadas de manera previa.

En lo concerniente a la génesis discursiva, en las sesiones aparece lo que podría considerarse una limitante, la preocupación por ser ella quien enuncie el discurso oral cada vez que los niños exponen sus argumentos, quizá producto de su formación inicial, de su experiencia con los saberes disciplinares y didácticos, o tal vez de que la propuesta aquí experimentada careció de un proceso de análisis más amplio respecto de las intervenciones en el aula y el análisis didáctico de las acciones de los alumnos, esto es, es necesario que en el proceso de formación bajo el marco teórico del ETG, se profundice en lo didáctico mediante un movimiento dialéctico entre la escuela primaria y los elementos teóricos del ETG, que permitan al profesor ir evolucionando respecto a la gestión didáctica que realiza en el aula. También es posible apreciar un cambio en el discurso de la profesora comparado con lo que reflejó en la resolución de tareas (espacio personal) durante las primeras actividades de la experimentación y una evolución de ello durante la aplicación de sus clases.

Finalmente, sobre el trabajo didáctico de María, puede decirse que hay evidencias suficientes para concluir que los ETG personal e idóneo del profesor se encuentran íntimamente ligados, reflejo de lo anterior es la manera en que la profesora recupera sus propias estrategias desarrolladas en el espacio personal como técnicas a las que sus alumnos pueden recurrir en la acción matemática; en este sentido, en la medida que el profesor identifique la naturaleza y función de un Espacio de Trabajo Geométrico, podrá brindar mayores oportunidades de aprendizaje a los niños del grupo multigrado.

CAPÍTULO VIII
LA TRANSICIÓN DEL ETG PERSONAL AL ETG IDÓNEO. DE LAS PRUEBAS PRAGMÁTICAS A LAS PRUEBAS INTELECTUALES.

Después de estudiar la práctica de la profesora María, en este capítulo examinaremos la práctica de la profesora Daniela a cuyo quien también se le dio seguimiento (con base en lo que se describe como última fase de la propuesta de formación). Al igual que en el caso anterior, este análisis se centra en la movilización de los componentes del ETG así como en las intervenciones didácticas de la profesora Daniela.

Se ha podido concluir hasta el momento, que existe una transición entre los distintos espacios geométricos en los que se inscribe la formación del profesor, principalmente entre el espacio personal y el diseño de un espacio idóneo para desarrollarse en el aula. Se ha estudiado además la forma en que una tarea determinada propuesta por el profesor, activa una o varias génesis en el alumno, evidenciando la circulación entre los componentes de los planos cognitivo y epistemológico que se realiza durante las clases. La hipótesis del ETG es que la activación de todas las génesis permite que el estudiante haga una construcción suficientemente completa del objeto matemático bajo estudio, lo que puede observarse cuando se realiza una circulación apropiada.

Aunado a lo anterior, en esta investigación se ha visto que la génesis discursiva ha sido escasamente potenciada en el proceso de formación inicial de los profesores y en el espacio idóneo propuesto para la escuela primaria, por tanto, al reconocer que el trabajo en el aula multigrado exige del docente una organización de la “clase única” se puede considerar que el uso de diversos tipos de pruebas acordes al nivel cognitivo de los alumnos, contribuye al favorecimiento del razonamiento geométrico. Es así que cobra sentido crear tareas que activen la totalidad de las génesis, ya que por ejemplo, una tarea que despliegue únicamente la génesis instrumental puede obstaculizar los argumentos que requiere el contenido geométrico en cuestión, además, una circulación que activa solamente las génesis figural e instrumental se sitúa exclusivamente en el plano vertical de descubrimiento, considerándose por tanto una circulación incompleta.

Por lo anterior, se precisa de un análisis del proceso de avance en el ETG idóneo en cuanto a la activación de las génesis, particularmente en la activación de la génesis discursiva en el aula multigrado. La discusión acerca de los hallazgos más relevantes registrados en la práctica de la profesora Daniela, conforman el presente capítulo.

La maestra Daniela es estudiante de una Escuela Normal Rural[103] de la licenciatura en educación primaria del Plan de estudios 2012, a la fecha se encuentra cursando el último grado (cuarto año) de su trayecto formativo y realiza sus prácticas profesionales intensivas en una escuela multigrado, atiende los grados de 1°, 2° y 3° de una escuela primaria. Ha tenido previa experiencia con la escuela multigrado, pues durante el quinto y sexto semestre de su carrera, llevó a cabo sus prácticas en instituciones de esta modalidad.

Por el desempeño académico en los cursos que ha estudiado en la Escuela Normal, sus profesores y compañeros la definen como una estudiante destacada, particularmente en el trayecto de práctica profesional, mostrando una evolución considerable en su práctica en el aula. Además, en las asignaturas concernientes a la enseñanza de la geometría y la planificación para grupos multigrado, es notorio el dominio disciplinar y didáctico que Daniela tiene. Por estas razones se decidió considerarla como sujeto de seguimiento en esta propuesta de formación.

[103] La Escuela Normal donde estudia Daniela es la misma en la que se formó la maestra María, aunque cada una con un Plan de estudios distinto, como se explica en los primeros capítulos de esta tesis. En México, los aspirantes a profesores estudian una licenciatura de cuatro años en las escuelas normales, la profesora Daniela se encuentra en el último año de formación en el cual las prácticas escolares se llevan a cabo en un mismo grupo de primaria durante 24 semanas.

Respecto del diseño y la planificación de clases, Daniela proyectó iniciar con la situación didáctica diseñada en la sesión en colectivo, no obstante hizo algunas adecuaciones en función de las características de su grupo y de los contenidos señalados en los programas de cada grado. Su plan de clases incluía tres situaciones didácticas articuladas entre sí, cada una fue trabajada en dos sesiones de entre 50 y 60 minutos cada una. Para el análisis de los sucesos, la información se organiza por episodios que incluyen actividades relevantes que permiten caracterizar el trabajo de la profesora.

Es importante mencionar que en el grupo atendido por Daniela se trabaja con dos programas de estudio distintos, primero y segundo grados trabajan con el programa “Aprendizajes Clave”, y el tercer grado con el Plan 2011. Por tanto, para seleccionar los contenidos fue necesario que la profesora revisara ambos planes para articular los contenidos y tareas. Al igual que la profesora María, tampoco Daniela utilizó los libros de texto.

Una vez que concluyó la revisión de los materiales e identificó el contenido central de la situación de referencia resuelta en la experimentación con los profesores, optó por organizar los contenidos buscando favorecer el aprendizaje de sus alumnos y no siguiendo fielmente lo que plantean los programas de estudio, por ello existen diferencias entre lo que exponen los programas escolares y lo que ella propone, sin embargo recupera la intención del aprendizaje esperado de acuerdo al grado escolar. Recordemos que el programa de estudios está diseñado para grupos unigrado y en cierta medida limita el trabajo con la clase única, pero se permite la flexibilidad curricular con la finalidad de que se profundice en los contenidos escolares, lo cual se refleja en la acción realizada por la profesora Daniela. A continuación mostramos la selección y organización de contenidos por grado escolar (tabla 22).

Tabla 22. Contenidos e intenciones didácticas en que se basan las situaciones didácticas de la profesora Daniela. Fuente: Elaboración propia.

Grado	***Contenidos***	***Intenciones didácticas***
1°	Identifica las características generales del triángulo. Identifica y clasifica triángulos por la medida de sus lados Reconoce los diferentes tipos de triángulos que comparten características similares.	Identificar la figura del triángulo. Recuperar la noción de triángulo. Identificar las características generales del triángulo con lenguaje cotidiano. Que el alumno entre en contacto con las propiedades del triángulo, al trabajar el concepto de lado recto. Manipular material concreto para identificar algunas características de los triángulos, como lado, ángulo y vértice
2°	Clasifica los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados e identifica características (lados, ángulos y vértices). Clasifica triángulos por la medida de sus ángulos. Reconoce las propiedades de los ángulos internos del triángulo	
3°	Clasifica los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados e identifica características (lados, ángulos y vértices). Clasifica triángulos por la medida de sus ángulos. Reconoce las propiedades de los ángulos internos del triángulo	Identificar la tipología de triángulos respecto a la medida de sus lados y la clasifiquen. Medir ángulos con transportador. Encontrar congruencias entre las medidas de los ángulos internos del triángulo. Clasificar triángulos por la medida de sus ángulos.

Como se puede apreciar en la tabla 22, la distribución de contenidos y la relación con las distintas intenciones didácticas son similares en todos los grados, en segundo y tercer grado son los mismos. Otro rasgo es que no presenta un propósito general de toda la secuencia sino que incluye un objetivo para cada situación didáctica y para cada sesión de clase, al describir las intenciones didácticas. En total Daniela plantea un aproximado de 11 tareas distintas.

Una particularidad es la distribución del grupo durante las sesiones clase. En todas organizó, a los alumnos en equipos de cuatro alumnos de manera aleatoria, los equipos estaban integrados por niños de distintos grados. Incluso cuando las tareas debían realizarse en forma individual, los estudiantes permanecían en las mesas de trabajo de su equipo. Las ventajas que ofrece la interacción entre alumnos de diferente cognitivo son un factor propio de los grupos multigrado que, por la organización del grupo, la profesora aprovecha.

8.1. LA GÉNESIS FIGURAL Y LA NOCIÓN DE TRIÁNGULO

Este primer episodio forma parte de la situación didáctica uno. En la actividad inicial que propone Daniela se pide la elaboración de un avión[104] con la intención de recuperar la noción de triángulo de los alumnos y su capacidad para identificarlo en relación con otras figuras geométricas. Para comenzar y en la idea de contextualizar la actividad la profesora comenta a los niños qué es un avión, luego cede la palabra a un alumno para que él coordine el proceso de elaboración y les indica que al terminar, lo desdoblen y marquen todas las líneas. Cuando concluyen, como podemos apreciar en el siguiente fragmento, Daniela se acerca a las mesas para cuestionar a los niños.

> D: A ver, ahora desdóblenlo y marquen todas las líneas, ¿qué figuras se formaron?, sigan todas las líneas.
> //Los niños trazan las líneas, comentan entre ellos las que se formaron. Daniela se acerca a las mesas para plantear algunas preguntas//
> D: A ver, ¿qué te salió?, ¿qué se forma?, ¿cómo se llama esto que se formó? (se acerca a un alumno y le señala un triángulo)
> Ao: Líneas
> D: ¿Pero qué se forma en estas líneas? (el niño no responde por el momento pero más adelante da la respuesta)
> Aa: Mire maestra, acabo de ver esta figura (interviene un alumno de otra mesa)
> D: ¿Qué figura?
> Aa: Un rectángulo
> D: ¿Nada más?, ¿no tienes otra figura?
> Ao: A ver maestra, pues usted díganos qué se formó
> D: Fíjate bien para que las encuentres, también te van a decir los demás

[104] Es la actividad analizada en las clases de María, donde se pide hacer un avión mediante varios dobleces en una hoja de papel.

> Aa: Se formó un triángulo (una alumna que antes no lograba identificar lo que se formaba con las líneas)
> D: ¿Un qué?, ¿sí escucharon los demás?, ¿qué se le formó a Mariana?
> Aos: Un triángulo
> //En ese momento la profesora recupera el comentario para hacer los cuestionamientos grupales//
> D: A ver ¿y en sus aviones habrá triángulos?
> Aos: Sí, aquí también me salió un triángulo
> D: A ver, platíquenme qué figuras se formaron ahí
> Ao: Triángulo
> D: ¿A quién más se le formaron triángulos?
> Aos: A mí...
> D: ¿Qué se les formaron con las líneas?
> Aos: Triángulos
> D: Ahí hay muchas figuras, ¿cómo se llaman estas figuras?
> Aa: Figuras geométricas
> D: ¿Y de qué figuras geométricas tenemos más?
> Aos: Triángulos

Como se puede apreciar, el objetivo de Daniela es identificar si los niños reconocen un triángulo y lo pueden diferenciar de otras figuras geométricas, es decir, el objetivo es reconocer los conocimientos previos de los niños, y destaca la manera en que los cuestionamientos otorgan cierta libertad a los alumnos para identificar otras figuras geométricas sin dejar de orientar su atención hacia los triángulos, por ejemplo cuando un niño percibe la figura geométrica, *Mire maestra, acabo de ver esta figura (rectángulo*), la profesora insiste en que observe si hay otras diferentes. *¿Nada más?, ¿no tienes otra figura?;* es evidente que la tarea activa la génesis figural cuando moviliza el componente visualización a partir del trazo de las líneas (componente epistemológico espacio real y local), ya que las líneas en el avión permiten la configuración de los triángulos, movilizando el proceso mental de los alumnos para distinguir ésta y otras figuras geométricas.

Por otra parte, aunque Daniela no solicita que enuncien la definición general de triángulo (figura geométrica de tres lados), puede inferirse que logra su objetivo, ya que la actividad le permite reconocer que la mayoría de los niños lo identifica y nombra. Tiene sentido entonces que, generalmente, Daniela haya planteado preguntas a los equipos y no a cada niño en lo individual o en discusiones grupales, puesto que el objetivo era percatarse de los conocimientos previos que poseía el grupo y no cada niño en particular. Contar con esta información permite que Daniela propicie la interacción en los equipos durante el desarrollo de las actividades posteriores. En cierto momento de la conversación, uno de los estudiantes cuestiona a la profesora sobre las figuras que se formarán y ella opta por devolver la responsabilidad de esta acción a los niños, es hasta que una de las alumnas menciona la figura que ha reconocido en el avión, que Daniela expone a todo el grupo la idea de reconocer el triángulo.

Además de la elaboración del avión, Daniela continúa rescatando los conocimientos de los alumnos con un juego de adivinanzas, para ello coloca en el pizarrón imágenes de triángulos y carteles que contienen adivinanzas. La organización y acomodo del material se puede apreciar en la siguiente imagen (figura 65).

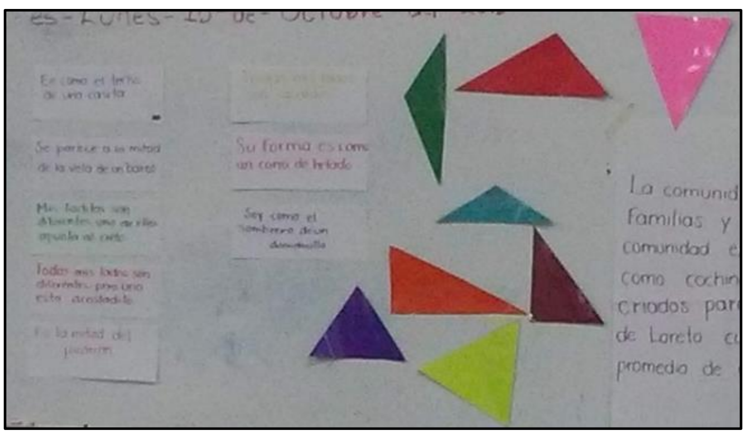


Figura 65. Material para la actividad de adivinanzas.

Puede apreciarse que la visualización icónica, representada en las imágenes de los triángulos, se hace presente en esta tarea (figura 65). Aunque ésta fue diseñada por el equipo de profesores en la sesión de experimentación, el texto de las adivinanzas y el acomodo de las figuras es una decisión que corresponde únicamente al profesor. En este caso Daniela coloca los triángulos en posiciones distintas, es decir, no todos tienen un lado en posición horizontal que se pueda identificar como base. Luego de colocarlos, Daniela les dice que los triángulos en el pizarrón, son similares a los que se formaron en el avión y que ahora jugarán a adivinar cómo son, de esta manera intenta que el alumno asocie la representación mental que tiene del objeto geométrico con la representación simbólica del mismo reconocida en el avión. La consigna que enuncia oralmente es: *Aquí hay una descripción, la voy a leer y ustedes me van a decir a qué triángulo corresponde a esta adivinanza y de qué color es, pónganse listos porque el que sepa gana*. En el siguiente recorte de registro se presenta la discusión grupal que se propicia.

> //Daniela lee el primer cartel//
> D: Es como el techo de una casita", ¿cuál es?
> Aos: El rojo, el morado, el verde, el rosa
> D: Fíjense bien, ¿cuál es como el techo de una casita?
> Ao: Es el morado
> D: En esta adivinanza hay muchas que se parecen a una casita, ¿verdad?
> Aos: Sí
> D: Vamos a ver la siguiente para luego ir ubicando y vemos cuál es el techo. "Se parece a la mitad de la vela de un barco" ¿Cómo es la vela de un barco?, fíjense que se parezca a la mitad de la vela
> //Los niños discuten entre ellos porque hay varias respuestas//
> D: A ver, si juntamos dos de estos, ¿será como la vela de un barco?
> Aos: No
> D: ¿Por qué no?
> Aos: Sí
> D: Bueno, ahí lo ponemos ahorita vemos a ver si es, siguiente adivinanza

Observamos que las adivinanzas son breves y ambiguas porque la descripción no remite a una solución única, en consecuencia las respuestas que dan los niños son variadas, por ejemplo, al referirse a un triángulo que se asemeje al techo de una casita los niños piensan en un dibujo típico de una casa (con el techo en forma de triángulo) y como se aprecia en la imagen del material la mayoría de los triángulos podría representar la respuesta correcta. Se puede ver entonces que el vocabulario empleado en la descripción no incluye un lenguaje sobre las características o propiedades del triángulo, es más bien un lenguaje cotidiano centrado en la percepción de la realidad, es por esta razón que los niños no utilizan elementos matemáticos para relacionar los triángulos con la adivinanza, esto es no hay un discurso geométrico por ahora.

Una de las acciones del profesor cuando diseña una situación didáctica es hacer un análisis a priori respecto a lo que se quiere lograr, esto implica anticipar los distintos procedimientos de los niños al resolver la situación. Al parecer, en este caso, las descripciones denotan que la intención era no escribir alguna propiedad o criterio geométrico, sino establecer una relación con objetos reales para que los niños pudieran identificar el triángulo y sus características básicas, sin embargo, la consigna[105] no favoreció la interacción con el medio (las adivinanzas) pues el lenguaje seleccionado en la redacción de las adivinanzas obstaculiza el logro del propósito, incluso cuando se apoyan en la visualización de los triángulos en los moldes manipulables, los enunciados escritos que son herramientas básicas en la enseñanza de la geometría, representan un obstáculo al hacer referencia a características de los triángulos que son comunes entre sí, en lugar de establecer particularidades que diferenciaran unos de otros, lo cual es la idea fundamental que subyace a la actividad.

La decisión que toma Daniela cuando se da cuenta que la escritura de las adivinanzas no fue adecuada permite que las dificultades de la situación se reduzcan en gran medida. Lo anterior es posible distinguirse en el siguiente fragmento, lee solamente las adivinanzas que son más sencillas de responder, ya sea por la posición o el tamaño del triángulo y con ello cumple el propósito de la actividad.

> D: "Es como la mitad del pizarrón", fíjense bien, ¿cuál se parecerá a la mitad del pizarrón?
> Aos: El naranja

[105] Para comprender el papel de la consigna, retomamos la definición de situación didáctica de Brousseau (1986, citado en (Ávila, 2001),"Una situación es una situación-problema que necesita una adaptación, una respuesta del alumno. En particular, si la necesidad de esta respuesta ha sido el objeto de una consigna precisa, si el alumno tiene un proyecto, un objetivo declarado, tendremos una "situación-problema estricta" (o formal), e incluso un "problema" si el medio es reducido a un enunciado y si ninguna restricción material, debida a ciertos aspectos físicos de la situación, ni a ninguna condición psicológica o social modifica la interpretación" (2001, págs. 8,9). En este caso entendemos la consigna, como los enunciados intencionados del profesor durante el diseño y la implementación de la situación, estos pueden ser verbales o escritas. La consigna genera condiciones que propicien la adquisición del saber en juego en dicha situación didáctica.

//La comparación con el pizarrón permite que los niños ubiquen la respuesta correcta y aunque haya otros triángulos que cumplen esa condición, por la posición y el tamaño, los niños no los ubican //
D: "Es como un cono de helado"
Aos: El rosa
//Señalan el rosa porque está en una posición que visualmente hace referencia a los conos de helado//

En el anterior acápite, es la intervención de la profesora lo que permite la evolución de la tarea, al hacer referencia a triángulos que permiten a los niños reconfigurar su imagen y relacionarlos con objetos reales conocidos.

Una vez que concluyen con las respuestas, Daniela hace énfasis en el espacio real y local que da sostén a la actividad y corresponde con la concepción que el individuo tiene acerca del modelo geométrico y de la intuición y abstracción que hace del objeto triángulo, lo anterior se identificar en el siguiente fragmento cuando el alumno trabaja con una parte del modelo (las líneas del avión, las imágenes del triángulo) y con los objetos que resultan de la abstracción del modelo a partir de la realidad, estos es, cuando trabaja con el conjunto de objetos concretos y tangibles, la figura geométrica del triángulo.

D: Muy bien, entonces ya terminamos de contestar las adivinanzas, ¿cómo se llaman estas figuras? (señala las imágenes de los triángulos)
Ao: Figuras geométricas
D: Son figuras geométricas, pero, ¿cómo se llaman?
Ao: Triángulos
D: ¿Y todos los triángulos son iguales?
Aos: No
Ao: Son diferentes
D: ¿Creen que se llamen igual todos los triángulos?
Aos: No
D: Entonces si son diferentes, ¿cómo se llamarán estos triángulos?
Aa: Maestra, sí se llaman igual pero son diferentes.
D: Fíjense bien, dice Marianita se llaman igual pero que son diferentes, ¿qué más piensan de esto?, vamos a ver entonces si es cierto o no.
// Los niños ya no responden la última pregunta y la profesora concluye con la actividad//

Como la intención era que los niños reconocieran el objeto geométrico, puede decirse que el objetivo se cumplió, se observa la activación de la génesis figural para reconocer los conocimientos previos de los niños. Destaca la visualización no icónica asociada a la percepción de las formas en la elaboración del avión de acuerdo con el paradigma en que se inscribe esta tarea (GI), el nivel escolar de los alumnos y el propósito inicial de la situación didáctica. Recordemos que la situación se desarrolla en el contexto de una clase única y que el grupo se organizó en equipos con niños de distintos grados, por tanto resultaba importante involucrar las nociones básicas del triángulo para consolidar este conocimiento en aquellos alumnos que no lo tenían. En la siguiente tarea Daniela propone la construcción de los triángulos.

8.2. EL PARADIGMA GI. LA CONSTRUCCIÓN CON POPOTES

Una vez que la profesora ha movilizado los conocimientos previos de los niños sobre la noción de triángulo, sugiere una tarea de construcción utilizando material concreto. En tarjetas se incluye la imagen de un determinado tipo de triángulo (equilátero, isósceles y escaleno). Daniela proporciona una tarjeta a cada niño pero, a cada dos niños le corresponde el mismo tipo de triángulo; la consigna es la siguiente: *Yo traigo unas tarjetitas con unos triángulos, les voy a dar a dos niños la misma tarjetita y ustedes van a tratar de formar el mismo triángulo que está en la tarjeta, pero con estos popotes que yo les voy a dar. Ustedes pueden manejarlos o usarlos como quieran o puedan para que formen el triángulo, ¿qué se les ocurre hacer con los popotes para que se forme el triángulo?, ¿qué vamos a hacer?*

El propósito de esta actividad consiste en que los alumnos de los tres grados reconozcan la tipología de triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados, y en el caso particular de segundo y tercer grado, que a partir de la manipulación de material concreto se acerquen a la noción de elementos como vértice y lado.

Algunos alumnos explican la consigna de Daniela, lo que refleja que han comprendido la acción a realizar, además, como no es la maestra quien dicta la técnica que pueden emplear, da libertad para que sean los niños quienes propongan algunas técnicas para resolver la tarea, en el siguiente acápite se puede ver la forma en que el trabajo de la profesora se limita a orientarlos mediante una serie de cuestionamientos mientras los niños proponen diferentes formas de construir el triángulo que les corresponde.

> D: A ver niños, ¿qué se les ocurre hacer con los popotes para que se forme el triángulo?
> Ao: Recortarlos
> Ao: Doblarlos
> Aa: Juntarlos
> Ao: Podemos mochar o cortar
> Ao: ¿Maestra, los puedo cortar?
> D: Sí, claro, si ustedes quieren cortarlo o unirlos pueden hacerlo, solamente fíjense en su triángulo de la tarjeta y el que formen, ¿será igual, medirá lo mismo?, ¿cómo pueden hacer para que los popotes les queden igual?, fíjense bien como están, ¿cómo pueden formarlos para que el tamaño quede igual que en la tarjeta?
> //Lo dice acercándose a algunas parejas que comienzan a formar el triángulo//
> D: Me parece bien tu estrategia Jesús (el niño los está uniendo entre sí)
> Ao: ¿Lo vamos a pegar maestra?
> D: Si ustedes quieren pueden pegarlos
> Ao: Vamos a pegarlos así, es más fácil (los niños dicen a sus compañeros de equipo como hacerlo)

En esta tarea se utilizan artefactos concretos para representar al objeto triángulo, por tanto se inscribe en una geometría natural (GI) porque los objetos están definidos por el modelo geométrico pero corresponden con la realidad espacial y local del individuo. Mediante la experimentación y la deducción, los geómetras (niños) actúan sobre la representación de los objetos geométricos mediados por los artefactos y la percepción. Por tanto, la relación entre los objetos y realidad es permanente, permitiendo así este razonamiento de validación. Otro aspecto de la actividad es el reconocimiento que la intuición de los niños es asimilada con relación a la percepción inmediata, cuando observan la imagen y la reconstruyen sin medir o superponer los materiales, sobre este aspecto Duval (2010) señala que,

> El análisis de una figura puede hacerse desde tres caminos diferentes. El primero es evidentemente el de la percepción: el análisis se hace en función de las formas (o unidades figurales) que se reconocen y de las propiedades visuales de esas formas [...] el conocimiento de las propiedades geométricas que deben movilizarse en función de hipótesis dadas: para analizar una figura, deben utilizarse las propiedades geométricas y no las formas visualmente reconocidas [...] los diferentes instrumentos que pueden utilizarse para reproducir o para construir una figura: el análisis de la figura depende de los procedimientos de reproducción o de construcción que el instrumento impone...insistiendo particularmente en el análisis instrumental [...] al jugar con la variable que ofrecen los instrumentos en una situación de reproducción, se invertirá en los alumnos la predominancia fuerte y durable de un análisis perceptivo con respecto a un análisis geométrico de figuras. Las tareas de reproducción serán radicalmente diferentes según el tipo de instrumentos escogidos. (pág. 110)

En correspondencia con las ideas anteriores (Duval, 2010), puede decirse que esta tarea implica la reproducción de un triángulo sin recurrir a los instrumentos convencionales de geometría, los popotes en tanto instrumentos constituyen el soporte para que los niños puedan reproducir la figura al trazar su contorno. La tarea solicita armar el molde roto del triángulo (los tres popotes) por tanto, para cumplirla incorpora el principio de superposición del modelo donde el trazado de las líneas aparece como operación que sustituye las acciones de cortar o doblar necesarias para obtener el molde del triángulo. Duval (2010) señala que la capacidad de superponer una superficie cualquiera sobre la figura por reproducir, y la de inscribir un pedazo de cada lado de esta figura, de manera que se pueda reproducirla de una sola vez por la prolongación de esos pedazos, son indicadores de una visualización geométrica avanzada (pág. 120).

Queda de manifiesto entonces, que la tarea de construir el triángulo utilizando los popotes, permite a los niños entrar en un proceso cognitivo fundamental para la adquisición de los saberes geométricos, que a su vez da pauta para el empleo progresivo de los instrumentos geométricos convencionales utilizados para la reproducción de figuras. En la actividad se encuentra presente una deconstrucción dimensional que es uno de los objetivos de las primeras actividades geométricas porque introduce a los alumnos en la realización de cambios que no están acostumbrados a desarrollar. Puede inferirse entonces que el armado con los popotes tiene un uso didácticamente eficaz, además de que dicha acción se convierte en una actividad que permite que surjan también propiedades geométricas.[106]

Lo anterior se percibe cuando se permiten mediciones (con instrumentos no convencionales) y trabajos con pliegues y/o cortes, tareas del paradigma GI que no exigen ni exhiben el razonamiento de validación con base en axiomas o propiedades geométricos, prueba de ello es que hasta este punto no se han mencionado las definiciones o características de las tipologías de los triángulos. En las siguientes imágenes (figura 66), las reflexiones expuestas pueden observarse también en las experimentaciones que realizan los niños.

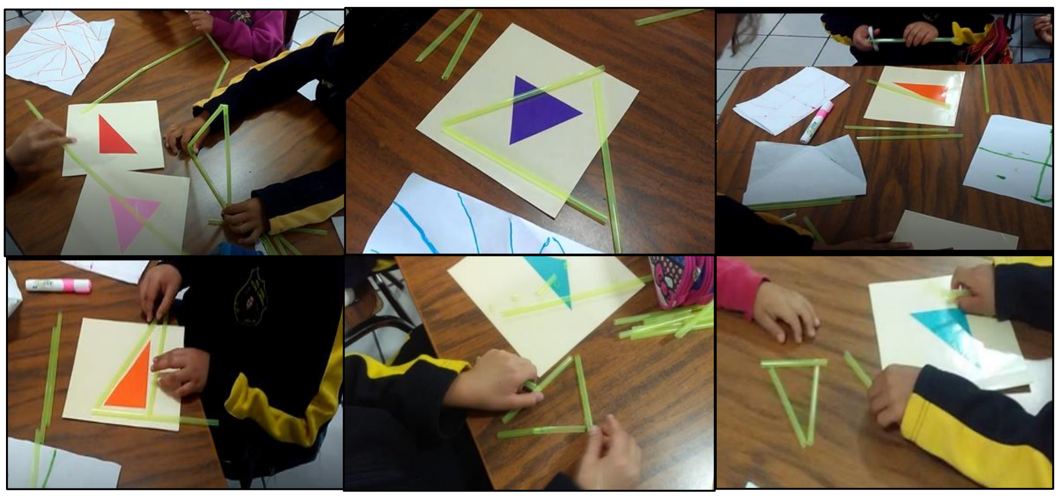


Figura 66. Ejemplos de las manipulaciones que realizan los niños durante la tarea.

En el extremo superior izquierdo de la figura 66, la primera fotografía muestra cómo los niños unían los popotes sin superponerlos o medirlos con el de la tarjeta, lo formaban solamente mediante la percepción visual; otros lo construían con medidas más grandes que las reales (fotografía en la parte superior al centro y la inferior a la izquierda). En la parte superior derecha se puede ver otra técnica que consistía en recortar los popotes para hacerlos coincidir y en la

[106] Esta acción podrá observarse en tareas posteriores.

parte inferior derecha puede verse como los niños no necesariamente los unían haciendo coincidir los vértices, en este caso tres popotes ya representaban el triángulo. Es importante mencionar que en la consigna no había la restricción de que el triángulo midiera exactamente lo mismo, solamente se mencionó que formaran uno igual, por ello, las construcciones de los alumnos sirvieron sólo para representar al objeto geométrico y acercar a los niños a la longitud de los lados como criterio de distinción de los triángulos.

En cuanto a la acción de la profesora Daniela, pone de manifiesto durante esta actividad la gestión de una situación a-didáctica[107] porque el niño por sí solo experimenta las opciones que tiene para resolver el problema, esto no quiere decir que las intervenciones de Daniela desaparezcan por completo, sino que se hacen presentes en los tiempos que se consideran necesarios. Es decir, las devoluciones que realiza en éste y otros momentos, propician que el niño logre convertirse en "matemático". De acuerdo a Brousseau (1986),

> La concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los "problemas" que le propone. Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, pues sólo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada a-didáctica. (pág. 14)

[107] Situación en la que desaparece la voluntad explícita de enseñar (Ávila, 2001, pág. 8)

Por lo general, este tipo de acciones de la profesora pueden observarse en las distintas clases que desarrolló, es decir, es común observar momentos en los que su intervención, se limita a una acción devolvente en la que recurre a cuestionamientos para orientar al alumno en las distintas tareas, tal como se aprecia en el siguiente fragmento de registro.

> //Cuando observa que algunos niños no logran formar el triángulo de la tarjeta, les plantea preguntas mientras los niños buscan la forma de corregirlo//
> D: ¿Este quedó igual a este?, ¿por qué?, fíjense bien como queda, ¿este se parece a este?
> Aa: ¿Lo puedo poner arriba? (la niña lo hace para medir la longitud del popote)
> D: Claro, a ver ponlo arribita
> Aa: Ah no, no me salió, deje le mocho
> D: ¿Ahora sí ya queda como el que tienes ahí? (señala la imagen), ¿son sus lados todos iguales?
> Ao: No..., no son iguales
> D: ¿Cómo le podemos hacer para saber si son iguales?, ¿cuál es más grande o cuál es más chiquito?
> Aa: Medirle con el lápiz (responde la alumna que estaba intentando medir con los popotes)
> //Para saber el tamaño exacto de los lados, los niños buscan maneras no convencionales de medir, algunos usan su lápiz, colores, o incluso los mismos popotes superpuestos en la imagen//

Se puede observar un proceso dialéctico[108] cuya intención es que sean los mismos niños quienes reconozcan la longitud de los lados como característica a considerar en la construcción solicitada. De igual manera, conforme los niños avanzan en la construcción Daniela interviene mencionando las características de acuerdo a sus lados, esto es, se apoya en interrogantes para que los niños observen estas peculiaridades mientras que en el discurso oral se hace presente la propiedad, muestra de ello es el siguiente fragmento.

> D: ¿Cómo son los lados de tu triángulo?
> Ao: Este está más chiquito, y estos dos son iguales
> D: Entonces tiene dos lados iguales y uno diferente, y en este ¿son todos los lados iguales? (señala un triángulo escaleno)

[108] Para Brousseau “Cada situación puede hacer que el sujeto evoluciones, y por ello también puede evolucionar a su vez de modo tal que la génesis de un conocimiento puede ser el fruto de una sucesión (espontánea o no) de nuevas preguntas y respuestas, en un proceso que he calificado como “dialéctica”. (Brousseau, 2007, pág. 27)

Ao: Son iguales maestra
D: Entonces este triángulo tiene sus tres lados iguales
//Se acerca a otra bina//
D: En su triángulo, ¿cómo tiene sus lados, iguales o diferentes?, ¿miden lo mismo?
Aa: Todos son diferentes
D: Entonces tu triángulo tiene todos sus lados diferentes

Dado lo anterior, se aprecia como la validación de los niños se basa en la experimentación que realizan durante la articulación entre construcción y artefactos (génesis instrumental), por tanto, el hecho de que la maestra mencione la definición no modifica sustancialmente la reflexión que ha hecho el niño sobre la característica de los triángulos y la longitud de los mismos. Lo que se observa es una justificación que parece prueba pragmática tipo empirismo ingenuo, puesto que la medición en estos casos no representa aún la generalización de la tipología de triángulos, sino que está centrada en casos particulares incluidos en la tarjeta que le correspondió a cada niño. Incluso, tal como se muestra en el siguiente acápite de diálogo, cuando Daniela desarrolla la socialización grupal de la actividad, en su discurso no menciona la propiedad geométrica implícita en la tarea.

D: Recuérdenme ¿qué figuras estamos viendo?
Aos: Triángulos
Aa: Figuras geométricas
D: Figuras geométricas, estamos viendo el triángulo, ¿por qué creen que se llamen triángulos?
Aos: Porque tiene tres lados
D: Fíjense bien, entonces el nombre de triángulo se parece al nombre de tres (hace énfasis en las primeras letras para que identifiquen el parecido), entonces ¿cuántos lados tienen los triángulos?
Aos: Tres
//Pregunta a varios niños hasta que todo el grupo concluye que los triángulos tienen tres lados//
D: Muy bien, entonces ya vimos que todos los triángulos de las tarjetitas son diferentes, pero recuerden que dentro de los triángulos hay diferentes tipos, decía Marianita se llaman triángulos pero son diferentes.

Notamos la manera en que Daniela apela a lo que Mariana mencionó en el episodio anterior (adivinanzas), acerca de que los triángulos son diferentes, para hacer reflexionar a los equipos sobre la longitud de los lados, pero no lo logra del todo, por esta razón lo concreta en la socialización colectiva, en la que instaura como saber en juego la definición de triángulo y el reconocimiento de que existen diferencias entre ellos aunque todos tengan tres lados. La validación de esta tarea es empírica, confrontada a la realidad porque, cuando los niños mencionan que es un triángulo con lados iguales o diferentes es porque ya lo midieron, de esta manera queda demostrado que existe un razonamiento. Ahora bien, en el paradigma GI la deducción parte de una experiencia articulada con la intuición, el razonamiento que se privilegia es de tipo constructivo y tiene un horizonte tecnológico, la construcción y la percepción forman parte de esta geometría experimental.

De igual manera, la tarea circula en el plano de descubrimiento y exploración (Semiótico-Instrumental: Sem-Ins), pues las interacciones privilegiadas (identificación y exploración de los objetos) se apoyan en las génesis semiótica e instrumental al resolver los problemas mediante la representación de objetos. Recordemos que los procesos de construcción mediante artefactos son acciones propias de esta circulación, además de que moviliza los componentes espacio real y local, visualización, artefacto y construcción. En esta fase del trabajo matemático, el niño tiene contacto con el problema geométrico a resolver cuando se pide construir el triángulo con los instrumentos. Adicionalmente, hay una semi circulación del plano justificación y razonamiento (Instrumental-Discursivo: Ins-Dis), pues aunque se privilegia el desarrollo del razonamiento sobre la técnica de construcción, el referencial (tipología de los triángulos de acuerdo a sus lados) no se exige como argumento para la justificación. En este caso, los componentes que se relacionan son los artefactos, la construcción y la prueba (se suscita una prueba pragmática para representar el objeto triángulo). También se solicita que comuniquen si los triángulos son similares a los construidos pero no la forma en que los construyeron. En la figura 67, podemos apreciar todos los componentes involucrados en la tarea[109].

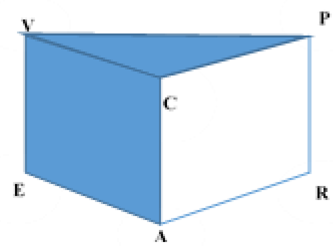


Figura 67. Circulación de planos. Construcción con popotes.

Con base en lo expuesto, concluimos que esta tarea sienta las bases para las demás actividades que se inscribirán en el paradigma GII, en las cuales se habrá de solicitar la enunciación de propiedades geométricas.

8.3. LOS TIPOS DE TRIÁNGULOS Y LA MEDIDA DE SUS LADOS

Se ha expuesto con anterioridad que los grupos multigrado propician que el profesor recurra a distintos tipos de pruebas para favorecer el razonamiento geométrico cuando solicita los argumentos de los alumnos en función del saber en juego, por tanto, en las discusiones grupales el rol del profesor es fundamental en la actividad matemática puesto que tiene que orientar la consolidación del aprendizaje. En la actividad que aquí se analiza se observarán las intervenciones de Daniela cuando busca generar la interacción de los niños en los equipos reconociendo las diferencias en su nivel cognitivo, para que se apropien del contenido.

[109] Cada letra representa un componente: V (visualización); E (espacio real y local); C (construcción); A (artefactos); P (prueba); R (referencial).

Para esta tarea, la profesora coloca en el pizarrón un trenecito de material concreto que tiene tres vagones titulados "escaleno", "equilátero" e "isósceles", la finalidad es que mediante trabajo grupal los niños ubiquen las tarjetas (con triángulos distintos) en el vagón que corresponde. Hemos observado en los episodios anteriores, que hasta este momento no se ha hecho alusión a esta clasificación, sin embargo, al parecer Daniela considera que los alumnos que ya han estudiado este tema podrán identificar el tipo de triángulos consolidando su conocimiento acerca de ellos además de propiciar la reflexión en los niños que no los han estudiado. Es posible apreciar en el siguiente recorte de registro, que mientras los niños pasan a colocar sus tarjetas, Daniela suscita cuestionamientos que permitan a los niños decidir si están en lo correcto, para ello involucra a todo el grupo y permite que las mesas de trabajo comenten entre sí acerca de las respuestas.

> D: Muy bien, ¿ya vieron aquí que tenemos? (señala el tren con los tres vagones), ¿recuerdan que dijimos que los triángulos se llaman igual pero son diferentes?
> Aos: Sí
> D: A ver, ¿aquí qué dice?
> Aos: Tipos de triángulos
> D: ¿Si ven los vagones del tren?, fíjense, aquí es el nombre de cada uno de los tipos de triángulos, ¿qué dice aquí?
> Ao: Equilátero
> D: ¿Saben qué es un triángulo equilátero, lo han escuchado?
> Aos: Sí, No
> D: ¿Sí, a ver qué será Jesús? (niño de tercero)
> Ao: Es un triángulo con tres lados iguales
> D: Pongan atención a Jesús, es un triángulo con tres lados iguales, ¿entonces cómo se llaman los que tiene sus tres lados iguales?
> Aos: Equilátero
> D: Muy bien, de los que tienen en sus tarjetitas, ¿alguno tenía todos sus lados iguales?
> Ao: El mío, tiene tres lados iguales
> D: A ver enséñaselos a los demás, fíjense a la figura, ¿sí serán tres lados iguales?
> Aos: Sí
> D: ¿Entonces ese será un triángulo qué?
> Aos: Equilátero
> Ao: Maestra, yo tengo un isósceles (un alumno de segundo grado)
> D: ¿Por qué dices que tienes un isósceles?

Ao: Porque dos lados son iguales y uno diferente
D: Muy bien, entonces los que tienen dos lados iguales y uno diferente se llaman isósceles, ¿quién tiene un triángulo así?, a ver enseñen su tarjeta a los demás para que entre todos vean si es isósceles
//Pasa un alumno a colocarlo, la profesora se dirige a todo el grupo //
D: ¿Sí es isósceles?
Aos: Sí
D: También dentro de los triángulos tenemos los escalenos, que dice que sus tres lados son diferentes... ¿cómo son sus lados?
Aos: Diferentes
D: ¿Este podría ser un escaleno? (toma un ejemplo)
Aos: Sí
Aa: El mío es escaleno, porque está así, con los lados diferentes
D: Muy bien, entonces tienes un triángulo escaleno

A partir de lo anterior, distinguimos como los alumnos de tercero ya tienen nociones sobre el tema, esto contribuye a la consolidación de su conocimiento y el de los niños de segundo, pero además permite que los niños de primero tengan un acercamiento a ese objeto de conocimiento. En su vocabulario, los niños de tercero incluyen la definición que menciona la maestra y son ellos quienes la comparten con sus compañeros. Mientras eso sucede en la escena grupal, en los equipos los niños utilizan popotes, lápices, colores y su propia mano, para medir los lados de los triángulos y corroborar si los lados son del mismo tamaño, por ello cuando se solicita la justificación sobre el tipo de triángulo que tienen, recurren a la experimentación de los instrumentos (no geométricos), asociándolos con la longitud de los lados para clasificar los objetos.

Algunas interrogantes que la maestra realiza son: *¿los lados de tu triángulo son iguales o diferentes?, ¿cuáles son iguales?, ¿cuáles son diferentes?, ¿por qué?, ¿cómo sabes?, ¿entonces cómo se llama?;* con estos cuestionamientos y las participaciones del grupo todas las parejas logran acomodar sus tarjetas. En la siguiente imagen (figura 68) se muestra el material utilizado en esta actividad, puede verse que se incluye el nombre y la definición de cada tipo de triángulo para que a partir de la discusión grupal y las reflexiones en cada bina, los alumnos logren conceptualizar este contenido.

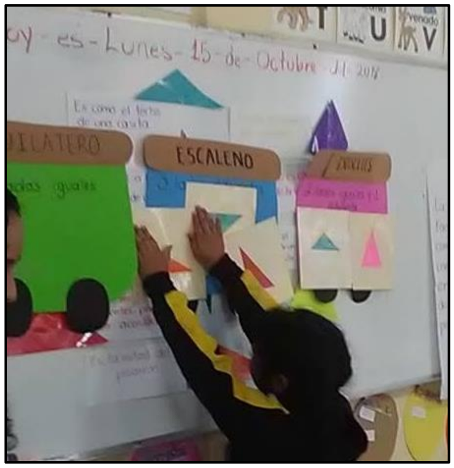


Figura 68. Tren para la clasificación de triángulos.

Una acción que permite al geómetra transitar del discurso basado en la experimentación a una justificación con base en las propiedades geométricas es la validación, porque en ésta debe argumentar sus razonamientos realizados, preferentemente en un contexto donde establezca una relación horizontal. En el caso de esta actividad, cuando las binas pasan a colocar su tarjeta se aprecia que es un momento de validación (por las preguntas y comentarios) que permite a los niños apropiarse de la definición de cada tipo de triángulo según sea el tamaño de sus lados.

Luego de tal validación, la profesora Daniela proporciona a los niños un material extra, unas hojas de trabajo diseñadas por ella en las que los niños deberán identificar tipos de triángulos; de esta manera, podrá determinar si los alumnos se han apropiado de la tipología en cuestión. No obstante, cabe aclarar que las hojas de trabajo son distintas de acuerdo al grado escolar en que se encuentran los alumnos. La hoja de trabajo para primer grado se muestra enseguida (figura 69).

Figura 69. Hoja de trabajo para primer grado.

Con base en lo que se presenta en la figura 69, la consigna en la hoja para primer grado era: *ilumina de color amarillo los triángulos que tienen sus lados igualitos, de verde los triángulos que tienen sus lados diferentes* y de *rojo los triángulos que tienen dos lados iguales y uno diferente*.

Puede verse que el vocabulario empleado incluye la característica de cada triángulo como elemento que permita categorizar cada imagen (ver figura 69), pero la actividad no pide ninguna justificación de la respuesta, además no sugiere alguna técnica de medición para comprobar el resultado, es sólo con la visualización que el niño tendría que reconocer la correspondencia entre el enunciado y los triángulos. Entonces lo solicitado es una prueba de tipo empirismo ingenuo, debido a que la solución es esencialmente empírica a partir del conocimiento que posee el alumno, y no involucra un proceso complejo de definición de los objetos a partir de la medición de cada uno o todos los casos. De esta manera se observa que para primer grado, basta con que identifiquen la definición general y reconozcan los triángulos que comparten características similares.

Por su parte, en la hoja de trabajo para los otros dos grados (2° y 3°) no se incluyó tampoco la definición de cada tipo de triángulo porque se apoya en la visualización de los triángulos para caracterizarlos y clasificarlos. La hoja de trabajo para segundo y tercer grados se muestra enseguida (figura 70).

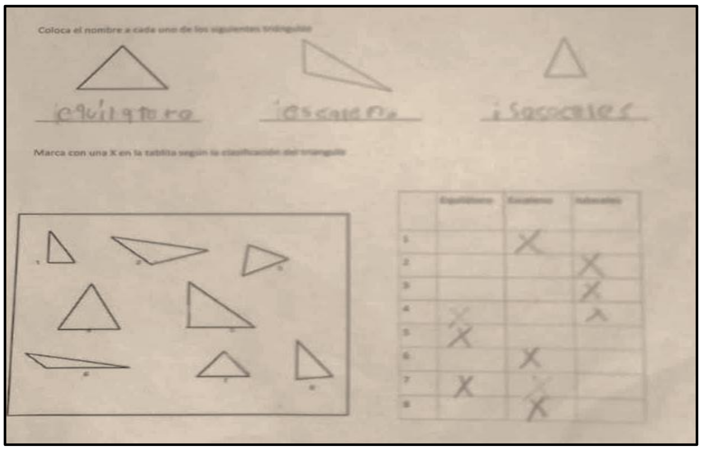


Figura 70. Hoja de trabajo para segundo y tercer grados.

Puede verse en la figura 70 que hay dos consignas, una indica colocar el nombre a cada tipo de triángulo, se observa que las imágenes están colocadas en una posición convencional, lo que facilita al niño la observación de los lados. La segunda instrucción pide clasificar los triángulos del recuadro e identificarlos según su nombre (equilátero, isósceles, escaleno). El conocimiento solicitado se evidencia cuando pasan de nombrar un triángulo en particular (primera parte de la hoja) a clasificar otros triángulos que tienen la misma condición (la tabla de clasificación)[110].

Podemos catalogar esta actividad como una prueba de empirismo ingenuo ya que a pesar de que se solicita clasificar los triángulos con base en una propiedad (longitud de los lados), no se requiere justificar la afirmación realizada, ni por medición ni por la enunciación de las características. En ambas hojas de trabajo las pruebas solicitadas son del mismo tipo, sin

[110] Es importante señalar que en otra de las actividades posteriores la profesora Daniela usa la misma hoja, pero con un objetivo diferente.

embargo la intención de cada una es diferente en lo que concierne al aprendizaje esperado, en la de primer grado es asociar la imagen del triángulo con sus características y en segundo y tercer grados es nombrar y clasificar una serie de triángulos, esto permite inferir que los objetivos de Daniela son: 1) que los tres grados clasifiquen triángulos de acuerdo a sus lados; 2) involucrar al grupo en una clase única y; 3) propiciar la interacción en los equipos mixtos, esto es con niños de distintos grados. Pero también tiene claro, que existen ciertas diferencias en el nivel cognitivo de sus alumnos, nivel que mediará las distintas tareas que les propone y que al parecer, le sugieren, con base en esas diferencias en el nivel cognitivo, ampliar el referencial que hasta este momento ha incluido, acción que es posible observar en las siguientes tareas.

8.4. TIPOLOGÍA DE TRIÁNGULOS, LA INSTITUCIONALIZACIÓN

Las tareas anteriores corresponden a la primera situación didáctica, pero Daniela diseñó otras situaciones que no fueron puestas a consenso en colectivo con los profesores. En lo que sigue se analiza una sesión donde desarrolla una serie de tareas cuya intención era institucionalizar la tipología de triángulos de acuerdo a sus lados. Al inicio relaciona una clase de Español donde se caracterizaron los tipos de familias y propone armar un rompecabezas recortado en triángulos de diferentes tamaños pero entre los que se encuentren los tres tipos (escaleno, equilátero e isósceles). Entrega un rompecabezas a cada equipo, pide que lo armen y observen la imagen que hay en él. En la figura 71, se observa que la mayoría de las piezas del rompecabezas son triángulos, exceptuando algunas.

Figura 71. Rompecabezas de “la familia”.

En esta actividad los niños no tuvieron mayor complicación pues es relativamente sencilla, su finalidad era preparar a los alumnos para que posteriormente, clasificaran los triángulos de acuerdo a la tipología estudiada previamente, para ello, proporcionó una tabla a los equipos que incluía tres columnas, cada una correspondía a un tipo de triángulo (escaleno, isósceles y equilátero) y en ella habrían de colocar los triángulos que contenía el rompecabezas. Para orientar la clasificación, Daniela inicia un diálogo grupal que se aprecia en el siguiente acápite.

> D: ¿Se dieron cuenta que en su rompecabezas hay figuras?, ¿qué figuras son?
> Aos: Triángulos
> D: Muy bien, ¿ustedes se acuerdan cómo se llaman los triángulos?, tenemos tres tipos ¿quién los recuerda?
> Ao: Equilátero, escaleno e isósceles (un niño de segundo grado)
> D: Muy bien, ahora fíjense bien qué vamos a hacer, me decían que si los pegaban en su cuaderno y yo les decía que no, porque los vamos a pegar en estas hojitas que les voy a dar (en la hoja hay una tabla con tres columnas, una para cada tipo de triángulos)
> D: Vamos a ver cuáles son equiláteros, ¿cuáles son los triángulos equiláteros?
> Ao: Los de tres lados iguales
> D: Ah, entonces de ese rompecabezas van a seleccionar los que tienen tres lados iguales y los van a pegar donde está el espacio para equiláteros (señala la columna correspondiente), después vienen los isósceles, César ¿cómo son los isósceles?
> Ao: Los que tiene dos lados iguales y uno desigual
> D: Ah, entonces vamos a ver cuáles son los isósceles, ¿y los escalenos?

> Aa: Los tres lados desiguales
> D: Vamos a ver cuáles son cada uno, ¿cómo podremos saber si los lados son iguales o diferentes?
> Aa: ¿Los podemos medir para saber si tiene todos sus lados iguales? (una alumna de tercer grado)
> D: Sí, como ustedes gusten
> Ao: Maestra, ¿dónde los vamos a poner?
> D: Ahí en la hojita que les estoy entregando, los vamos a ir ubicando, vayan clasificando. Por ejemplo Claudia, ¿este qué será?, ¿tiene todos sus lados iguales?
> Aa: Sí, pues equilátero

Logramos observar como los niños mencionan las características de los triángulos que se trabajaron en la sesión anterior, porque Daniela recurre a la memoria didáctica para reconocer si la mayoría de alumnos las ha aprendido y consolidar ese aprendizaje en esta misma sesión. La discusión grupal muestra la riqueza de la interacción entre niños (de grupo multigrado) con diferente nivel cognitivo, porque contribuye al conocimiento progresivo del referencial[111] en juego, asimismo, favorece el razonamiento geométrico cuando se solicita un discurso oral sobre la propiedad geométrica.

También se puede apreciar la consigna de la profesora, conforme menciona el nombre de cada tipo de triángulo cuestiona a los alumnos para que sean ellos quienes mencionen las características. El discurso oral de la profesora y las respuestas de los niños se emiten usando un lenguaje formal que no requiere referirse a la percepción real del objeto triángulo, es decir, se observa una evolución del argumento que justifica la clasificación realizada por los equipos, ya que la propiedad geométrica se hace presente en sus argumentos.

Ahora bien, las tareas anteriores estaban inscritas en un paradigma GI, pero en estas tareas es evidente la transición del paradigma natural hacia un paradigma axiomático natural (GII) porque en sus justificaciones se incluyen propiedades matemáticas en un proceso axiomático lo más preciso posible. Aunado a ello, Daniela orienta a la clase hacia una prueba pragmática cuando

[111] Clasificación de los triángulos de acuerdo a la medida de sus lados.

menciona que debe haber una manera de saber si los lados de los triángulos son iguales o diferentes, es decir, no basta ya la percepción visual porque es necesaria la comprobación para clasificar correctamente. Es así, que una de las alumnas de tercer grado, que ya ha empleado instrumentos geométricos de medición (regla), considera que medir con regla es un medio idóneo para la comprobación, por lo tanto pregunta si podrá emplear esta técnica. Una vez que Daniela le da la libertad de hacerlo, se observa que no solamente esta niña lo hace, sino que en diversos equipos los niños de segundo y tercer grado explican a los niños de primero como utilizar la regla para medir. Mientras esto sucede, como se puede ver en el siguiente fragmento, la profesora Daniela se acerca a los equipos para cuestionarlos sobre la ubicación de los triángulos.

> Ao: Mide 8, 6 y 5, entonces es escaleno (un niño de tercero que le explica a su equipo)
> Ao: Hay que ponerle la medida con lápiz para que se note que va aquí (en otro equipo, un alumno de segundo sugiere esto para colocarlos en las columnas)
> Ao: Este es isósceles, mira 7, 5 y 5 (niño de tercero explicando a los de su equipo)
> Aa: 4, 4 y 4, entonces es equilátero, péguenlo ahí (niña de segundo diciendo a su equipo)
> Ao: ¿Cómo se llama cuando tiene todos los lados diferentes?
> Aa: Escaleno
> Ao: Vayan midiéndolos, para saber si estamos bien (le muestra al equipo cómo medir y cuáles son los centímetros)
> Ao: A ver, 7, 5 y 6, ¿escaleno verdad? (pregunta a sus compañeros ellos)
> Aos: Sííí
> //De la misma manera se da este tipo de discusiones en los equipos mientras completan su tabla. La profesora sólo se acerca a las mesas cuando cree que es necesario apoyar o para observar el trabajo que realizan//

Los diálogos entre los niños, que no sólo son de individuo a individuo sino en el colectivo del equipo, promueven en los demás compañeros una manera de resolver la situación y les permiten llegar a conclusiones consensuadas colectivamente, es por ello que, se puede decir, se trata de una situación de formulación[112] en la que los niños dan muestra de su capacidad para comunicar

[112] De acuerdo a Brousseau, en la formulación de un conocimiento implícito cambia a la vez sus posibilidades de tratamiento, aprendizaje y adquisición [...] El medio que exigirá al sujeto usar una formulación, debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien él primero deberá comunicar la información [...] La

el conocimiento adquirido. No obstante, puede verse que no es una acción fortuita, al contrario forma parte de la gestión didáctica intencional de Daniela, quien reconoce que en ese momento su intervención no es necesaria, y con su “desaparición” de la escena de clase devuelve a los niños la responsabilidad de resolver el problema y al mismo tiempo provoca la discusión para que busquen una razón de validez para sus acciones (la clasificación de los triángulos) como una validación interna que favorece el razonamiento geométrico.

También puede observarse que, al utilizar la medida de los lados como criterio de la clasificación, los argumentos de los niños en los equipos derivan de la activación de una génesis discursiva, puesto que articulan el referencial con la prueba que solicitada, que en este caso es del tipo ejemplo genérico porque se considera un objeto concreto como representante de todos los objetos que pertenecen al dominio de tal afirmación. Asimismo, también se activa la génesis instrumental cuando, como medio de validación se involucra la construcción mediante artefactos (instrumentos geométricos) para medir y justificar la ubicación de un determinado tipo de triángulo. Lo verdaderamente importante para Daniela, era que se recurriera a la medición como medio de validación y sentar las bases para posteriormente recurrir a este conocimiento y generar uno nuevo.

Recuérdese que la construcción está determinada por los instrumentos utilizados que se relacionan entre sí, en esta tarea los artefactos materiales utilizados (regla) permiten a los niños realizar procesos que serían más difíciles con artefactos tradicionales (lápiz y compás). Por esta razón, los artefactos utilizados para medir indican que esta tarea pertenece al paradigma GI. Puede decirse que esta tarea activa los componentes de ambos planos (cognitivo y referencial), por tanto circulan los planos: semiótico-instrumental; instrumental discursivo y semiótico-discursivo, en cuanto al componente prueba la validación es de tipo experimental (medición)

---

formulación de los conocimientos pone en juego repertorios lingüísticos diversos (sintaxis y vocabulario). (Brousseau, 2007, págs. 25, 26) pero basada en el referencial que subyace al propósito de la misma, como se puede apreciar en la figura 72.

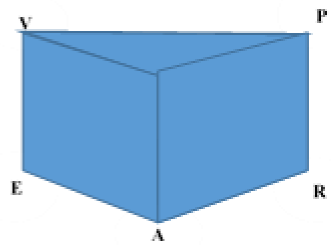


Figura 72.Circulación entre planos de la tarea.

Luego de la actividad con el rompecabezas, la profesora Daniela les proyecta un video en el que se describe qué es un triángulo y su clasificación según la longitud de sus lados[113]. Una vez que concluye el video Daniela pregunta al grupo las definiciones estudiadas y les pide que la ayuden a concentrar la información en una cartulina con tres columnas, en la primera está la descripción de los triángulos, en la segunda hay un espacio para colocar el nombre del tipo de triángulo y en la tercera hay un espacio para colocar la imagen que corresponda (denominada presentación visual del triángulo), la imágenes son triángulos elaborados en material concreto (papel) de colores diferentes. El objetivo es completar la tabla entre todos y dejarla de referente para sesiones posteriores. El diálogo que se genera se aprecia en el siguiente fragmento.

> D: Bueno, ya vimos los tipos de triángulos. A ver, miren yo he traído una lámina para identificar los tipos de triángulos (muestra la lámina que pega en el pizarrón); aquí tengo los tipos de triángulos incompletos, yo voy a leer y ustedes me van a decir si son triángulos escalenos, isósceles o equiláteros. Dice "triángulo con tres lados diferentes" ¿cuál será?
> Aos: Escaleno
> D: ¿Cuál de estos triángulos que les voy a mostrar es escaleno?, véanlos bien.
> Aos: El rosa
> D: Ahora les leeré lo que sigue "triángulos con dos lados iguales y uno diferente", ¿equilátero o isósceles, cuál será el que tiene dos lados iguales y uno diferente?

[113] Es una actividad similar a la que desarrolló la profesora María, aunque ambas utilizan el video en un momento distinto de la secuencia.

> Aos: Isósceles
> D: Y de estos que les voy a mostrar ¿cuál será?
> Aos: El verde
> D: Y la última dice, "triángulo con tres lados iguales", ¿cuál será?
> Ao: Equilátero
> Aos: El azul
> D: Muy bien entonces, ya conocemos estos tres tipos de triángulos y por qué se llaman así, ¿verdad?, dejen se los leo.

Se observa que la actividad resultó sencilla, probablemente porque el objetivo era que asociaran los triángulos con las definiciones que ya conocían o porque el material facilitó la visualización de sus características ya que a primera vista se podía ver que eran diferentes. Al gestionar el llenado de la tabla y leer las definiciones se puede apreciar que este momento es el de la institucionalización del saber en juego, las características de los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados.

En esta tarea, la activación de las génesis y la interacción de los alumnos en los equipos favorecieron el razonamiento geométrico de los niños, permitiéndoles apropiarse del aprendizaje esperado. En este sentido, los contenidos y las intenciones didácticas se han logrado en la secuencia de tareas. Sin embargo, a pesar de haber institucionalizado el objeto de saber, Daniela propone una última actividad.

8.5. CONSTRUCCIÓN CON PALITOS

En las discusiones entre profesores en la sesión de diseño, se hacía énfasis en la importancia de conocer lo que los niños aprenden y la construcción de triángulos utilizando y manipulando material concreto. Con esas discusiones como referente Daniela opta por activar la entrada experimental o génesis instrumental, proporciona nueve palitos a cada niño y solicita que construyan tres triángulos con ellos, uno de cada tipo (escaleno, isósceles y equilátero). Enseguida, apreciamos la descripción de la tarea incluida en el plan de clase.

> “Entregaré a cada alumno nueve palillos de madera de diferentes tamaños (tres de 5cm, dos palillos de 4 cm, uno de 5.74 cm, uno de 2 cm, uno de 5.5 cm y uno de 3.5 cm) y plastilina, con los que deberán formar un triángulo de cada tipo según la longitud de sus lados; uno escaleno, isósceles y equilátero”.

Llama la atención que no utiliza centímetros “cerrados”, sin embargo su intención era solamente que formaran los triángulos, no era necesario que los niños midieran. Desde la perspectiva del ETG los palitos son artefactos y constituyen la posibilidad de resolución de esta tarea porque la consigna exige que los niños piensen cómo es cada tipo de triángulo, es decir que realicen una desconstrucción mental, por ejemplo, si quieren construir el triángulo equilátero deben representarse mentalmente la manera en que puede construirse. Con la ausencia de un molde o una plantilla del triángulo, la tarea podría resolverse de diferentes maneras: formar o trazar las tres líneas para reconstruir la figura geométrica (uniendo los palillos al azar) o medir cada palillo entre sí estableciendo las longitudes de cada uno y formar el tipo de triángulo correspondiente. De esta manera se propiciaría que para construirlos, los niños deberían conservar en la memoria la figura a reproducir, es decir para construir los triángulos tendrían que representar mentalmente las características de cada uno de ellos.

Se mencionó en la tarea de “los popotes”, el uso progresivo de instrumentos no geométricos (palillos) permite que posteriormente, se utilicen instrumentos geométricos (regla), pero sobre todo, como se pone de manifiesto en este caso, sientan el precedente para el reconocimiento de las propiedades geométricas. Al construir los triángulos con los palillos, el posterior acápite muestra la manera en que aparecen las definiciones correspondientes, las cuales funcionan como soportes de la justificación.

> D: Fíjense bien lo que vamos a hacer, les voy a entregar a cada niño, una bolsita con nueve palitos, para que formen triángulos con ellos, ¿cuántos triángulos creen que formen?
> Aos: Tres
> D: ¿Por qué?
> Ao: Porque cada triángulo tiene tres lados

> D: Bien, tres triángulos, vamos a formar un triángulo escaleno, un isósceles y un equilátero, por ejemplo, ¿yo en qué me tengo qué formar en estos palitos para formar un escaleno?
> Aa: Cuál es más largo, cuál es mediano y cuál es más corto
> D: ¿Y si quiero formar un equilátero, cómo tiene que ser los tres palitos?
> Aos: Iguales
> D: Entonces, voy a buscar los que tengan tres lados iguales, y para eso vamos a ocupar la plastilina, vamos a hacer las bolitas, para unir los lados, ¿las bolitas qué serían niños?
> Aos: Los vértices (niño de tercero)
> D: ¿Sí se acuerdan de los vértices?
> Aos: Sí (solamente contestan algunos niños, los demás guardan silencio)
> D: La plastilina la van a usar para unir los palitos. Empiecen hacerlos, ahorita no vamos a ocupar la regla. Fíjense en el tamaño de los palitos. Si vamos a hacer un equilátero, ¿cómo van a ser sus lados?
> Aos: Iguales
> D: Vamos a usar los palitos que sean del mismo tamaño, que sean iguales y vamos a formar el equilátero

A diferencia de la primera clase (construcción de triángulos con popotes), en ésta se utiliza un material no geométrico, la plastilina, lo que supone una ventaja didáctica porque cuando Daniela emite la consigna aparece un elemento geométrico, el vértice y como los alumnos de segundo y tercer grados conocen al vértice como la unión de dos lados de una figura, con esta actividad Daniela se propone que lo signifiquen utilizando la plastilina. Podemos decir entonces que se despliega la visualización no icónica de este concepto (vértice) porque no se representa su imagen pero a partir de su funcionalidad (unir los palillos), reconfigura mentalmente este elemento. Esta tarea instituye las bases para la utilización del vértice en próximas tareas en las que tengan que describir figuras geométricas, con esto se evidencia la adquisición de un lenguaje geométrico que comienza a tomar formalidad.

Por otra parte, a pesar de que se les indicó no utilizar regla para identificar las medidas, los niños comparan los palitos para reconocer si miden lo mismo, por esta razón se puede inferir que la utilización de material concreto, los orilla a la experimentación como medio de validación, por tanto, sigue siendo una tarea del paradigma GI. Otro aspecto destacable se observa en el siguiente recorte, que la validación no se realiza de forma grupal, conforme terminan, los niños se acercan a la mesa de la maestra y ella les hace cuestionamientos para que vinculen la construcción con el proceso de validación dentro de la génesis discursiva, es decir, para que el argumento (prueba) del niño sobre la construcción y la clasificación refiera a la definición de los triángulos (referencial).

> D: ¿Este triángulo cómo se llama? (señala uno de los que el niño construyó)
> Ao: Escaleno.
> D: ¿Y cómo hiciste para construirlo?
> Ao: Junte los lados con los vértices (niño de tercer grado)
> D: ¿Cómo supiste cuáles eran los lados que deberían formar el triángulo?
> Ao: Fue el último que hice y los tres palitos que quedaban eran todos diferentes, entonces como eran diferentes pude formar el escaleno, porque todos sus lados son diferentes.

Queda de manifiesto como la profesora Daniela solicita una prueba de tipo intelectual, específicamente de “experiencia mental” ya que se articula en torno de argumentos y cadenas de argumentos para producir un lenguaje simbólico. El estudiante justifica su respuesta a la tarea, pero tomando en cuenta los criterios matemáticos previamente aceptados en la comunidad escolar, que el escaleno tiene todos sus lados desiguales. Cabe destacar que la tarea fue resuelta correctamente por todos los niños de segundo y tercero, sin embargo algunos de primer grado tuvieron dificultades para dar una justificación oral sobre el proceso de solución, por ello requirieron ayuda de la profesora o de otros niños para concluir la construcción. La figura 73 permite apreciar algunos productos de la actividad.

Figura 73. Productos de la actividad “Triángulos con palitos”.

En general las construcciones no difieren mucho unas de otras (ver figura 73), debido a las medidas de los palitos. Para fines de activar la construcción puede decirse que la tarea es adecuada, sin embargo, aunque la prueba intelectual está presente, al parecer debió ser necesario realizar la socialización grupal para otorgar validez a los procesos de construcción que se presentaron, y no solamente argumentar esta acción con la profesora. Podemos inferir que, aunque Daniela ya había realizado la institucionalización, consideró necesario que al activar la génesis instrumental, el geómetra (niños) podría argumentar los procesos de construcción realizados en función del conocimiento adquirido, por lo cual incluir un momento de socialización grupal, habría permitido consolidar el aprendizaje en quienes aún no lo adquirieran.

Se observa que la tarea ha movilizado los distintos componentes de los planos del ETG, la visualización no icónica (tipos de triángulos) asociados con el espacio real y local (lados y vértices), la construcción (al formar los triángulos) cuando utilizan artefactos materiales (instrumentos no geométricos, los palillos), para finalmente argumentar sus construcciones (prueba) con base en el referencial que subyace en la actividad (clasificación de los triángulos de acuerdo a la medida de los lados).

Una vez que concluyó la construcción, la profesora optó por evaluar a los niños a partir de la resolución de unos ejercicios contenidos en hojas de trabajo, nuevamente considera una hoja distinta de acuerdo al grado escolar (una para primero y otra para segundo y tercero). Cabe señalar que los resultados de esta actividad no fueron socializados en el grupo, solamente se recogieron conforme terminaban de responder. En este sentido, puede decirse que la intención de Daniela era sólo evaluar el nivel de logro en el aprendizaje esperado, este momento de evaluación tampoco incluyó intervenciones de la profesora, no pasó a los equipos para orientar a los niños con ejemplos o cuestionamientos, ellos lo resolvieron de manera individual. La única indicación fue que las respondieran solos y que si tenían alguna duda se acercaran a ella, sin embargo la mayoría de los alumnos no requirió apoyo alguno y lograron concluirla de forma autónoma. Algunos ejemplos de las hojas de trabajo se observan a continuación (figura 74).

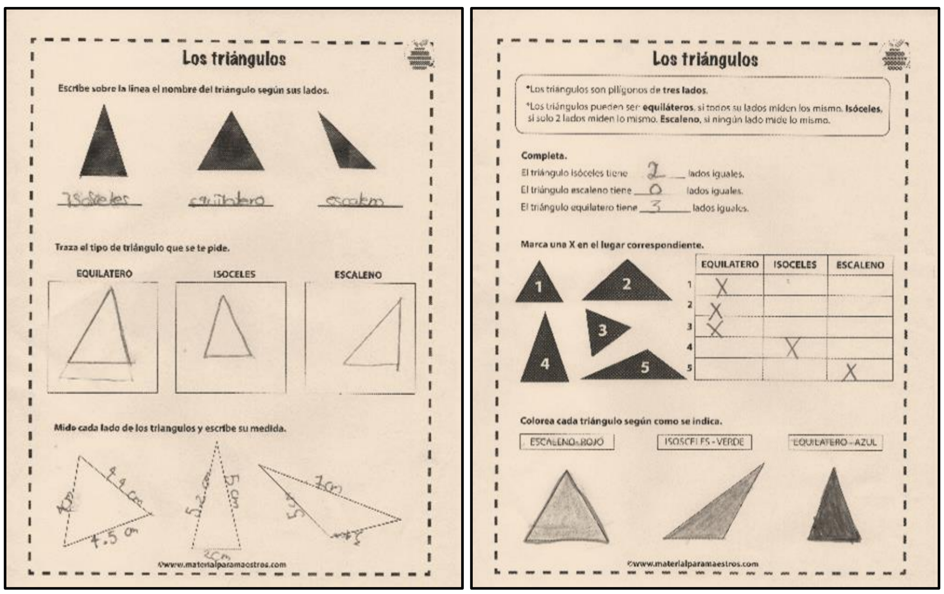


Figura 74. Hojas de evaluación.

Se puede apreciar en la figura 74 que la diferencia entre lo que plantea en cada hoja corresponde con el grado escolar en que se ubican los niños. La de la izquierda fue para los niños de segundo y tercero y la de la derecha para los de primero. En la hoja para los niños de segundo y tercero se incluyen tres tareas: trazar el triángulo indicado y; medir y registrar la medida de los lados. En la primera tarea se moviliza la visualización icónica para diferenciar los tipos de triángulo y su nombre. En la segunda, donde era necesario trazar el triángulo que correspondiera con el nombre se puede apreciar que utilizaron un instrumento geométrico (regla) aunque la representación semiótica de las figuras está en una posición típica, es decir, los dibujaron en la misma posición que están en la primera tarea. Por último, en la actividad tres no se solicita que coloquen el nombre, solamente colocar la medida de cada uno de los lados, para lo cual es necesario un uso adecuado del instrumento geométrico, pero no la definición de la tipología estudiada. Puede decirse entonces que en esta hoja de evaluación se piden pruebas pragmáticas del tipo empirismo ingenuo (particularmente en la medición).

Para el caso de primer grado, la hoja incluye tres tareas: reconocer el número de lados iguales en cada tipo de triángulo; identificar el tipo de triángulo dado en una imagen e; identificar (colorear) cada tipo de triángulo dado. En la primera tarea, no se observó mayor dificultad. En la segunda actividad, se pide clasificar triángulos pero no sugiere comprobación ni se solicita justificación de la respuesta. Por último, la tercera tampoco implica mayor complejidad, pues solamente se trata de relacionar las imágenes (que ya se han visto en ocasiones anteriores) con el nombre que corresponda. Durante el desarrollo de la actividad, se pudo apreciar que la mayoría de los niños lograron resolver la evaluación de manera correcta, es decir, fue evidente el nivel de logro que alcanzaron. Puede decirse entonces que a partir de las situaciones didácticas planificadas por Daniela, se ha favorecido el razonamiento geométrico de los contenidos matemáticos que se incluyen en los planes de clase[114]de acuerdo al nivel cognitivo de los alumnos.

[114] Esto se observa en la tabla donde se enuncian los contenidos e intenciones didácticas que se encuentra en la primera parte de este capítulo.

La relevancia de la tarea, es la movilización de pruebas de tipo intelectual, particularmente de "experiencia mental" en la segunda actividad donde deberá clasificarse cada imagen de acuerdo con su tipología. Aunque el simple hecho de que se incluyan estos tipos de prueba en las hojas de evaluación no es garantía de su efectividad, puesto que, como lo señala Balacheff (2000),

> No nos concierne realmente la naturaleza o el nivel de las pruebas que el alumno sea capaz de producir; lo verdaderamente importante para nosotros son las características de las situaciones que determinan estos aspectos. Observemos primero que los procesos de prueba no son elementos constitutivos de toda actividad matemática de los estudiantes, y que no toda situación didáctica exige tales procesos. De este modo, éstos podrían entenderse como fases de apropiación de las reglas de un juego o del funcionamiento de un material. (pág. 15)

Con base en la idea de Balachef (2000), puede decirse que la potencialidad de las pruebas incluidas en las hojas de evaluación, deben considerarse tomando en cuenta un contexto de validación donde esté presente la contradicción de los argumentos, condición necesaria para que éstos se consoliden como prueba irrefutable, es comprensible que se soliciten en las tareas previas a la evaluación aunque no se consideren propiamente como una actividad matemática.

Podemos concluir entonces, que la tarea con los palitos moviliza la construcción y en cierta medida genera un discurso probatorio, pero al omitir la validación grupal limita la transición de las pruebas pragmáticas (basadas en la experimentación) hacia las pruebas intelectuales en las que se manifestara el uso del lenguaje geométrico por parte de los niños. Los componentes movilizados en esta tarea fueron la visualización, el espacio real y local (integrando un nuevo elemento, el vértice), la construcción con artefactos no geométricos y el referencial como justificación para las pruebas que se presentaron en el episodio, dando pie a la circulación de los distintos planos verticales del trabajo matemático (descubrimiento, comunicación y razonamiento).

8.6. LA CLASIFICACIÓN BAJO EL CRITERIO DE ÁNGULOS

En su secuencia, la profesora Daniela incluyó la clasificación de triángulos y la medida de sus ángulos internos, este contenido aparece en los programas de estudio de tercer grado y está incluido también en la tabla de organización de contenidos que realizó la profesora antes del diseño de la secuencia de situaciones didácticas, por ello diseña la siguiente "clase única" que se distingue por ciertas actividades diferenciadas para cada grado. Este contenido puede parecer complejo para los niños más pequeños, no obstante el trabajo en multigrado promueve la interacción de múltiples conocimientos en el aula, por ello es común que los alumnos de grados inferiores tengan acercamientos a conceptos más elevados que no corresponden al grado escolar en que se encuentran. Con base en tal flexibilidad, Daniela, decide trabajar la siguiente situación.

Para iniciar la sesión, entrega a los alumnos una tarjeta con nueve imágenes de triángulos en distintos colores y una hoja con una tabla dividida en tres columnas, cada una con el nombre de los triángulos. Luego solicita a todos los niños que recorten los triángulos y los coloquen en la columna de la tabla que corresponda cada uno, ejemplos de los productos obtenidos se muestran más adelante. No obstante, a los niños de segundo y tercer grados, les pide que además de hacer la clasificación anterior, midan los ángulos internos de triángulo, sumen esas medidas y observen el resultado de la suma. A partir de la indicación, la profesora solicita que para realizar las actividades, tomen del material que tiene para todo el grupo, los instrumentos de medición que requieran[115] (regla y/o transportador). Como se ha mencionado, los niños se encuentran ubicados en mesas de trabajo integradas por cuatro alumnos de distinto grado escolar, a pesar de que esta actividad es individual, no hay alguna modificación en el acomodo de las mesas.

[115] Dentro del aula existe un espacio donde están acomodados algunos materiales que se usan en las clases, entre ellos juegos de geometría, aunque también, algunos niños traen estos materiales en sus mochilas, por lo que recurrir a ellos no supone dificultad alguna.

El componente referencial que sustenta la actividad es *Clasificación de triángulos por la medida de sus lados y ángulos internos de un triángulo*, por lo tanto la profesora supone que es posible que la propiedad: *la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º*, la deduzcan los niños de segundo y tercer grados. De manera entonces que el espacio real y local está definido por la tipología de triángulos con base en la longitud de sus lados y por la propiedad en torno de los ángulos internos del triángulo. La génesis figural (visualización icónica) se activa cuando se presentan los triángulos de colores a los niños y se moviliza la construcción porque se pide que usen instrumentos de medición (regla y transportador); mediante la clasificación de triángulos, se activa la prueba de tipo ejemplo genérico, ya que para ubicar cada triángulo el niño necesita verificar las medidas de los lados del triángulo.

Aunque en la consigna no se excluyó a los niños de primer grado para que utilizaran el transportador, ellos podían resolver su tarea sólo usando la regla. Los de segundo y tercero si requerían usar el transportador para medir los ángulos[116], y al conocer la clasificación de triángulos con base en sus ángulos podrían relacionar ambos criterios de clasificación en la actividad. La mayoría de los niños de primer grado (como era de esperarse), utilizaron la regla como recurso de validación y aunque algunos no tuvieron todas las respuestas correctas, se pudo apreciar el nivel de avance respecto del razonamiento geométrico sobre los conceptos trabajados. Para los niños de este grado, el obstáculo mayor era la dificultad para usar los instrumentos geométricos aunque no era algo que deberían aprender en este grado, por los tanto, con las acciones de medir y clasificar se puede apreciar su nivel de avance. Muestra de ello, se presenta en la figura 75 que corresponde a una alumna de primer año.

[116] En una situación didáctica anterior que se trabajó exclusivamente con segundo y tercer grados, se abordó la clasificación de triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos, como lo marca el programa de estudios. Por esta razón los niños de estos grados ya saben cómo usar el transportador y conocen lo que es un *ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso y un ángulo llano*.

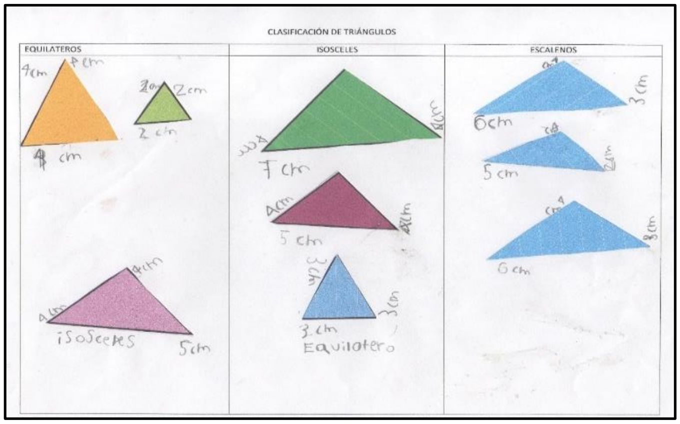


Figura 75. Clasificación y medición. Producto de alumna de primer grado.

Es posible ver que, en un primer momento la niña ubica erróneamente dos triángulos (el rojo de la columna izquierda y el azul de la columna de en medio), pero corrige su acción colocando luego el nombre correcto bajo de la figura (ver figura 75). Lo relevante en este caso es que, aunque este contenido no se propone en el programa de estudios para los niños de primer grado, como se hace evidente, los niños se apropian de él cuando el profesor promueve acciones que les permitan aproximarse a ese objeto de saber.

Respecto a la consigna dada a los niños de segundo y tercero, era medir los ángulos internos de los triángulos y sumarlos, lo que se puede decir es que en el primer momento de trabajo individual, cuando los niños están midiendo con los instrumentos geométricos para hacer la clasificación y antes de que se socializaran las respuestas en el grupo, se pide una prueba pragmática de tipo “empirismo ingenuo” que implica la verificación de medidas de los ángulos en casos particulares (los triángulos asignados). Una vez que midieron los ángulos, algunos niños suman y obtienen 180°, pero otros más no obtienen los 180º exactos, sobre todo por la falta de pericia para utilizar con exactitud los instrumentos de medición. Un ejemplo del tipo de respuestas en la medición de ángulos se presenta en la figura 76.

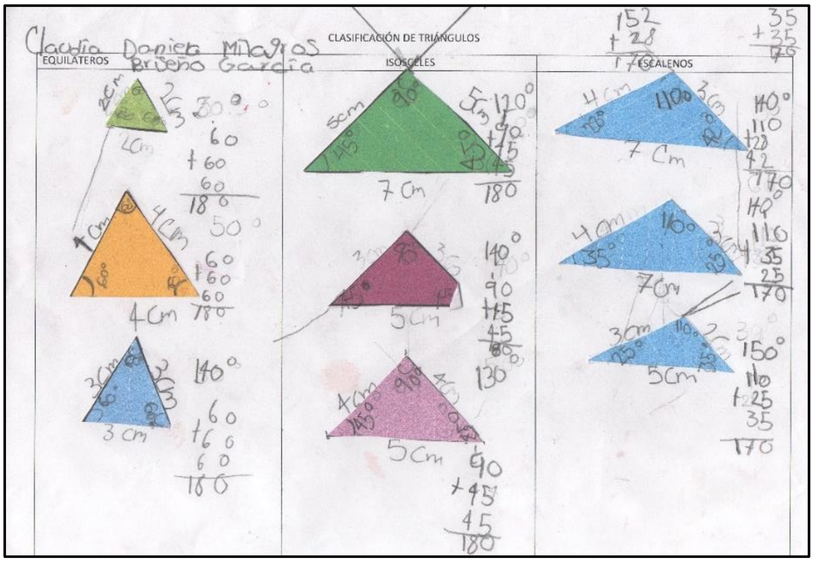


Figura 76. Medición de ángulos. Producto de un alumno de tercer grado.

Se aprecia en la imagen (figura 76), que medir los ángulos de los triángulos equiláteros no supone un gran problema, al parecer, una vez que encuentra la regularidad (siempre miden 60º) no tarda en concluir que en todos los casos suman 180º. En el caso de los triángulos isósceles y escalenos se presenta una inconsistencia, hay sumas con totales de 130° y 170º, cabe destacar que esta situación fue común en varios resultados obtenidos, probablemente porque la en estos casos la medición de los ángulos supone un nivel de complejidad mayor que en el caso de los triángulos equiláteros, complejidad que al parecer está asociada con la falta de práctica en la utilización del instrumento geométrico (transportador).

Luego de que los niños terminaron, Daniela organiza el momento de la socialización para que los niños validen sus respuestas y deduzcan la propiedad relativa a la suma de los ángulos. En dicho momento, como se puede distinguir en el siguiente fragmento, la manera de orientar la discusión grupal permite que evolucione el tipo de prueba solicitado inicialmente, esto es, que pase del “empirismo ingenuo” al “ejemplo genérico” que consiste en explicar las razones de validez para operar un objeto como representante de determinada clase de objetos, en este caso la medición les permite deducir, y argumentar la suma constante (180º) de los ángulos interiores de un triángulo.

> D: Cuándo realizaron la suma de los ángulos que están dentro de los triángulos ¿qué suma obtuvieron?
> Aos: 180°, 170°, 230, 140°
> Ao: 180°
> Aa: 180° y 175°
> D: ¿Y tú Brandon?
> Ao: 190° y 180°
> D: Con algunos estuvimos modificando algunas medidas ya que colocaban mal el transportador, pero con estos triángulos que hemos medido, cuál es el número en grados que se repite más
> Aos. 180°
> D: ¿Creen que esta medida se repita siempre?
> Ao: Sí, porque yo vi que casi todos lo de esta mesa medían eso.
> D: Esto se debe a que hay una propiedad del triángulo, que dice que siempre que midamos los ángulos de adentro su suma será 180°, es como una regla que siempre se debe cumplir.
> Ao. Y en los triángulos equiláteros siempre los ángulos miden 60°, porque como los lados son iguales, los ángulos también tienen que ser iguales
> D: Y cómo sabes eso, no lo puedes demostrar
> Ao. Si porque estos triángulos que nos dio, así me salió y fui a ayudarle a Mily a medir los suyos y fue igual 60° cada uno y lo que usted dice de sumarlos y dar 180°
> D: Eso que dice Santiago, también es una propiedad y se puede demostrar, al hacer la medición, pero aunque no midiéramos es algo que no puede cambiar.

Se evidencia que los niños se dieron cuenta que, al medir los tres ángulos la suma constante es de 180°, con este conocimiento y el apoyo de las interrogantes de la profesora deducen que si la condición se cumple para algunos triángulos, entonces se cumple para todos. Sin embargo, aunque los niños logran detectar la propiedad de la medida de forma inmediata, hay algunos más que no lo hacen. Esto es, si bien los alumnos logran adquirir ciertos conocimientos durante la actividad, el saber en juego no aparece de manera rotunda porque no se les solicita una justificación escrita que propicie el análisis de dicho saber. Al parecer, hubiera sido pertinente plantear actividades adicionales para observar que efectivamente en todos los casos los ángulos interiores suman 180°. Respecto de la intervención de Daniela puede decirse que cuando enuncia la propiedad en un lenguaje formal intenta sostener al alumno en la situación, esto es, como ve que les resultará muy complejo a los niños estructurar el argumento de la propiedad estudiada, formaliza dicho conocimiento para darles un lenguaje y una estructura que podrán usar los niños en sus próximos argumentos.

Por otra parte, en esta tarea se activa la génesis discursiva con la articulación entre el componente referencial (propiedad de la suma de los ángulos internos) y la prueba (medición de los ángulos). La visualización y la medición (construcción) permiten encontrar la suma constante de la medida de los ángulos y una producción discursiva de declaraciones para demostrar la razón de ello. Cobra importancia entonces una enseñanza que tenga entre sus objetivos visualizar y producir enunciados, en este caso las acciones cognitivas de visualización y el lenguaje, potenciaron el razonamiento geométrico.

La profesora considera que, una vez que se han explorado los distintos contenidos, los alumnos serán capaces de hacer conjeturas para rescatar los conceptos claves de la descripción de los triángulos por las medidas de sus lados y ángulos. Por esa razón, como actividad final para puntualizar la propiedad, complementa la tabla trabajada en la situación didáctica anterior (cuando trabajó la institucionalización por la medida de sus lados) incluyendo ahora la clasificación de los triángulos con base en la medida de su ángulos, para nombrar la clasificación de acuerdo al tipo de ángulos, se apoya de unos carteles con el nombre de los ángulos estudiados en clases anteriores, destaca que integra una nueva columna con algunas preguntas que orientan la identificación de los ángulos. La figura 77 muestra la tabla diseñada en el plan de clases.

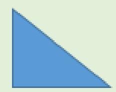
Descripción del triángulo	**Nombre del triángulo**	**Presentación visual del triángulo**	**Preguntas a realizar**
Este tipo de triángulo tienen un ángulo recto	**Triángulo rectángulo**		¿Cuánto mide un ángulo recto? ¿El nombre se relacionará con la medida del ángulo? ¿Por qué?

Figura 77. Tabla para clasificación de triángulos. Plan de clase de la profesora Daniela.

Daniela supone que no existirá problema para que los niños completen la tabla puesto que ya han trabajado la medición y clasificación de ángulos en otras sesiones donde han encontrado la relación entre el nombre y el tipo de ángulo. En el siguiente recorte de registro se observa la discusión sobre el llenado de la misma.

> D: Miren, ahora ya vimos que la medida de los ángulos también es otra característica que nos puede ayudar a clasificar los triángulos, vamos a seguir completando nuestra tabla, pero ahora usaremos la medida de los ángulos, vamos a descubrirlo, sale. Pegaré aquí las frases que traigo para irlas colocando en su lugar.
> //Las frases son: acutángulo, obtusángulo y rectángulo//
> D: ¿Sí se acuerdan de los tipos de ángulos verdad?
> Aos: Sí
> D: Pues las frases que puse tienen qué ver con los ángulos, a ver vamos a revisarlas, aquí dice "acutángulo", ¿qué creen que significa?
> Ao: Que es de los ángulos agudos.
> D: ¿Y este qué dice obtusángulo?
> Ao: De los agudos
> D: ¿Y el que dice rectángulo?
> Aa: Que es un ángulo recto.

Mediante el discurso oral y con apoyo de los carteles, la profesora Daniela incorpora el nombre de los triángulos para facilitar a los niños que relacionen el nombre el tipo de ángulo con los triángulos. Se observa que los niños no tienen dificultades porque es la profesora quien lleva los carteles y no les pide que sean ellos quienes lo redacten, es decir, solamente recupera los saberes de los niños para asociarlos con el texto. Una vez que ha realizado esta acción, como se puede observar en el siguiente fragmento, propone completar la columna de los triángulos de acuerdo a su definición.

> D: El primer triángulo dice en su descripción que tiene un ángulo recto. De estos tres nombres *acutángulo, obtusángulo y rectángulo*, ¿cuál creen que es el que debe completar la descripción?
> Aos. Rectángulo
> D: Muy bien, y cómo se llama el triángulo que tiene un ángulo recto
> Aos: Triángulo rectángulo
> D: ¿Por qué creen eso?, ¿el nombre se relacionará con el tipo de ángulo?, ¿por qué?
> Aa: Porque el nombre de ángulo recto es como el de triángulo rectángulo
> D: Así es, aquí nos daremos cuenta que los nombres, aunque son difíciles, se parecen al tipo de ángulos que tienen. Los de primero tal vez no entiendan esta parte porque con ellos no hemos trabajado los ángulos, pero pueden aprender así que pongan mucha atención. ¿Cuánto mide un ángulo recto?
> Aos. Noventa grados
> D: Vamos a seguir completando según su descripción. "Tiene ángulos que son agudos", ¿cuál es?
> Aos: Acutángulo
> D: Muy bien ¿cómo son los ángulos agudos?
> Ao: Miden menos de 90°
> D: El que sigue, "Tiene ángulos que miden más de 90°", ¿cuál es?
> Aos: Obtusángulo
> D: ¿Cuánto miden los ángulos obtusos?
> Aos: Más de 90°
> D: Muy bien, entonces ya completamos las descripciones y vimos cómo se llaman los triángulos cuando los clasificamos por sus ángulos. Para terminar, les voy a dar unas hojas para que las contesten solos.

En el fragmento apreciamos como mediante las preguntas de Daniela, los alumnos construyen conjeturas acerca de la relación entre los nombres de los ángulos y del triángulo. Cuando se refiere a los niños de primero, reconoce que el contenido es complejo para ellos pero el hecho de que compartan un mismo espacio escolar les permite familiarizarse con el lenguaje geométrico. En esta discusión no se solicita una prueba porque no es el propósito de la actividad, pero el objetivo se cumple; clasificar los triángulos de acuerdo con la medida de sus lados y sus ángulos, lo que sienta las bases para solicitar esta propiedad como argumento en las pruebas que solicita en actividades ulteriores. Para concluir la sesión, entrega a los alumnos de segundo y tercero, una hoja de trabajo que deben responder, mientras a los niños de primero les pone una tarea relativa a un tema de Español. Como se expuso en los primeros capítulos, existen contenidos que los profesores de grupos multigrado optan por desarrollar de manera separada, en este caso Daniela considera que lo que se obtuvo en la socialización, fue suficiente para los niños de primer grado, por ello rompe con la "clase única" y da paso a una clase diferenciada[117].

Antes de que los niños de segundo y tercero contesten la actividad, Daniela les pregunta: *¿qué es un triángulo?, ¿cuál es la suma de los ángulos internos de los triángulos?*; luego socializa brevemente las respuestas, la brevedad tiene relación con el hecho de que, sin dificultad, la mayoría de niños define al triángulo como "figura geométrica que tiene tres lados" y dicen que la suma de los ángulos internos da 180°. Podría decirse que con ello la profesora determina el nivel de logro del aprendizaje esperado propuesto en la situación didáctica.

En la hoja de trabajo (ver figura 78), se incluyen dos actividades. La primera tarea consiste en llenar un cuadro en el que se da el nombre de los triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos y los niños deben definir la característica esencial de ellos además de dibujar un ejemplo de cada tipo. En la segunda se presenta una serie de triángulos y se pide al niño escribir sus dos nombres (según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos).

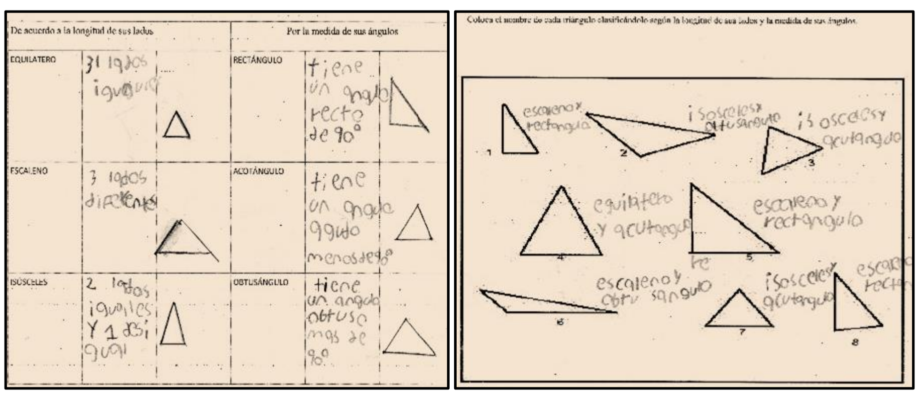


Figura 78. Producto sobre los tipos de triángulos (lados y ángulos) de un alumno de tercer grado.

[117] En las escuelas multigrado de México es una práctica común la planificación de temas diferenciados, ya sea por tema común o por grado, como en este caso lo hace Daniela.

En la primera actividad (imagen a la izquierda de la figura 78) destaca el uso de instrumentos geométricos (regla) para dibujar el triángulo que cumpla con la condición solicitada y sobresale también que la mayoría de los niños logró hacerlo. Dicha condición hace que en esta tarea, la reproducción sea más compleja porque se requiere transformar la representación mental de la figura, en una figura ensamblada, de acuerdo a Duval, (2010),

> Los alumnos del ciclo uno (pre-escolar a segundo) han tenido ocasión de trazar figuras a partir de un molde o de una plantilla. En el ciclo dos (tercero a quinto), deben aprender a trazar figuras utilizando los instrumentos convencionales. Tal utilización sólo puede hacerlos sensibles a las restricciones geométricas internas de las figuras reproducidas o construidas si pueden desconstruir visualmente las formas 2D en elementos 1D. (pág. 124)

Lo anterior se pone de manifiesto en la tarea cuando se solicita dibujar determinado tipo de triángulo utilizando instrumentos geométricos (en este caso la regla) para trazar la figura en cuestión. En la segunda actividad (imagen a la derecha de la figura 78), no se solicitan pruebas experimentales (como la medición) para verificar o enunciar las propiedades, para resolverla sólo se requiere la visualización. Para ampliar la potencialidad de ambas actividades, podría haberse recurrido a la validación colectiva de las respuestas, ello hubiera permitido arribar a una conclusión grupal de las clasificaciones.

8.7. LA DESCRIPCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Para concluir con su secuencia Daniela plantea una actividad donde pide a los niños que individualmente describan un triángulo utilizando toda la información que consideren necesaria. Al igual que en la actividad anterior, los niños siguen ubicados en las mesas de trabajo integradas por cuatro alumnos de distinto grado escolar, aun cuando la tarea está diseñada para desarrollarla de manera individual. Proporciona a cada niño una tarjeta que tiene un triángulo y una hoja en blanco para que lo describan, además pide que lo midan para que no quede duda de las características que habrá de incluir. También menciona: *"Acuérdense que podemos poner todo lo que puedan decir de la figura, lo de los vértices, de los lados, de sus ángulos, cómo se llama, por qué es escaleno, y cómo saben que es escaleno, qué podemos hacer para saber si tiene un ángulo de 90°, cómo se llama el triángulo si el ángulo se llama recto, es necesario medir para saber qué tipo de triángulo es"*. Cuando los niños comienzan a trabajar Daniela se acerca a las mesas de los equipos para plantear interrogantes acerca de los elementos que mencionó y deben contener las descripciones. Se aprecia en las indicaciones de Daniela que sugiere utilizar la medición en las justificaciones escritas, hace además una síntesis de los elementos revisados en el transcurso las clases pasadas.

La aprehensión discursiva se encuentra presente en la actividad, en la acción cognitiva que se produce al asociar la figura geométrica con una afirmación matemática (definiciones, propiedades), particularmente esta asociación va de lo visual al discurso, pues la descripción del triángulo implica que los niños relacionen las características y propiedades que observan. La consigna orienta a que, en el escrito de justificación se utilice una prueba de tipo "ejemplo genérico" al tener que describir el triángulo para establecer las generalidades propias de su tipo, que es el componente referencial en el que se basa la tarea.

Ahora bien, durante el desarrollo de la actividad se pudieron identificar las estrategias de medición que realizaron los niños, esto podemos apreciarlo en la siguiente imagen. Mediante el apoyo visual de la tarjeta con el triángulo, los niños miden los lados y ángulos para clasificarlo con base en estas dos características, queda de manifiesto en las fotografías (figura 79), el uso adecuado de los instrumentos geométricos, evidencia del conocimiento progresivo de esta técnica.

Figura 79. Estrategias de medición de Triángulos.

Al terminar, como era de esperarse, las descripciones de los niños varían de acuerdo a su grado escolar. Para los niños de primer grado el objetivo es la *Clasificación de los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados* utilizando la regla como instrumento de validación. Para los de segundo y tercero es *la Clasificación de los triángulos de acuerdo a la medida de los lados y de acuerdo a los ángulos*, los instrumentos que pueden utilizar son la regla y el transportador. En las figuras siguientes (figura 80) se observa la variedad en las respuestas de los niños.

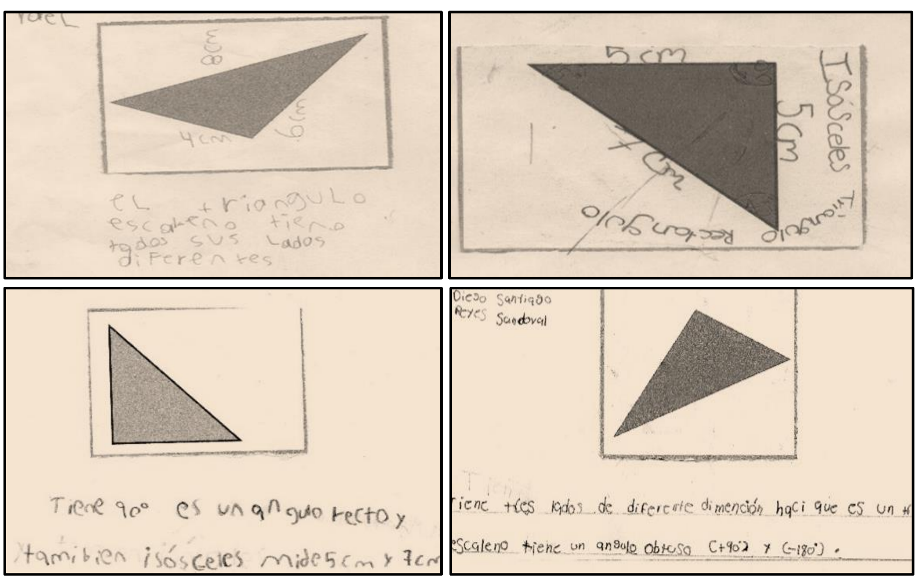


Figura 80. Diferentes grados. Diferentes descripciones.

En la primera imagen (superior izquierda de la figura 80) el niño de primer grado define el triángulo escaleno como “el que tiene todos sus lados diferentes”. En la segunda (superior derecha de la figura 80) una niña de segundo utiliza los dos criterios (lados y ángulos) para nombrar su triángulo como “isósceles y rectángulo”. En la tercera imagen (inferior izquierda de la figura 80) un niño de segundo grado dice que su triángulo “tiene 90º, es un ángulo recto y también isósceles”. Finalmente, en la cuarta imagen de la figura 80 un niño de tercer grado dice que su triángulo “tiene tres lados de diferente dimensión así que es un triángulo escaleno. Tiene un ángulo obtuso (+ 90º) y (-180º)”, por lo que destaca el lenguaje geométrico que utiliza. Llama la atención que en las dos últimas imágenes no hay evidencias de que los niños hayan medido los lados o los ángulos, al parecer, se debe a que, basándose en la visualización, han llegado a abstraer las características esenciales de los triángulos y por ello no precisan de instrumentos.

Una vez que concluye la mayoría, algunos niños pasan a exponer su trabajo y podemos ver en el siguiente fragmento, cuando Daniela interviene con cuestionamientos que permiten ampliar las justificaciones de los niños

> D: A ver Jesús, pásale enfrente, vean el triángulo de Jesús, ¿cómo describiste tu triángulo?
> Ao: Tiene un ángulo de 90° grados, es también isósceles, mide 5 cm y 7 cm
> D: ¿Y usaste algún instrumento de medida para saber?
> Ao: Regla y transportador, medí el ángulo y me salió 90 grados
> D: ¿Y cómo se llama el triángulo que tiene un ángulo recto?
> Ao: Rectángulo
> D: Muy bien, entonces tú tienes un triángulo rectángulo que también es isósceles, le damos un aplauso a Jesús, a ver pasa mija, y dinos como es tu triángulo
> Aa: Es un triángulo escaleno y tiene tres lados diferentes, así que tiene un ángulo mayor de 90 grados y menor de 180 grados
> D: ¿Y cómo se llama?
> Aa: Obtuso.
> D: ¿Y cómo se llama el triángulo por su ángulo?
> Aa: Obtusángulo
> D: Muy bien, entonces el triángulo de Mariana es un triángulo obtusángulo que también es escaleno. Ahora pasa tú mija (señala a otra alumna), ¿cómo es tu triángulo?
> Aa: Tiene dos lados iguales y un triángulo rectángulo

D: ¿Por qué es un triángulo rectángulo?
Aa: Porque tiene un ángulo de 90 grados
D: ¿Y cómo se llama según sus lados?
Aa: Isósceles
D: Entonces ella tiene un triángulo rectángulo pero este es isósceles.

Es posible apreciar en la discusión grupal, que la actividad no supone una gran dificultad para los niños, esto da cuenta del nivel de razonamiento sobre las características de los triángulos que han logrado; algo similar se pudo identificar en la mayoría de sus escritos. También destaca la conclusión que hace Daniela una vez que cada alumno ha dado su descripción, de esta manera institucionaliza los conocimientos que los niños han plasmado en su texto.

La tarea de descripción moviliza los componentes de prueba y referencial, utilizando la visualización y los artefactos como medio principal de validación, pero también activa las tres génesis del ETG. Tal como se ha expuesto en capítulos anteriores, se puede establecer una similitud entre el trabajo en un ETG y el desarrollo de situación didáctica porque, en un primer momento se da el acercamiento al saber a partir de los conocimientos que ya se poseen (descripción del triángulo), posteriormente accionan sobre el saber para construir el aprendizaje (escritura, medición, uso de propiedades matemáticas), y finalmente hay un momento en que se validan los resultados (la socialización grupal). Ciertamente en la validación Daniela no profundiza en las contradicciones, pero no lo es menos que lo ha realizado en sesiones previas.

Por otra parte, puede observarse como el plano semiótico-instrumental se hace presente cuando proporciona al niño el triángulo y se solicita la descripción; el plano instrumental-discursivo emerge cuando los alumnos utilizan instrumentos geométricos y las propiedades involucradas para justificar sus descripciones; el plano semiótico-discursivo se manifiesta cuando el niño prueba que su triángulo pertenece a un tipo en particular.

Como se mencionó, Daniela propuso la actividad en el contexto de una prueba “ejemplo genérico”, tipo de prueba intermedia entre las pruebas pragmáticas y las intelectuales, ya que decidir sobre carácter genérico del ejemplo, es algo que no puede hacerse sino en virtud del uso que se hace del ejemplo, como en esta tarea, donde las características y propiedades de los triángulos son necesarios para categorizar el ejemplo. Por lo tanto, con base en las descripciones de los niños y los cuestionamientos que en la discusión grupal realiza la profesora, podemos decir que se da paso a una prueba de tipo "experiencia mental" centrada en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular, esta prueba aparece como un medio que permite fundamentar la solución en un intento de explicación de la categorización realizada. En relación a los tipos de prueba y su evolución, Balacheff (2000) señala que,

> La posición de cada tipo de prueba dentro de esta jerarquía está determinada por su nivel de exigencia de generalidad, y por su nivel de conceptualización de los conocimientos que exige. Así, la transición del ejemplo genérico a la experiencia mental debe cumplir con dos condiciones: el paso de la acción a la acción interiorizada y una descontextualización, que marca el progreso decisivo en la construcción de los conocimientos. Lo anterior resalta el carácter no disociable de la evolución de tres elementos: los medios de prueba, los conocimientos y los medios lingüísticos [...] Recurrir a la experiencia mental marca verdaderamente la transición de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales, en la medida en que las pruebas pasan de ser acciones efectivas a acciones interiorizadas (en el sentido de Piaget) puestas en práctica. Las acciones interiorizadas se encuentran en la génesis de las operaciones que serán necesarias para la elaboración de pruebas de un nivel más alto. (págs. 26, 28)

Concluimos entonces, que en esta tarea no se trata de mostrar que la propiedad en cuestión es verdadera (esto ya se realizó en sesiones previas), se trata más bien de que esta propiedad tenga un carácter de validez al representar las razones que justifican la descripción del triángulo en cuestión. Esto denota un cambio en cuanto a la racionalidad de los niños cuando defienden o argumentan estas pruebas, en síntesis, cada una de las situaciones didácticas de la profesora Daniela cumplió con los objetivos que se planteó ya que pudo observarse la activación de las tres génesis del ETG en distintos momentos del trabajo en el aula y la transición de las pruebas pragmáticas a las intelectuales a partir de las intervenciones de la profesora y las discusiones grupales propuestas.

8.8. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En los episodios analizados en este capítulo hemos observado las distintas tareas que la profesora Daniela integra en sus situaciones didácticas, en diversos momentos ha activado las génesis instrumental y figural y ha provocado que se active la génesis discursiva, principalmente en las discusiones grupales. Pero sobre todo, el diseño de sus actividades considera la tipología de pruebas propuesta por Balacheff (2000) que se ha descrito en capítulos anteriores. La profesora Daniela transpone en las distintas tareas de enseñanza lo que ha adquirido en su formación inicial y aquello que ha aprendido durante su participación en el proceso de formación bajo el marco teórico del ETG.

El grupo de la profesora Daniela incluye estudiantes de tercer grado, lo cual propicia que a diferencia de María, amplíe el uso de artefactos, aunque las decisiones de Daniela son las que finalmente movilizaron el componente de construcción, activando así la génesis instrumental, lo cual no sucedió de la misma forma con María. Con respecto a la movilización de componentes en el trabajo de Daniela, son evidentes cada uno de ellos en distintos momentos de las sesiones planificadas.

Podemos señalar entonces que en el ETG de Daniela existe un predominio de lo didáctico, a pesar de que el tipo de tareas del plan de estudio 2012, así como el acercamiento de la "práctica" sobre la geometría a la escuela primaria en dicho plan tiene una tendencia mayor al dominio disciplinar, inferimos que a partir de su participación en la propuesta de formación modificó el trabajo didáctico, pues es frecuente que ponga en marcha un proceso dialéctico basado en preguntas como parte fundamental del desarrollo de sus actividades, lo que hace prevalecer la devolución para que el alumno se convierta en matemático (geómetra) y se favorezca su razonamiento geométrico. Es importante mencionar que una vez que terminaba la aplicación de una situación didáctica, Daniela analizaba su intervención contrastándola con los postulados del ETG, hecho que influyó en gran medida para el logro de los aprendizajes de los niños. Otro rasgo de su intervención es que aprovecha las ventajas del trabajo en equipos con niños de diferente grado escolar y nivel cognitivo.

Sobresale el hecho de que, cuando resolvía las tareas de la experimentación (en los momentos de aprendiz, de analista y de diseñadora), frecuentemente la profesora Daniela recurriera a la estrategia de enunciación de propiedades geométricas en sus diversos argumentos, esto al mismo tiempo que influyó en su práctica muestra la transición entre su ETG personal y el espacio idóneo que diseñó. Otro rasgo destacable es que, al analizar los contenidos que habría de trabajar, consideró no sólo el ETG de referencia en su formación sino que también el ETG idóneo de la escuela primaria, lo que le permitió la jerarquización de contenidos y el diseño de tareas en función de las necesidades del contenido matemático y de los niños. Esto, entre otras acciones, es lo que podemos denominar como transposición didáctica. En otras palabras, para hacer más fácil su enseñanza, Daniela aísla ciertas nociones y propiedades del conjunto de actividades en el cual tuvieron su origen los contenidos matemáticos y los transpone al contexto escolar, a la vida de su aula.

CONCLUSIONES

En el campo de la investigación educativa se han incrementado cada vez más los estudios sobre la formación de profesores y entre ellos destacan los dedicados a las matemáticas. No obstante, las investigaciones sobre la formación de profesores que enseñan matemáticas en escuelas multigrado son incipientes, particularmente es notable la ausencia de estudios que den cuenta del diseño y puesta a prueba de dispositivos para la formación matemática y didáctica del profesor. Es así, que esta tesis considera la puesta a prueba de una propuesta de formación bajo el marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático, configurando un Espacio de Trabajo Geométrico Didáctico para contribuir a la estructuración del espacio idóneo para la enseñanza del triángulo que favorezca el razonamiento geométrico en el aula multigrado.

En los objetivos de esta investigación consideramos como punto de partida la caracterización de aquello que predomina en el espacio de referencia y su relación con la formación del profesor así como el análisis del espacio idóneo que proponen los materiales escolares de la educación primaria. Es importante señalar que la formación y los materiales no son específicos para las escuelas multigrado, esto dota de un papel central al profesor como responsable de adaptar o transponer ese conocimiento al contexto multigrado. Es así, que se problematiza la formación y los materiales no pensados ex profeso para escuelas multigrado, sino fundamentalmente en la responsabilidad que recae directamente en el profesor que labora en este contexto.

Tal análisis permitió la configuración de un Espacio de Trabajo Geométrico Didáctico con características particulares bajo el diseño de dos situaciones de referencia para un proceso de experimentación desarrollado en colectivo con profesores en servicio y futuros profesores, determinando el espacio personal de los docentes y la transición de éste en el espacio idóneo configurado por ellos.

Por las razones expuestas, en este apartado se da cuenta de las conclusiones obtenidas en esta propuesta de formación desde dos dimensiones generales: la primera sobre los saberes geométricos y didácticos que los profesores han adquirido en el proceso de formación inicial, así como la potencialidad que brindan los mismos en relación al aprendizaje y enseñanza del triángulo; la segunda, considera la pertinencia de configurar un Espacio de Trabajo Geométrico como dispositivo en la formación de profesores que considere el proceso de transposición del saber de referencia (propiedades y criterios del triángulo) y el pasaje de éste a saber enseñado, para favorecer el razonamiento geométrico en el aula multigrado. Además, incluimos las limitaciones, los obstáculos de este estudio y futuras líneas de investigación que de ésta se desprenden. Las reflexiones se derivan de las respuestas y logros obtenidos con base en las preguntas y objetivos de esta investigación mencionados en el capítulo I.

Los saberes geométricos y didácticos en el espacio de referencia.

Uno de los objetivos de esta investigación consistía en analizar las tareas geométricas y didácticas incluidas en los planes de estudio para la formación de profesores, específicamente el Plan de Estudios del 97 y el Plan de Estudios 2012, para caracterizar lo que se propone para el aprendizaje y enseñanza de la geometría (concretamente lo relacionado con el triángulo) y dar respuesta al cuestionamiento: ¿Qué tareas (geométricas y didácticas) se proponen para el aprendizaje y la enseñanza de las propiedades y criterios del triángulo en los planes de estudio para la formación de profesores (espacio de referencia)

Es importante mencionar que una tarea se define como una actividad intelectual, un motor que permite activar el ETM entre sus planos, polos, y génesis. (Verdugo, 2017, págs. 46, 47). Bajo esta consideración, la tarea didáctica se considera en este trabajo como el deber del profesor de crear, proponer y gestionar las actividades para que el estudiante trabaje y desarrolle su ETM personal, y puede involucrar una secuencia de tareas. Una tarea matemática, de acuerdo a Nechache (2016), es cualquier ejercicio, pregunta o problema realizado en un tiempo limitado y en un contexto dado. Las condiciones de realización de este trabajo matemático están definidas por el espacio de trabajo matemático en el que se propone la tarea (Nechache, 2016, pág. 229), por lo tanto, para delimitar las tareas matemáticas concernientes al subdominio geométrico, consideramos las tareas asociadas al trabajo que realiza el geómetra, como la visualización o construcción, así como los problemas que se plantean para propiciar la activación de los planos, en este caso en particular, los tipos de tareas geométricas sobre el triángulo.

Identificamos que existen diferencias en cuanto al énfasis del conocimiento disciplinar y didáctico que ambos planes proponen; el Plan 97 plantea una mayor cantidad de tareas didácticas, se incluyen secuencias didácticas que el profesor podrá aplicar en su aula, prevalecen los tipos de tarea donde se diseñan y analizan sesiones de clase lo que refleja la importancia que se otorga al trabajo en el aula, encontramos también que el menor número de tareas se relaciona con el análisis de referentes teóricos, por lo tanto, el conocimiento sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría es escaso, porque los propósitos de formación no incluían este aspecto como un saber fundamental para la práctica del profesor.

Para el análisis del Plan 97, se revisaron los materiales de apoyo que se sugieren en la bibliografía de dicho plan de estudios, en cuanto a las tareas geométricas inscritas en los materiales, predominan las actividades de construcción y principalmente se activan las génesis instrumental y figural; los problemas que se sugieren en su mayoría tienen la intención de verificar una propiedad ya estudiada en las clases y se promueve el uso de artefactos materiales y simbólicos de forma recurrente, no obstante, las justificaciones solicitadas a los alumnos no promueven la demostración como medio de prueba, las tareas no favorecen el razonamiento geométrico pues los discursos están explícitos en el material del estudiante y no necesita deducirlos, entonces, el trabajo matemático se inscribe fundamentalmente en un paradigma geométrico dominante, el GI. Por otra parte, a pesar de que para desarrollar el razonamiento geométrico es necesario resolver tareas que requieren argumentos discursivos sobre las propiedades de las figuras, las tareas que promuevan la demostración de propiedades y criterios del triángulo son las más escasas en el ETG propuesto en el Plan 97. Es decir, aunque los materiales de la bibliografía básica contienen una serie de tareas geométricas que contribuyen al dominio disciplinar del profesor, se proponen pocas secuencias de tareas que propicien la activación de la génesis discursiva. En síntesis, el Plan de estudios 97 hace énfasis en la dimensión didáctica.

En la revisión del Plan de estudios 2012 se consideraron de igual manera los materiales de apoyo sugeridos en la bibliografía del cuso de Geometría, su aprendizaje y enseñanza, se observó que predominan las tareas geométricas cuyo objetivo es el dominio disciplinar, las actividades más numerosas son de construcción e incluyen acciones como trazar, reproducir, dibujar, doblar papel, manipular materiales concretos y utilizar artefactos interactivos. Fundamentalmente activan la génesis instrumental debido a que las pruebas que se piden para expresar argumentos son pragmáticas, el menor número de tareas encontradas son las que involucran la demostración, por ello, la génesis discursiva se activa en menor medida. Identificamos que la resolución de problemas involucra la validación dentro de un paradigma dominante que es la geometría axiomática natural (GII). Pocas veces se solicita la justificación de los procedimientos de construcción y no necesariamente se exige que se deduzcan a partir de una experimentación, además, es común encontrar la información teórica sobre los contenidos geométricos en los documentos de los estudiantes, por lo que se le da escasa importancia a la validación grupal, en numerosas ocasiones se sugiere sólo verificar o comprobar las afirmaciones teóricas. Esto es, a pesar de incluir una amplia variedad de tareas geométricas que contribuyan al dominio disciplinar, la activación de la génesis discursiva es la más escasa.

En cuanto a las tareas didácticas que este plan de estudios propone, un rasgo importante es que el trabajo con estas tareas tiene que ver con la estructura del curso de Geometría, pues en las primeras unidades hay un énfasis en la realización de tareas geométricas y es hasta la última unidad que se propone el análisis de los materiales escolares que se trabajan en la escuela primaria. Concluimos pues, que los contenidos disciplinares son la preocupación central de este plan de estudios, y una vez que el profesor en formación resuelve tareas geométricas, se intenta vincular teoría y práctica mediante el diseño de secuencias didácticas que no se aplican ni analizan en un contexto real. De esta manera, la responsabilidad de llevar a cabo un análisis didáctico de las situaciones de enseñanza recae en las decisiones del formador.

El espacio idóneo propuesto en los materiales escolares y el trabajo en el aula.

Una de las preguntas de investigación consistía en identificar, ¿Cuál es la potencialidad que las tareas incluidas en los materiales oficiales brindan al profesor para el diseño de un espacio de trabajo idóneo?, para contestarla se analizaron las posibilidades que brindan los materiales escolares (programas de estudio y libros del maestro y del alumno del nivel de educación primaria) de los que dispone el profesor (espacio idóneo) para configurar un espacio idóneo para la enseñanza del triángulo, se examinaron los contenidos geométricos que se estudian en la escuela primaria así como las orientaciones didácticas para su tratamiento inscritas en los libros de texto de los niños. Para el caso particular de los grupos multigrado, este factor cobra especial importancia, pues se desarrollan las sesiones clase articulando los distintos contenidos de los grados escolares que conforman el grupo.

En razón de los contenidos relacionados con el triángulo, encontramos que en el primer grado se estudian de manera general las figuras geométricas, en el segundo se incluyen contenidos particulares sobre el triángulo y es a partir de tercer grado que se hacen planteamientos más concretos sobre contenidos geométricos de este tema, en quinto grado es donde se profundiza en la mayor cantidad de contenidos sobre triángulo.

En las tareas geométricas para los primeros grados se observa un enfoque de razonamiento geométrico gradual, pues en primer grado la visualización de figuras y la identificación de características son las tareas predominantes y ambas se complejizan en segundo grado al incluir el discurso justificatorio del niño mediado por la orientación del profesor, en otras palabras, la visualización es parte fundamental del trabajo geométrico y se utiliza muy poco el vocabulario geométrico ya que generalmente, las actividades dejan al profesor la responsabilidad de institucionalizarlo.

En la mayoría de las actividades planteadas para todos los grados escolares, el componente construcción se moviliza frecuentemente, los artefactos sugeridos en los textos escolares para ello son de tipo material (reglas y escuadras), los artefactos de tipo simbólico (enunciados o propiedades) aparecen muy poco y cuando lo hacen, por lo general se pide la verificación mediante instrumentos geométricos como la regla y la escuadra. Por esta razón, el papel del profesor consiste en orientar el proceso de validación de los niños a partir de pruebas pragmáticas basadas en la experimentación. Con base en lo expuesto sobre los tipos de prueba, se considera que a partir de la evolución de las mismas en el trabajo escolar, el alumno puede lograr un razonamiento geométrico con base en los contenidos matemáticos que estudie, es decir, variará el tipo de prueba intelectual que realice el estudiante a partir del grado escolar y nivel cognitivo en que se encuentre, siempre basado en las propiedades del objeto geométrico en cuestión. También podemos decir que es probable favorecer las pruebas de tipo intelectual desde el nivel de educación primaria, por ello es importante el conocimiento y comprensión sobre el componente prueba por parte del profesor, para incluirlo en el trabajo matemático que proponga al alumno.

En cuanto a la génesis discursiva se observa que casi no se incluye en las tareas, sobre todo las que se proponen para los grados inferiores, los textos de los grados superiores la consideran propia de estos niveles escolares, pero es escasamente activada debido a que en pocas actividades se solicita un argumento al alumno, que justifique el trabajo geométrico que ha realizado, o bien, que exponga las conclusiones a las que llega a partir de las tareas propuestas. En conclusión encontramos que la activación de las tres génesis (figural, instrumental, discursiva) en todos los grados de educación primaria no se encuentra presente en los textos escolares.

En relación a la posibilidad que dan los libros de texto para el diseño de un ETG idóneo, se puede afirmar que cumplen medianamente con su propósito, pues en la mayoría de las lecciones dan cuenta de los contenidos y conceptos geométricos que se deben estudiar, pero en tanto dispositivo que favorezca el diseño del ETG Idóneo, no se considera en todos los grados la activación de la génesis discursiva como parte fundamental del trabajo matemático, con ello se limita la posibilidad de favorecer el razonamiento geométrico de los niños. Este hecho dificulta más el trabajo en el aula multigrado donde se trabaja al mismo tiempo con alumnos de distintos grados escolares. Ésta es un área de oportunidad para la disciplina, pues en los materiales escolares se trata de génesis discursivas donde se espera que el grupo sea del mismo nivel congnitivo pero en las escuelas multigrado no es así, por lo tanto, activar en particular cada génesis y planos del ETG es todo un reto para el profesor multigrado. En otro sentido, podemos señalar que la utilización de los distintos tipos de prueba en el aula multigrado, permite que el profesor articule el trabajo matemático de los distintos grados y favorezca un razonamiento geométrico.

Identificar y analizar el trabajo en el aula se consideró también un insumo para diseñar el espacio idóneo que sería la propuesta de formación para los sujetos de estudio, para lo cual se caracterizaron las tareas implementadas por una futura profesora en la enseñanza del triángulo para comprender la relación entre los espacios de trabajo (de referencia e idóneo) y las nociones sobre las que habría que poner mayor énfasis en el proceso de formación de profesores. Las secuencias didácticas aplicadas por la profesora favorecen un tanto el trabajo en el grupo multigrado porque selecciona contenidos de los diferentes grados escolares y los articula en una clase única. El conocimiento del contenido geométrico que se manifiesta en las clases es adecuado para los grados escolares que atiende, lo que refleja su dominio del contenido disciplinar adquirido en la formación inicial, pero aunque el conocimiento disciplinar aparece en ciertos momentos de la clase, no es suficiente para desarrollar de manera efectiva la enseñanza de los contenidos geométricos. Por otra parte, no se observa un tratamiento didáctico adecuado de dichos contenidos, generalmente la profesora utiliza la explicación verbal como un recurso fundamental en sus clases, mediante esta estrategia es común que proporcione las respuestas a los niños y no permita que sean ellos quienes deduzcan las propiedades y criterios del triángulo.

Por lo general, la profesora activa la génesis instrumental y la figural pero no la discursiva, esto es congruente con lo que ha adquirido en su formación inicial y lo propuesto en los materiales escolares. Entre los hallazgos más importantes es que en la formación de los futuros profesores el conocimiento del contenido matemático y la manera en que intenta vincular este conocimiento para mejorar el diseño de sus clases se articula de manera adecuada. Sin embargo, la transposición didáctica no se favorece adecuadamente, por lo general, sus intentos no proporcionan los resultados esperados.

Existe una transición entre los saberes didácticos y geométricos que se adquieren en la formación del profesor así como aquello que se desarrolla en el espacio personal, lo que es esencial para incidir en el proceso de transposición didáctica y el razonamiento geométrico mediante la activación de las tres génesis propuestas en el ETG. Dichas consideraciones se tomaron en cuenta para configurar la propuesta de formación que ostenta esta tesis.

El Espacio de Trabajo Geométrico como dispositivo para la formación.

Para llevar a cabo el objetivo de diseñar y experimentar con un Espacio de Trabajo Geométrico Didáctico como dispositivo en la formación de profesores, se consideró esencialmente que la génesis discursiva era la menos activada en los espacios de referencia e idóneo. Asimismo, nos propusimos un doble objetivo, uno geométrico y otro didáctico (razón por la cual se denominó Espacio de Trabajo Geométrico). En el proceso de configurar este dispositivo de formación, también se incluyó la estrategia profesional de transposición, por lo que el rol del profesor se organizó en tres momentos: aprendiz, analista, y diseñador, y se diseñaron dos situaciones de referencia que contemplan tareas geométricas y didácticas. Además, entre los objetivos de este estudio está el de propiciar el trabajo colaborativo entre profesores en servicio con experiencia en grupos multigrado y futuros profesores, por tanto, la experimentación se llevó a cabo en sesiones colectivas combinando el trabajo individual, grupal y en equipos.

En el objetivo geométrico se plantearon tareas matemáticas que colocaron al profesor en el papel de aprendiz, la finalidad era observar sus acciones como geómetras enfatizando la activación de la génesis discursiva. En este primer momento encontramos que existían diferencias en los argumentos iniciales que emplearon los profesores para la resolución de las tareas matemáticas, porque la concepción de rigor matemático depende de cada institución escolar. Mientras los maestros en servicio formados en el plan 97 se basaban en un lenguaje natural y escasamente mencionaban propiedades, los futuros profesores, formados con el plan 2012, buscaban incluir en sus justificaciones las propiedades y criterios del triángulo empleando un lenguaje formal.

En cuanto al dominio del contenido, independientemente del plan de estudios, en su mayoría los profesores evidenciaron un conocimiento adecuado, los profesores en servicio señalaron que habían aprendido estos contenidos en el nivel previo a la licenciatura y los futuros profesores dijeron que había sido en las clases de la Escuela Normal, no obstante, concluimos que el dominio de contenidos no fue un factor que limitara el proceso de experimentación. En adición a lo anterior, las situaciones de referencia incluían como momento fundamental la validación en colectivo, estas reflexiones contribuyeron a ampliar el dominio del contenido, por ende, en ambas situaciones de referencia se logró una transformación del discurso empleado en los argumentos verbales y escritos de los profesores que hacía referencia a las propiedades, criterios y características, del triángulo, pasando de un lenguaje natural a un nivel de lenguaje formal. En síntesis, los discursos iniciales de los profesores revelaron el saber de referencia que se incluye en los programas de formación, y sus discursos también manifestaron la escasa activación de la génesis discursiva para construir los argumentos, pero la validación grupal, propició la transformación de dichos discursos.

Las estrategias de resolución también fueron diversas entre los profesores, al parecer reflejo de la forma en que estudiaron los contenidos geométricos. Entre los profesores del plan 97 predominaron las estrategias basadas en la experimentación como medio de validación, en el caso de los futuros profesores del plan 2012, la experimentación era utilizada como un medio para consolidar las propiedades que mencionaban en sus justificaciones. De manera general, cuando las tareas se resolvían de forma individual se manifestaron pruebas pragmáticas del tipo empirismo ingenuo e intelectuales del tipo experiencia mental.

Mediante la validación grupal se observó una evolución entre las diferentes pruebas presentadas, es decir, pasaron de incluir en sus argumentos pruebas pragmáticas a sostener las respuestas en pruebas intelectuales, particularmente de demostración. La activación de la génesis discursiva con los profesores, que asociaba los componentes de prueba y referencial, permitió observar que los momentos de validación desarrollaron el razonamiento geométrico. Por lo tanto, podemos decir que la combinación del conocimiento que recibieron los profesores durante su formación inicial con el conocimiento construido durante la resolución de las tareas geométricas, permitió ampliar su razonamiento geométrico, y reconocer la importancia de la demostración en geometría.

Para cumplir con el objetivo didáctico se plantearon tareas cuya intención era el diseño de un ETG Idóneo efectivo para la enseñanza de la geometría en grupos multigrado de la escuela primaria (basado en la reconstrucción y/o modificación de las tareas matemáticas). Una tarea inicial fue la revisión teórica de los elementos propuestos en el ETG, a partir de la lectura individual y análisis colectivo de un texto que sintetizaba la información. Una vez que se concluyó esta actividad, los profesores ocuparon el rol de analista de los textos escolares e identificaron los conceptos revisados en la teoría en el espacio idóneo que se propone en los libros para el maestro. Identificaron los tipos de prueba y concluyeron que, en congruencia con lo que esta investigación asume, la distinción entre los tipos de prueba que el profesor solicite a los alumnos en los grupos multigrado, influye en gran medida en su proceso de razonamiento geométrico. Respecto a la validación grupal, afirmaron que debe propiciarse para que alumno pueda dar cuenta de lo que ha aprendido y modificar sus argumentos cuando sea necesario.

El análisis de los textos escolares desde la perspectiva teórica, propició que los profesores comprendieran que existe la posibilidad de propiciar los diversos tipos de prueba (en particular las clasificadas como intelectuales) en los distintos grados escolares de educación primaria, porque éstas tienen relación con una concepción paradigmática aceptada en la institución donde los sujetos se desenvuelvan. Estas discusiones dejaron ver que el profesor debe promover el razonamiento argumentativo, inductivo y deductivo durante las clases de geometría, pidiendo al estudiante un discurso, oral o escrito, relacionado con el contenido geométrico que se estudie en clase (el inductivo es el que se ve con mayor claridad en los argumentos propuestos por los profesores, a través de casos específicos, además del uso del contraejemplo para el caso de la refutación). Puede concluirse entonces que durante las discusiones de los profesores, se observó un alto nivel de aprehensión teórica, pues lograron identificar los componentes del ETG en los textos escolares, lo que les permitió reconocer la necesidad de activar las tres génesis en una enseñanza efectiva de la geometría, y además, que la génesis discursiva es esencial para poder favorecer el razonamiento geométrico en los estudiantes.

La tarea didáctica de revisión y análisis del espacio idóneo propuesto en los libros escolares, contribuyó para que los profesores diseñaran sus planes de clase, es decir, para la configuración del espacio idóneo para la enseñanza de la geometría. Otro de los objetivos de esta tesis consistía en identificar los aportes del trabajo colaborativo entre profesores en servicio y en formación, podemos decir que este objetivo no se logró completamente en las sesiones colectivas, pero un ejemplo de lo que se puede realizar en este rubro y el beneficio de ello fue el diseño de las planificaciones de clase (dos situaciones didácticas) que se realizaron en equipos integrados ambos tipos de profesores (en servicio y en formación); en este proceso de diseño los maestros en formación inicial apoyaron a los profesores en servicio sobre los elementos que se consideran en una situación didáctica y los profesores en servicio aportaron elementos basados en la experiencia del trabajo en el aula. Durante el diseño, los profesores (en formación y en servicio) propusieron tareas que cumplían con dos criterios, que obedecieran a los contenidos que marcan los libros para el maestro y los programas de estudio, y que incluyeran las génesis y los componentes de un ETG. Otro ejemplo de este trabajo colaborativo fueron las discusiones sobre las propiedades del objeto matemático, identificaron que los conocimientos geométricos adquiridos en ambos planes de estudio tenían cierta diferencia, pero mediante las sesiones en conjunto con los aportes de todos, se lograron establecer propiedades y criterios matemáticos, contribuyendo así a la formación geométrica de los profesores.

Para el diseño del ETG idóneo, los profesores desplegaron los conocimientos adquiridos en la formación inicial y en la propuesta de formación que fue motivo de esta investigación, durante el trabajo en el aula, en el que se pudo observar la progresión en sus conocimientos geométricos y didácticos.

En relación al saber geométrico, las tareas diseñadas reflejaron el dominio disciplinar del contenido al considerar las distintas propiedades y criterios del triángulo como el referencial que sustenta las situaciones didácticas diseñadas. En cuanto a los saberes didácticos, los docentes hicieron énfasis en los momentos de validación como una acción del profesor, reconocen que el referencial debe articularse con la prueba para activar la génesis discursiva y con ello desarrollar el razonamiento geométrico, consideran también que de acuerdo al contenido geométrico y las características del grupo es fundamental diseñar actividades previas o posteriores relacionadas con el contenido geométrico. Afirman que el docente debe poner especial atención en sus intervenciones, tanto para que los niños comprendan las consignas y conocer los argumentos de los niños, como para permitir la confrontación de ideas, la validación de las justificaciones, y llegar a la institucionalización del saber en juego. Por otra parte, el tratamiento didáctico de los contenidos es fundamental para que el profesor diseñe un espacio de trabajo idóneo, ya que requiere analizar la forma en que los alumnos probablemente resuelvan las tareas y las posibles dificultades a las que se enfrenten. En el diseño de las situaciones, destaca la búsqueda de los profesores de diversas estrategias para que los alumnos comunicaran sus argumentos.

El diseño de la planificación requirió el análisis de los elementos teóricos revisados y la discusión sobre las modificaciones necesarias de acuerdo al nivel cognitivo de los niños. Derivado de este análisis, los profesores subrayan la importancia de utilizar un lenguaje formal basado en criterios y propiedades para favorecer la aparición de pruebas de tipo intelectual, por tanto, en sus planes de la clase plantean la transición de un lenguaje natural a un lenguaje formal. También consideraron necesario solicitar la justificación de la utilización de los artefactos en la movilización del componente construcción para llegar a la demostración mediante la transición de pruebas pragmáticas a intelectuales. Reconocen que los discursos y tipos de prueba que se pidan a los niños deben tener ciertas diferencias en congruencia con su nivel cognitivo y el grado escolar que cursan ya que, suponen, la prueba no es una acción que pueda desplegarse solamente al final de las clases, sino que puede hacerse durante los momentos que se consideren necesarios, es por esta razón que fue notable la integración de la génesis discursiva y los tipos de prueba en los planes de clase que elaboraron.

Podemos señalar entonces que los planes de clase plasman la movilización de cada uno de los componentes del ETG, cuidando los distintos momentos del desarrollo de las clases en que se incluyen, así como el objetivo que pretende cada tarea. Señalamos que el énfasis que se pone en las tareas didácticas durante el proceso de formación del profesor incide en la configuración del espacio idóneo para el trabajo en el aula.

Resultados del dispositivo de formación, la caracterización del trabajo en el aula.

Con el fin de determinar la pertinencia del dispositivo de formación tanto en el diseño del espacio idóneo del profesor como en la enseñanza en grupos multigrado, se estudió la manera en que se relacionan los ETG idóneo y personal del profesor al desplegar su trabajo en el aula. La transposición de saberes geométricos y didácticos que realiza el profesor dan cuenta de que el espacio idóneo no es estático, después de concluir la planificación de las situaciones didácticas, durante la interacción en el aula del maestro, alumno y el saber, acontecen diversos fenómenos didácticos que posiblemente no se pensaron durante el diseño de la clase, pero que provocan ciertas intervenciones del profesor que limitan o potencian el logro del aprendizaje.

Los sujetos a quienes se dio seguimiento en el aula de la escuela primaria son dos profesoras, una formada en el plan 97 y en el plan 2012, ambas desarrollaron sus clases en grupos multigrado con alumnos de primero, segundo y tercer grados. En el ETG de la profesora María la visualización y la construcción tienen un lugar privilegiado, en función del plano epistemológico ella considera fundamentales estos componentes en la enseñanza de las características y propiedades del triángulo. Generalmente solicita pruebas pragmáticas, pero se puede observar que mediante la institucionalización del saber permite que los niños dejen de apoyar sus argumentos en la experimentación para recurrir a pruebas intelectuales. En sus clases activa las tres génesis del ETG sin seguir alguna jerarquía entre ellas, lo que da cuenta que la aprehensión teórica de los elementos del ETG le permitió comprender la importancia de este aspecto en el trabajo matemático.

En cuanto a su acción didáctica, María muestra una tendencia de gestionar la institucionalización mediante su propio discurso oral y escrito, aunque en la segunda situación didáctica que ejecuta se observa una evolución, hay una participación más activa de los alumnos y ello propicia que se apoyen entre sí en la revisión de las tareas e identifiquen el referencial en juego, por lo tanto, favorece un razonamiento significativo del contenido geométrico. En lo concerniente a la génesis discursiva, María insiste en utilizar el lenguaje formal mediante el discurso oral cada vez que los niños exponen sus argumentos en sus justificaciones. Con base en esto concluimos que la naturaleza de sus acciones didácticas están vinculadas con factores como su formación inicial, su experiencia con los saberes disciplinares y didácticos y con su participación en la propuesta de formación realizada en esta investigación, especialmente en esta última reconocemos que careció de un proceso de análisis más amplio respecto del modo de estructurar las intervenciones en el aula y el análisis didáctico de las acciones de los alumnos.

Cabe subrayar que, en el diseño de la clases de María se observa una buena articulación entre los contenidos del programa y las tareas diseñadas, al parecer, el análisis de los libros de texto efectuado en las sesiones de diseño colectivo tuvo un impacto positivo. Por otra parte, diseñó las mismas actividades para todos los alumnos, aún cuando fueran de distintos grados, y solicitó los mismos tipos de prueba sin diferenciar el nivel cognitivo de los niños, con ello propició que los niños de primer grado lograran describir y clasificar los triángulos según la longitud de sus lados. En cuanto a la relación entre el ETG personal e idóneo, se ha podido ver que María recupera las estrategias que desplegó en el espacio personal para considerarlas como técnicas a las que sus alumnos pueden recurrir en la actividad matemática.

Respecto del trabajo didáctico de la segunda profesora (Daniela), puede decirse que en todas las situaciones didácticas y en diversos momentos activa la génesis instrumental mediante el uso de artefactos materiales y simbólicos, y la génesis figural al emplear como soporte visual el objeto geométrico triángulo con base en distintos elementos como los lados, ángulos o vértices, recurriendo tanto a la visualización icónica como a la no icónica. En el trabajo de la profesora destaca el énfasis que hace en la génesis discursiva ya fuera en discusiones grupales o cuestionamientos individuales con los alumnos, además introduce la validación grupal como elemento necesario para favorecer el razonamiento geométrico.

En el diseño de las actividades, Daniela incluye pruebas pragmáticas e intelectuales, utiliza la discusión grupal para facilitar la evolución entre los tipos de prueba solicitados. Al inicio de la situación didáctica solicita pruebas pragmáticas, pero en la discusión grupal que gestiona, mediante los cuestionamientos que lanza y los argumentos de los niños abre paso a las pruebas intelectuales. En las discusiones grupales y por equipo genera la interacción de los niños para que se apropien del contenido reconociendo las diferencias en su nivel cognitivo para considerar si los tipos de prueba puedan ser iguales o diferentes, dependiendo del grado escolar o del nivel cognitivo del estudiante. Ahora, una vez que terminaba la aplicación de cada situación, una acción constante era analizar el desarrollo de las situaciones didácticas para contrastar su intervención con los postulados del ETG. Esta acción influyó en el logro de los aprendizajes de los niños y en la transformación de su práctica ya que seleccionó los contenidos a trabajar en función de los ETG de referencia e idóneo, de formación y de la escuela primaria respectivamente, además jerarquizó los contenidos y creó tareas considerando las necesidades del contenido matemático y de los niños.

En cuanto a la transición entre su ETG personal y el espacio idóneo que diseñó, se observó que transpuso en las tareas diseñadas aquello que había adquirido en su formación inicial y lo que aprendió durante el proceso de formación bajo el marco teórico del ETG. Por esta razón, al parecer en el ETG de Daniela existe un predominio de lo didáctico, frecuentemente puso en marcha un proceso dialéctico basado en preguntas como parte fundamental del desarrollo de sus actividades, es decir en su accionar didáctico prevalece en la devolución como acción necesaria para que el alumno se convierta en matemático, con ello favorece el razonamiento geométrico.

Ahora bien, al análisis de la enseñanza que desarrollaron ambas profesoras permite dar cuenta de la efectividad de la propuesta para la configuración del espacio idóneo en la enseñanza del triángulo, pues fueron visibles los saberes didácticos que lograron adquirir en el proceso de formación (experimentación), articulados con los saberes geométricos que ya poseían y que se reafirmaron o ampliaron en la resolución de las tareas geométricas. Se observa también la relación entre las tareas didácticas propuestas a las profesoras en el proceso de formación y la utilización que de ellas hacen en los distintos momentos de sus situaciones didácticas, por lo tanto, se evidencian no sólo los saberes que generados por la propuesta de formación, sino también la manera cómo los adquirieron en el desarrollo de dicha propuesta.

Con base en las reflexiones expuestas, damos respuesta a la pregunta central de investigación: ¿Cuáles son los saberes geométricos y didácticos que se propician en un Espacio de Trabajo Geométrico en la formación del profesor multigrado, para la configuración del espacio idóneo en la enseñanza del triángulo?, mediante el análisis de los saberes geométricos y didácticos que brinda una propuesta de formación en el marco de un Espacio de Trabajo Geométrico para profesores de multigrado, en la configuración del espacio idóneo para la enseñanza del triángulo. Puede decirse entonces que son evidentes logros significativos en la formación inicial y continua de los profesores de multigrado bajo el marco teórico del ETG con énfasis en las tareas didácticas, formación que les permite favorecer en mayor medida el razonamiento geométrico en los grupos multigrado mediante la activación de las tres génesis pero especialmente mediante la activación de la génesis discursiva en el contexto de una validación grupal. Aunque existen diferencias en los conocimientos que los sujetos han adquirido previamente de acuerdo al plan de estudios en que fueron formados, éstos se reflejan en el análisis de las profesoras a quienes se realizó el seguimiento del trabajo en el aula, consideramos que el dispositivo basado en el ETG puede ser utilizado de la misma manera en la formación inicial y continua, ya que se obtuvieron resultados favorables al desarrollar conocimientos geométricos y didácticos tanto de los profesores en formación inicial como de los profesores en servicio.

De esta manera, esta tesis contribuye a las investigaciones sobre la didáctica de las matemáticas que ponen a prueba dispositivos alternativos para la formación continua e inicial de los profesores de multigrado, de manera particular en el estudio de la Geometría (área donde los estudios son más limitados). En nuestro caso, fue a partir de la teoría del espacio de trabajo geométrico, como una herramienta útil en la apropiación y ampliación de conocimientos didácticos y disciplinares, sin dejar de considerar que la experiencia es parte fundamental en la enseñanza de la geometría en grupos multigrado. En cuanto a los aportes al referente teórico, encontramos que la activación de la génesis discursiva, específicamente el componente prueba en el nivel de educación primaria es factible y propicia el logro del razonamiento geométrico; además de que el espacio de trabajo idóneo que configure el profesor para el aula multigrado permite observar con mayor claridad la potencialidad de los tipos de prueba de acuerdo al nivel cognitivo y grado escolar de los estudiantes.

Limitaciones del estudio

Una de las limitaciones de esta investigación tiene qué ver con no considerar en los momentos de formación un espacio para el análisis didáctico (en lo colectivo) de lo sucedido en cada una de las situaciones didácticas desarrolladas en el aula. Aunque sí se contempló realizar una fase colectiva de análisis de las clases, los tiempos no permitieron concretarlo.

Otra limitante, es el hecho de que se dio seguimiento solamente a dos profesoras del total de maestros que se incluían en la experimentación, por lo tanto no podemos generalizar los resultados a la acción de todos los sujetos de investigación.

Una tercera limitante fue que el diseño metodológico tuvo que ajustarse en los momentos de aplicación de las situaciones didácticas, debido a que los futuros profesores no permanecían todo el ciclo escolar en la escuela primaria, por tanto sólo se diseñaron dos situaciones de referencia y las adecuaciones que de ellas se realizaron por parte de los docentes tomaron en consideración este aspecto, es decir, no todos los futuros profesores tuvieron el tiempo suficiente entre sesiones colectivas para aplicar las situaciones didácticas diseñadas y la posibilidad de aplicar algunas más.

Proyecciones de la investigación

Durante el semestre en el que se estudia el curso de *Geometría, su aprendizaje y enseñanza*, la tesista trabajó los elementos básicos de esta propuesta (tareas matemáticas y didácticas) con dos grupos de estudiantes de la Escuela Normal en la que labora, el propósito era que los estudiantes utilizarán el marco teórico del ETG para realizar análisis sobre sus intervenciones en un grupo de la escuela primaria, pero los análisis no se incluyeron en esta tesis porque se alejaban de los objetivos que en ella se plantearon inicialmente. Podemos señalar entonces que una investigación posible y pendiente tendría que ver con un seguimiento a los estudiantes de profesor durante todo el proceso de su formación inicial, de esta manera se profundizaría en el conocimiento didáctico del profesor (en servicio y en formación) mediante un movimiento dialéctico entre escuela primaria, elementos teóricos del ETG y escuela Normal.

Sin duda una tarea pendiente es continuar estudiando el papel de la interacción en el dispositivo desarrollado, consideramos que es sumamente importante para ampliar la formación didáctica y geométrica; es decir, en una futura investigación sería deseable analizar cómo incide en la formación inicial de los futuros profesores la interacción con profesores expertos y viceversa, pero analizando puntualmente en cuanto a la construcción de conocimientos, habilidades geométricas y didácticas.

Otra ruta de investigación es desarrollar esta propuesta solamente con maestros en servicio, determinando las modificaciones que de su práctica pueden realizar, ya sea que laboren en grupos multigrado o unigrado.

Finalmente, suponemos que es posible ampliar esta investigación, en cuanto al tiempo dedicado para el desarrollo de la experimentación del dispositivo de formación, esto permitiría incluir más situaciones de referencia, un mayor número de contenidos geométricos y momentos de análisis colectivo sobre lo que sucede cuando se desarrolla la enseñanza con los niños. Esto permitiría transformar en mayor medida el conocimiento geométrico-didáctico de los profesores.

REFERENCIAS

Aguayo, L. M. (2005). La transposición del “saber didáctico”. Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales. *Tesis doctoral*. Zacatecas: Universidad Pedagógica Nacional.

Antúnez, Y., & González, G. (2013). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y su dinámica en la escuela primaria multigrado. *Didascalia: Didáctica y Educación, IV*(4), 95-110.

Aparecida, K., & Soliani, F. (2015). Los conceptos de geometría no euclidianas del grupo de profesores de matemáticas. *BOLEMA, número 29*, 369-388.

Aravena Díaz, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región de Maule, Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número 16*, 139-178.

Arcavi, A. (2018). Hacia una visión integradora dela enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática, 30*(2), 33-48.

Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En M. Artigue , R. Douady , L. Moreno , & P. Gómez , *Ingeniería didáctica en educación matemática/ Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 7-23). Bogotá: Iberoamérica .

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. *Educación Matemática, 13*(3), 5-21.

Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo en el campo. *Educación Matemática*, 31-59.

Ávila, A., Block, D., Camarena, P., Eudave, D., Sandoval, I., & Solares, A. (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002-2011. En A. Ávila, A. Carrasco, A. Gómez-Galindo, M. Guerra, G. López, & J. Ramírez, *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares* (págs. 27-150). México: COMIE-ANUIES.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. Obtenido de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01619264

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* (1a. edición ed.). Bogotá: Una empresa docente.

Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio. con una introducción a la trigonometría.* (Vigésima reimpresión ed.). (M. Santaló , & P. Suardiaz, Edits.) México: Publicaciones Cultural.

Barredo,D.(s/f). La geometría del triángulo. Obtenido de http://ficus.pntic.mec.es/dbab0005/triangulos/

Barrier, T. (2009). *Une perspective sémantique et dialogique sur l'activitie de validation en mathematiques.* Francia.

Bernabeu, M., & Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. (A. Ávila, & J. L. Cortina, Edits.) *Educación Matemática, 29*(2), 9-36. doi:10.24844/EM2902.01

Blanco, L., & Barrantes, M. (2003). Concepciones de estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa.*, 107-132.

Block, D. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera parte.* (D. Block, Ed.) México: Secretaría de educación Pública.

Block, D., Martínez, P., Mendoza, T., & Ramírez, M. (2013). La observación y el análisis de las prácticas de enseñar matemáticas como recursos para la formación continua de maestros de primaria. Reflexiones sobre una experiencia. *Educación Matemática, número 25*, 31-60.

Block, D., Ramírez, M., & Reséndiz, L. (2015). Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 20*(66), 711-735.

Boix, R., & Bustos, A. (2014). La enseñanza en las aulas multigrado: Una aproximación a las actividades escolares y los recursos didácticos desde la perspectiva del profesorado. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 7*(3), 29-43.

Breccia, C., & Caro, P. (2009). La geometría nos rodea. *UNIÓN*, 85-95.

Broitman, C., & Itzcovich, H. (2004). Geometría en los primeros años de la E.G.B: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza. En M. Panizza, *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (págs. 289-323). Buenos Aires, Argentina: Ediciones Paidós Ibérica.

Broitman, C., Escobar, M., Sancha, I., & Urretabiscaya, J. (2014). Interacciones entre alumnos de diversos niveles de conocimientos matemáticos. Un estudio en un aula plurigrado de escuela primaria. *Yupana, 8*, 11-30. Obtenido de h t t p :/ / w w w . m e m o ria .f a h c e . u nlp . e d u . a r / a r t _ r e vis t a s / p r . 8 3 7 5 / p r . 8 3 7 5 . p d f

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (Diciembre de 1998). Entrevista a Guy Brousseau. (H. Alagia, A. Delongi, N. Dolagaray, & D. Fregona, Entrevistadores)

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, *12*(1), 5-38.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Original 1997 ed.). (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires: El Zorzal.

Brousseau, G. (2010). Glossaire_V5. *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998)*.

Brousseau, G. (21 de Octubre de 2014). *Investigaciones en Educación Matemática.* Obtenido laurabrichetti.files.wordpress.com: https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/brusseau-investigaciones-matemc3a1ticas.pdf

Bustamante, M. (Junio de 2018). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de una escuela rural con aulas multigrado de la comuna de Hualañé. *Tesis de magister en didáctica de la matemática*. Facultad de Ciencias Básicas.

Bustamante, X., & Giraldo, W. (2015). Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: análisis de un texto escolar. *Tesis de licenciatura*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Bustos, A. (2007). Enseñar en la escuela rural aprendiendo a hacerlo. Evolución de la identidad profesional en las aulas multigrado. *Profesorado: Revista de Currículum y formación del profesorado*, 1-26.

Bustos, A. (2008). Docentes de escuela rural. Análisis de su formación y sus actitudes a través de un estudio cuantitativo en Andalucía. *Revista de Investigación Educativa, 26*, 485-519.

Bustos, A. (2010). Aproximación a las aulas de escuela rural: heterogeneidad y aprendizaje en los grupos multigrado. *Revista de Educación, 352*, 353-378.

Bustos, A. (2014). La didáctica multigrado y las aulas rurales: perspectivas y datos para su análisis. *Innovación educativa*(24), 119-131.

Cañizarez, M., & Serrano, L. (2001). Introducción a la Geometría. En E. Castro, *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (págs. 369-377). Madrid, España: Síntesis.

Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A., & Cruz, V. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal. Guía para el aprendizaje y enseñanza de la geometría y la medición.* México: PEARSON.

Céspedes, A., Montoya, J., & Falcón, H. (2011). *Cuadernos de Educación y Desarrollo, 3*(28). Obtenido de http://www.eumed.net/rev/ced/28/qrc.htm

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (1a. ed.). (C. Gilman, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Aiqué.

Chevallard, Y. (1997). ¿Qué es transposición didáctica? En Y. Chevallard, *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* (págs. 45-50). Aiqué.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Cooperación Española.

CIAEM. (2015). En P. Scott , & Á. Ruíz (Ed.), *Comité Interamericano de Educación Matemática Educación Matemática en las Américas, 3: Formación continua.* República Dominicana.

CIAEM. (2015). En P. Scott, & Á. Ruíz (Ed.), *Comité Interamericano de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas: 2015, I: Formación inicial para primaria.* República Dominicana.

Correa, B., Muñoz, L., & Villegas, C. (2012). *Geometría Euclidiana. Guía de clase para 45 lecciones.* Antioquía, Colombia: Red Matemática Antioquía.

Costa, A., & Cámara, M. (2015). Aspectos de pensamiento geométrico demuestran los estudiantes de secundaria en un problema que implican en el concepto de cuadrilátero. *Educación Matemáticas de las Américas, volumen 9*, 23-30.

Coutat-Gousseau, S. (2014). Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propiétés au primaire? *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática*, *17*(4-1), 121-148.

De la Torre, E., & Pérez, M. (2008). Paradigmas y espacios de trabajo geométricos en los libros de la E.S.O. *XII Simposio SEIEM.* Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

De Rezende, S., & Domingos, C. (2015). El desarrollo de los conceptos geométricos en la educación infantil: un estudio de caso. (P. Scott, & A. Ruíz, Edits.) *Educación Matemática de Las Américas, 11: Primaria*, 105-117.

Delgado, M., Cuevas, C., & Martínez, M. (2014). Un espacio de trabajo matemático virtual en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Actas Cuarto Simposio Internacional*

Espacio de TRabajo Matemático. (I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard, Edits.) Madrid, España.

DGESPE. (2015). *Planificación de ambientes de aprendizaje para grupos multigrado.* Zacatecas.

Documento Nº 3 Diseño Curricular. (2001). *Orientaciones Didácticas para la enseñanza de la Geometría en la E.G.B.* Provincia de Buenos Aires: Gabinete Pedagógico Curricular. Matemática.

DOF. (8 de Junio de 1988). Acuerdo 134. *ACUERDO número 134, por el que se establece el plan de estudios para la formación de docentes en educación primaria a nivel de licenciatura.* México. Recuperado el Septiembre de 2017, de http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=4742365&fecha=08/06/1988

DOF. (2012). ACUERDO número 649 por el que se establece el Plan de Estudios para la Formación de Maestros de Educación Primaria. México.

Douady, R. (1995). Nacimiento y desarrollo de la didáctica en las matemáticas en Francia: Rol de los IREM . En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingenería Didáctica en Educación Primaria / Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 1-5). Bogota: Iberoamérica.

Duval, R. (2001). La geometría desde un punto cognitivo. *PMME-UNISON*, 1-23.

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. *Dialnet, 9*, 159-188.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. (I. d. STRASBOURG, Ed.) *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. (2010). Los cambios de mirada necesarios. *Tecné, Episteme y Didaxis*(27), 108-129.

Escobar, M. (2016). La enseñanza de la Matemática en aulas plurigrado. Un estudio de caso sobre un Instituto Superior de Formación Docente de la provincia de Buenos Aires. . *Tesis de maestría*. Ensenada, Argentina: Universidad Nacional de la Plata.

ETM. (2012). *Actes Troisiemè Symposium* (págs. 1-510). París, Francia: Université de Montreal.

ETM. (2014). *Actas Cuarto Simposio Internacional ETM.* Madrid, España.

Flores, M., & Montoya, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación matemática, 28*(2), 85-117.

Fregona, D. (1999). La didáctica de la matemática y la formación de profesores. *Educación Matemática, 11*(2), 5-15.

Galvis, S., & Vásquez, K. (2015). Área y perímetro de cuadriláteros en estudiantes colombianos de 5° grado de primaria. (P. Scott, & Á. Ruíz, Edits.) *Educación Matemática en las Américas, 11: Educación Primaria*, 1-9.

García, S., & López, O. L. (2008). *La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa.* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Edcuación.

Godino, J., & Ruiz, F. (Febrero de 2002). Matemáticas y su didáctica para maestros. . *Proyecto Edumat-Maestros*. Granada: Universidad de Granada. Obtenido de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Gómez- Chacón, I., Kuzniak, A., & Vivier, L. (Abril de 2016). El rol del profesor desde las perpsectivas. *Bolema, Rio Claro, 30*(54), 1-22. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Gómez-Chacón, I. (2014). Visualización y razonamiento. Creando imágenes para comprender las matemáticas. En M. H. Martinho (Ed.), *Atas do XXV Seminario de Investigacao em Educacao Matemática.* (págs. 5-28). Braga: APM.

González, G., Delgado, F., & Aguayo, L. (2017). Los conceptos geométricos sobre el triángulo en los libros de texto de primaria vigentes. *Congreso Nacional de Investigación Educativa,* 1-13.

Guillarte, H. (2003). Concepción didáctica para la preparación multigrado de los estudiantes de la carrera en educación primaria desde la disciplina estudios de la naturaleza. *Tesis Doctoral*. Santiago de Cuba: Universidad de Ciencias Pedagógicas Frank País García.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA, 3*(3), 193-200.

Hamui-Sutton, A., & Varela-Ruiz, M. (2012). La técnica de grupos focales. *Metodología de investigación médica*, 55-60.

Henríquez, C. (2014). El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario. . *Tesis doctoral.* (C. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Ed.) Valparaído, Chile.

Henríquez, C. (2016). El espacio de trabajo matemático como una herramienta para el estudio de la práctica en el aula del profesor. *Actas de Quinto Simposio Internacional Espacio de Trabajo Matemático*. (I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. Richard, & L. Vivier, Edits.) Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Henríquez, C., & Montoya, E. (2016). El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el liceo. *Bolema, Río Claro, 30*(54), 45-66.

Henríquez, C., Menares, R., Montoya, E., & Verdugo, P. (s/f). Construcción de un espacio de trabajo matemático en la formación de profesores. *Taller. Proyecto ECOS C13H03*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Obtenido de <halshs00858709>

INEE. (2015). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA)* . México: SEP.

INEE. (2017). *Proyecto Nacional de Evaluación y Mejora Educativa de Escuelas Multigrado (PRONAEME).* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

INEE. (Noviembre de 2018). *Planea. Resultados 2018. 6° de primaria.* Instituto Nacional para la Evaluación de los Educación.

Isoda, M., & Cedillo, T. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal. Tomo I al VI.* México: PEARSON/SEP.

Iztcovich, H. (2005). *Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría.* Buenos Aires: El Zorzal.

Jara, P., & Ruiz, C. (2008). Triángulos. *Actividad para Estalmat I*. Granada, España.

Juárez, D. (2012). Educación rural en escuelas primarias de Cuba. *Sinéctica*, *38*. Obtenido de http://www.sinectica. iteso.mx/index.php?cur=38&art=38_11

Juárez, D. (2016). *Educación rural: experiencias y propuestas de mejora.* México: Colofón ; Universidad Autónoma de Sinaloa ; Red Temática de Investigación Rural.

Juárez, D. (2019). Contexto de la educación rural en México. *Estado del arte de la educación rural en México (2004-2014),* 5-24. (V. Rebolledo, & R. Torres, Edits.) México: Universidad Iberoamericana; Red Temática de Investigación en Educación Rural.

Kuzniak, A. (1994). Las estrategias utilizadas para formar a los maestros de primer grado en matemáticas. En C. p. Elemental, *La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia* (págs. 251-268). Francia: ARPEME.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*, 167-187.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2013). Paradigmas geométricos y espacios de trabajo geométrico. Espacios de trabajo matemático. *Conferencia.* Valparaíso, Chile.

Kuzniak, A. (2014). Trabajo matemático y dominios matemáticos. *RELIME*, 385-399.

Kuzniak, A. (2016). Paradigmes et espaces de travail g´eom´etriques. *Histoire et perspectives sur les math´ematiques [math.HO]*. (IREM, Ed.) París: Université Paris VII Denis Diderot. Obtenido de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01256036

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2015). Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry. Konrad Krainer; Naďa Vondrová. . *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (págs. 543-549). Prague, Chzech Republic.

Kuzniak, A., & Philippe, R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*.

Kuzniak, A., Montoya, E., & Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y su génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*(15), 237-251.

Kuzniak, A., Vivier, L., & Montoya, E. (2015). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Conferencia paralela XIV CIAEM-IACME.* Chiapas, México: Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Limonta, J., & Sánchez, Z. (2018). La clase única en el trabajo de multigrado: Propuesta de actividades para la matemática. *Atlante: Cuadernos de educación y desarrollo*. Recuperado el 8 de Enero de 2019, de https://www.eumed.net/rev/atlante/2018/04/trabajo-multigrado-matematica.html

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. *Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. JAEM.* Granada, España.

Luna, J., & Álvarez, Y. (2004). Félix Klein y el estudio de la geometría. *Memorias XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de Aritmética* (págs. 265-277). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Mántica, A. (2015). El espacio social de la clase como regulador del trabajo geométrico. Estudio de casos en la escuela secundaria. (P. Scott, & A. Ruíz, Edits.) *Educación Matemática en las Américas, 9: Geometría*, 42-55.

Márquez, I. (2008). Un rectángulo casi de oro. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(13), 61-74.

Martínez, Á., & Rivaya, J. (1998). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría.* España: Síntesis.

Mercado, R. (2010). Un debate actual sobre la formación inicial de docentes en México. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional, 14*(1), 149-157.

Moleri, E. (s/f). *Uruguay Educa.* Recuperado el Enero de 2018, de https://uruguayeduca.anep.edu.uy/

Montoya, E. (2010). Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili . *Thèse doctorale*. Francia: Université París Diderot.

Montoya, E. (2011). Los paradigmas geométricos en la formación inicial de profesores de matemáticas. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Brasil.

Montoya, E. (2012). Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili. *Tesis Doctoral*. París: Université París Diderot.

Montoya, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las Ciencias*, *3*(32), 227-247. doi:http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.

Montoya, E. (2017). Alcances a un Espacio de Trabajo Matemático. *Simposio Internacional ETM 5.1.*

Montoya, E., Henríquez, C., Menares, R., & Barra, M. (s/f). El espacio de trabajo matemático: Una herramienta para el análisis. *Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT)* . Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; Facultad de Ciencias Instituto de Matemáticas.

Montoya, E., Mena, J., & Mena, A. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(7), 181-197.

Montoya, E., Mena, J., & Mena, A. (2016). Estabilidad Epistemológica del Profesor Debutante y Espacio de Trabajo Matemático. *Bolema, Rio Claro, 30*(54), 188-203.

Müller, M., & Lorenzato, S. (2015). Geometria nos anos iniciais: sobre os conceitos de área e perímetro. (P. Scott, & A. Ruíz, Edits.) *Educación Matemática en las Américas: 2015., 9: Geometría*, 100-108.

Nechache, A. (2016). La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire. . *Thèse doctorale*. Université París Diderot.

Nikolantonakis, K., & Vivier, L. (2016). El ETM de futuros profesores de primaria en un trabajo sobre los números naturales en cualquier base. *Revista Bolema, Río Claro, 30*(54), 23-44.

Nuñez, M. (2012). Una aproximación desde la sociología fenomenológica de Alfred Schütz a las transofrmaciones de la experiencia de la ateridad de en las sociedades contemporáneas. *Sociológica*.

Oller, A. (2009). Otra manera de ver la circunferencia. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 72,* 57-62. Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros

Olvera, F., Figueras, O., & Guillén, G. (2014). Reelaboración del espacio de trabajo matemático de profesores de primaria sobre geometría de los sólidos. *Actas Cuarto Simposio Internacional Espacio de Trabajo Matemático*. (I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard, Edits.) Madrid, España.

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 95-117.

Oval soto, C., & Olivia, O. (2015). Análisis de práctica de enseñanza en profesores de educación básica: ¿qué concepciones educativas? ¿qué intenciones de enseñanza? *Educación matemática en las Américas,* 1-9.

Parada, S., & Fiallo, J. (2014). Perspectivas para formar profesores de matemáticas: disminuyendo la brecha entre la teoría y la práctica. *Educación científica*, 116-127.

Paredes, C., Riveros, E., & Pizarro, A. (2018). Estudio del espacio de trabajo geométrico idóneo relativo al objeto triángulo en los textos escolares, edicción especial para el ministerio de educación, en los niveles de primero y segundo básico de Chile. *Tesis de licenciatura*. Viña del Mar, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Peña, D., Martínez, M., & Garrido, Y. (2017). La formación del maestro para el trabajo en el grupo multigrado. *EduSol, 17*(60).

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., & Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: Una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon, volumen 29*, 41-56.

Petridou, A., Elia , I., & Gagatsis , A. (2016). Exploring Kindergartne´rs Figural Génesis in Geometry. En I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis , P. Richard, & L. Vivier (Ed.), *Actas Quinto Simposio International ETM* (págs. 131-144). Florina. Grecia: University of Western Macedonia .

Pilet, J., & Grugeon-Allys, B. (2015). Conception et exploitation d´ un diagnostic en mathématiques à l'entrée en formartion initiale des enseignants du premier degre pour organiser des stratégies de formation. *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (págs. 185-198). Theis L. .

Pizarro, A. (2018). El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos. *Thèse de doctorat* . l'Université Sorbonne Paris Cité Préparée à l'Université Paris Diderot.

Popoca, C. (2008). Guía Didáctica Multigrado. *I, II, III y IV*. México: Secretaría de Educación Pública.

Prior, J., & Torregrosa, G. (2014). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *RELIME, volumen 16*, 339-368.

Quartieri, M., Schmitt, F., & Giongo, I. (2015). Investigação Matemática e Geometria: área e perímetro de figuras planas. (P. Scott, & A. Ruíz, Edits.) *Educación Matemática en las Américas: 2015., 9: Geometría*, 119-129.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des. París: Armand Colin. Obtenido de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462

Rebolledo, V., & Torres, R. M. (2019). *Estado del arte de la educación rural en México (2004-2014).* México: Universidad Iberoamericana.

Reséndiz, L., Block, D., & Carrillo, J. (2017). Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso. *Educación Matemática*, *29*(2), 99-124.

Rockwell, E., & Rebolledo, V. (2016). *Yoltocah. Estrategias didácticas multigrado.* México: Creative Commons.

Rockwell, E., & Rebolledo, V. (2018). *Yoltocah: Estrategias didácticas multigrado.* Obtenido de http://yoltocah.mx © Elsie Rockwell © Valeria Rebolledo Angulo

Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H., & Broitman, C. (1998). *Matemática. Documento de trabajo nº5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo.* . Buenos Aires, Argentina: Secretaría de Educación.

Samper, C., Camargo, L., & Leguizamón, C. (2010). *Como promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría* (1a. ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Sánchez, A., & Romero, I. (2014). Espacios de trabajo matemático en formación de maestros en un contexto de e-learning. *Actas Cuarto Simposio Internacional Espacio de Trabajo Matemático*. (I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard, Edits.) Madrid, España.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129-145.

Santos, L. (2011). Aulas mutigrado y circulación de los saberes: especificidades didácticas de la escuela rural. *Profesorado: Revista decurrpiculum y formación del profesorado, 15*(2), 71-91. Obtenido de http://www.ugr.es/local/recfpro/rev152ART5.pdf

SEP. (2001). *Matemáticas y su Enseñanza I. Programa y materiales de apoyo para el estudio. Licenciatura en Educación Primaria. Segundo semestre.* (Segunda reimpresión ed.). México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2004). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas de secundaria.* México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2006). *Matemáticas I. 1er. Grado, vol. 1 y 2. Telesecundaria.* México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2007). *Matemáticas II, 2do. Grado, vol. 1 y 2. Telesecundaria.* México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2008). *Matemáticas III, 3er. Grado, vol. 1. Telesecundaria.* México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011). *Programas de estudio Educación Básica Primaria. (De tercero a sexo grados).* México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2013). *Programa del curso Geometría: su aprendizaje y enseñanza. Tercer semestre.* México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado* (Segunda edición ed.). México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2016). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2018). *Matemáticas. Libro para el maestro. Primer grado.* México: Secretaría de Educación Pública.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado.*, 1-30.

Silva, A., & De Barros, H. (2011). Geometría Euclidiana Plana. Recuperado el Marzo de 2018, de http://pt.notices-pdf.com/geometria-plana-1-pdf.html#a4

Solares, D., Solares, A., & Padilla, E. (2016). La enseñanza de las matemáticas más allá de los salones de clase. Análisis de actividades laborales urbanas y rurales. *Educación Matemática, volumen 28*, 69-98.

Thompson, J. (1993). *Geometría* (3a. reimpresión ed.). México, D. F.: Limusa.

UNICEF. (2012). *Estrategia de mejora de la educación multigrado en comunidades chiapanecascon personas internamente desplazadas.* Chiapas.

Uribe, S., Cárdenas, Ó., & Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación Matemática, 26*, 135-160.

Varela, M. (2015). Perímetro e área de figuras planas no. 2.º Ciclo do ensino básico. *Tesis* . Universidade do Algarve Escola Superior de Educação e Comunicação .

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñazna de la geometría. *Uniciencia, 27*(1), 74-94.

Verdugo, P. (2017). Espacio de trabajo del análisis: enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad. *Tesis doctoral*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Vidal-Szabó, P., Estrella, S., Morales, S., & Olfos, M. (Diciembre de 2016). Espacio de trabajo matemático con dominio en la estadística temprana. *XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática, 20(1)*. Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Weiss, E. (2000). La situación de la enseñanza multigrado en México. *Perfiles educativos, XXII*(90), 57-76.

Xistouri, X., Pitta-Pantazi, D., & Gagatsis, A. (2013). Estructura y niveles de habilidad en estudiantes de escuela primaria sobre geometría transformacional. *Relime, 17*, 149-164.