SLP PROSPEREMOS JUNTOS
Gobierno del Estado 2015-2021
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE GOBIERNO DEL ESTADO

UPN UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD UPN 241 SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

Secretaría de Educación del Gobierno del Estado

Universidad Pedagógica Nacional

Unidad 241

“Un recorrido de estudio e investigación para la formación de profesores (REI-FP). El caso de la proporcionalidad”

TESIS:

Que para obtener el grado de Doctor en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores.

PRESENTA:

Maricela Soto Quiñones

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón

San Luis Potosí, S.L.P. Septiembre 2017

Doctorado Regional en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores

Estados que integran la Región:

Coahuila

Nuevo León

Tamaulipas

San Luis Potosí

Zacatecas

SLP PROSPEREMOS JUNTOS Gobierno del Estado 2015-2021 | Secretaría de Educación de Gobierno del Estado

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL | UNIDAD UPN 241 SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

DICTAMEN DE TRABAJO DE TESIS

San Luis Potosí, S.L.P., 21 de junio de 2017.

C. MTRA.
MARICELA SOTO QUIÑONES
P R E S E N T E. –

En mi calidad de Coordinador Regional del programa de Doctorado Capítulo Noreste, de la Universidad Pedagógica Nacional, y después de haber sido analizado el **TRABAJO DE TESIS** titulado: ***"Un recorrido de estudios e investigación para la formación de profesores (REI-FP). El caso de la proporcionalidad"***, para obtener el Grado de ***Doctor en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores,*** encuentro que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos en vigor para ser presentado ante el H. Jurado del examen para la obtención de Grado, por lo que deberá entregar los 12 ejemplares requeridos como parte de su expediente institucional.

A T E N T A M E N T E

Vo. Bo.

S. E. G. E.
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 241
SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN
Coordinador Regional del Doctorado

JOSÉ JAVIER MARTÍNEZ RAMOS
Director de la Unidad

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón, por la dirección de esta investigación, su profundo conocimiento sobre la Didáctica de las Matemáticas fue sin duda el eje rector que permitió comprender los actuales enfoques de investigación en esta disciplina; su orientación, guía y consejos acompañados de una gran calidad humana así como su generosidad y apoyo incondicional fueron fundamentales para la realización de este trabajo. Gracias por ser más que un asesor académico y estar siempre ahí como un asesor de vida.

A la Dra. Alicia Ávila Storer, quien dedicó gran parte de su tiempo a la revisión del trabajo y cuyas observaciones aportaron elementos invaluables para el análisis durante el proceso de construcción, desarrollo y culminación del producto obtenido.

A la Dra. Darly Alina Kú Euán por su apoyo en el diseño y adaptación del Recorrido de Estudio e Investigación, así como su orientación en la revisión preliminar de las técnicas implementadas por los profesores en formación en las tareas matemáticas.

A la Secretaría de Educación del Estado de Zacatecas por la concesión de una beca comisión para favorecer la profesionalización y la investigación en el campo de la formación de profesores.

Al Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación, Sección 58, por generar las condiciones necesarias para desarrollar las actividades de estudio y titulación del programa de Doctorado.

A todos los profesores y alumnos que participaron en la investigación, así como a las diversas instituciones educativas que sirvieron de marco contextual para la recopilación de datos y sobre todo a quienes su apoyo no ha quedado explícitamente reflejado en este trabajo pero que de una forma u otra contribuyeron a su elaboración.

A mi familia

ÍNDICE

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo dar a conocer cuáles son los resultados que se derivan de la experimentación de un Recorrido de Estudio e Investigación en la Formación de Profesores (REI-FP) dentro del contexto de la proporcionalidad. El estudio se desarrolló con una muestra de ocho estudiantes para profesor de octavo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Normal “Manuel Ávila Camacho” de Zacatecas, México, quienes desarrollaron cada uno de los módulos concernientes al REI-FP y de los cuales se analizaron las técnicas y las tecnologías utilizadas en la solución de diferentes tareas tanto matemáticas como didácticas, estos análisis se realizaron utilizando registros de observación y estrategias a lápiz y papel. Los resultados permitieron identificar que desde la perspectiva del estudiante de matemáticas, los profesores en formación logran que sus técnicas y sus tecnologías pasen de un modelo clásico de la proporcionalidad hacia un modelo algebrizado, por otro lado en tanto aprendices de profesor fue notable la diversidad de tareas didácticas que proponen y que van más allá de las que corresponden al texto del saber. La investigación permite subrayar la importancia de que en las instituciones formadoras de docentes se establezca un equilibrio entre las Organizaciones Matemáticas y las Organizaciones Didácticas, situación que puede verse favorecida con la experimentación alternativa de varios REI-FP.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, la formación de profesores constituye un campo de significativa relevancia para los agentes de la investigación educativa, de manera particular, la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas ha sido un objeto de estudio recurrente en los últimos años. Diferentes perspectivas teóricas destacan la necesidad de otorgar una formación adecuada a los profesores noveles para la enseñanza de las matemáticas, especialmente aluden al alcance y los efectos de los saberes del profesor respecto de la calidad de los aprendizajes de los estudiantes, por esta razón no son pocos los estudios de carácter nacional e internacional sobre el bajo rendimiento escolar en matemáticas que han ligado dicho aprovechamiento con la formación del profesorado.

En el caso de México, la formación de profesores ha experimentado una serie de reformas curriculares donde se incluyen los saberes que un profesor debería poseer para tener un desempeño adecuado en la educación básica, el currículo derivado de estas reformas establece el tipo de profesor que dará respuesta a las demandas sociales propias de cada época y por ende, al de las instituciones educativas donde desarrollará su labor docente.

Ahora que, en nuestros días, dicha formación se encuentra en un proceso de transición en las escuelas normales, proceso que a partir de un replanteamiento curricular intenta modificar las prácticas educativas con la idea de brindar una mejor preparación académica a los estudiantes normalistas. En este contexto, la calidad educativa representa una de las metas fundamentales que orientan la estructuración del sistema educativo e impacta en los procesos de formación que viven los estudiantes porque se coloca en un primer plano la atención en los aprendizajes, el dominio de la disciplina académica y su vinculación con una fundamentación psicopedagógica. (SEP, 2011)

Bajo esta perspectiva, se asume que los estudiantes para profesor requieren de un conocimiento disciplinar, el manejo adecuado de los planes de estudio de la educación básica y la comprensión de los enfoques de enseñanza, todo ello implica el desarrollo de competencias que les permitan generar ambientes de aprendizaje mediante la creación o adaptación de estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación.

Para el caso específico de la formación para la enseñanza de las matemáticas, los cursos incluidos en el Plan de Estudios para las escuelas normales de México, articulan conocimientos, metodologías y prácticas que contribuyen al desarrollo de las competencias plasmadas en el perfil de egreso y en el trayecto formativo de preparación para la enseñanza y el aprendizaje. En la "malla curricular" de la Licenciatura en Educación Primaria se incluyen cuatro cursos ligados con las matemáticas: *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, Álgebra: su aprendizaje y enseñanza, Geometría: su aprendizaje y enseñanza y Procesamiento de Información Estadística*. Estos cursos se corresponden con los tres ejes planteados para la Educación Primaria: *Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida y Manejo de la informaci*ón. A partir de esta perspectiva y esta organización curricular se pretende consolidar el dominio de lo disciplinar y lo pedagógico, anteponiendo este último al enfoque disciplinar propio de otros modelos en la formación de profesores.

En lo que corresponde a la asignatura *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza*, (contexto en el que se realizó la presente investigación), el Programa de estudios establece algunas competencias principales: distinguir las características tanto teóricas como metodológicas para la enseñanza de la aritmética; identificar los principales obstáculos que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética en la escuela primaria y; relacionar los saberes aritméticos formales con los contenidos del eje sentido numérico y pensamiento algebraico de este nivel educativo. (SEP, 2012a)

Ante la consideración de dichas competencias y de que la proporcionalidad constituye la temática que establece la transición del sentido numérico al pensamiento algebraico y de la escuela primaria a la escuela secundaria, es que fue seleccionado el concepto de proporcionalidad como elemento de análisis para esta investigación. Por otra parte es de reconocer que el concepto de proporcionalidad se vincula con una gran variedad de situaciones cotidianas, lo que permite poner en juego la articulación entre matemática convencional e informal para comprender los conceptos y técnicas formales que le subyacen. Es importante señalar que en su trayecto formativo los estudiantes normalistas precisan de diseñar, aplicar y evaluar situaciones didácticas para la escuela primaria lo que les demanda una cierta comprensión tanto matemática como didáctica de la proporcionalidad. Otro punto sobre la elección del contenido matemático tiene que ver con que la proporcionalidad es uno de los temas más sugerentes en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, la secundaria, y el bachillerato e incluso en la formación profesional debido a su vinculación con otros conceptos o nociones matemáticas.

La investigación se centró en la formulación, caracterización y análisis de prácticas de formación ligadas al tratamiento de la proporcionalidad, específicamente en la formación inicial de profesores para la escuela primaria en México, la pregunta de la que se partió tiene que ver con analizar ¿qué efectos sobre la formación de los estudiantes tienen ciertas tareas matemáticas y didácticas especialmente diseñadas para tal efecto?

Si bien nos parece que el actual enfoque curricular antepone la formación pedagógica la didáctica, la pregunta planteada se verá contextualizada desde la perspectiva didáctica cuyo principio fundamental asume que no es posible desligar un contenido matemático (la proporcionalidad) del estudio de lo didáctico.

Puntualizaciones sobre el campo de estudio

Recientemente, en su mayoría los estudios sobre la formación inicial de profesores en México se han centrado en la reflexión de identidades en el hacer docente, el análisis del capital cultural, la construcción de un sujeto social en la formación inicial de profesores, el desarrollo de competencias docentes y en el uso de tecnologías como herramientas para la formación (Minor, 2013; Hernández, 2013; Rodríguez, Piña y Soto, 2013; Celis, Pérez y Torres, 2013), no obstante también aparecen otros estudios (menos numerosos) preocupados por analizar las reformas en las Escuelas Normales, específicamente los retos de las escuelas formadoras de docentes y la actualización y capacitación en la fase de implementación de la reforma curricular, éstos, al parecer, pudieran servir de referente para deducir la situación de los profesores noveles ante una formación didáctico matemática. (Atriano, Benítez y Ramírez, 2013 y Martínez, Perea y Piña, 2013)

En lo que toca al campo de la Educación Matemática los estudios relacionados con la proporcionalidad y la formación de profesores se han realizado en otros países, principalmente en España y Francia, contextos donde la Didáctica de las Matemáticas ha tenido una importante difusión y desarrollo. La proporcionalidad ha sido objeto de numerosas investigaciones (cognitivas) sobre las dificultades, los procedimientos y las estrategias de resolución que utilizan los alumnos de educación básica al trabajar con el concepto de proporcionalidad (Vergnaud, Riccó y Rouchier, 1979; Pluvinage y Dupuis, 1981 y Sokona, 1989 en Ruiz, 2007). Sin embargo, los trabajos que abordan la problemática del profesor o aspirante a profesor son escasos (Pezzard, 1985; Thompson y Thompson, 1996;Klemer y Peled, 1998; Comin, 2002 y Lo, 2004 en Ruiz, 2007).

En una etapa más reciente se pueden encontrar estudios relacionados con la formación de profesores de matemáticas desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD). Desde nuestro punto de vista, este periodo se caracteriza por un cierto alejamiento de las prácticas áulicas como objeto de estudio dominante de la Didáctica de las Matemáticas para colocar en su lugar el enfoque antropológico que fue inaugurado por Chevallard (1999) y que se había ya manifestado en las primeras teorizaciones asociadas a la Transposición Didáctica (Chevallard, 1998) donde se asume la dificultad de interpretar la matemática o la actividad matemática escolar sin tomar en cuenta los fenómenos que subyacen al proceso de reconstrucción matemática cuyo origen se encuentra en la institución productora del saber matemático.

Desde esta perspectiva teórica y para el caso particular de la proporcionalidad, Bosch (1994) toma como análisis de la actividad matemática el estudio científico de los procesos didácticos que permiten proponer un nuevo tipo de análisis al considerar el valor instrumental de los objetos ostensivos (escrituras, discursos, grafismos, etc.) que pueden ser manipulados en tal actividad. Mediante el estudio de un cierto número de casos sobre la proporcionalidad, la autora muestra que tanto las técnicas como los objetos no ostensivos se tornan sensibles a los complejos de ostensivos manipulados, con ello se pone en evidencia la necesidad de integrar el papel que tienen los instrumentos ostensivos en la creación y desarrollo de técnicas matemáticas.

En este contexto, Bolea, Bosch y Gascón (2001) proponen un modelo específico del Álgebra Elemental que se presenta como un instrumento para la actividad matemática al culminar con la modelización algebraica y, señalan que el uso de este instrumento (el Álgebra) modifica la naturaleza de las Organizaciones Matemático-Didácticas. Esta reconstrucción les permite identificar las restricciones que afectan al proceso de algebrización en las matemáticas escolares.

Por otra parte, los estudios realizados por Bosch (1994) y García (2005) señalan que la deficiente comprensión de la proporcionalidad por parte de los estudiantes de educación básica se debe, por una parte a la homogeneidad de las propuestas clásicas para su enseñanza que centran el estudio en ámbitos numéricos separados de las relaciones funcionales donde la proporcionalidad puede fungir como herramienta para la solución de situaciones problemáticas, y por el otro, a que los elementos praxeológicos respecto a la proporcionalidad directa, inversa y compuesta son estudiados de modo aislado y con un bajo nivel de algebrización. (Obando, Vasco y Arboleda, 2014)

También en los últimos años, el avance de los estudios enmarcados en la TAD ha permitido que se diseñen ciertos dispositivos de enseñanza denominados *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) y para el campo de la formación éstos se convierten en *Recorridos de Estudio e Investigación para la formación de profesores* (REI-FP), sin embargo, en el contexto de la proporcionalidad pocos han sido los estudios que den cuenta de los resultados en la formación y que permitan establecer una visión amplia sobre la pertinencia en su diseño.

Uno de los estudios donde se analiza la puesta a prueba de un REI en el contexto de la proporcionalidad es el que desarrolla García (2005) y que se asienta sobre la relación de proporcionalidad y las relaciones funcionales que se proponen en la Educación Secundaria Obligatoria en España. El trabajo propone un posible proceso didáctico basado en la reconstrucción de praxeologías matemáticas de complejidad creciente, que pretende la reconstrucción de las relaciones funcionales a través de sus verdaderas *razones de ser*, esto es, el estudio de la variabilidad.

Entre los estudios encontrados sobre dispositivos de formación respecto a la proporcionalidad, es visible el escaso número de trabajos que vuelven la mirada a este tópico y más evidente es la ausencia de investigaciones que recuperan un REI para transformarlo en un dispositivo pertinente para la formación de profesores (REI-FP).

El diseño de dispositivos para la formación de profesores es todavía una línea de investigación incipiente, sobre todo, cuando de formación inicial de profesores se trata, la ausencia de un número importante de trabajos en esta línea constituye una justificación para la investigación realizada, ya que la implementación de un REI-FP puede potenciar el desarrollo empírico y teórico sobre los aspectos vinculados con el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad en las instituciones formadoras de docentes.

De modo general puede afirmarse que las investigaciones analizadas en este rubro, que buscaban dar cuenta de las tendencias de los estudios sobre la proporcionalidad y la formación de profesores, se han constituido como referentes básicos para comprender los fenómenos que ocurren en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Los estudios sobre proporcionalidad son abordados tomando en cuenta las relaciones que establecen con la razón, la proporción, la variación y las relaciones funcionales. Este hecho torna compleja la mirada sobre la formación de profesores por la dificultad de dicho entramado conceptual, aunque no lo resulte tanto para el estudio de las praxeologías que permiten la puesta en juego de conocimientos asociados entre sí y que de modo implícito llevan a la resolución de situaciones problemáticas. En este punto es donde puede subrayarse la diferencia entre los estudios encontrados y la investigación que aquí se presenta ya que más que analizar los saberes del profesor respecto a la proporcionalidad, la intención aquí se centra en el análisis de las praxeologías desplegadas en el curso de la experimentación de un dispositivo de formación.

Puntualizaciones sobre la perspectiva teórica

La TAD es un enfoque teórico cuya noción fundamental es la de organización praxeológica o simplemente praxeología. En esta perspectiva, cualquier actividad humana puede representarse mediante un modelo único que puede resumirse en la palabra praxeología (Chevallard, 1999). Una praxeología u organización praxeológica se representa o modeliza mediante un esquema de cuatro componentes, los dos primeros se corresponden con el nivel de lo práctico, los otros dos con el nivel del logos, del saber. Los cuatro componentes de una praxeología serían: a) la tarea a resolver; b) la técnica que resuelve la tarea; c) la tecnología o el discurso que explica y justifica la técnica y; d) la teoría o el discurso que justifica a la tecnología. En el caso de la actividad del profesor siempre estarían articuladas praxeologías matemáticas (OM) y praxeologías didácticas (OD).

Ahora bien, si se habla de una organización matemática (OM) y una organización didáctica (OD), se podría decir que en la primera se identifican los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría ligadas al objeto matemático que se estudia, por su parte en la OD se consideran los momentos que se siguen en el proceso de estudiar un objeto o praxeología matemática. En estos momentos didácticos se consideran las técnicas de estudio, las praxeologías matemáticas en las que se basan y lo que el estudiante debe trabajar. En ambas organizaciones praxeológicas (matemáticas y didácticas), se hacen presentes los bloques práctico y teórico, ambos se vinculan permitiendo la construcción de las praxeologías previstas.

En lo que toca a la formación de profesores la cuestión fundamental es identificar las praxeologías o el “equipamiento praxeológico” que requiere un profesor para desarrollar una enseñanza adecuada independientemente del nivel educativo al que pertenezca. Respecto a la disposición de las organizaciones didácticas de formación (ODFM) que requiere el profesor, siguiendo a Ruiz y García (2007) se reconoce que éstas deben permitir la construcción de los saberes para poder reconstruirlos en el medio escolar, por lo que precisan de vivir su funcionamiento desde la institución formadora de docentes, es decir:

> Una OD_{FM} puede ser deconstruida en términos de tareas problemáticas de formación (T_{FM}), para las que se diseñan técnicas didácticas de formación (τ_{FM}), justificadas por tecnologías y teorías didácticas de formación (θ_{FM} y (Θ_{FM}). Así, a través de los correspondientes procesos de estudio, los maestros en formación construyen tanto saberes matemáticos (praxeologías matemáticas: [T_m, τ_m, θ_m, Θ_m]) como posibles formas de organizar su estudio en el medio escolar (praxeologías didácticas: [Td, τd, θd, Θd]). (p.197)

Ante esta idea se puede decir que los estudiantes normalistas viven dos procesos de formación: uno derivado de las praxeologías asociadas al estudio del concepto de proporcionalidad y otro relacionado con la construcción de saberes didácticos, en términos curriculares la asociación de estos dos procesos resulta imprescindible si de formar para la enseñanza se trata, esta situación hace necesario entonces el diseño y experimentación de un REI-FP que permita conjuntar ambos procesos:

> $FM_{M\text{-}d}$: Formación MATEMÁTICO-didáctica: genera procesos de estudio que permiten la construcción de praxeologías matemáticas OM_{EP}.$FM_{m\text{-}D}$: Formación matemático-DIDÁCTICA: desarrolla una actividad de estudio que conduce a la generación de todo un dominio de praxeologías didácticas OD_{EP} que permiten la “reconstrucción” de estos saberes matemáticos en la escuela primaria. (Ruiz y García, 2007, 199-200)

Como se puede observar los procesos enunciados se correlacionan. Para que un estudiante normalista se desempeñe eficientemente en las aulas de la escuela primaria, no basta el dominio conceptual de la proporcionalidad o el diseño de estrategias didácticas, en la formación ambos procesos se apoyan y fortalecen a partir de las praxeologías que los cohesionan. Esta situación se hace presente desde su formación en las escuelas normales con el estudio de nociones matemáticas y su enseñanza en la escuela primaria donde se enfrentan al planteamiento de contextos reales de significatividad del saber matemático.

El proceso de estudio de las praxeologías matemáticas ha sido integrado por Chevallard en los REI que pueden funcionar como dispositivo didáctico para romper la atomización de las matemáticas que se enseñan en las instituciones. La función articuladora de los REI deriva de su capacidad para permitir que la modelización matemática viva en los actuales sistemas de enseñanza. (Barquero, Bosch y Gascón, 2007a, 2007b, en Bosch y Gascón, 2007a). En el caso de la formación de profesores y considerando las necesidades de formación identificadas en los profesores para gestionar los REI, Ruiz (2015) propone el diseño de los REI-FP fuertemente articulados con los REI para organizar las praxeologías matemáticas por enseñar. Una vez hechas estas acotaciones teóricas, entonces es que puede plantearse la siguiente:

Pregunta de investigación.

¿Cuáles son las praxeologías de formación que se derivan de la experimentación de un Recorrido de Estudio e Investigación en la Formación de Profesores (REI-FP) en torno a la proporcionalidad en las escuelas normales?

Esta pregunta a su vez, permite establecer el siguiente:

Objetivo general del estudio

Identificar las praxeologías de formación que se construyen a partir de la experimentación de un REI-FP en torno a la proporcionalidad en las escuelas normales.

De estas ideas se desprenden los siguientes:

Objetivos específicos:

- Identificar las praxeologías que sobre proporcionalidad se incluyen en los programas de estudio para las escuelas normales. Específicamente se trata de identificar las tareas, las técnicas y las tecnologías para la formación de los profesores.
- Identificar un REI tendiente al manejo de la proporcionalidad en una organización praxeológica matemático-didáctica.
- Conocer las técnicas que utilizan los profesores en formación cuando viven tareas matemáticas relacionadas con el estudio de la proporcionalidad.
- Mostrar las tecnologías que realizan los estudiantes normalistas sobre el desarrollo de diversas tareas matemáticas vividas e identificadas en la institución educativa.
- Identificar el diseño de tareas que realizan los profesores en formación para ser implementadas en la escuela primaria.
- Conocer la experimentación de un REI que sobre el estudio de la proporcionalidad desarrollan los estudiantes normalistas en un grupo de sexto grado del nivel básico.

Puntualizaciones sobre el enfoque metodológico

Este estudio se propuso el análisis de las praxeologías referidas a un cierto saber, a partir del desarrollo de un REI-FP en torno al estudio de la proporcionalidad, particularmente se buscó estudiarlas desde un enfoque didáctico y desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), por esta razón se analizó el saber a través del manejo de ciertas tareas, técnicas de resolución, tecnologías y teorías de justificación.

En correspondencia con las ideas anteriores, el desarrollo del presente trabajo se ubicó bajo el paradigma cualitativo de los estudios didácticos cuya orientación metodológica fue determinada por la estructura y módulos que son propios de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), su finalidad consistió en abordar el análisis de las praxeologías matemáticas y didácticas que se hacen presentes en la resolución de tareas de proporcionalidad; en tanto que el objetivo es comprender también la justificación que sobre la actividad desarrollan los alumnos en las técnicas, la investigación se enmarcó en una perspectiva interpretativa, que se caracterizó por subordinar lo metodológico a la naturaleza del objeto de estudio. Dicha perspectiva se materializó a través del análisis de los datos recopilados mediante la aplicación de diversos instrumentos correspondientes a la caracterización propia de cada uno de los módulos del REI-FP.

Se trató entonces de una investigación considerada como parte de aproximaciones metodológicas en el estudio del aprendizaje que se desarrolla en contextos naturales de clase, ya que hace uso del diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, buscando que el diseño y la investigación sean interdependientes, entendiendo que la investigación no sólo incluye el momento de diseño sino la implementación en contextos de clase y la evaluación de resultados, (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2013). A través de esto se logró que los profesores en formación tuvieran una experiencia de actividad matemática que resultara funcional ante un campo de problemas y cuestiones, que aprendieran a emplear las herramientas propias del análisis didáctico y que realizaran una pequeña experimentación controlada en los espacios de práctica docente.

Desde esta perspectiva la investigación se enfocó en el diseño, implementación y evaluación de secuencias de enseñanza teóricamente fundamentadas como REI-FP asociadas al campo de la proporcionalidad en la formación inicial de profesores con el propósito de provocar el surgimiento de determinados fenómenos didácticos, como el desarrollo de tareas de variación proporcional directa, indirecta y compuesta, lo que llevó a elaborar recursos para la enseñanza de este tópico científicamente experimentados.

Los sujetos de estudio fueron seleccionados como sujetos caso tipo (Hernández, 2008), donde el objetivo es la calidad de la información derivada de un determinado grupo de sujetos que comparten un interés o caracterización en común, en este caso, se trabajó con estudiantes para profesor cuyo objeto de titulación de la Licenciatura en Educación

Primaria estuvo centrado en la línea matemática y que retomaron alguna de las nociones matemáticas vinculadas con la proporcionalidad.

El estudio se llevó a cabo en un primer momento con un grupo de ocho estudiantes de octavo semestre de la licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Normal “Manuel Ávila Camacho”, de la ciudad de Zacatecas, quienes en semestres previos abordaron los cursos de la línea matemática, esto es, Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, Álgebra: su aprendizaje y su enseñanza, Geometría: su enseñanza y su aprendizaje y Procesamiento de Información Estadística; cabe señalar que el abordaje longitudinal en estas asignaturas habría permitido a los estudiantes aproximarse desde al concepto de proporcionalidad y a las nociones con las cuales guarda relación.

En un segundo momento se trabajó sólo con dos de los ocho profesores en formación, en virtud de que ambos se encontraban practicando con alumnos de sexto grado, lo que determinaba mayor viabilidad para el trabajo ya que en dicho grado se aborda de manera formal el tema y la cuestión propia de la investigación.

La actividad de los sujetos de la investigación fue estudiada en dos contextos: al interior de la institución formadora de docentes en tanto estudiantes de matemáticas y como profesores “en acto” en la escuela primaria ante alumnos, en este sentido, la experimentación del REI-FP se desarrolló a lo largo de seis meses (enero a junio) con sesiones grupales e individuales de tres horas por semana, durante este tiempo los profesores en formación se encontraban cumpliendo con una jornada intensiva de práctica en la que sólo asistían a la Escuela Normal un día por semana. La distribución del tiempo de la experimentación del REI-FP se vio determinada por las características propias de cada uno de sus módulos, de igual forma la recopilación de datos se vio diversificada mediante instrumentos relativos a tales modalidades.

Los cuatro módulos del REI-FP fueron articulados entre sí y dado que en esta investigación la atención se centró en la formación matemático-didáctica de los estudiantes para profesor de escuela primaria debe precisarse que los datos recopilados arrojaron resultados propios de la naturaleza de cada uno de los módulos y en relación con cada una de las instituciones en las que se experimentó. En lo que sigue se describen los tiempos, modalidades y tipo de instrumento empleado para cada uno de los módulos:

Módulo uno. M_1: «Vivir un REI»

El primer módulo del REI-FP, "vivir" un REI, tuvo la intención de que el alumno se enfrentara a una tarea matemática en la que se pudieran utilizar diferentes técnicas y que paulatinamente fuera transitando de una técnica de la organización clásica a otra de organización funcional. Se llevó a cabo durante ocho sesiones de tres horas semanales cada una, se enfocó en la perspectiva de la organización clásica de la proporcionalidad como Modelo Epistemológico de Referencia. Los sujetos de estudio se colocaron en posición del "aprendiz de matemáticas", al identificar, resolver, cuestionar y validar la construcción y relaciones de la proporcionalidad con otras nociones a partir de ciertas tareas y el despliegue técnico y tecnológico para su resolución.

Para tal efecto, se presentó a los estudiantes normalistas un REI denominado "El Petróleo"[1], en este primer acercamiento el estudiante para profesor se enfrentó a la actividad de modelización matemática que fue diferente a las actividades habituales desarrolladas en las prácticas docentes, es decir se enfrentaron a la resolución de tareas matemáticas donde pusieron en juego saberes sobre la noción de proporcionalidad. Para efectos de la investigación se analizó la resolución de la tarea, la formulación de la técnica y la validación de la misma en un proceso colectivo, además, se recopilaron, categorizaron y analizaron las técnicas empleadas (estrategias a lápiz y papel) en la resolución de dichas tareas.

[1] Primera parte de la Propuesta de trabajo de la Dra. Darly Alina Kú Euán. Docente de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Módulo dos. *M_2: «Analizar el REI»*

En este segundo módulo, el análisis se conformó por un elemento descriptivo y uno predictivo, centrándose en las características de la situación trabajada en el módulo anterior. El análisis del REI se llevó a cabo a través de entrevistas semiestructuradas que se centraron en dos aspectos:

a) Un análisis matemático (praxeológico) sobre la actividad desarrollada, en el que los estudiantes describieron los elementos matemáticos (nociones, técnicas, propiedades, etc.) identificados y empleados en la resolución del REI. En este punto fue necesario el análisis de una terminología específica con la cual describir la actividad matemática.
b) Análisis didáctico (praxeológico). Para este caso, los estudiantes analizaron cuestiones relacionadas a la puesta en práctica del REI vivido y su transposición hipotética con un grupo de la escuela primaria, es decir, analizaron aspectos como los posibles errores y procedimientos que presentarían los alumnos de educación primaria al enfrentarse a tareas semejantes al REI del petróleo. Además revisaron dos lecciones de los libros del alumno (quinto y sexto grado), en las que debía destacarse el tipo de tareas, las técnicas, tecnologías y posibles teorías identificadas en el texto del saber.

Módulo tres. M_3: «Diseñar un REI»

Para el diseño y adaptación de un REI dirigido a alumnos de sexto grado de la escuela primaria, los profesores en formación se enfrentaron a varias tareas didácticas, la primera consistió en la búsqueda de diversos materiales educativos para diseñar un Plan de Clase para el estudio de la proporcionalidad en sexto grado de la escuela primaria; en la segunda tarea revisaron el Modelo Epistemológico de Referencia Didáctico sugerido en los programas de estudio, esto es la Teoría de las Situaciones Didácticas; una vez realizado el análisis de manera individual, los profesores en formación hicieron la reconstrucción del REI para la escuela primaria, mismo que fungió como instrumento de análisis del presente estudio.

Para el análisis de la investigación, de este módulo se tomaron los guiones pedagógicos que los estudiantes elaboraron como producto de la articulación de una praxeología matemático-didáctica en los que se pudo observar la puesta en juego del saber en la práctica, el dominio conceptual matemático y los referentes epistemológicos para su enseñanza.

Módulo cuatro. M_4: «Gestionar y experimentar un REI»

Durante el último módulo, dos profesores en formación experimentaron el REI diseñado en dos grupos de sexto grado, en ambos casos se recuperaron registros de clase de siete sesiones de dos horas cada una, en éstos se analizaron las técnicas[2] de enseñanza que utilizaron y los momentos de estudio que desarrollaron al interior del aula; de manera particular se categorizaron las praxeologías desarrolladas por los estudiantes para profesor tanto en el ámbito matemático como en el didáctico, las dificultades y aciertos derivados del manejo conceptual de la proporcionalidad y las técnicas (uso de regla de tres, cálculo del valor unitario, relaciones funcionales) más recurrentes en la resolución de las tareas planteadas.

La observación y registro fílmico (Valles, 1999) de las praxeologías fueron la principal herramienta para el análisis de las tareas encomendadas tanto en la Escuela Normal como en la Escuela Primaria, mismas que fueron decodificadas y categorizadas a partir de los planteamientos establecidos por la TAD, de manera específica se analizaron los momentos de estudio de las praxeologías. El análisis de las observaciones fue recursivo (Goetz y LeCompte, 1988) en tanto que fue recuperado y categorizado todo aquello que se volvía más recurrente en el desarrollo de la experimentación del REI-FP.

[2]Se tomó la idea de técnicas (de enseñanza) en el sentido de la TAD, no en el sentido que se les da desde la psicopedagogía.

Cabe señalar por último, que las determinaciones metodológicas que aquí se explicitan, se encontraron en función del proceso mismo de la experimentación, es decir el método estuvo determinado por la situación evolutiva del objeto, que sin dejar el esquema metodológico de un estudio didáctico siguió la metodología implicada en un REI-FP de referencia.

Los resultados de las acciones metodológicas descritas dan contenido al presente documento que se desglosa a lo largo de siete capítulos.

En el primer capítulo se describe el sustento teórico con el cual se fundamenta el estudio, es decir las nociones propias de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, especialmente se reflexiona sobre el significado de las organizaciones praxeológicas y la orientación que la vincula con la formación de profesores.

El segundo capítulo hace un recorrido por la organización clásica de la proporcionalidad en la que se inscribe el significado de esta noción, desde una perspectiva aritmética hasta el análisis de la modelización funcional, lo que permite observar la evolución praxeológica de dicha noción a partir de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER).

El tercer capítulo muestra el "análisis ecológico" de la institución, realizado desde el texto del saber, es decir se revisa la manera en la que se incluye la proporcionalidad en los programas escolares de la Escuela Normal y las posibles restricciones para su consiguiente aplicación en la escuela primaria.

En el cuarto capítulo se inicia con el análisis de lo que pasó durante el primer módulo del REI-FP, en éste se muestran las técnicas empleadas por los profesores en formación durante la resolución de diversos tipos de tareas matemáticas relacionadas con la proporcionalidad y sus diferentes modalidades de representación en situaciones gráficas, tabulares y problematizadoras.

El quinto capítulo muestra el análisis que, derivado de una entrevista semiestructurada, realizan los profesores en formación sobre la experiencia de vivir un REI de proporcionalidad como estudiantes de matemáticas, así como su percepción sobre el manejo de esta noción en los planes y programas de estudio de la escuela primaria.

El sexto capítulo da cuenta de la gestión que realizan dos profesores en formación en el diseño de planes de clase, se muestra la estructuración que hacen de un REI matemático diseñado para un grupo de sexto grado, se hace la revisión del tipo de tareas didácticas que ponen en juego para el estudio de la proporcionalidad y los momentos didácticos que gestionan para ser implementados en un grupo escolar.

El séptimo capítulo muestra el análisis de la experimentación que llevan a cabo dichos profesores, una vez que gestionaron los momentos didácticos, para identificar el tipo de tareas didácticas que ponen en juego con alumnos de sexto grado de primaria, los principales momentos desarrollados y aquellos en los que se hacen presentes mayores dificultades de implementación.

Por último el apartado de las conclusiones señala algunos argumentos derivados del planteamiento de las preguntas y objetivos de investigación que fueron revisados a lo largo de cada uno de los capítulos, además se enuncian aquellas cuestiones que fueron resueltas y aquellas que se dejan abiertas para investigaciones posteriores.

CAPÍTULO I
LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO. UNA PERSPECTIVA PARA EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) constituye un buen marco de referencia para analizar la formación de los profesores, ya que desde su origen con la Transposición Didáctica consideró como objeto de estudio no sólo las actividades propias de enseñanza y de aprendizaje, sino el estudio de todo el proceso que sigue el saber matemático, desde la esfera sabia hasta su inserción como saber enseñado.

En este contexto, la formación de profesores es un problema que puede abordarse desde dos perspectivas distintas no siempre complementarias. La primera centrada en el perfil del profesor y que se focaliza en las cuestiones: "¿Qué conocimientos son necesarios (o por lo menos útiles) para que los profesores puedan enseñar matemáticas de forma efectiva? y ¿qué se puede hacer para ayudar a los profesores a que construyan o adquieran estos conocimientos?". (Bosch y Gascón, 2009, p.91)

La segunda formulación deriva de cuestiones como: ¿Cuál es el equipamiento praxeológico necesario (o por lo menos útil) para que los profesores puedan enseñar matemáticas de manera efectiva? y ¿qué se puede hacer para ayudar a que los profesores dispongan de él? Esta postura, derivada de la TAD, estudia la problemática de la formación reflexionando sobre la manera cómo evolucionan las tareas y técnicas que el profesor puede llevar a cabo para la enseñanza y explora también los discursos teóricos que emplean los profesores para dar explicación a las praxis que se ponen en juego en una actividad matemática.

La compleja relación entre el saber didáctico y la formación de profesores hace necesaria la revisión de las nociones que se producen en el campo de la didáctica, por ello, el presente capítulo tiene como propósito analizar los conceptos principales de la TAD para construir un marco que permita analizar la formación de profesores.

1.1. LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO. LA EVOLUCIÓN CONCEPTUAL DE LA DIDÁCTICA

La relación entre didáctica y formación de profesores ha sido abordada desde diferentes perspectivas, algunas priorizan los saberes de carácter pedagógico mientras que otras le apuestan al dominio disciplinar. En el seno de la Didáctica de las Matemáticas también han sido varias las perspectivas desde las que se analiza dicha relación.

Sobre este respecto Brousseau (2000) señala que el profesor requiere la articulación de diversos conocimientos de referencia, situación que se vuelve compleja ante la existencia de una gran diversidad de posturas epistemológicas, dicha complejidad se acompaña del hecho de que, en sus inicios, la Didáctica de las Matemáticas tenía dificultades para analizar, controlar y someter a ciertas reglas de carácter científico que le dieran la rigurosidad de una práctica científica, sin embargo, de manera paulatina esta posición se fue modificando cuando aumentó el interés por dar explicación a los fenómenos didácticos. En tanto disciplina científica, la Didáctica de las Matemáticas ha enfrentado situaciones problemáticas, pero una vez superada la etapa precientífica, aparecen dos programas de investigación: el programa cognitivo y el programa epistemológico. (Gascón, 1999)

1.1.1. El programa cognitivo.

El programa cognitivo emprende el primer análisis sistemático sobre los hechos didácticos y se caracteriza por establecer un modelo cognitivo del sujeto considerando al aprendizaje como un proceso psicocognitivo. Sus primeros análisis giraban en torno a la noción de aprendizaje significativo y a la heurística positiva[3], además proponían el estudio empírico de los errores de los alumnos. Posteriormente, este enfoque evoluciona hacia la formulación de un aprendizaje específicamente matemático, con ello se modificó su núcleo y su heurística (García, 2005). Este programa presupone que todo fenómeno asociado a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas deriva de los fenómenos cognitivos, por lo que su objeto de investigación se circunscribió a la actividad cognitiva de los sujetos, inicialmente con los alumnos y posteriormente con los profesores.

A partir de estos principios el programa cognitivo retoma varios estudios que enfatizan en las concepciones de los alumnos, de los profesores y las prácticas de enseñanza, priorizando siempre la explicación del aprendizaje en relación al comportamiento del alumno en clase (Bosch y Gascón, 2002). En términos de la formación de profesores, hay dos características esenciales que se postulan en este modelo:

> (a) Se toma como problemática didáctica una ampliación bastante limitada de la problemática espontánea del profesor. Esto significa que recoge, reformula, amplía y sintetiza las cuestiones que constituyen inicialmente la problemática docente del profesor, que acostumbran a estar muy condicionadas por las ideas dominantes en la cultura escolar.
>
> (b) Presenta el saber didáctico como un saber técnico, en el sentido de aplicación de otros saberes fundamentales importantes de otras disciplinas. Esto comporta considerar la didáctica de las matemáticas como una disciplina más normativa que explicativa. (Gascón, 1998, pp. 3-4)

Siguiendo los planteamientos de este programa, se puede decir que los conocimientos del profesor de matemáticas están asociados directamente con lo que sabe y piensa y las modificaciones de sus prácticas se encuentran relacionadas con las concepciones que sobre la matemática se tengan. En correspondencia con estos principios, se consideraron inicialmente los fenómenos cognitivos para luego relacionarlos con las prácticas de enseñanza y posteriormente llevarlos a la especificidad del aprendizaje.

[3] La heurística positiva indica las líneas de investigación, lo que se puede (y se debe) hacer. Es un conjunto parcialmente articulado de sugerencias o motivaciones sobre cómo cambiar y desarrollar las "variantes refutables". (Lorenzano, 2010)

El nacimiento del programa cognitivo se vio influido por los trabajos de Bauersfeld y Skowronek (1976) quienes explicitaron la necesidad de construir una teoría del aprendizaje matemático en lugar de basarse en una teoría del aprendizaje general. Una propuesta similar, que buscaba la ampliación de los postulados de lo pedagógico-cognitivo fue la establecida por Shulman (1986) quien a través de la integración de la noción de conocimiento pedagógico del contenido establecía ciertos conocimientos base para el profesor, lo relevante de sus ideas es que influenciaron a los sistemas de formación de profesores, principalmente en Estados Unidos.

Desde la perspectiva de este autor, los saberes en formación se relacionan con aquello que los profesores piensan cuando planifican sus clases, y la principal preocupación son los contenidos y las estrategias a desarrollar. A decir de Shulman (1986), los tipos de conocimiento que debe poseer un profesor son los siguientes:

A) Conocimiento de la materia: es la comprensión del tema propio de un especialista en el campo, por ejemplo el conocimiento que sobre las matemáticas tiene un matemático.
B) Conocimiento pedagógico de la materia: hace referencia a la manera como el profesor construye estrategias para enseñar eso que él ya sabe.
C) Conocimiento curricular: es el acercamiento que tienen los profesores con la organización y clasificación del conocimiento para ser enseñado, se da a través de programas, libros de texto, entre otros.

La caracterización descrita por Shulman (1986) vendría a inaugurar una serie de estudios que se focalizaron en el análisis de los tipos de conocimiento que los profesores, tanto en formación como en servicio, deberían de poseer. Su propuesta de considerar que la enseñanza del conocimiento de la materia y del conocimiento pedagógico debían ir juntos influye en los programas de formación de profesores.

1.1.2. El programa epistemológico.

El programa epistemológico se integra en una problemática más compleja, la necesidad de problematizar las situaciones que son la “razón de ser” de los conocimientos matemáticos con finalidades didácticas, es decir, el análisis de las prácticas matemáticas institucionales. En este caso la formación del profesor juega un papel determinante, pues lejos de analizar los saberes que debe poseer para desarrollar una buena práctica, se consideran las praxis que pone en juego ante un saber determinado. Esta situación:

> - Supone una nueva forma de estudiar los fenómenos didácticos a partir de la modelización del conocimiento matemático enseñado.
>
> - Toma la actividad matemática en sí misma como objeto primario de investigación.
>
> - Su núcleo está constituido por un modelo general de la actividad matemática (y los correspondientes modelos epistemológicos específicos de los diferentes “ámbitos” de la actividad matemática escolar).
>
> - Su heurística positiva está caracterizada por la emergencia de fenómenos didácticos-matemáticos no reducibles a fenómenos psicológicos, sociológicos y lingüísticos.
>
> - El modelo didáctico considerado y, en particular, lo que se entiende por enseñar y aprender matemáticas, se formula a partir de estos términos primitivos del modelo epistemológico de la actividad matemática. (Gascón 2003, en García, 2005, p. 45)

El saber se constituye como elemento sobre el que gira el programa epistemológico, ya que se asume que en las matemáticas está implícito un modelo de construcción, evolución y difusión de la actividad y un modelo de enseñanza. Esta idea “… consiste en considerar que lo didáctico, entendido como eso que es relativo a la enseñanza y el aprendizaje escolar de las matemáticas, integra lo matemático y debe ser cuestionado y modelado a partir de ello…” (Bosch y Gascón, 1998, p. 9 en Aguayo, 2005, p. 47), lo que permite considerar que la formas de transmisión y difusión escolar de la matemáticas son un objeto que deberá trabajarse y modelarse estudiando los problemas relativos al profesor de matemáticas.

En este programa existen diversas aproximaciones que explican la vinculación entre didáctica y formación. Una analiza la articulación entre lo matemático, lo pedagógico y lo didáctico, otra asume a la Teoría de las Situaciones Didácticas como el principal referente y una más se basa en la TAD donde se integra lo matemático y lo didáctico a través de la noción de praxeología.

Las primeras aproximaciones epistemológicas no compartían del todo la unión entre Matemática y Didáctica en la formación de profesores, su tendencia apostaba más a la formación pedagógica, de ahí que uno de los primeros trabajos, el de Kuzniak (1994), planteara que el objetivo de la formación era transmitir los saberes y las competencias, para ello, se incluía en una primera fase la teorización de la transmisión de contenidos matemáticos, lo que podía considerarse como la teorización de la Didáctica de las Matemáticas y en una segunda fase se incluían los conocimientos útiles para el profesor. Esta postura también es compartida por Houdement (1995) quien considera que los estudiantes para profesor deben adquirir conocimientos disciplinares (matemáticos) y otros sobre la transmisión del saber matemático. En esta perspectiva, las estrategias de formación prioritarias son aquellas que se basan en la homología y la transposición.[4]

Una aproximación diferente se formula desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). Originalmente Brousseau (1972, en Oliveira, 2010) plantea la necesidad de establecer un modelo propio, explícito y contrastable de la actividad matemática, es decir, un modelo que no reduzca el trabajo matemático al estudio de los procesos cognitivos de los alumnos porque considera a la actividad matemática escolar como un objeto primario de investigación, así surge la denominada epistemología experimental que Brousseau (1994) puso de manifiesto desde la década de los setenta.

La TSD repensó la naturaleza de las matemáticas y su didáctica en tanto disciplina, su objetivo fundamental era establecer una modelización explícita y contrastable del saber matemático, por ello postula que el conocimiento matemático se define por las situaciones que lo determinan, es decir, por el conjunto de situaciones para las que tal conocimiento resulta apropiado al otorgar una solución en el contexto de una

[4] A decir de Kuzniak (1994, en Aguayo, 2005) las estrategias basadas en la homología se fundamentan sobre un modelo de imitación, se caracterizan por el hecho de que los formadores enseñan de la misma forma que desean que el estudiante lo haga, mientras que las estrategias basadas en la transposición ponen su atención en el saber didáctico como saber de referencia, es decir los formadores reflexionan sobre las nociones didácticas que deben transponer.

institución determinada. Se podría decir que las situaciones representan la razón de ser del conocimiento matemático que se busca, de las cuestiones que le brindan sentido, de las restricciones que limitan su empleo en una institución y de las aplicaciones potenciales que le competen. (Gascón, 2013)

Complementariamente a la TSD, Chevallard desde su noción de transposición didáctica se cuestiona ¿cuáles son las transformaciones más adecuadas en el saber a enseñar para lograr un mejor efecto de aprendizaje?, ¿cuál debe ser el diseño de la situación didáctica para que éste sea coherente con el saber transpuesto y con ello lograr el conocimiento adecuado?.

1.1.2.1. El enfoque antropológico en el programa epistemológico.

La TAD plantea la necesidad de redefinir los conocimientos matemáticos que son objeto de enseñanza, por ello integra en la problemática didáctica el carácter institucional de la práctica de enseñanza propia del sistema didáctico (maestro-alumno-saber) y de las prácticas que no se circunscriben en el marco escolar (Oliveira, 2010), por esta razón resulta pertinente analizar la creación y difusión del conocimiento matemático en las diferentes instituciones sociales, tanto en las que producen el conocimiento como en las que lo emplean como instrumento de análisis.

Este enfoque antropológico que fue inaugurado por Chevallard (1999) y que se manifiesta en las primeras teorizaciones sobre la Transposición Didáctica (Chevallard, 1998), dejó de circunscribirse a las prácticas en el aula porque asume la dificultad de interpretar la actividad matemática escolar sin tomar en cuenta los fenómenos que subyacen al proceso de reconstrucción matemática que inicia en la institución productora del saber matemático. Así pues, "…la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado". (Bosch, 2009, p. 90)

La TAD asume que el saber matemático es una respuesta a situaciones problemáticas y surge como producto de un proceso de estudio, donde se supone que toda actividad humana se puede describir mediante un modelo único que se resume en el término de praxeología u organización praxeológica y que se compone de cuatro elementos: tareas, técnicas, tecnologías y teorías (Chevallard, 1999). En este contexto, las praxeologías didácticas son el resultado de situaciones en las que se reconstruye un saber matemático y las tareas, las técnicas y las tecnologías desarrolladas por el profesor en los salones de clase le permiten abordar un saber en particular. En el caso de la formación de profesores se habla de una doble praxeología, ya que si bien un profesor debe “dominar" las praxeologías matemáticas, también debe ser capaz de reconstruir las praxeologías didácticas, es decir, las referidas a la enseñanza o a la dirección de un proceso de estudio.

1.2. LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO Y LAS PRAXEOLOGÍAS DE FORMACIÓN

Desde la TAD, se considera que en el sistema de formación es inseparable la dimensión matemática de la dimensión didáctica, puesto que ambas constituyen el núcleo del objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática y como se ha mencionado, uno de sus principios básicos postula que toda actividad humana puede describirse en términos de praxeologías u organizaciones praxeológicas, porque toda práctica se encuentra acompañada de un saber, lo que implica la posibilidad de explicar lo qué se hace, cómo se hace y por qué se hace.

Siguiendo el sentido de tal principio, puede decirse que en la formación de profesores se manifiesta una gran diversidad de praxeologías tanto matemáticas como didácticas que dan cuenta de los saberes del profesor.

1.2.1. La noción de praxeología.

Uno de los conceptos clave de la TAD es la noción de praxeología u organización praxeológica. Siguiendo a Chevallard (2006) puede decirse que una praxeología es, de cierta manera, la unidad básica mediante la cual puede analizarse cualquier acto humano considerando dos componentes interrelacionados: la praxis (la parte práctica) y el logos (el pensamiento o razonamiento humano) y no pueden existir acciones humanas sin ser explicadas o justificadas, la praxis implica al logos y éste implica regresar a la praxis, esta relación es imprescindible ya que no hay acción humana que no sea cuestionada, si bien una praxeología podría ser deficiente en una situación dada, puede resultar adecuada para otro contexto. La noción de organización praxeológica surge como respuesta a un conjunto de cuestiones pero también como medio para realizar determinadas tareas problemáticas. En toda praxeología se distinguen dos aspectos inseparables:

> - El nivel de la práctica matemática o «praxis» (saber-hacer), que consta de un conjunto de tareas materializadas en diferentes tipos de problemas (T) y de un conjunto de técnicas (τ) o «maneras de hacer», más o menos sistemáticas y compartidas en la institución, que son útiles para llevar a cabo las tareas citadas. Es importante subrayar que las técnicas sólo excepcionalmente tienen un carácter algorítmico.
>
> - El discurso razonado sobre la práctica o «logos» (saber), en el que se sitúan, en un primer nivel, el discurso que describe, explica y justifica la técnica —que llamamos tecnología (θ)—, y en un segundo nivel, la fundamentación de la tecnología, que llamamos teoría (Θ) y que asume respecto de la tecnología el mismo papel descriptivo y justificativo que el de la tecnología respecto de la técnica. (Serrano, 2013, p. 18)

Se puede afirmar entonces que si en una institución determinada existe un cierto tipo de tareas es porque en esa institución hay una técnica que permite no sólo realizar dicha tarea, sino generar otras similares. Sobre este respecto Chevallard (1999) afirma que no hay técnica que pueda persistir en una institución si no aparece una forma de comprenderla y justificarla, por ello su existencia requiere de un discurso interpretativo que desde la TAD se define como tecnología, ésta además de justificar la técnica y hacerla inteligible, aporta elementos para desarrollarla y ampliar el contexto en el que se posibilita la generación de nuevas técnicas. La tecnología también requiere de una justificación institucional y es aquí donde la teoría se asocia a modo de un discurso explicativo de la misma, al constituirse por decisión metodológica como el último nivel de justificación de la actividad.

Ahora bien, los elementos de una praxeología también presentan una cierta relatividad institucional.

> En primer lugar, son relativos a la institución de referencia considerada. Esto significa que lo que es considerado como un tipo de tarea (o técnica o tecnología o teoría) en una institución no tiene por qué serlo en otra institución. De hecho, dada una institución, sólo tendrían que considerarse como tipos de tareas T aquellas para las cuales se dispone de algún tipo de técnica τ con un mínimo entorno tecnológico [θ, Θ], más o menos explícito (aunque este entorno sea del tipo «lo hacemos así porque siempre se ha hecho así»). Por simetría, se podría decir que las técnicas siempre dan respuesta a alguno de los tipos de tareas que se pueden plantear en una institución, aunque a veces puedan existir herramientas y maneras de hacer que respondan a cuestiones que ya no se plantean.
>
> En segundo lugar, las nociones de tipos de problemas, técnicas, tecnología y teoría son relativas a la función que hace cada uno de estos objetos en una actividad determinada. Esta es una de las propiedades interesantes de la noción de praxeología: el hecho de permitir distinguir las diferentes funciones que pueden tomar los objetos en las diferentes instituciones sociales y en las diferentes actividades institucionales. (Serrano, 2013, pp. 19-20)

Las praxeologías por lo general no son construcciones individuales, la TAD asume que el carácter institucional o colectivo de las praxeologías determina su razón de ser porque las instituciones son el espacio social en el que circulan y viven ciertas formas de hacer y de pensar en las que los sujetos se insertan para identificar el espacio apropiado para el desarrollo de sus actividades.

Con el propósito de sistematizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) estable una distinción entre diferentes tipos de praxeologías:

a) La Praxeología puntual (PP) se caracteriza por incluir un único tipo de tarea (T) y se define con el bloque práctico-técnico [T/τ].

b) Praxeología local (PL) es el resultado de integrar diversas praxeologías puntuales que giran en torno a un discurso tecnológico común. Se caracterizan por una tecnología que explica, relaciona y produce las técnicas de las praxeologías puntuales que la conforman.

c) Praxeología regional (PR) se obtiene a través de la articulación e integración de diversas praxeologías locales en torno a una teoría matemática común.

d) Praxeología global (PG) surge al agregar varias praxeologías regionales mediante la integración de diferentes teorías. (Serrano, 2013)

Las praxeologías matemáticas no aparecen acabadas de forma definitiva, son el resultado de un trabajo arduo que se desarrolla durante un largo periodo donde se hacen presentes ciertas relaciones invariantes, es decir, no hay una praxeología matemática o didáctica que no tenga un proceso de estudio detrás de su construcción, tampoco hay un proceso de estudio sin una organización praxeológica matemática o didáctica en construcción. (Carrillo, 2013)

1.2.2. Los momentos de estudio y las praxeologías.

A decir de Serrano (2013), en las instituciones aparecen cuestiones que demandan una respuesta, un nuevo tipo de tareas, un cambio en las condiciones para la realización de una tarea antigua, entre otras. Al desconocer la respuesta, la institución no tiene la técnica para resolver el problema, por ello se requiere la elaboración de una praxeología (inicialmente praxeología puntual) que paulatinamente deberá evolucionar hasta convertirse en una praxeología local.

En una dinámica institucional se puede identificar a priori una praxeología local que permite dar respuesta a la cuestión problemática inicial y establecer con ello un proceso de estudio finalizado. El análisis de varios procesos de estudio permite detectar aspectos invariantes que se describen mediante la noción de momento didáctico. Chevallard (1999) señala que todo proceso de estudio se define por seis momentos didácticos no necesariamente lineales pero que cumplen cierta función que permite llevar a cabo el proceso y la dinámica interna de las relaciones entre los diferentes momentos, éstos se denominan:

M1. Momento del primer encuentro: constituye el primer acercamiento de los estudiantes con algún componente de la praxeología o con una situación problemática, se puede "vivir" varias ocasiones a lo largo del proceso de estudio.

M2. Momento exploratorio: se explora la situación problemática y se elabora una técnica relativa a esta tarea. “El proceso de reconstrucción de una praxeología tiene que contener momentos exploratorios en los cuales la comunidad de estudio tenga la oportunidad de construir y empezar a utilizar una técnica inicial τ potencialmente útil para realizar las tareas del tipo T”. (Serrano, 2013, p. 23)

M3. Momento del trabajo de la técnica: se complementa con el anterior, se inicia “rutinizando” la técnica empleada hasta provocar su desarrollo progresivo, es decir, hasta que los estudiantes logren el dominio del conjunto de las técnicas, lo que llevará a la creación de nuevos tipos de tareas.

M4. Momento tecnológico-teórico: se muestra el entorno tecnológico-teórico asociado a distintas técnicas que se construyen o aparecen durante el proceso de estudio.

M5. Momento de la institucionalización: en éste se precisa lo que significa una praxeología elaborada, se puntualizan los elementos empleados en su construcción dotándoles de un carácter oficial y distinguiéndolos de aquellos elementos que pudieron aparecer como herramientas útiles pero que no se integraron a la praxeología construida.

M6. Momento de la evaluación: se evalúa la calidad de los componentes de la praxeología construida, es decir, si los tipos de tareas han sido bien identificados, si las técnicas están suficientemente trabajadas, si fueron probadas en cuanto a su fiabilidad, efectividad y pertinencia, si el discurso tecnológico resulta lo suficientemente explícito, si ayuda a interpretar y justificar las técnicas utilizadas.

Ahora bien, en la medida en que los momentos del estudio se vivan y se integren de manera funcional, será posible la construcción de una praxeología local más completa (Fonseca, 2004), de ahí la importancia de constatar hasta qué punto el proceso de construcción de las praxeologías se relaciona con la estructura de las praxeologías locales.

1.2.3. Los niveles de codeterminación didáctica.

El estudio de las condiciones de existencia y evolución de las praxeologías matemáticas y didácticas supone que en el momento en que profesor y alumno se encuentran con un saber, el proceso didáctico es determinado por varias condiciones y restricciones no sólo del aula, también de otros espacios que influyen en dicho proceso. Para explicar las restricciones entre las praxeologías matemáticas y didácticas, Chevallard, Bosch y Gascón (1997) proponen una jerarquía de niveles de codeterminación didáctica que permite identificar las condiciones que van más allá del espacio de la clase. Dicha jerarquía se esquematiza de la siguiente manera:

Sociedad$\Rightarrow$ Escuela$\Rightarrow$ Pedagogía$\Rightarrow$ Disciplina$\Rightarrow$ Área$\Rightarrow$ Sector$\Rightarrow$ Tema$\Rightarrow$ Cuestión

El esquema anterior indica que para que una cuestión sea estudiada, debe recorrer un camino que inicia en cierto sector de la sociedad, pasa por la escuela, la pedagogía, etc., hasta llegar a cierto sector dentro del área y por cierto tema del sector, esto es, en cada una de estas etapas se elaboran restricciones y condiciones que definen lo que es posible hacer para estudiar una cuestión determinada o bien para crear y construir una praxeología que sea la respuesta esperada a la cuestión (Parra, Otero y Fanaro, 2010). De los niveles mostrados se desprenden dos observaciones:

> La primera es que la jerarquía indicada es la que se observa habitualmente: una cuestión (digamos, de matemáticas) se refiere normalmente a un tema que, a su vez, pertenece a un sector que se incluye en un área, etc.
>
> La segunda observación es que esta jerarquía de encajes, a pesar de ser, […] indispensable, no es para nada intrínseca. Aparece normalmente, en una época histórica dada, y respecto a un tipo de cuestiones dado, como el resultado de un doble proceso: primero, de una elaboración praxeológica que se construye, o que se construyó en un pasado más o menos reciente, lejos de la escuela y más o menos independientemente de sus necesidades, según las leyes de la producción sabia de conocimientos; después, de una transposición didáctica escolar de esta elaboración praxeológica “sabia”, que volverá a crear, modificándola a veces profundamente, la jerarquía de niveles que permite el acceso al estudio de la cuestión. (Chevallard, 2001, pp. 3-4)

La construcción de una jerarquía óptima está determinada por lo que los alumnos pueden recibir y lo que los profesores pueden aceptar hacer, sin embargo, a decir de Chevallard (2001) el profesor abandona los niveles superiores de la OD (desde el de la sociedad hasta los sectores) lo que produce que permanezca “encerrado” en el nivel de los temas.[5] Por su parte Gascón (2003) señala que antes de que el profesor se centre en los temas existe un currículo oficial que más allá del nivel de organización de los temas alude a una situación transparente e incuestionable.

1.3. LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO Y LAS PRAXEOLOGÍAS

En el caso de la formación inicial de profesores en México, a partir del 2012 se puso en marcha un plan de estudios basado en el llamado “enfoque por competencias" que a decir de Gascón (2011a) persigue el desarrollo personal integral orientado hacia el ejercicio profesional, social y cívico, sustentado en un aprendizaje permanente a lo largo de toda la vida.

Sin embargo, esta cultura escolar constituye lo que Gascón y Bosch (2007) denominan “generalismo pedagógico” que se caracteriza por eliminar lo que es específico de cada disciplina, diluyendo el conocimiento en un conjunto de competencias genéricas ajenas a toda disciplina. Estas competencias, que han sido definidas aislando las disciplinas representan un conocimiento de base para la formación que se concreta en los programas oficiales para la formación de profesores mediante seis ámbitos: la planeación del aprendizaje, organización del ambiente del aula, evaluación educativa, promoción del aprendizaje de todos los alumnos, compromiso y responsabilidad con la profesión y vinculación con la institución y el entorno. (SEP, 2011)

Tales ámbitos deberían promoverse de modo interrelacionado sin corresponderse de modo exclusivo con una asignatura, por ejemplo el dominio de contenidos de enseñanza se vincula con los espacios delimitados en el plan de estudios de educación básica, las habilidades intelectuales o la formación valoral se corresponden con los estilos y prácticas escolares que serán promovidos en el conjunto de los estudios. Esta visión generalista muestra que “…la contraposición

[5] Esto significa que el profesor no puede comprender la relación de los temas que enseña en el aula con los niveles superiores de la praxeología. Ese “encierro” en los temas produce lo que Chevallard (1999) llama “autismo temático”.

entre aprender conocimientos y adquirir competencias no es más que una nueva versión de la falacia que contrapone aprender conocimientos a aprender a aprender" (Gascón y Bosch, 2007, p. 206) y suele olvidar que los saberes disciplinares tienen rasgos específicos equivalentes a una actividad humana en particular.

Para el caso de la formación de profesores de educación primaria, esta situación resulta más compleja, puesto que los estudiantes deben "dominar" un gran número de saberes disciplinares -vistos como competencias-, para conjuntarlos con saberes pedagógicos, psicológicos, sociológicos, entre otros. Pero además de esta complejidad, emerge otra dificultad: una formación didáctica escasa basada en el manejo de textos que abordan someramente el saber disciplinar con ciertos matices de un saber pedagógico.

1.3.1. La naturaleza de los problemas de formación.

En las instituciones de educación superior se presta poca atención a la formación didáctica del profesorado y es común sostener la concepción simplista de que enseñar es una tarea sencilla (Gil, Beléndez, Martín, y Martínez, 1991). De manera particular, en las Escuelas Normales se forma a los jóvenes para que se conviertan en profesores de educación básica, para ello en la malla curricular de la Licenciatura en Educación Primaria se integran cinco trayectos formativos.

1) Psicopedagógico,
2) Preparación para la enseñanza y el aprendizaje,
3) Lengua adicional y Tecnologías de la información y la comunicación,
4) Optativos y
5) Práctica profesional. (SEP, 2012a)

Además, en los programas oficiales se señala la necesidad de promover el desarrollo de competencias desde cada campo, pero interrelacionando cada trayecto. Por su parte la formación disciplinar se inscribe en el trayecto *Preparación para la* *enseñanza y el aprendizaje* y las asignaturas se corresponden con las que el estudiante normalista deberá enseñar en la escuela primaria.

La orientación curricular del plan de estudios se sustenta en un enfoque dual, está centrado en el aprendizaje y basado en competencias. El primer enfoque hace referencia a un acto intelectual, social, afectivo y de interacción dentro de una comunidad de prácticas socioculturales, se dice, el aprendizaje tiene lugar a través de acciones de mediación pedagógica que involucran una actividad coordinada de intención-acción-reflexión entre estudiantes y formador. En el segundo enfoque se considera que una competencia permitirá identificar, seleccionar, coordinar y movilizar de modo articulado e interrelacionado un conjunto de saberes diversos en el marco de una situación educativa en un contexto específico. (SEP, 2012a)

En cuanto a las competencias genéricas con las que el profesor en formación deberá egresar se encuentran: el uso de un pensamiento crítico y creativo para la solución de problemas y toma de decisiones; el aprendizaje permanente; la colaboración colectiva en la generación de proyectos innovadores; el actuar con sentido ético; la aplicación de habilidades comunicativas y; el uso de tecnologías de la información y la comunicación.

Se espera además que las competencias profesionales se manifiesten en el diseño de planeaciones didácticas donde se "apliquen" conocimientos pedagógicos y disciplinares; en la generación de ambientes formativos para propiciar la autonomía y el desarrollo de competencias en los alumnos; en la aplicación crítica del plan y programas de estudios; en el empleo de las TIC como herramienta de enseñanza y de aprendizaje; en el uso de la evaluación formativa; en la creación de espacios incluyentes para todos los alumnos; en el desarrollo de acciones éticas; en el uso de la investigación educativa para enriquecer la práctica docente y en la intervención de manera colaborativa con la comunidad escolar y social.

Al analizar las competencias se podrá observar que su extrema generalidad minimiza la naturaleza didáctica del saber disciplinar, si se considera que los profesores en formación requieren conocer procesos didácticos específicos, deberían incorporarse elementos que están más allá de la generalidad. Sobre esta misma idea, Chevallard, Bosch y Gascón (1997) señalan que dentro de la formación de profesores existen cuestiones genéricas y específicas fijadas en la escala de los niveles de codeterminación que puede observarse en el siguiente esquema. (Gascón y Bosch, 2007)

Cuestiones genéricas: civilización → sociedad → escuela → pedagogía.

Cuestiones específicas: disciplina → área → sector → tema →cuestión.

Desde esta perspectiva se piensa que la formación del profesorado es la unión de dos cuestiones independientes: la formación disciplinar y ciertos elementos (pedagógicos) válidos para todos los aprendizajes. Algunas cuestiones que forman parte de la problemática docente y que surgen de los niveles extremos de esta generalidad-especificidad son los siguientes:

a. No se puede enseñar a estudiar desde lo general, tampoco se puede enseñar a aprender en general, ya que no existen cuestiones sin contenido.
b. En cuestiones situadas en un ámbito muy reducido del currículum (análisis de los conceptos de razón y proporción a través de diversas situaciones, estudio del concepto de porcentaje y su representación gráfica, resolución de problemas que involucran el cálculo de porcentajes y el estudio de la variación proporcional directa[6]), los problemas para el profesor son del tipo siguiente: ¿Es preferible introducir la noción de razón previo a la de proporcionalidad?, ¿Qué definición es la mejor para dar sentido al manejo de las propiedades de la proporcionalidad?, ¿Cuál es la transición de la proporcionalidad a las funciones? Tales cuestiones sólo se pueden abordar y responder, saliendo del nivel puntual en el que se plantean. (Gascón y Bosch, 2007)

Ante esta división entre lo genérico y lo específico, la formación de los profesores tiende a separar lo disciplinar y su enseñanza, es decir, luego de una formación en

[6] Temas que se abordan actualmente en el programa curricular del curso Aritmética: su enseñanza y su aprendizaje en la Licenciatura en Educación Primaria de las escuelas normales.

un campo disciplinar, el profesor en formación se enfrenta a conocimientos psicológicos, pedagógicos y didácticos disgregados entre sí.

1.3.2. La formación del profesor. Restricciones o necesidades.

Para el caso de la formación del profesorado en matemáticas, la separación entre hacer matemáticas y enseñar matemáticas amplía la distancia entre el sujeto que enseña matemáticas y el que las produce y aplica. Esta disociación, señalan Gascón y Bosch (2007), se refuerza por una epistemología ingenua de las matemáticas que alimenta el mito de la separación entre el contenido de la enseñanza y la manera en que se organiza su estudio.

Desde esta lógica, la formación de profesores tendría que sustentarse en principios generales independientes de lo que se pretende enseñar, así, se le confía al profesor la responsabilidad de especificar los criterios generales del contenido que ha de enseñar porque se considera que lo que realmente importa no es enseñar matemáticas sino "enseñar a aprender". Sin embargo, este enfoque basado en competencias sólo permite formarse como educadores "integrales" disminuyendo su capacidad educativa como profesor de matemáticas. Tal planteamiento subyace en el plan y programas de educación normal donde se señala que, al adquirir los conocimientos disciplinarios, los estudiantes deberán asociarlos con las necesidades, procesos y formas de aprendizaje de sus futuros alumnos, mediante actividades didácticas específicas y recursos para la enseñanza. (SEP, 2012a)

Empero, resulta iluso pensar que pueden desarrollarse competencias ligadas a la formación de profesores sin pensar en el saber disciplinar, porque tanto en las cuestiones específicas como genéricas inciden las restricciones de los niveles de codeterminación didáctica, algunas son subrayadas por Gascón y Bosch (2007):

- La invisibilidad social de las matemáticas. Existe la consideración social de las matemáticas como un artefacto didáctico, como si la única razón para aprender matemáticas fuera que se enseñan en la escuela. Se reduce el valor social de las matemáticas a un simple valor escolar que convierte la enseñanza de las matemáticas en un fin en sí mismo.

- El rechazo cada vez más generalizado para pasar de la certeza a la duda cognitiva. Cuando el rechazo conlleva a un desinterés, una persona no puede aprender porque no puede dudar y no tiene derecho a no saber.

Ante estas restricciones, no basta una formación que desarrolle competencias porque las dificultades se profundizan sobre todo en la educación superior donde los saberes disciplinares son más específicos y numerosos. Pensar que "la formación inicial tiene que integrar los conocimientos académicos, las concepciones personales y el conocimiento práctico…" (Mellado, 2003, p. 353), resulta fundamental si se quiere destacar las prácticas.

Así pues, la dificultad en la formación de profesores radica en que no se sabe cuáles son las competencias que debería tener un profesor que enseña matemáticas, éste es un criterio muy abierto y ambiguo. A decir de Gascón y Bosch (2007), los intentos de utilizar las competencias para elaborar un programa de formación no hacen sino negar el problema de formación dándolo por resuelto con anticipación.

1.3.3. El problema praxeológico del profesor.

Una vez abordadas las necesidades y restricciones en la formación del profesor, es necesario subrayar las problemáticas que enfrentan los estudiantes normalistas cuando se encuentran en situaciones reales de enseñanza. Si se toma la idea de que la formación ha evolucionado de los saberes a las praxeologías, se estaría hablando de subrayar el problema praxeológico del profesor en formación.

El "saber sabio", que se había planteado en las primeras teorizaciones de la TAD desaparece y en su lugar se dice que lo que se transponen son las praxeologías. En este sentido y siguiendo a Wozniak (2010) puede decirse que uno de los problemas praxeológicos del maestro es preparar su curso antes de ser “enseñado”, es decir, la cuestión que guía su acción es ¿cómo organizar el estudio de un objeto (matemático) para y en el salón de clases?, para dar respuesta a esta cuestión el profesor lleva a cabo un proceso de transposición didáctica[7] que se corresponde con una Institución específica y una Organización Matemática (OM) determinada. En estos casos se habla del diseño de un proceso de estudio que, basado en un modelo de problemas, se manifiesta mediante la reconstrucción de una organización praxeológica. En este proceso se hace necesario identificar el tipo de tareas T; construir una técnica τ para resolver la tarea y producir un discurso tecnológico θ que justifique la técnica.

Dentro de ese recorrido praxeológico un profesor en formación observará inicialmente las respuestas presentes en la cultura escolar, es decir, en textos, en conversaciones con otros colegas y en todo aquello que le permita comprender el saber disciplinar, después hará un análisis sobre el proceso de respuestas que han sido construidas por otros, con ello favorece una evaluación que se vuelve indispensable para el desarrollo de una respuesta a la pregunta inicial.

A decir de Chevallard, (1997a) este proceso termina con la producción de la respuesta, la cual denomina O “obra” entendida como cualquier producción humana que da respuesta a preguntas "teóricas" o "prácticas" (Q) y que son las razones de la obra. La planificación anual, semanal o hasta de una sesión de enseñanza no es sino, la reconstrucción de praxeologías matemáticas locales y regionales, la obra del profesor que constituye la respuesta al problema praxeológico que le compete. (Wozniak, 2010)

1.4. LA FORMACIÓN DE PROFESORES A TRAVÉS DE ORGANIZACIONES PRAXEOLÓGICAS

Para la formación del profesor, Cirade (2006, en Ruiz y García, 2007) señala que son necesarios tres tipos de matemáticas: matemáticas a enseñar, matemáticas para el enseñante y matemáticas para la enseñanza. Las primeras se incluyen en un programa oficial o currículum escolar de matemáticas; las segundas son las que un

[7] La Transposición Didáctica alude al proceso donde todo saber sufre una serie de deformaciones que lo convierten de un saber sabio (surgido de la investigación), en un saber a enseñar, esto es, en un conocimiento apto para ser enseñado. (Chevallard, 1994)

profesor debe conocer para comprender los contenidos y propuestas de enseñanza (técnicas, tecnologías y teorías del programa) y; las matemáticas para la enseñanza son aquellas que se ponen en juego en la clase y son Organizaciones Matemáticas designadas para enseñar. En su caso, los profesores en formación empiezan a construir esas matemáticas cuando se preguntan sobre las razones de ser de una noción, de una propiedad, de un teorema o de una técnica expresada en el currículum escolar.

En un ejemplo que Artaud (2006) muestra sobre la manera como la TAD asume la formación de profesores, se señala que para modelar una secuencia de enseñanza mediante una praxeología matemática y una didáctica, primero se establecen los tipos de tareas, las técnicas, la tecnología y la teoría; el segundo momento es la segmentación de la materia a estudiar, es decir, el estudio de un tema se relaciona con el sector y la zona en la que se encuentra inmersa, incluso con la disciplina en su conjunto y también con sus relaciones con los sujetos; para el tercer momento, a partir de las respuestas existentes que se observan, analizan y evalúan, se producen las respuestas a la pregunta planteada, las cuales son validadas para difundir y justificar el trabajo.

1.4.1. El equipamiento praxeológico del profesor.

En la formación de profesores, desde la TAD la cuestión fundamental es identificar el equipamiento praxeológico que requiere un profesor para una práctica de enseñanza eficaz y una cuestión derivada es ¿qué se puede hacer desde la formación de profesores para que se apropien de tal equipamiento?. En este sentido puede preguntarse sobre:

- ¿Cuáles son las tareas y técnicas que el profesor debe llevar a cabo?
- ¿De qué tipo serían, cómo surgen, cómo se desarrollan?
- ¿Cuál es discurso tecnológico-teórico que utilizan los profesores para describir, justificar y hacer evolucionar las praxis?
- ¿Cuál es el origen y evolución de tales discursos?

- ¿Cómo establecer la conexión entre el bloque práctico y el bloque teórico?
- ¿Pueden las praxeologías docentes evolucionar sólo con el desarrollo de las técnicas y los discursos tecnológico-teóricos espontáneos?
- ¿Se requiere de una elaboración más sistemática para desarrollar la profesión? y,
- ¿Cuál es la incidencia que tienen sobre las tareas y técnicas docentes los discursos tecnológico-teóricos que aporta la didáctica de las matemáticas o aquellos más generalistas propios de la pedagogía o psicología educativa?. (Bosch y Gascón, 2009)

Más que la unión entre la teoría y la práctica, la praxeología permite entender el saber a través del hacer, por ello es necesario delimitar las praxeologías didácticas y matemáticas para la formación de profesores. Es aquí donde puede aparecer la denominada pedagogía del "monumentalismo" cuando se antepone el estudio de determinadas construcciones praxeológicas existentes al estudio de las cuestiones o problemáticas vivas en la formación (Gascón y Bosch, 2007). De tal monumentalismo se desprende el riesgo de formar a los estudiantes normalistas no a partir de las necesidades praxeológicas propias de la docencia sino de equipamientos praxeológicos ya establecidos que sólo deben ser aplicados.

Es conveniente en la formación profesional centrar las cuestiones o dificultades a las que se debe dar respuesta más allá de un equipamiento preestablecido. De esta manera "… el problema de la descripción de las praxeologías didácticas con las que el profesor se tiene que equipar se convierte en el problema de determinar las cuestiones que están en el origen de estas praxeologías". (Bosch y Gascón, 2009, p. 95)

Si se considera que los “saberes a enseñar” son también “saberes a hacer” y que ambos muestran un componente tanto teórico como práctico, entonces la formación alude a praxeologías, a diferencia de otras nociones como saber, conocimiento, competencia, reflexión, creencia, entre otros.

1.4.2. El sistema de tareas del profesor.

Diversas posturas plantean que el profesor no sólo debe tener el dominio de las disciplinas que enseña, sino también del proceso de adquisición de conocimientos, de los métodos de trabajo en el grupo, del sistema educativo y del contexto social. Se podrían multiplicar más las tareas que se imponen al sistema del docente (Chevallard, 1997b), sin embargo desde la TAD se intenta especificar cuáles son las tareas que competen al profesor en la enseñanza de las matemáticas.

En el texto *Normas Profesionales para las Matemáticas Escolares,* publicadas en 1991 por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, las tareas asignadas a un profesor de matemáticas se dividen en cuatro áreas:

> - El establecimiento de objetivos y seleccionar o crear tareas matemáticas para ayudar a que los estudiantes logren alcanzar las metas de tesis;
> - Estimular y gestionar el discurso del aula de manera que tanto los alumnos y el profesor sea más clara sobre lo que se aprende;
> - La creación de un ambiente en el aula para apoyar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas;
> - Analizar el aprendizaje del estudiante, las tareas matemáticas, y los entornos con el fin de tomar decisiones sobre la instrucción en curso. (Simon, 1995, p. 119.)

A pesar de que la cita anterior tiene más de 20 años, en las tareas enunciadas ya se incluye, de modo implícito, la importancia del análisis praxeológico en el diseño y análisis de tareas matemáticas y aunque queda diluido el componente didáctico, en la actualidad este vacío se llena con ciertos planteamientos propios de la TAD, sobre todo el que señala que toda acción humana se deriva de una praxeología.

Por otra parte, toda institución formadora se distingue por su intencionalidad didáctica y desde la TAD lo didáctico siempre lleva al estudio, en el sentido de que alguien estudie cierto objeto[8]. En este sentido el objetivo de la didáctica de las matemáticas "… es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio –o procesos didácticos- de cara a proponer explicaciones […] a las dificultades con que

[8] "El estudio se refiere a todo lo que se hace en una institución para resolver las tareas matemáticas que se plantean, sin importar que el estudio se desarrolle en el ámbito escolar o en cualquier otra institución social […], hay estudio en todas las instituciones de la sociedad cuando se manipula un saber establecido o por establecer." (Bosch, et-al, 2003, p.84 en Aguayo, 2005, p. 63)

se encuentran todos aquellos […] que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiar matemáticas”. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 60)

La didáctica entonces no se reduce al análisis de la enseñanza de las matemáticas, sino que representa un medio para el estudio porque el aprendizaje se hace posible a través del proceso de estudio o proceso didáctico. Ambos, enseñanza y aprendizaje, son aspectos particulares del proceso de estudio de las matemáticas, entendiendo el estudio en un sentido amplio, que engloba tanto el trabajo matemático del alumno como el del matemático profesional que también estudia problemas de matemáticas. (Chevallard, et-al, 1997).

En este proceso, en tanto director de estudio, el profesor es el representante de las prácticas institucionales que desarrolla, lo que le permite expresarse en términos de tipos de tareas o de praxeologías. La formación de profesores se circunscribe también a un proceso de estudio al apoyar al estudiante en el estudio del objeto (matemático-didáctico), el formador estructura un sistema didáctico de ayuda.

El sistema de tareas de profesor revela dos grandes componentes (Chevallard, 2002), la primera incluye las tareas de diseño y organización de los dispositivos de estudio y la gestión de sus entornos; la segunda incluye el apoyo para el estudio de la gestión y de la educación. En términos praxeológicos, una de las primeras tareas a las que se enfrenta el profesor es determinar, a partir de la información del programa de estudios, ¿cuáles son las organizaciones matemáticas a estudiar?, puntualizando el contenido y los tipos de tareas matemáticas, así como el grado de desarrollo para proporcionar componentes técnicos, tecnológicos y teóricos. (Chevallard,1997b)

El segundo tipo de tareas para el profesor tiene que ver con dirigir el estudio de una praxeología específica, lo que implica su reconstrucción en la clase. Empero, independientes a la trayectoria que tome el estudio, existen ciertos tipos de situaciones que se harán presentes y determinarán los momentos de estudio y los tiempos de la enseñanza, en éstas aparece un monitoreo del progreso logrado que sirve para modificar los elementos que se han construido hasta el momento, lo que constituye la evaluación.

1.4.3. Formación de profesores e instituciones institucionalizantes.

La dimensión institucional juega un papel relevante en la formación inicial de profesores pues éstos se encuentran “sujetos” a las normas de una institución, a las restricciones, condiciones y recursos que se ponen en juego para la actividad matemático-didáctica. En un estudio antropológico se pretende analizar lo que ocurre con la actividad humana de esa institución, es decir, se observa qué pasa, cómo pasa y cuáles son las restricciones de tal actividad, pero no se estudia la institución para sugerir cómo debería ser esa actividad.[9]

Una institución (*I)* se determina por el tiempo y las sujeciones que impone a las tareas que el profesor deberá desarrollar. Chevallard (1994) considera que una misma praxeología puede generar una multiplicidad de fenómenos en diversas instituciones porque el proceso de transposición institucional no necesariamente va a producir versiones modificadas de las organizaciones praxeológicas sino que enriquece socialmente las praxeologías disponibles para adaptarlas a las nuevas condiciones institucionales.

Por otro lado, la institución no sólo produce una praxeología también debe generar condiciones para su reconstrucción en otras instituciones pasando por un proceso de “purificación” donde se elimina todo lo que cae dentro de los posibles usos específicos de la misma en una *I*. El objetivo es facilitar en otras instituciones la apropiación de la praxeología. (Romo, 2009)

Empero, para analizar los diferentes procesos de transposición y flujos interinstitucionales, debe considerarse el sometimiento institucional que determina ciertas reglas y restricciones. En otras palabras, la institución matemática es vista como un entramado de sub-instituciones, integrado por diversas organizaciones matemáticas de diferentes niveles: específico, local, regional y global. La inscripción de una praxeología en un área restringida y las herramientas disponibles determinan las posibilidades para desarrollar una técnica. A la inversa, los niveles más altos

---

[9] Desde este punto de vista puede considerarse que los dispositivos de estudio como el REI o el REI-FP constituyen una contradicción con la intención del análisis antropológico puesto que a través de éstos se intenta establecer una manera idónea de estudiar un cierto objeto.

proporcionan recursos a los niveles inferiores para producir y justificar los elementos praxeológicos. (Romo, 2009)

1.5. ESTRATEGIAS Y DISPOSITIVOS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Entre las estrategias y dispositivos para la formación de profesores, el trabajo de Portugais (1995) se distingue por establecer un camino experimental de investigación didáctica, el de la didactificación de la Didáctica de la Matemática, en este caso se asume que el problema de la formación de profesores en esta disciplina se puede abordar desde una teoría didáctica reconvertida (Ruiz y García, 2007) que considere el doble papel que juega un estudiante para profesor, el de alumno y el de eventual profesor.

El triángulo maestro-alumno-saber, propio del sistema de enseñanza, es replanteado para explicar la formación de profesores al colocar a un maestro formador, un alumno en formación y un saber didáctico.[10] El sistema de formación, así llamado por Portugais (1995), se construye en analogía con el sistema de enseñanza. A partir de este nuevo esquema este autor construye un dispositivo de formación con una situación que plantea al formado un problema a resolver, así el problema está determinado por las obligaciones impuestas por la situación.

1.5.1. La didactificación de la didáctica y las estrategias de formación.

Desde la perspectiva de Portugais (1995), la experimentación de situaciones de formación implica observar la posición del sujeto en el sistema, el profesor en formación ocupa el lugar del alumno en relación con su maestro pero en ocasiones adquiere el papel del profesor en relación con sus eventuales alumnos, otras incluso asume las dos posturas de modo simultáneo, lo que implica que se tome en cuenta como objeto de estudio de un sistema doble, de enseñanza y de formación.

[10] Esta comparación ha sido contemplada por Portugais (1995) como didactificación de la didáctica, con el propósito de preparar –didactificar- los saberes de la didáctica para ser enseñados.

Por su parte, Kuzniak (1994) afirma que para la formación deben tomarse en cuenta dos niveles: el de los conocimientos y de las habilidades. El primero alude al conocimiento matemático de los estudiantes de la escuela primaria desde la perspectiva de la Educación Matemática, el segundo se enfoca en la necesidad de dominar la forma de cómo enseñar al niño, es decir, el futuro profesor debe saber lo que el niño aprende y cómo lo aprende y a partir de estos niveles diseñar estrategias de formación para una posible transposición del saber didáctico a través de estrategias basadas en la demostración, en la homología y en la transposición.[11]

1.5.2. Los dispositivos de formación desde la TAD.

La búsqueda de estrategias de formación ha sido un intento de las teorías didácticas por dar respuesta a las necesidades de formación, en este sentido, la TAD ha retomado la noción de dispositivos de formación para superar la idea de estrategias y precisar una visión más específica en cuanto a la formación de profesores.

La acepción más generalizada del término dispositivo es aquella que proviene "… del latín dispositus, dispuesto. Adj. Dícese de lo que dispone/ mecanismo o artificio dispuesto para obtener un resultado automático" (Souto, 1999. p. 6), este significado, aunque básico alude también al arte de crear y utilizar un artificio. Buscando mayor especificidad, se podría decir que los dispositivos se identifican con modelos de interacción entre el saber y el hacer del profesor e integran situaciones que intentan generar, movilizar y poner en acción los saberes construidos por formadores y estudiantes. Así pues, un dispositivo de formación se orienta a la producción y transformación del sujeto mediante la experiencia de formación, construyendo saberes en la acción. (Olbrich, 2011)

[11] Aunque Kuzniak acuña el término transposición para referir a una de sus estrategias, niega que sea posible el hecho de que el saber sobre la enseñanza de las matemáticas sea un caso particular de transposición didáctica, en su opinión existe dificultad para determinar el saber profesional del profesor y por ende la pertinencia de transponer el saber didáctico. (Aguayo, 2005)

Para establecer los dispositivos de formación es necesario conocer y comprender los problemas didácticos que constituyen el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas. Gascón y Bosch (2007) señalan que todo problema didáctico se ubica en función de una praxeología matemático-didáctica suficientemente amplia y contiene en su formulación todas las etapas de la transposición didáctica de tal praxeología. Esto significa que un problema didáctico no puede abordarse exclusivamente desde una praxeología puntual.

> Si, por ejemplo, queremos estudiar lo que algunos autores llaman el "razonamiento proporcional" de los estudiantes y los fenómenos asociados, es imprescindible partir de un análisis de la proporcionalidad tal como es enseñada en la institución docente en cuestión. Este análisis, que dependerá en gran medida de la manera de interpretar la "proporcionalidad" en dicha institución, es completamente insuficiente. Será necesario, además situar, la proporcionalidad en una OM local relativamente completa (que, a su vez deberá integrarse en una OM regional) y, sobre todo, analizar los fenómenos transpositivos, en todas y cada una de sus etapas, que han dado como resultado dichas organizaciones matemáticas escolares. Además, dada la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico, es imprescindible asimismo tomar en consideración la forma particular de organizar el estudio de la proporcionalidad en la institución en cuestión. Así por ejemplo, es absurdo tildar de "aditivos" a los alumnos que confunden la proporcionalidad de razón k con la transformación que asocia a la cantidad x la cantidad x + k, sin tener en cuenta las características específicas de la OD escolar en torno a la proporcionalidad. (Gascón y Bosch, 2007, p. 234)

El dispositivo de formación que se propone desde esta perspectiva permite abordar lo inesperado, lo estratégico y lo cambiante, lo que no implica que no se tenga intencionalidad en la orientación de la acción y el formador, en tanto diseñador y actor del dispositivo de formación, moviliza sus propios saberes.

Ahora bien, para plantear y abordar un problema didáctico y diseñar un dispositivo de formación, es necesario establecer un modelo epistemológico de las matemáticas como sistema de referencia, en términos de la TAD, un "Modelo Epistemológico de Referencia" (MER). Este modelo de las relaciones naturales entre los objetos matemáticos es siempre provisional, pero desde ahí se pueden "deconstruir" y/o "reconstruir" las praxeologías cuya difusión se pretende analizar. (Sierra, 2006)[12]

[12] Una explicación más amplia acerca de lo que es el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) aparece en el siguiente capítulo.

Desde la TAD se asume la inexistencia de un sistema de referencia privilegiado con el que se pueda observar, analizar y juzgar los saberes, es por ello que sugiere el empleo de sistemas de referencia relativos que puedan adecuarse a un determinado problema o situación (Gascón, 2011b). En otros términos, un MER es un modelo de las relaciones matemáticas entre las tareas y las técnicas que se utilizan para resolverlas, un análisis histórico de la evolución de las tareas matemáticas permite reconocer la manera en que las técnicas ligadas a ellas fueron evolucionando. El producto de este doble análisis (evolución de las tareas y de las técnicas) es un MER que permite diseñar un proceso de estudio de determinada praxeología.

Desde la perspectiva anterior se puede afirmar que el MER resulta imprescindible para analizar cómo se interpreta el saber matemático en las instituciones donde se transpone y para describir e interpretar los fenómenos transpositivos.

> Análogamente, y dado que todo problema didáctico hace referencia necesariamente a una manera concreta de organizar el estudio de cierto saber matemático, esto es, a un modelo docente que suele estar sustentado por el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la institución, el investigador requerirá instrumentos para describir y analizar dicho modelo docente y las consecuencias de éste sobre los fenómenos que estudia. Estas herramientas se las proporcionará un modelo de referencia de los modelos docentes (o tipos de OD ideales) posibles que, de nuevo, el didacta debe asumir de manera más o menos explícita. Se trata de un modelo de referencia que incluye en cierto sentido al MER puesto que debe incluir la relación de cada tipo de OD ideal posible en una institución determinada con el modelo epistemológico de las matemáticas que lo sustenta. (Gascón y Bosch, 2007, p. 236)

El MER no es otra cosa que el modelo de las relaciones matemáticas entre diferentes tareas y técnicas y se vuelve imprescindible para estudiar el saber matemático antes de ser enseñado. Es necesario entonces que el modelo epistemológico de referencia empleado en una investigación didáctica sea explícito puesto que condicionará:

a) Los fenómenos didácticos que serán “visibles” para el investigador.
b) La manera de describir dichos fenómenos.
c) Las explicaciones tentativas que se podrán proponer. (Gascón y Bosch, 2007)

Ante estas condicionantes, en un problema didáctico deberá considerarse un modelo epistemológico del saber matemático y otro del saber didáctico, tales modelos serán empleados para analizar dichos saberes a lo largo de todas las etapas de la transposición didáctica.

1.5.3. Análisis ecológico en la formación de profesores.

Desde la TAD todo problema didáctico es un problema de ecología praxeológica, "…podría decirse que la dimensión ecológica de un problema didáctico contiene las cuestiones que giran en torno a la siguiente pregunta: ¿por qué las cosas (las OM y las OD) son como son en la contingencia institucional y qué condiciones se requerirían para que fuesen de otra forma dentro del universo de lo posible?". (Gascón, 2011b, p. 217)

En este sentido, es preciso considerar las restricciones y las condiciones impuestas sobre las OM y las OD en los niveles de determinación didáctica. A decir de Gascón (2011b), cada nivel incide en la determinación de la ecología institucional, es decir, la interpretación y estructuración de las OM en cada nivel condicionan el modo de organizar su estudio y a su vez, la naturaleza y funciones de los dispositivos didácticos propios de cada nivel determinan el tipo de OM que podrá reconstruirse.

Tomar en cuenta la jerarquía de niveles permite que la ecología de los saberes se vuelva más precisa porque las praxeologías se describen de modo más detallado que los saberes, además las restricciones son más explícitas en los niveles de codeterminación didáctica. Según Gascón (2001) la dimensión ecológica de un problema didáctico abarca cuestiones que pretenden indagar las restricciones y el nivel de procedencia, lo que resulta crucial para la ecología de las praxeologías matemáticas y didácticas, esto se identifica en los siguientes planteamientos:

a) ¿Cuáles son las condiciones que permiten dar cuenta del estado actual de las OM y de la OD asociadas a una institución determinada?
b) ¿Qué restricciones dificultan o impiden que ciertas características de las OM y de las OD se desarrollen en una institución?

c) ¿Qué condiciones se deberían instaurar, y en qué niveles jerárquicos para que sea posible la vida de las OM y OD con ciertas características?
d) El modelo epistemológico específico de un ámbito de la actividad dominante en una institución *I*, ¿cómo condiciona la forma de organizar el estudio de dicho ámbito en la *I*?

Las restricciones que determinan las características praxeológicas de una institución, generalmente son independientes a la voluntad de los sujetos, lo que no significa que sean inamovibles ni que los sujetos no tengan alguna responsabilidad, al contrario, es posible la existencia de ciertas restricciones que pueden modificarse. Los dispositivos y estrategias de formación, permiten dar cuenta de los problemas didácticos, caracterizando en primera instancia el objeto de estudio que le compete desde una perspectiva epistemológica y de modo particular desde el punto de vista de la TAD.

CAPÍTULO II
DE LA ORGANIZACIÓN CLÁSICA A LA ORGANIZACIÓN FUNCIONAL. UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA PARA LA PROPORCIONALIDAD

La proporcionalidad es un tema que puede ser organizado con base en diversas situaciones, un buen dominio del conocimiento sobre este tema es fundamental tanto para la vida cotidiana como para su aplicación en diversas disciplinas. La proporcionalidad pone en juego un gran número de saberes aritméticos (fracciones, porcentajes, números decimales, medida, operaciones básicas, razón y proporción) que ayudan a resolver distintas situaciones problemáticas. No obstante su importancia, numerosas investigaciones señalan las dificultades que tanto estudiantes como profesores manifiestan ante situaciones que implican la puesta en práctica del razonamiento proporcional (Ruiz, 2007; Rivas, Godino y Castro, 2012; y Perry, Guacaneme, Andrade y Férnandez, 2003). Tales dificultades, afirman esos estudios, derivan de un bajo nivel de comprensión del “paquete” de conocimientos adheridos a este concepto matemático, así como a la deficiente aplicación de habilidades para utilizar las técnicas y propiedades que le subyacen.

El razonamiento proporcional requiere de un pensamiento que incluye inferencias y predicciones de otros conceptos, aunque no se trata de un conjunto de ideas que se acumulen unas sobre otras, la proporcionalidad es considerada como base fundamental del pensamiento aritmético que permite la construcción del pensamiento algebraico, a decir de Skemp (1976, en Pugalee, 2010) los niveles de razonamiento proporcional se vuelven más complejos y requieren la comprensión de diferentes conceptos.

La elaboración de análisis epistemológicos o la construcción de modelos epistemológicos de referencia (MER), permiten identificar la naturaleza del objeto matemático y reconocer los fenómenos matemáticos y didácticos que éste produce, también se favorece la interpretación de la historia del concepto lo que permite replantear dicho concepto en la actividad matemática y didáctica. Desde la perspectiva de la TAD, todo estudio praxeológico de la proporcionalidad no puede deslindarse de la revisión de modelos epistemológicos ya construidos.

En este sentido, los principales estudios praxeológicos sobre la proporcionalidad corresponden al modelo propuesto por Bosch (1994) y Bolea (2002) quienes revisan la llamada organización clásica de la proporcionalidad desde la Teoría de las Razones y Proporciones y el de García (2005), quien hace una “extensión” del modelo clásico para orientarlo hacia la modelización funcional.[13]

Precisamente, el presente capítulo se propone esa tarea, analizar desde la organización clásica la conceptualización de la proporcionalidad, su interrelación con otros conceptos matemáticos y su transición desde la aritmética hacia el álgebra.

2.1. LA ORGANIZACIÓN CLÁSICA DE LA PROPORCIONALIDAD

De acuerdo con Bosch (1994) los objetos asociados con la proporcionalidad ocuparon un lugar representativo en la cultura matemática escolar, no obstante hasta después de mediados del siglo XX se ubicaron en los niveles de educación primaria y secundaria donde se incluyeron las razones y proporciones para constituir la base fundamental del estudio de la proporcionalidad.

En este primer momento, es en la aritmética donde tal noción encuentra su principal espacio, especialmente en la enseñanza secundaria se estudió la proporcionalidad desde un paradigma centrado en las relaciones funcionales entre dos variables, no obstante esta reducción a la aritmética, autores como Postigo (1954, en Bosch, 1994) y Dalmau (1938, en Bosch, 1994) señalan que existían otros tipos de relaciones entre variables más allá de la proporcionalidad directa e inversa, las relaciones funcionales desde el Álgebra. Por esta razón se podría decir que la

[13] “La modelización matemática […] puede ser vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. […] El cálculo de la velocidad promedio de un viaje particular de un automóvil es un modelo matemático.” (BLOMHØJ, M. 2004, p. 20)

proporcionalidad entre magnitudes constituyó la primera aproximación sistematizada de la funcionalidad.

> Con esta forma particular de relación funcional, la aritmética enseñada edificó todo un edificio –que llamaremos la organización clásica- que se mantuvo estable durante un largo periodo de tiempo: desde el primer tercio del siglo XIX hasta mediados del siglo XX (cuando explota la revolución de las "matemáticas modernas"[14]). Sin embargo los elementos que la componían nacieron de desarrollos anteriores de las matemáticas sabias que se abandonaron a finales del siglo XVIII. (Bosch, 1994, p. 166)

Con la llegada de las matemáticas modernas se cambian los conceptos de razones y proporciones por el de funciones, con ello se dio inicio a una reorganización profunda de la proporcionalidad, principalmente, a) desaparece la terminología de las razones y proporciones; b) se resalta la idea de dependencia funcional, con lo que se pide a los alumnos estudiar diversos tipos de relaciones entre magnitudes para favorecer una idea más amplia de dependencia; c) se introducen las tablas de variación que se convierten en un recurso privilegiado para la resolución de problemas y para la vinculación de la proporcionalidad con la noción de función. (Balderas, Block y Guerra, 2014)

> La organización clásica relativa a los problemas de proporcionalidad es un universo de objetos y prácticas que tiene por emblemas principales las "razones y proporciones", las "magnitudes proporcionales", las técnicas llamadas "regla de tres" (directa, inversa, simple y compuesta) y el inmenso campo de problemas que estas técnicas permitían estudiar (que abarca desde los problemas llamados "de proporcionalidad", hasta sus aplicaciones a cuestiones comerciales, como "reglas de compañías", "intereses", "repartos proporcionales", etc.). (Bosch, 1994, pp. 166-167)

Fundamentalmente, las técnicas que permiten resolver dichos problemas son: el método de reducción a la unidad, el método de las proporciones, el de la regla de tres, el método gráfico y la regla de las causas y efectos. Cabe mencionar que estas técnicas, que serán descritas a lo largo de este apartado, se fundamentan en la Teoría de las Razones y Proporciones o la Teoría de las Magnitudes Proporcionales (Bolea, 2002), en términos praxeológicos podríamos decir que son su discurso tecnológico teórico.

---

[14] La matemática moderna ubicó en primer plano el estudio de estructuras algebraicas abstractas, acentuando los aspectos lógicos sobre los aspectos prácticos, los ejercicios formales en detrimento de los problemas prácticos, produciendo un crecimiento en el estudio de las nociones algebraicas y de la teoría de conjuntos en detrimento de la geometría elemental y la intuición espacial. (Ferrer, 2000)

2.1.1. La noción de razón como base de la proporcionalidad.

Históricamente la razón ha sido definida desde diversas perspectivas, en función del contexto, como representación, como objeto conceptual, lo que coincide con la tradición geométrica griega que incluye formulaciones de razones entre cantidades de la misma magnitud. En esta misma idea Fiol y Fortuny (1990, en Valverde, 2012) señalan que la razón es parte de los números racionales positivos porque toda razón entre magnitudes designa una proporcionalidad entre cantidades que poseen la misma magnitud. Esta postura, al igual que la anterior se inscribe en el contexto geométrico.

> Si bien desde hace ya mucho tiempo la razón entre dos cantidades (a, b) y el número que la expresa (a/b) tienden a confundirse (la justificación de esta fusión se halla en la evolución del conocimiento matemático mismo). Los sabios matemáticos de la antigua Grecia no consideraban números más que a los naturales. Los números que hoy conocemos como los racionales positivos, eran expresados como razones de números enteros (por ejemplo 3/5 era expresado como tres es a cinco). Los números irracionales, como $\sqrt{2}$ fueron construidos varios siglos más tarde. Sin embargo, los sabios griegos fueron capaces de identificar razones de cantidades de magnitud a las que corresponden valores irracionales, como la razón que guarda la circunferencia con el radio (π). En estos casos se comprende que las razones hayan sido muy necesarias. Pero conforme se fueron construyendo nuevos conjuntos numéricos las razones tendieron a perder su razón de ser. (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, p. 71)

A diferencia de estos enfoques, otra perspectiva señala que “la razón es la cuantificación de una relación multiplicativa que se puede calcular dividiendo (o multiplicando) una cantidad por otra” (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012, p. 25 en Valverde, 2012, p. 108). Una definición asociada a la anterior es la de Ceballos (2012) quien señala como razón de dos números enteros al cociente de la división del primero (dividendo) por un segundo (divisor). Un ejemplo de ello es la razón que se establece entre 28 a 7 donde 28 es dividido entre 7 y representado como 28/7= 4 o bien la razón de 5 a 25 es 5/25 = 1/5.

Por su parte Llinares y Sánchez (1988) establecen la razón como una relación que deriva de los significados de las fracciones: parte-todo, cociente, operador y razón. El significado razón alude a la comparación entre dos cantidades de igual o diferente magnitud, se puede decir que no existe de modo natural una unidad o un todo, sin embargo no hay que olvidar que al pertenecer a uno de los significados de las fracciones, representan un par ordenado de números enteros que representan una relación todo-todo o bien parte-parte. Un ejemplo de la primera relación (todo-todo) sería:

La relación entre A y B es de 3/5 o 3:5 y la relación entre B y A es de 5/3 o 5:3.
Un ejemplo de la relación parte-parte se daría en el siguiente ejemplo:

En este caso la relación (razón) entre círculos negros y blancos es de 3/5 o bien 3:5.

Block (2010) señala la importancia de distinguir la razón desde esta perspectiva porque constituye un valioso aprendizaje de las fracciones por ejemplo, cuando el valor de la razón “dos por cada tres” es 2/3 o 0.66 no es comprendido claramente en términos numéricos, pero sí se puede saber que $2 de impuesto por cada $3 es equivalente a $4 de impuesto por cada $6 y que eso es más que $2 de impuesto por cada $10. Con este ejemplo destaca que desconocer el número que expresa la razón no impide trabajar con la misma, es decir el trabajo con razones del tipo, “por cada dos, tres o dos para cada tres” constituye un antecedente importante para comprender las fracciones del tipo “2/3 de”.

A diferencia de Llinares y Sánchez (1988), Godino, Batanero y Font (2003) afirman que la razón no siempre es sinónimo de fracción ya que las fracciones pueden ser cualquier par ordenado de números enteros cuyo segundo componente es diferente a cero, mientras que la razón constituye un par ordenado de cantidades de magnitudes que se expresan a través de un número real y una unidad de medida. De ahí que señale explícitamente una serie de diferencias entre razón y fracción:

-Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como “dos de tres partes”, lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 jamones/145 euros no es una fracción.

- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.

- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7, o $4 \Rightarrow 7$.

- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).

- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número p, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$).

-Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una “suma” de razones del siguiente modo. 2:5+3:7 = 5:12. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones. (Godino, et-al, p. 420-421)

Ahora bien, en la escuela es común que la razón represente una división indicada, un cociente exacto o un operador multiplicativo (Perry, et-al, 2003), sin embargo en los tres casos la razón queda identificada con un número y por ello se trabaja desde la perspectiva de números fraccionarios y la proporcionalidad como una igualdad entre fraccionarios. A diferencia de esta postura, la naturaleza de ambos conceptos radica en la estructuración de relaciones: una razón será considerada como una relación entre dos números, dos cantidades o bien un número y una cantidad, por lo que no puede ser simplemente un número aislado.

Otros autores como Busquets (s.f. en Bosch, 1994) conciben la razón como el resultado de la comparación de dos números y distinguen dos clases de razones: por diferencia o aritmética (9 – 6, donde 9 es el antecedente y 6 es el consecuente) y razón por cociente o geométrica (7/3, donde 7 es el antecedente y 3 es el consecuente), para el caso de la primera se busca cuánto excede una cantidad a la otra, restándolas, para el caso de la segunda se busca cuántas veces contiene una a la otra, es decir se dividen.[15]

[15] En este trabajo se hará referencia sólo a la razón y proporción geométrica a las que se denominará simplemente razón y proporción.

Además de la noción de comparación, la novedad residió en insertar los términos antecedente, consecuente y exponente, señalando así que una razón es la que guarda una cantidad respecto a otra, es una relación entre dos cantidades; el número que se desprende de esa relación, por ejemplo 4/8, suele llamarse el valor de la razón; antiguamente se llamaba el exponente de la razón (Dalmau, 1938, en Bosch, 1994). Así pues, para representar una razón se podía escribir de ambas formas:

6:3 = 2, o bien 6/3

Los dos puntos, que significan "es a", se mantuvieron en los manuales de aritmética hasta principios del siglo XX, ante la consideración de que la razón alude a la razón de dos números y no a la de dos magnitudes. Un ejemplo derivado de esta conceptualización surge en las situaciones del tipo: *Si las edades de Sandra y Perla son 6 y 3 años, entonces la razón entre sus edades es 6/3.*

Si bien este autor hace representaciones de la razón como 6/3, continúa con la diferencia entre razón y número fraccionario ya que la noción de razón es vista como la de exponente de una razón, esta identificación entre una razón y su exponente permite entender que las razones guardan un comportamiento numérico en tanto se multiplican y dividen por números y también se multiplican y dividen entre ellas (Bosch, 1994). Un ejemplo de la igualdad entre razones se muestra cuando dan iguales exponentes (resultado o razón), en el caso siguiente el 5 es el exponente en cada una de las razones e indica las veces que el consecuente está contenido en el antecedente.

25 : 5; 60 : 12; 400 : 80; 5000 : 1000; etc.

Como se observa, las razones tienen un comportamiento similar al de número sin serlo como tal, es decir se multiplican y dividen por números y también se multiplican y dividen entre ellas.

> -Una razón se multiplica por un número, multiplicando por este número su antecedente o partiendo por el mismo su consecuente (…).
>
> -Una razón se divide por un número, partiendo por este número su antecedente o multiplicando por este número su consecuente (…).

> Una razón no altera, multiplicando o partiendo ambos términos por un mismo número (…).
>
> -Para multiplicar una razón por otra, se multiplican entre sí los antecedentes y su producto se divide por el producto de los consecuentes.
>
> -Para dividir una razón por otra, se multiplica el antecedente de la razón dividiendo por el consecuente de la razón, divisor; el consecuente de la razón dividiendo por el antecedente de la razón divisor y se divide el primer producto por el segundo (…). (Dalmau, 1938, en Bosch, 1994, p 186)

Una razón entonces es aquello que se puede manipular donde, dados dos números, existe un objeto denominado razón de estos números que permite establecer por ejemplo relaciones como 5 : 6, cuyo funcionamiento con otra razón se podría establecer como (5 : 6) X (7 : 8) = 35 : 48.

Así, "… las razones se situarán […] en un nivel más elevado dentro de la jerarquía de los objetos matemáticos: tienen que ver con los números –de los que heredan las propiedades y a los que permanecen vinculadas a través de su exponente- pero no se van a manipular exactamente como si fueran números." (Bosch, 1994, p. 187), por ejemplo, dada la razón 2 : 3/5 no puede manipularse como una división donde el entero 2 se divide entre la fracción 3/5 y se establece la multiplicación "en cruz" (2X5)/3 = 10/3, en este ejemplo Dalmau (1938, en Bosch, 1994) señala a la razón como algo propio de una razón compuesta, como una transformación distinta a lo que indicaría el manejo numérico, siguiendo el mismo ejemplo en la razón 2 : 3/5, se puede hacer una transformación 2 : 3/5 = 2X5 : 3X5/5 = 10 : 3 y que si bien parece un resultado equivalente su significado es diferente, en tanto que la primera alude a una división de fracciones y la segunda a una serie de razones.

Por otro lado, la razón es considerada como una relación de equivalencia entre un conjunto de pares ordenados donde aparece una función de un par ordenado (7 a 3 = 7/3), para justificarla se hace referencia al estatuto lógico de razón que describe Freudenthal (1983) cuando señala que "el significado propio de la razón es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón, ser capaz de decir con sentido *a* es a *b* como *c* es a *d*, sin anticipar que *a* es a *b*, puede reducirse a un número o valor de magnitud a/b de modo que entonces ya que *c* es a *d* es lo mismo a/b=c/d" (p.3). Esta definición se formaliza al establecer la relación de equivalencia entre dos pares (a, b) y (c, d), lo que alude primero a una igualdad de las razones o relación de equivalencia de *a* a *b* y de *c* a *d*, esta relación vista desde la matematización clásica corresponde a la noción de proporción, por lo que no se podría formalizar la razón sin definir la proporción de donde deriva. (Bosch, 1994)

En función de lo anterior se podría decir que en la organización clásica la noción de razón de magnitudes y de números aparece como noción primitiva otorgada culturalmente, esto es, aunque no exista una necesidad matemática para la introducción de la noción de razón en el texto de enseñanza clásico, existe una legitimidad cultural que lo justifica en la escuela.

2.1.2. La noción de proporción.

El término proporción proviene del latín *proportionem* que constituye una contracción de *proportione*, y significa "según la parte". En la Didáctica de las Matemáticas se define como igualdad de dos razones, a decir de Fernández (2001), cuando dos razones son equivalentes se pueden igualar los cocientes indicados por éstas y obtener una relación entre las medidas de cuatro o más cantidades que se vuelven homogéneas dos a dos, así si a/b = x y c/d = x entonces la igualdad puede expresarse como a/b = c/d, lo que indica una proporción, cuyos términos extremos y medios quedan representados como a:b :: c:d, que se lee "*a* es a *b* como *c* es a *d*". En este caso aparece una propiedad de la proporción, la suma de antecedentes dividida por la suma de consecuentes es igual a las razones de tal proporción.

Fiol y Fortuny (1990, en Valverde, 2012) definen la proporción mediante la razón entre dos cantidades, donde la proporción, significa el cociente de las medidas de tales cantidades, la razón y la proporción se toman como sinónimos ya que, señalan, la proporción de dos magnitudes es la razón entre la mayor y la menor. Por su parte Godino (2004) afirma que cuando en una situación intervienen dos pares de números que se corresponden se establece una proporción que representa un caso particular de la proporcionalidad directa, por ejemplo si a 21 le corresponde 6 y a 28 le corresponde 8, la representación queda 6 = 21(2/7) y 8 = 28(2/7), 21----6 y 28----8 forman una proporción que se aprecia como una igualdad de razones.

A decir de Postigo (1958), Busquets (s.f) y Dalmau (1938) (en Bosch, 1994) la formulación clásica de proporción es la igualdad de dos razones geométricas, llamada también equicociente, igualdad fraccionaria o proporción. Desde esta idea, cuatro números colocados en un orden definido forman una proporción siempre que tengan la propiedad de que la razón de los dos primeros sea igual a la de los dos últimos. Dalmau (1938) distingue dos formas de escribir una proporción en las que la igualdad es una condición para formarse:

a) Proporción discreta, es cuando se escribe primero una razón, luego los cuatro puntos y después otra razón igual a la primera. Se caracteriza porque sus cuatro términos son diferentes o sus medios no son iguales. Por ejemplo: a/b=c/d o bien 500Km/50Km = 200Km/20Km. Los cuatro elementos se denominan cuarta proporcional y cada uno de sus términos representa una cuarta proporcional de los otros tres.
b) Proporción continua, resulta cuando se escribe un número por primer término, por segundo y tercero un múltiplo o submúltiplo del primero y por cuarto término el mismo múltiplo o submúltiplo del tercero a/b = b/c. En este caso los términos medios o términos extremos son iguales 1/3 = 3/9, aquí se denomina tercera proporcional a cada uno de los términos que no son iguales y media proporcional o geométrica al término que se repite. (en Bosch, 1994)

Desde el paradigma clásico, la igualdad entre 1/3 y 3/9 representó la igualdad de los exponentes de las razones en juego, posteriormente cuando se distinguió una razón de su exponente, se sustituye la relación de la proporción a:b :: c:d por la de la igualdad numérica b/a = d/c y ambas representaciones fueron consideradas equivalentes (Bosch, 1994). De tal equivalencia se deriva la Propiedad fundamental de las proporciones, la igualdad resultante al multiplicar los términos extremos entre sí y entre los términos medios (a/b = c/d si y solo si *ad* = *bc*).

De esta propiedad se deriva que, si el producto de los medios es igual al producto de los extremos, es posible calcular cualquier término de una proporción al conocer el valor de los otros tres. Una segunda propiedad afirma que en toda proporción la suma o la diferencia de antecedentes es la suma o diferencia de consecuentes, como un antecedente es a su consecuente, esto es, a/b = c/d = (a +/- c)/(b +/- d), en términos numéricos 6/12 = 2/4 se tiene(6+2)/(12+4) = 8/16 o bien 6/12 = 2/4 = (6-2)/(12-4) = 4/8. De aquí se desprenden también los corolarios de las proporciones, el primer corolario señala que en toda proporción, un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo, es decir a/b = c/d, a = (b*c)/d; el segundo corolario afirma que en toda proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio, o sea a/b=c/d, b=(a*d)c. Estas propiedades que Dalmau (1938) muestra, amplían el número de operaciones con las cuales manipular los términos de una proporción.

> La igualdad a/b = c/d es ciertamente un modelo escrito que puede provenir del modelo discursivo inicial "a es a b como c es a d"; pero este modelo proporcional fraccionario es semióticamente distinto de la escritura a : b :: c : d (que llamaremos modelo proporcional clásico). […] Con la desaparición tardía del paradigma clásico, […] se acabará llamando proporción a la igualdad de fracciones, es decir a lo que clásicamente no era más que una condición para la formación de una proporción. […] El modelo clásico podrá ser dominante y el fraccionario auxiliar (Bosch, 1994, p. 200).

En esta misma perspectiva Dalmau (1938) afirma que cuatro números que son colocados en un orden determinado forman una proporción siempre y cuando verifiquen que la razón de los dos primeros sea igual a la de los dos últimos. Así pues, una proporción se conforma por cuatro términos a partir de dos razones donde cada una tiene su antecedente y su consecuente, el primero y el tercer término representan los antecedentes de la proporción mientras que los otros dos representan los consecuentes.

De esta manera se establece la escritura clásica de la proporción, diferente a la forma fraccionaria en la que terminará transformándose, la nomenclatura lineal a:b::c:d se mantendrá pero dejará de ser transparente cuando se imponga el modelo fraccionario a/b = c/d, lo que permitirá posteriormente a Dalmau (1938), definir la regla de tres como "la que nos enseña a resolver los problemas que dependen de una o más proporciones" (en Bosch, 1994, p. 170), es la existencia supuesta de la noción de proporción.

2.1.3. La noción de proporcionalidad.

La noción de proporcionalidad se presenta en diversas situaciones, se vincula con nociones matemáticas como las conversiones de unidades, figuras a escala, semejanza, trigonometría, funciones, porcentajes y razón y la relación que guardan estas nociones sirve para identificar las relaciones que competen tanto a la proporcionalidad como a otras nociones involucradas. (Balderas, Block y Guerra, 2011)

Sin embargo, es importante distinguir entre proporcionalidad y razonamiento proporcional, "el razonamiento proporcional […] es un prerrequisito para comprender contextos y aplicaciones basados en la proporcionalidad". (Lamon, 2005, p. 3)

Por su parte, la proporcionalidad desempeña un rol en las aplicaciones dominadas por los principios físicos –temas tales como la ventaja mecánica, la fuerza, la óptica, la acústica, sólo por mencionar algunos, puede decirse que implica una relación entre dos variables o dos secuencias de números que se relacionan unas con otras y cualquier combinación lineal de los valores de una corresponde a la misma combinación lineal de los valores que corresponden a la otra (Géron, Stegen y Daro, 2005). En este sentido la proporcionalidad sería una propiedad que las magnitudes tienen cuando su cociente (directa) o su producto (inversa) es constante. En la postura de Bkouche (s.f.), la proporcionalidad supone la noción de relación, ya que está definida como una relación de igualdad, una correspondencia proporcional entre dos tipos de cantidad de A y B, es una correspondencia que asocia cada valor "a" con un tipo de cantidad A y cada valor "b" con un tipo de cantidad B.

Se puede afirmar entonces que, cuando en una relación de magnitudes aparece un número que manifiesta una correspondencia proporcional, alude al factor o constante de proporcionalidad, por ejemplo la relación entre precio por litro de agua y cantidad de litros utilizados son cantidades proporcionales. En el caso siguiente el factor constante de proporcionalidad es 8 pesos.

Litros de agua	1	2	3	4
Precio en pesos	8	16	24	32

Tabla 1. Factor constante de proporcionalidad (Elaboración Propia).

El factor constante de proporcionalidad no siempre guarda las mismas relaciones entre magnitudes, Block, et-al., (2010) distingue entre esas relaciones en situaciones como las siguientes:

Caso 1	Tiempo	3 h	6 h	9 h
X 70 Km/h	Distancia	210 Km	420 Km	630 Km

Tabla 2. Magnitudes de distinta naturaleza. (Block, et-al., 2010, p. 33)

En la situación anterior se aprecia una relación entre dos magnitudes de distinta naturaleza, a cada número de horas le corresponde una distancia y el factor constante de proporcionalidad 70 Km/h constituye un número con unidad, es decir con dimensión, ya que al tener un movimiento uniforme, la unidad kilómetros por hora (70 Km/h) se convierte en la medida de la velocidad como tercera magnitud.

En el caso 2 la relación entre dos magnitudes es de la misma naturaleza, longitudes, aunque las unidades son distintas (millas y kilómetros), existe dimensión y en tal caso el factor de proporcionalidad se llama factor de conversión.

Caso 2	Kilómetros	1	15	12
X 0.62 millas/Km.	Millas	0.62	9.3	7.44

Tabla 3. Magnitudes de la misma naturaleza y unidades distintas. (Block, et-al., 2010, p. 33)

En el caso 3 la relación entre dos magnitudes es de la misma naturaleza y además las unidades son iguales, son centímetros. El factor de proporcionalidad no tiene dimensión, la relación se manifiesta al aumentar cuatro veces el tamaño original. En este último caso es posible observar que el factor de proporcionalidad permite la expresión de las relaciones enunciadas con una fórmula, lo que mostraría cierta evolución de la organización clásica, por ejemplo las medidas de la figura B=4x medidas de la figura A.

Caso 3 X 4	Figura A	4 cm	5 cm	7 cm
	Figura B	16 cm	20 cm	28 cm

Tabla 4. Magnitudes de la misma naturaleza y unidades iguales. (Block, et-al., 2010, p. 33)

Ahora bien, la relación que se establece entre las magnitudes permite ubicar cada situación en determinado campo conceptual de la proporcionalidad, de ahí que se puedan identificar situaciones donde las magnitudes se vinculan de modo proporcional ya sea de modo directo, inverso o compuesto.

La situación más común, de proporcionalidad directa, se establece cuando en una relación de dos magnitudes, ambas se multiplican o dividen por el mismo número. Sin embargo Oller (2012) desarrolla diversas caracterizaciones para presentar el manejo de magnitudes directamente proporcionales:

1. Por razones internas.

Se presenta si la razón entre dos cantidades de una magnitud es la misma que la razón entre las dos cantidades de la otra magnitud.

2. Por conservación de un cociente (o por razones externas).

Dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre pares de cantidades correspondientes permanece constante.

3. Multiplicativa.

Dos magnitudes serán directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una cantidad de la primera por dos, tres, cuatro, etc., la segunda magnitud también se multiplique o divida por dos, tres, cuatro, etc. Ocasionalmente esta caracterización se presenta doblando cantidades o "partiéndolas" a la mitad.

4. Por aumentos o disminuciones.

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye en la misma proporción. Esta caracterización ha sido señalada también como incorrecta ya que no siempre las magnitudes que se relacionan entre si son de proporcionalidad.

5. Caracterización explícitamente funcional:

Dos magnitudes son directamente proporcionales si están relacionadas a través de una función lineal $y=kx$ (o análoga).

6. Implícitamente funcional:

No hay una referencia explícita de funciones o aplicaciones, pero sus enunciados guardan un fuerte componente funcional. Existen dos versiones:

a) Dos magnitudes son directamente proporcionales si están relacionadas mediante una función $y=f(x)$ tal que $f(ax)=af(x)$.
b) Dos magnitudes son directamente proporcionales si se corresponden en igualdad y en suma, si están relacionadas mediante una función: $y=f(x)$ tal que $f(a+b)=f(a)+f(b)$.

Para el caso de la proporcionalidad directa, la constante de proporcionalidad cuantifica la regularidad de las cantidades involucradas, por ejemplo la expresión *3 páginas se leen en 6 minutos*, indica una regularidad entre el número de páginas que se leen y el tiempo. Así, la constante de proporcionalidad es 6/3, minutos/número de páginas, lo que indica que cada página se lee en 6/3 = 2 minutos.

Otro ejemplo asociado a este tipo de magnitudes se expresa de la siguiente manera: *Si se mezclan 3 vasos de jugo por cada 12 cucharadas de azúcar y se tienen 5 vasos de jugo, ¿con cuántas cucharadas de azúcar tendrá que mezclarse?.* El proceso de resolución implica por una parte identificar si existe la condición de regularidad, luego verificar si existe la constante de proporcionalidad o sea 1 vaso de jugo se mezcla con 12/3 de cucharadas de azúcar o al revés 1 cucharada de azúcar se mezcla con 3/12 de jugo, con esto se define si son magnitudes proporcionales. Luego, es necesario seleccionar la razón que pueda resolver el problema, siendo la más viable 12/3 porque señala la cantidad de azúcar por 1 vaso de jugo y se conoce también que hay 5 vasos. Así la cantidad desconocida se encontraría multiplicando 12/3 por 5 = 60/3 = 20 que serían las cucharadas de azúcar para los 5 vasos de jugo.

Al igual que la proporcionalidad directa, la inversa suele manejarse de modo común señalando que dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número. En el mismo sentido Oller (2012) señala que es muy frecuente que las caracterizaciones de una y otra proporcionalidad se encuentren emparejadas de la misma manera, así para la proporcionalidad inversa se encuentran las siguientes:

1. Por razones internas.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando la razón entre dos cantidades de una de ellas es la razón inversa de la razón entre las dos cantidades que corresponden a la otra.

2. Por conservación de un producto.

Dos magnitudes serán inversamente proporcionales si los productos de cantidades correspondientes a las dos magnitudes son constantes.

3. Multiplicativa.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una cantidad de la primera magnitud por números enteros la cantidad de la segunda magnitud queda dividida o multiplicada por tales números.

4. Por aumentos y disminuciones.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando aumenta o disminuye una de ellas y la otra lo hace también en la misma proporción.

5. Explícitamente funcional.

Dos magnitudes serán inversamente proporcionales si están relacionadas a través de una función $y = k/x$.

6. Implícitamente funcional.

Se aplica si al multiplicar una cantidad de la primera magnitud por un número, la cantidad correspondiente a la segunda cantidad queda dividida por el mismo número. Están relacionadas mediante una función del tipo $y=f(x)$ tal que $f(ax)=f(x)/a$.

En este tipo de magnitudes, la constante de proporcionalidad es una cantidad constante, sin posibilidades de modificarse e independiente de la condición de regularidad, por ejemplo: *3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo*. La regularidad sugiere que cada hombre trabaja el mismo número de días para la elaboración del trabajo, la constante de proporcionalidad será el número de días que se emplea para la realización del trabajo.

Otro ejemplo sería la siguiente: *Para llenar un depósito de agua 3 llaves tardan 12 horas, si se abren 5 llaves ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el depósito?*. El problema tiene la condición de regularidad, todas las llaves vierten la misma cantidad de agua por hora, también existe una constante de proporcionalidad, la capacidad del depósito no varía y es la misma condición para ambas situaciones (3 llaves y 5 llaves). Al no variar la cantidad del depósito se identifica como proporcionalidad inversa en la que se busca la cantidad desconocida a través del valor unitario. Así, una sola llave tardará 12 X 3 = 36 horas y, abriendo las 5 llaves se tardará 36/5=7.2 horas.

2.1.4. Implicaciones de la Organización Clásica.

Desde la perspectiva de Bosch (1994), la aritmética ha representado el entorno primordial de la proporcionalidad al plantear la relación funcional entre dos variables, sin embargo, afirma, este reduccionismo llevó en un momento dado a que Postigo (1954, en Bosch, 1994) ampliara esta visión al considerar que las cantidades variables dependientes entre sí, pueden relacionarse de formas desiguales lo que conduciría necesariamente a una diversidad de sistemas, entre las que se encuentran los sistemas directamente proporcionales y los inversamente proporcionales o recíprocamente proporcionales.

Por lo general, en los problemas de proporcionalidad se parte de sistemas con dos magnitudes que aparentemente son proporcionales, por ejemplo: cantidad de mercancía y precio, cantidad de trabajo y número de obreros, de modo tal que la noción de proporcionalidad se vincula con esos sistemas que, para la organización clásica, representan el primer modelo de la relación de proporcionalidad. Ante esta perspectiva, la existencia de la proporcionalidad se basa en el hecho de que la relación entre magnitudes cumpla con algunas condiciones para establecer su proporcionalidad. Siguiendo esta idea, Comin (2000, en García, 2005) propone tres tipos de razones para justificar la proporcionalidad del sistema:

- *Una ley física.* El sistema puede inducir la ley, un ejemplo es el sistema formado por el número de hojas de papel en un paquete y su grosor, en este caso aparecen restricciones del propio sistema, que las hojas sean siempre del mismo tipo. Así aparece la ley física al establecer que el grosor de *n* hojas de papel es *n* veces el grosor de una hoja.

- *Necesidad matemática o lógica*. Un ejemplo, los alumnos deberán construir un rompecabezas ampliado tomando en cuenta que un segmento de 4 centímetros del rompecabezas original medirá ahora 7 centímetros, la necesidad lógica aplica en que las piezas del rompecabezas deben encajar perfectamente, con ello se justificaría la relación del sistema.

- *Convención social.* Se habla aquí de una acción del entorno sobre el sistema mediante una convención social, lo que se podría modificar si existiera una variante a la relación entre magnitudes algo como “compre tres y pague dos”.

A decir de Bolea (2002), en un problema de proporcionalidad simple se identifican cuatro cantidades *a, b, c, x*, las dos primeras se asocian a una magnitud *M* mientras que las segundas a una magnitud *M’*, con la correspondencia entre una y otra que vincula *a* con *c* y *b* con *x*, de las cuales esta última resulta desconocida[16]. La organización clásica propone para la resolución de dicha problemática un modelo esquemático que representa la relación entre ambas magnitudes en función de las cantidades a, b, c y la x. Tal relación pudiera ser directa o inversa lo que se traduciría en una ecuación proporcional.

En la proporcionalidad directa, se podría decir que a/b = c/x. En el caso de la proporcionalidad inversa se tendría a/b = x/c. En todos los casos anteriores, la técnica para resolver la ecuación proporcional se justifica con el sistema técnico-tecnológico de la Teoría de las Razones y Proporciones donde se expresan las siguientes reglas:

a) Si x constituye un extremo, entonces se multiplican los medios y se divide por el otro extremo, es decir x = , este caso resulta en una situación directa.

b) Si x es un medio, entonces se multiplican los extremos y se divide entre el otro medio, x =, donde se tiene una situación inversa.

Esta técnica resulta eficiente para resolver los problemas de proporcionalidad simple característicos de la organización clásica, no obstante, sus limitaciones se encuentran en el nivel tecnológico-teórico. En la primera situación la Teoría de las Razones y Proporciones se utiliza para particularizar un tipo de relación entre magnitudes, pero con nuevas herramientas algebraicas y funcionales se podría trabajar este mismo tipo de problemas en otros ámbitos: economía, estadística, ingeniería, medicina, geología, química y física, entre otros. En la segunda situación, el discurso que justifica la regla de tres se basa en evidencias culturales asociadas con la manipulación de magnitudes, lo que no permite proponer una tecnología con posibilidades de explicar las variaciones técnicas de la regla de tres inversa y compuesta. Sin esta tecnología, el uso de esas técnicas en la práctica, limitan a los problemas de proporcionalidad inversa y compuesta a problemas de

[16] Esta situación se corresponde con el campo conceptual de las estructuras multiplicativas en donde todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los que es necesaria una multiplicación, una división o bien la combinación de ambas. Diversos conceptos matemáticos se encuentran involucrados en las situaciones derivadas de las estructuras multiplicativas, entre éstos están el de función lineal, no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, número racional, multiplicación y división. (Vergnaud, 1990)

proporcionalidad simple entre una magnitud y la inversa de otra o entre una magnitud y el producto de otras. (Bolea, 2002)

2.1.5. Los sistemas proporcionales.

Los problemas de proporcionalidad derivados de la aritmética clásica pueden describirse de la siguiente manera: "Consideremos un sistema caracterizado por dos variables reales (u, v) tales que v = *f* (u), donde *f* es una función lineal de R en R. Se supone que *f* viene determinada por un par de valores (a, c) con c = *f* (a). Dado un valor b de la variable u, se trata de determinar el valor correspondiente de la variable v (es decir de *f* (b))". (Bosch, 1994, p. 211)

Se podría decir entonces que los sistemas proporcionales se caracterizan por dos variables que se definen por uno de sus estados (a, c) y se trata de determinar el otro estado (b, x) donde se conoce el valor de b. Este tipo de sistemas se denominan "directamente proporcionales" de ellos se desprenden los problemas de proporcionalidad simple y directa, mientras que la proporcionalidad inversa se caracteriza mediante una función "hiperbólica" donde *f* (u) = k/u para cierta constante k ≠ 0, se hace referencia a los sistemas inversamente proporcionales. Son estos tipos de problemas los que justifica la Teoría de las Razones y Proporciones, también donde las ecuaciones proporcionales fungen como modelos de estos sistemas que permiten la producción de conocimientos sobre los sistemas en la búsqueda de *x.*

Desde otra perspectiva Busquets (s.f., en Bosch, 1994), afirma que un sistema proporcional es un sistema de dos variables modelizable por una proporción, lo que indica que dos magnitudes variables que se relacionan entre sí de modo tal que una de ellas dependa de la otra serán proporcionales, es decir si entre dos valores de la primera y los correspondientes con la segunda se establece una proporción. Tales criterios son los que definen si un sistema es proporcional o no y se pueden distinguir diversos tipos de tareas (T) que aluden a una relación de proporcionalidad:

a) Tareas del valor faltante.

Son situaciones que se resuelven a través de una multiplicación o una división, se identifican porque se conocen tres términos y se desconoce uno (Block, 2010). Una tarea típica del valor faltante es, *si se pagan $18 pesos por 2 kilos de naranja, ¿cuánto se pagará por 5 kilos?*. En esta tarea se plantea una relación de dos magnitudes proporcionales que pueden representarse de la siguiente manera:

Peso en Kg.	Costo en pesos
2	18
5	**?**

No se especifica cuánto cuesta 1 kilo de naranja, a este valor se denomina valor unitario en tanto que designa el valor de una magnitud que corresponde a una unidad de la otra magnitud. Cabe señalar que en toda relación entre dos magnitudes existen dos valores unitarios, en el ejemplo enunciado el segundo valor unitario es la cantidad de naranjas que se daría por un peso.

Block (2010) ilustra otros tipos de situaciones que corresponden al valor unitario, por ejemplo cuando el valor unitario no es un número entero y la razón interna sí es entera, un ejemplo: *Si 4 canicas cuestan 3 pesos, ¿cuánto costarán 12 canicas?,* el valor unitario de cada canica es de $0.75, la razón interna sí es un número entero, es decir 12 canicas constituyen el triple de cuatro canicas.

En otros casos la razón interna no es entera, por ejemplo: *Si se dan 4 saltos y se avanzan 6 metros en total, al dar 6 saltos ¿cuántos metros se avanza?*, el valor unitario no es entero, un salto corresponde con 1 ½; la razón interna no es entera, es 4/6, lo que llevaría a un procedimiento multiplicativo para su resolución. Cuestiones como la anterior permiten comprender que el valor unitario y el factor de proporcionalidad son diferentes el valor unitario remite a una relación entre dos cantidades; por ejemplo, 3 cm por cada centímetro: 1 $\Rightarrow$ 3 cm, mientras que el factor de proporcionalidad es un número, jugando el papel de multiplicador: X 3.

b) Comparación de razones y otros tipos de tareas.

Son tareas donde la noción de razón representa el objeto mismo de la pregunta a través de una cualidad (Block, et-al., 2010), por ejemplo cuando se compara el sabor de una limonada o la velocidad de un automóvil. El sabor a limonada no depende exclusivamente de los vasos de jugo, también se relaciona con la cantidad de vasos de agua, es decir hay una relación entre ambas cantidades, que puede plantearse como: *Tres vasos de agua por dos vasos de jugo o cinco vasos de agua por dos de jugo*.

El porcentaje también es propio de algunas tareas de proporcionalidad, calcular el porcentaje de una cantidad determinada equivale a resolver una actividad relacionada con magnitudes directamente proporcionales. Un ejemplo: *En una ciudad hay 25,000 habitantes, el 62% de la población son mujeres, ¿cuántas mujeres son?*, existe aquí una interpretación del porcentaje como razón donde se identifica la identidad entre el total y el 100%.

Otras tareas relacionadas con la proporcionalidad son aquellas donde se aplican de manera sucesiva dos o más factores de proporcionalidad m y n, lo que equivale a aplicar el factor (m x n) (Block, et-al., 2010), ejemplo de este tipo de tareas son las situaciones de escala: la figura Y es una ampliación de la figura X, los lados de la figura Y miden el doble de los lados de la figura X mientras que los lados de la figura Z miden el triple de los lados de la figura B.

La proporcionalidad múltiple también constituye un tipo de problemas de este campo y se caracterizan porque una magnitud es proporcional a otras dos o más, Block (2010) lo ejemplifica así: *Para calcular la cantidad de agua que se necesitará en una excursión, se estima que por cada tres días y por cada cinco niños se requieren 20 litros, ¿cuántos litros se necesitarán si la excursión tendrá una duración de 15 días y se tendrá una asistencia de 20 niños?*, en esta tarea los litros de agua que se necesitan son proporcionales a dos magnitudes, el número de niños (siendo constante el número de días) y el número de días que dura la excursión (siendo constante el número de niños), en esta situación tanto la magnitud número de niños como número de días no son interdependientes.

Este último ejemplo se ubica en la proporcionalidad compuesta porque se establece la relación entre más de dos magnitudes, que puede ser directa o inversamente proporcional. Una definición más elaborada señala que “Una magnitud es proporcional (de forma compuesta) a otras varias cuando es proporcional (directa o inversamente) a cada una de ellas al permanecer fijas las restantes” (Oller, 2012, p. 86). Un ejemplo de esta tarea sería: *Seis albañiles construyen 36 metros cuadrados en 12 días, ¿cuántos metros cuadrados construirán 8 albañiles en 16 días?*

En el problema anterior se tienen 3 magnitudes: número de albañiles, metros cuadrados construidos y días trabajados. El resultado que se pide son metros cuadrados construidos, por lo que es necesario ver la relación que tienen las otras dos magnitudes respecto a la variable resultado:

-Albañiles y metros construidos: relación directamente proporcional.
-Días y metros construidos: relación directamente proporcional.

En el ejemplo anterior es perceptible que cuando las relaciones entre las magnitudes son de tipo directo, la razón de las cantidades de la primera magnitud multiplicada por la razón de las cantidades de la segunda magnitud resultará igual a la razón de las dos cantidades de la tercera magnitud.

Para describir los sistemas proporcionales propios de la organización clásica, Bosch (1994) se apoya en el texto *Magnitudes proporcionales* de Dalmau (1938), en el que se hace una clara referencia a la familiaridad cultural de los sistemas proporcionales al señalar que las magnitudes son directamente proporcionales cuando una de ellas (2, 3, 4, 20, etc.), se hace mayor o menor y la otra también queda (como 2, 3, 4, 20, etc.) “n” veces mayor o menor, a decir de la autora, derivado de este planteamiento se desprenden varios ejemplos estereotipados sobre la relación entre dos magnitudes como: peso y valor de un producto, distancia recorrida por un automóvil a una velocidad constante y el tiempo recorrido, el trabajo realizado por obreros, aparentemente con igualdad de habilidad, y el número de obreros, entre otros.

Los ejemplos anteriores dan cuenta de una evidencia cultural, en tanto que, si se compra una cantidad de productos, al comprar el doble se pagará también el doble, este hecho muestra el trabajo con magnitudes proporcionales en una realidad que puede ser abordada con ejemplos imprecisos como en el de los obreros ya que la habilidad de los trabajadores no resulta la misma entre todos los sujetos, lo que cuestionaría el realismo de esa “magnitud proporcional” al romper con la relación trabajo realizado por número de obreros. Estos ejemplos en realidad buscan ofrecer sistemas estereotipados, es decir susceptibles de ser mecanizados, con los cuales favorecer la conceptualización de magnitudes proporcionales y mostrar una relación variable entre datos numéricos aunque el estado contextual resulte incongruente.

En otros términos, la aritmética no se plantea el problema de reconocer los sistemas proporcionales, sólo propone unos sistemas que parecen proporcionales aunque revisando su lógica se detecte que son irreales, es decir, la aritmética considera *a priori* todo sistema de relación de magnitudes como sistema proporcional a menos que se posea, de modo probado y conocido, un modelo no-proporcional del mismo.

2.1.6. Las técnicas en la organización clásica.

Siguiendo a Bosch (1994) se puede decir que la organización clásica y sus situaciones de proporcionalidad, no son otra cosa que un conglomerado de objetos y prácticas adyacentes a las razones y proporciones que se constituye por las magnitudes proporcionales, las técnicas y el conjunto de tareas que permiten resolver. Por ello, resulta relevante identificar el tratamiento que la organización clásica da a la proporcionalidad simple destacando las técnicas que propone para la resolución de este tipo de problemas, de igual forma es importante revisar otras técnicas que pudieran no ser parte de la organización clásica pero que posibilitarán identificar los límites teóricos sobre el tratamiento clásico de las situaciones de proporcionalidad, estos aspectos serán abordados a partir del análisis de los sistemas proporcionales, su caracterización, composición y funcionalidad.

2.1.6.1. La regla de tres.

En la organización clásica, la técnica mayormente asociada a los problemas de proporcionalidad es por lo general invariable, un estereotipo claro con una funcionalidad evidente y que no se cuestiona, lo que supone que la técnica puede establecerse en un conjunto de instituciones cuando es aceptable en ese medio institucional, si ocurre lo contrario la institución cuestiona su pertinencia y eventualmente puede rechazarla.

La técnica denominada "regla de tres", propia de la organización clásica, ha sido descrita como:

> Un procedimiento aplicable a la resolución de aquellas cuestiones en que, conociéndose valores simultáneos de dos o más magnitudes directa o inversamente proporcionales, deba averiguarse el valor que a una de ellas corresponda al dar un nuevo valor a la otra u otras. (Busquets, s.f. en Bosch, 1994, p. 225)

Por ello resulta útil para resolver problemas en un sistema aparentemente proporcional donde existen tres números conocidos y se pide encontrar el valor de un cuarto "x" denominado cuarta proporcional. El procedimiento a seguir sería multiplicar el tercer número por el segundo y dividir el resultado por el primero.

No obstante su sencillez "… esta técnica primitiva se volvió no evidente, poco comprensible e incluso inaceptable […] acabó pareciendo puramente mecánica" (Bosch, 1994, p. 225) por esta razón la organización clásica buscó la legitimidad epistemológica de esta técnica promoviendo una ejecución rápida y fiable, capaz de superar dificultades como el manejo de los números fraccionarios, el trabajo con magnitudes inversamente proporcionales y con más de dos magnitudes proporcionales. Al parecer esta legitimidad garantizó su presencia en la matemática escolar.

Siguiendo con el análisis realizado por Bosch (1994) es necesario determinar el tipo de sistema (directo o inverso) para establecer el criterio tecnológico que permitirá decidir cuál regla de tres (directa o inversa) se utilizará en cada caso.

Empero, cuando la organización clásica evoluciona y se modernizan las técnicas de resolución, surgen otras que coexisten y se confrontan con la regla de tres, dichas modificaciones cambian también la resolución de problemas de proporcionalidad porque evolucionan las técnicas de estudio que no existieron en la organización clásica por cuestiones temporales, curriculares o institucionales, impuestas en la enseñanza de cualquier técnica.

Para el caso de las técnicas, el discurso que justificaba la regla de tres se basó sólo en evidencias culturales relacionadas con la manipulación de magnitudes, hecho que no favorecía la inserción de una tecnología pertinente para dar explicación a las variaciones técnicas de la regla de tres inversa y compuesta. “En efecto, el desarrollo de estas técnicas acababa reduciendo, en la práctica, los problemas de proporcionalidad inversa y los de proporcionalidad compuesta a problemas de proporcionalidad simple entre una magnitud y la inversa de otra o entre una magnitud y el producto de otras –magnitudes inversas y magnitudes producto que la tecnología clásica no podía considerar–.” (Bolea, 2002, p. 205)

2.1.6.2. La técnica de reducción a la unidad.

En la organización clásica, para los sistemas de proporcionalidad directa coexistió otra técnica denominada método de reducción a la unidad, la cual también puede ser considerada como la técnica primitiva cuya evolución y desarrollo permitió el origen de la organización clásica. Un ejemplo derivado de esta técnica se encuentra con Leyssenne (1878, en Bosch, 1994) quien plantea un problema similar al siguiente:

Cinco metros de tela cuestan 20 pesos. ¿Cuánto cuestan 3 metros de la misma tela?

Para la resolución, se plantea un proceso que determina el carácter directo o inverso del sistema y señala un modelo tabular clásico asumiendo que los metros y los pesos son directamente proporcionales, de esta manera proporciona los datos sobre líneas horizontales denominando a la incógnita x, de la siguiente manera:

5 metros	20 pesos
3 metros	X pesos

La representación lleva a la solución al comprender que, si 5 metros cuestan 20 pesos, 1 metro costará 5 veces menos o, 3 metros costarán 3 veces menos o 20 X 3/5. Al realizar la operación se tiene que:

$$X = 20 \text{ X } 3/5 = 12 \text{ pesos.}$$

Ahora bien, cuando se afirma “veces menos” o “veces más”, se establece la linealidad de la función y se señala la operación que deberá desarrollarse, así el método de reducción a la unidad se justifica a sí mismo con el simple hecho de llevarse a cabo, es decir, en tanto que los elementos trabajados en la resolución son parte del enunciado del problema, esto los hace objetos culturalmente familiares y sus propiedades no son cuestionadas.

Busquets (s.f., en Bosch, 1994), denominaría procedimiento práctico, al proceso de deducción a través de la comparación de los valores conocidos de una magnitud, si el valor de la incógnita es mayor o menor que el término homogéneo con ella, en el ejemplo anterior el término homogéneo a x es 3m, con lo cual se identifica que se está multiplicando dicho término por el mayor (20 pesos) y dividiéndolo por el menor de los correspondientes a la otra magnitud (5 metros), o procediendo de modo inverso. La tecnología que justifica la técnica de reducción a la unidad no demanda más que el conjunto de conocimientos que la misma cultura ha designado a los sistemas estudiados. No obstante, este soporte tecnológico también se constituye como una restricción para la resolución de otros tipos de problemas, sobre todo en aquellos en los que la reducción a la unidad lleva a razones cuyo exponente carece de un valor numérico susceptible de ser interpretado en términos del sistema, un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente:

Si para elaborar 73 ladrillos se requieren 6 albañiles, para elaborar un ladrillo ¿cuántos albañiles se necesitan?

Como puede apreciarse, esta situación se torna irreal en el sistema planteado y aunque pueda resolverse exitosamente mediante la reducción a la unidad y la regla de tres, el resultado obtenido puede resultar absurdo, lo que significa que el sentido del problema no obedece al tipo de técnica empleada sino a la naturaleza del planteamiento.

De acuerdo con Bosch (1994) en esta situación se aprecia un ejemplo del trabajo institucional sobre una técnica de estudio, retoma diferentes técnicas locales aparentemente adecuadas a las situaciones estudiadas, es decir cumplen con un mecanismo previamente dominado que parecería adecuarse a cualquier tarea de proporcionalidad. Sin embargo, el proceso de fragmentación institucional de las técnicas genera dificultades semánticas y sintácticas, porque las diferentes versiones de una misma técnica suelen provocar obstáculos en la comprensión de las prácticas realizadas en diversas instituciones y la transparencia de estas prácticas, es decir, si una técnica ha sido instaurada en una institución como verdadera, los contextos deberán ajustarse a dichas técnicas para resultar compatibles.

Ahora bien, la permanencia de las organizaciones clásicas de la proporcionalidad en las instituciones educativas se asocia precisamente con el tipo de representaciones que se utilizan y el tipo de cuestiones en las que se inscribe la modelización funcional. Esto significa que, si de lo que se trata es de resolver problemas de proporcionalidad simple, las técnicas justificadas por la Teoría de las Razones y las Proporciones no se comparan con las funcionales en términos de sencillez y facilidad. En este mismo sentido, para Bolea (2002) la organización clásica puede ser eficiente en su ámbito particular, aunque sus limitaciones se ubican en el nivel tecnológico-teórico y afectan tanto la función de descripción de la organización como la de justificación de las técnicas.

Finalmente, debe resaltarse que la organización clásica de la proporcionalidad, en tanto marco centrado en la Teoría de las Razones y las Proporciones, tuvo como principal objetivo permitir la resolución de problemas de proporcionalidad y una transición hacia otro tipo de organización, la modelización funcional.

2.2. LA MODELIZACIÓN FUNCIONAL DE LOS SISTEMAS PROPORCIONALES

Las organizaciones matemáticas (clásica y funcional) determinan los tipos de tareas y las técnicas que se han enseñado en las instituciones escolares, si el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) de Bosch (1994) y Bolea (2002) se inscribe en el enfoque clásico de la proporcionalidad, el de García (2005) se inserta en la reformulación de los procesos de estudio e investigación de las relaciones funcionales entre magnitudes, con lo que establece una actualización al modelo clásico.

La diferencia fundamental en García (2005) es que desarrolla su modelo con la intención de provocar la modelización matemática por parte de los alumnos, el recorrido que propone intenta cubrir tres niveles de algebrización de la proporcionalidad mientras que Bosch (1994) y Bolea (2002) intentan más bien la construcción de un modelo que se circunscribe al concepto de proporcionalidad.

La relación entre dos conjuntos que manejan cantidades, es proporcional si hay un número que al multiplicarlo por cualquier valor de un conjunto, se obtiene el valor que le corresponde en el otro conjunto, por tanto si los valores de un conjunto se representan con la letra x; los del otro conjunto con la letra y; y la constante de proporcionalidad con la letra k, la fórmula de una relación de proporcionalidad es: $y=kx$, lo que indica una función lineal. Un ejemplo de las afirmaciones anteriores se observa en una tarea donde se debe completar una tabla como la siguiente:

X	Y
2.5	7.5
3.3	9.9
4.2	
	17.4
6.8	

La relación entre las magnitudes X y Y (tres veces X) es el valor de Y, la constante de proporcionalidad se encuentra dividiendo Y/X, k = 3, es una relación proporcional directa o una función lineal en tanto que relacionan dos magnitudes directamente proporcionales y se puede expresar como *y=kx* o bien *f(x)=kx.* A decir de Block (et-al, 2010) "…el paso de la proporcionalidad a la función lineal implica un cambio de estatuto de la constante de proporcionalidad […] se debe pasar de la razón […] a la cuantificación de la razón con un número […] y al factor sin dimensión" (p. 108). Esto indica que la transición de una a otra radica en que la proporcionalidad plantea una relación entre dos conjuntos de magnitudes mientras que la función establece una relación entre dos conjuntos de números. Dicha transición implica el dominio de nociones como la variación y dependencia.

Por otra parte, la proporcionalidad alude a tareas en las que existe una relación invariante especial (constante) entre dos magnitudes covariantes, es decir las cantidades de ambas se relacionan y cambian simultáneamente. Tal modelo matemático en las relaciones directamente proporcionales se vincula con la función lineal de la forma *y=kx*. Así, *y* es un múltiplo de *x*. Dos cantidades serán proporcionales cuando varían de modo que mantienen una razón constante *y/x=k*. Dichos modelos tienen una estructura semántica entre función y proporcionalidad, la tarea influye en cómo deben ser consideradas, sin embargo la diferencia entre ambos tiene una fuerte carga tecnológica y teórica. La constante de proporcionalidad cambia en cada contexto y representación de las situaciones proporcionales y no aparece de forma explícita sino que se conforma como un elemento estructural que deberá ser descubierto mediante la interpretación del resto de la información planteada en la situación problemática (Valverde, 2012). Este tipo de modelización se caracteriza por integrar a la proporcionalidad en un marco más amplio, el de las relaciones funcionales entre magnitudes[17] y parte del siguiente esquema:

f (a) = c
f (b) = x
f lineal

Con este modelo la resolución de la situación se encontraría mediante la expresión:

$$x = bc/a$$

Cabe destacar que la modificación en la representación de los sistemas de variación, como la que se presenta, permite la generación de nuevas técnicas de solución que representaron una evolución de las modelizaciones ligadas a las técnicas clásicas.

2.2.1. La algebrización de la relación de proporcionalidad.

Para comprender el proceso que llevó a la proporcionalidad hacia la algebrización García (2005) construye un modelo epistemológico de referencia (MER) para los sistemas de variación entre magnitudes, para ello recupera el trabajo de Bolea, Bosch y Gascón (2001) en el que se describe un proceso de algebrización hipotético de los sistemas proporcionales.

El punto de partida de García (2005) es la descripción de la organización matemática clásica propuesta por Bosch (1994) en la que surge el estudio de las tareas de proporcionalidad estereotipadas, que son directa primero e inversa después. El marco tecnológico-teórico es la Teoría Clásica de las Razones y las Proporciones. Desde esta perspectiva lo proporcional del sistema está dado de antemano sin

[17] Si bien existen diferentes relaciones funcionales entre magnitudes que no se circunscriben a la proporcionalidad y que por ello no son parte de las praxeologías matemáticas en la escuela primaria que es el contexto en el que de algún modo se desarrolla la presente investigación, se considera que su análisis permite una comprensión más amplia de los sistemas proporcionales.

cuestionarse por qué en el marco tecnológico-teórico no hay herramientas para distinguir si un sistema es o no proporcional. Más adelante tal organización matemática (clásica) se amplía con la incorporación de problemas de proporcionalidad compuesta, repartos proporcionales, interés simple, entre otros.

Luego de este análisis, García (2005) examina tres niveles de algebrización de la modelización algebraica y, si bien el primer nivel corresponde con el punto de partida de la modelización, se queda en el universo clásico sólo como una actualización ostensiva con los recursos del álgebra, es decir mediante la noción de ecuación se actualiza la proporcionalidad del modelo clásico.

a) Primer nivel de algebrización.

En este nivel la intención es modelizar los tipos de proporcionalidad a través de ecuaciones, surge entonces la intención de describir la relación entre magnitudes, la evolución de las técnicas "clásicas" (regla de tres y reducción a la unidad) y la tecnología de la organización clásica (Teoría de las Razones y Proporciones). La relación de proporcionalidad deja de caracterizarse por proporciones (como igualdad de razones homogéneas) para expresarse por medio de ecuaciones:

> Dos magnitudes X e Y son directamente proporcionales cuando se puede establecer una correspondencia entre ellas de tal forma que, entre una cantidad cualquiera x de X y su correspondiente y de Y se cumpla la relación y=k*x para un determinado valor constante. (Bolea, 2002, p. 206)

De esta perspectiva emergen el coeficiente de proporcionalidad, la constante de proporcionalidad o el factor de conversión *k*, cuyo valor depende de las unidades con las que se expresa x e y. La proporcionalidad simple inversa se expresa a través de la ecuación $x*y=k$, o bien, $y=k/x=k*x^{-1}$ y, como puede apreciarse, en esta perspectiva se unifican los problemas de proporcionalidad directa e inversa y los de proporcionalidad compuesta. "En el caso de la proporcionalidad compuesta, se dirá que Y es directamente proporcional a X1 , X2 , …, Xi e inversamente proporcional a Xi + 1 , …, Xn. (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, p. 276, en García 2005, p. 196)

La caracterización de la relación a través de una ecuación implica la evolución e integración de las técnicas clásicas (reducción a la unidad, regla de tres directa, inversa y compuesta, etc.). No obstante, en este primer nivel de algebrización no se amplía el tipo de problemas, se continúa con aquellos propios de la organización clásica. Empero, si se dejan de lado las proporciones entre magnitudes y se introducen las ecuaciones entre medidas de cantidades de magnitud, surge una diferencia en el nivel tecnológico-teórico, porque la relación de proporcionalidad entre magnitudes se convierte en relación de proporcionalidad entre variables numéricas que representan medidas de cantidades de magnitud (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, en García, 2005). Es importante organizar la tarea para generar las técnicas clásicas que llevan al primer nivel de algebrización, es decir, no empezar con ecuaciones que miden cantidades, sino iniciar con tareas que lleven a establecer relaciones proporcionales de magnitud para que construyan la ecuación. Este nivel significa entonces una actualización ostensiva de la organización clásica, no solamente la inclusión de un discurso algebraico y los recursos que proporciona.

b) Segundo nivel de algebrización.

En este nivel se integran todas las posibles relaciones proporcionales del primer nivel para inscribirse en un modelo unificado a través de una ecuación o expresión algebraica, en este nivel se consideran todas las relaciones de proporcionalidad como casos particulares de una función *f.* Este modelo se muestra a partir de diversas variables reales, homogénea de grado ± 1 con respecto a cada una de ellas a través de la expresión siguiente (García, 2005, p. 196):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \cdot x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \qquad e_i = \pm 1$$

Donde x_i representa a las cantidades de una magnitud X_i, directas o inversamente proporcionales con las otras cantidades de magnitud Y y *k* representa la constante de proporcionalidad.

Para interpretar la representación anterior y los problemas clásicos de la proporcionalidad, es necesario un cambio en el marco tecnológico-teórico de esta organización matemática, ya que se requiere de una tecnología matemática que, a diferencia de la teoría de las razones y proporciones, justifique los productos y cocientes de magnitudes. La inexistencia de esta tecnología da cuenta de por qué este segundo nivel de algebrización se encuentra ausente en los componentes de la organización matemática escolar (clásica) cuya fundamentación en una teoría cultural de las magnitudes no incluía la mayor parte de los productos ni de los cocientes de magnitudes.

c) Tercer nivel de algebrización.

En un tercer nivel de algebrización que corresponde al momento en que el trabajo matemático “sabio” superó la necesidad de expresar toda relación entre magnitudes mediante proporciones, García (2005) afirma que se puede prescindir de la Teoría de las magnitudes como componente tecnológico y adoptar la Teoría algebraica de funciones reales de variable real, en tanto que es una teoría matemática rigurosa de los números reales sobre medidas de magnitudes continuas involucradas en aquello que se esté estudiando.

Desde esta perspectiva “… la relación de proporcionalidad se establece como una relación muy particular al lado de muchas otras posibles: relaciones cuadráticas, polinómicas, irracionales, etc.” (Bolea, 2002, p. 209), así pues, en este nivel se manifiesta una transformación respecto al trabajo de modelización ya que en lugar de cuestionar si los pares de magnitudes (compuestas) son proporcionales se cuestiona el tipo de relación que se puede dar entre dos magnitudes dadas.

2.2.2. Los sistemas modelizables.

Como se puede observar, este modelo epistemológico representa la extensión de los sistemas modelizables, porque va más allá de los sistemas de proporcionalidad, es decir se extiende a los tipos particulares de relaciones funcionales entre magnitudes expresadas en el tercer nivel de algebrización, algunas de sus aportaciones resultan de interés para este trabajo al dilucidar ciertas técnicas y tecnologías propias al campo de la proporcionalidad. Su trabajo describe la construcción de diferentes modelizaciones de los sistemas lineales[18] y equitativos[19] estructurando cuatro organizaciones matemáticas (García, 2005):

- Una organización discursiva y/o tabular, cercana a la descripción del tipo de variación que caracteriza al sistema, donde la actividad matemática posible resulta muy limitada, esto significa la construcción de algunos nuevos estados a partir de uno o varios conocidos.

- Una organización caracterizada por las relaciones entre estados a través de razones y proporciones homogéneas, pero no cada estado de modo independiente. La actividad matemática se restringe a la determinación de nuevos estados.

- Una tercera organización donde la posibilidad de caracterizar la relación entre estados a través de razones heterogéneas y proporciones favorece su evolución en la caracterización de cada estado por medio de una ecuación. Esta organización permite además calcular nuevos estados, caracterizar la relación (a través de una constante) y plantear ciertas cuestiones en el nivel tecnológico, lo que corresponde al primer nivel de algebrización.

- Una cuarta organización donde los objetos ostensivos se modifican poco respecto a la anterior, sólo se introduce un cambio en el marco teórico para favorecer la interpretación de la relación entre las magnitudes del sistema como una relación funcional entre los conjuntos (numéricos) de las medidas de las cantidades de magnitud relacionadas entre sí, lo que compete al segundo nivel de algebrización.

[18] Los sistemas lineales son considerados también como sistemas proporcionales directos y a la relación que se da entre las cantidades de las dos magnitudes se le denomina relación de proporcionalidad. Pueden ser considerados como aquellos cuyos estados evolucionan en una condición de linealidad. Al corresponderse con situaciones donde la relación entre magnitudes es proporcional directa, los tipos de problemas corresponden al cálculo de la cuarta proporcional. (García, 2005)

[19] La condición de que para todo $k \in$ M , existe un único $k' \in$ M' tal que, si $a_{i+1} = a_i + k$, entonces $a'_{i+1} = a'_i + k'$, "[…] es cierta para cualquier subconjunto de cantidades de la magnitud M, sea éste finito o no, o bien entre conjuntos numéricos formados por medidas de estas cantidades de magnitud, fijadas sendas unidades en *M* y en *M'*." (García, 2005, p. 203). Esto es considerado como una clase de sistemas denominados equitativos.

Desde esta postura, el autor reconstruye como Modelo Epistemológico de Referencia una parte de la hipotética organización matemática regional, partiendo de las condiciones de variación distintas a la equitativa para construir nuevas caracterizaciones de los estados de dichos sistemas desde este marco teórico general.

2.2.3. Las técnicas de la modelización o las modelizaciones "algebroides".

Si bien el método de reducción a la unidad se constituye como una versión elemental de la proporcionalidad clásica propia de la aritmética, en el momento que se pretende la manipulación de proporciones a través de la ecuación, se establece una transición hacia el álgebra elemental donde el modelo principal del sistema de estudio ya no es un discurso como tal, sino una ecuación proporcional, es decir un ostensivo[20] escrito que se manipula para establecer un modelo que lo resuelve. Esta modificación condujo necesariamente a un nuevo tipo de técnicas de modelización denominadas algebroides que, al inicio, parecería que sólo transforman el tipo de representación, sin embargo a esta modificación le circunscriben cambios semióticos e instrumentales que se visualizan en el siguiente ejemplo: *Si 8 paquetes de lápices cuestan 160 pesos, ¿cuánto cuestan 50 paquetes de lápices?.* (Bosch, 1994)

Como se podrá observar, el modelo del problema quedaría representado con la ecuación $8/50 = 160/x$, simplificando se puede obtener una ecuación equivalente $4/25 = 160/x$. Entonces se aplica la propiedad fundamental de las proporciones geométricas, que indica que el valor de x (extremo) es igual al producto de los medios (25 X 160) producto que se divide por el otro extremo (4). Se tiene entonces que $x = 25 \times 160 / 4 = 1000$.

[20] A decir de Bosch (1994), los objetos ostensivos son aquellos con una naturaleza sensible, con una materialidad que puede mostrarse como una realidad perceptible y se caracterizan por ser concretamente manipulables por el sujeto. Un objeto ostensivo puede ser cualquier objeto material como los sonidos, los grafismos y los gestos. En otros términos, los ostensivos son aquellos medios en los que se puede "mostrar" u "ostentar" determinado objeto matemático.

A diferencia de la notación clásica, donde no era evidente el trabajo con los medios y los extremos, la igualdad fraccionaria propia del ejemplo anterior permite observar la posición bidimensional de los números tal y como se aprecia en el modelo tabular y facilita además la transición desde la tabla de números hasta la ecuación proporcional. Dicha transición se representa de la siguiente manera:

	Cantidades principales	Cantidades relativas	
Supuesto	8 paquetes	160 pesos	$\rightarrow$ 8/50 = 160/x
Pregunta	50 paquetes	x pesos	

Tabla 5. De la tabla de números a la ecuación proporcional. (Bosch, 1994)

A decir de esta autora, en esta esquematización se observa que las dos notaciones no son semiótica e instrumentalmente iguales, con la notación fraccionaria se pierde la fuerza de la notación proporcional respecto a la manipulación de razones entre número fraccionarios, para observar dicha situación se modifican los datos de números enteros a números fraccionarios por ejemplo 2/3 de metro y 5 de metro en lugar de 8 y 50 paquetes para cambiar las condiciones de trabajo sobre el modelo proporcional. Esta modificación permite el paso hacia la algebrización y el uso de técnicas algebraicas no consideradas en los sistemas proporcionales clásicos, pero las técnicas algebraicas no se quedaron en la proporcionalidad, sólo fueron una actualización ostensiva.

Para esquematizar la descripción de las técnicas propias de la organización clásica de la proporcionalidad en la resolución de los problemas de proporcionalidad directa e inversa, veamos lo que plantea García (2005). Para él, las técnicas propias de la organización clásica son las siguientes.

- *Modelizaciones verbales (MRU).* Suponen la activación de técnicas discursivas a partir de los datos del sistema, que pueden estar apoyadas o no en registros escritos. La forma estandarizada de realizar este trabajo es conocida como método de reducción a la unidad.
- *Modelización proporcional clásica (MPC).* corresponde a la modelización en términos de razones y proporciones.

- *Modelización algebroide (MA).* Constituye una modernización ostensiva de la modelización proporcional clásica ya que cambia el discurso tecnológico, al plantear un esquema algebraico que justifica la manipulación de los ostensivos pero se mantiene el marco teórico de las razones y las proporciones.

Siguiendo a García (2005) la actualización que desde el modelo funcional se hace a las diferentes formas de modelizar los sistemas de variación entre magnitudes se muestra en la siguiente descripción:

f (a) = c f (b) = x f (u) = ku	$\rightarrow$ Trabajo del modelo	f (a) = ka = c $\Rightarrow$ k = c/a $\Rightarrow$ x = f (b) = kb = (c/a)b

Tabla 6. La Modelización funcional analítica (modernización del MRU). (García, 2005, p. 125)

Esta técnica de modelización no sólo es una evolución de la regla de tres clásica, sino que replantea la tecnología clásica de las magnitudes proporcionales y por ende a los sistemas proporcionales. Es de comprender que estos sistemas se conforman por dos variables reales que se encuentran vinculadas por una función lineal *f.* La técnica determina la expresión analítica de la función *f* a partir de su valor en un punto: *f* (u) = c/a u, donde la constante *k* denominada constante de proporcionalidad puede contener una interpretación cultural del sistema del tipo “precio por unidad de producto”, “distancia recorrida por unidad de tiempo”, etc. (Bosch, 1994)

f (a) = c f (b) = x f (u) = ka	$\rightarrow$ Trabajo del modelo	f (a) = ka = c f (b) = kb = x	a/b = c/x

Tabla 7. La Modelización funcional analítica (modernización de la MPC). (García, 2005, p. 125)

La modelización anterior se aproxima a las modelizaciones con proporciones por lo que se puede hablar de una modernización de la MPC en su tecnología, en tanto que la variación de su trabajo técnico es más económica en virtud de la determinación del coeficiente *k*.

f (a) = c f (b) = x f (au) = af (u)	→ Trabajo del modelo	x = f(b) = b/a f (a) = (b/a)c

Tabla 8. Modelización funcional sintética. (García, 2005, p. 125)

Con estas ejemplificaciones se observa que el MER de las relaciones funcionales, como proceso de modelización explicitado por García (2005), constituye una ampliación y complementación praxeológica de los modelos propuestos por Bosch (1994) y Bolea (2002). De tal ampliación se deriva la caracterización de los distintos tipos de relación entre variaciones de dos magnitudes relacionadas unívocamente, para ello se propusieron diferentes condiciones de variación unívoca entre dos magnitudes, tales como las condiciones de linealidad, de equidad, de diferencias constantes de orden (n), de razones constantes y de linealidad inversa. Ante ello se propone una evolución sobre las organizaciones matemáticas respecto a su nivel de algebrización, es decir, proporcionales, ecuacionales y funcionales.

Tal modelo amplía las modelizaciones proporcionales para caracterizar situaciones donde la relación entre la variación de dos magnitudes es equitativa, además se manifiestan las restricciones y limitaciones del marco tecnológico-teórico de las razones y las proporciones para modelizar otros tipos de relaciones y con ello dar preámbulo a una organización matemática regional sustentada en la Teoría de las Funciones Reales de Variable Real.

CAPÍTULO III
LA PROPORCIONALIDAD EN EL TEXTO DEL SABER DE LA ESCUELA NORMAL

La formación de profesores en las escuelas normales requiere el manejo de praxeologías relacionadas con diversos campos del saber tanto del área disciplinar como del área didáctica, éstas deben explicitarse en las escuelas primarias por los estudiantes ya que "viven" las organizaciones praxeológicas en su rol de profesores, y durante ese proceso de formación se enfrenten a tareas de distinto nivel de complejidad y contextualización.

En el caso de las matemáticas, además del contexto numérico existen otras variables que en conjunto determinan la técnica de resolución de las tareas planteadas, dependiendo del nivel educativo en el que vayan a trabajar los profesores en formación será el tipo de tareas, técnicas y conceptualizaciones que serán estudiadas en la institución, esto incluye el dominio de los principios y propiedades del concepto matemático que será "enseñado" pero también de los enfoques inscritos en los programas educativos y de las orientaciones didácticas para su estudio, no obstante esta determinación del nivel educativo, es necesario tomar en cuenta que el saber sabio (matemático y didáctico) guarda una correlación entre el tema y la cuestión a estudiar. Para la enseñanza de la proporcionalidad, autores como Géron, Segen y Daro (2005), subrayan la relevancia de considerar la fusión entre lo matemático y lo didáctico, es decir entre las Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD) y destacan que dicho objeto constituye un tema fundamental para la vida cotidiana así como para la resolución de tareas en diversas áreas de las matemáticas por lo que se requiere un buen dominio conceptual y procedimental, que si bien puede estar presente en diversas circunstancias no se aprende naturalmente, ya que en el momento de la transición primaria-secundaria es cuando se establece la evolución de la modelización aritmética hacia la modelización funcional.

Las investigaciones sobre cómo enseñar la proporcionalidad han tenido un fuerte desarrollo en los últimos años y actualmente ya no se reduce a enseñar una sola técnica de cálculo (por ejemplo regla de tres), ahora la atención se centra en la relación entre dos magnitudes, en la estructura y las tareas que hacen posible la incorporación de los modelos de resolución. Algunas investigaciones (Boisnard, Houdebine, Julo y Kerboeuf, 1994) señalan que el aprendizaje memorístico de la regla de tres, de la representación del concepto, de los métodos que lo conforman así como de las propiedades que se designan bajo los términos de la proporcionalidad y otro tipo de reglas no es suficiente para un verdadero conocimiento de la proporcionalidad. No obstante, tal afirmación puede ser debatida porque algunas instituciones pueden suponer que precisamente esas técnicas constituyen el "saber a enseñar".

La evolución del concepto de proporcionalidad también se acompaña con los resultados recientes de la investigación en educación matemática. Actualmente, el enfoque basado en la resolución de problemas de los planes de estudio en educación básica y normal ocupa un lugar central en el diseño de situaciones didácticas en México, la idea de aprender matemáticas al resolver problemas tiene el propósito de que los estudiantes se enfrenten a situaciones donde pongan en juego los saberes con los que cuentan para confrontarlos, validarlos y reformularlos hasta llegar a una clara comprensión de las técnicas convencionales y al dominio de los lenguajes y modelos que mejor se adapten al nivel de resolución. Sin embargo, estas orientaciones curriculares pueden resultar incoherentes respecto de las tareas puestas en el "texto del saber" esto es, en los materiales curriculares (programa de estudios y manuales escolares), lo que destaca es la pertinencia de analizar tanto las tareas matemáticas como las tareas didácticas que se proponen en los materiales para la formación del profesorado.

En este análisis que nos proponemos hacer al "saber a enseñar" suponemos de entrada que las nociones puestas en el texto se inclinan hacia una generalidad y, si bien la investigación que aquí se desarrolla lanza la mirada a la formación matemático-didáctica de los estudiantes para profesor de escuela primaria es importante reconocer que las tareas matemáticas a las que se enfrenten pueden generar la necesidad de utilizar técnicas más complejas, propias de un nivel de escolaridad superior al de la primaria, es decir, propias de un contexto algebrizado.

En este apartado se hará referencia a las OM y OD incluidas en los materiales de las instituciones formadoras de docentes, el análisis se desprende de la revisión de los programas oficiales y materiales de estudio de las Escuelas Normales y fue preciso tomar una postura o un MER que permitiera establecer una posición para analizar las tareas, técnicas, tecnologías y posibles teorías inscritas en una institución educativa en particular, dicho modelo lo constituyó, la Organización Clásica de la Proporcionalidad y la Modelización Funcional.

A decir de Barquero, Bosch y Gascón (2013), el profesor se enfrenta a ciertos problemas docentes asociados a la enseñanza de un tema matemático específico, tales problemas se formulan empleando, generalmente sin cuestionarlas, las nociones disponibles de la cultura escolar incluidas en los documentos curriculares, no sólo se toman las nociones sino las ideas dominantes que pertenecen a tal cultura escolar, para ejemplificar esta práctica los autores toman el caso particular de la Modelización Matemática (MM) cuyo problema docente se expresa mediante la pregunta:

-¿Qué tengo que enseñar a mis alumnos respecto a la MM y cómo tengo que enseñarlo?

Una vez que se enseñan los contenidos matemáticos básicos, ¿cómo lograr que las matemáticas se enseñen como una herramienta de modelización, es decir que la enseñanza no se organice siguiendo sólo la lógica de los contenidos explicitados curricularmente sino con base en los problemas que se deben resolver y los proyectos que los estudiantes deberán realizar?. (Barquero, Bosch, Gascón, 2011)

Desde la perspectiva de los autores enunciados, para formular un problema de investigación didáctica desde la TAD, debe cuestionarse la forma de interpretar la MM desde el modelo epistemológico que le subyace, aquel que predomina no sólo en las instituciones escolares sino también en la noosfera[21] y en investigaciones propias de la Investigación Matemática. Sin la intención de dar respuesta a los cuestionamientos enunciados con anterioridad, se puede decir que para el objeto que aquí se estudia, la Organización Clásica de la Proporcionalidad constituye, desde la noosfera, el principal referente que, suponemos, se verá inscrito en el análisis del texto del saber.

La revisión del "saber a enseñar", que se presenta intenta poner en evidencia la "textualización del saber" propia del currículo de las Escuelas Normales y su posible relación con los modelos epistemológicos de la actividad matemática. También se pretende revisar la pertinencia de la lógica institucional respecto del saber matemático y didáctico, ya que "… en la formulación de un problema didáctico cualquiera el didacta siempre utiliza […] una descripción y una interpretación […] del ámbito matemático que está en juego. La TAD ha subrayado desde el principio la necesidad de explicitar dicho modelo y utilizarlo como referencia para analizar los hechos didáctico-matemáticos". (Barquero, Bosch y Gascón, 2013, pp. 4-5)

Desde la perspectiva anterior el MER constituye un instrumento que permite al didacta construir y reconstruir las praxeologías que de modo intra e interinstitucional se busca analizar, así pues, permitirá conocer el modo en que las instituciones educativas comprenden y manipulan el saber matemático y didáctico. El MER analizado en el apartado anterior permite la comprensión de la proporcionalidad en tanto saber matemático. En lo que sigue se hará referencia a los puntos de análisis de la proporcionalidad en la escuela normal, sus conceptualizaciones, nociones, límites, representaciones y determinaciones así como las diferentes tareas planteadas para la formación.

[21] La noosfera constituye una instancia esencial para el funcionamiento didáctico, es el verdadero tamiz por donde opera la interacción entre el sistema de enseñanza y el entorno social. Allí se encuentran todos aquellos que ocupan puestos del funcionamiento didáctico y se enfrentan con los problemas que surgen del encuentro con la sociedad y sus exigencias, en ese lugar se desarrollan los conflictos las negociaciones, las soluciones; representa la esfera donde se piensa el funcionamiento didáctico a través del encuentro entre los representantes del sistema de enseñanza y los representantes de la sociedad. (Chevallard, 1991)

3.1. EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD EN LAS ESCUELAS NORMALES. UN ANÁLISIS ECONÓMICO

Desde la mirada de Barquero, Bosch y Gascón (2013), cuando se construye un problema didáctico desde la TAD, deben tomarse en cuenta tres dimensiones fundamentales: la epistemológica, la económica y la ecológica. El presente apartado hará alusión de modo particular a la dimensión económica inscrita en el currículo de las Escuelas Normales, sin embargo para tal efecto retomará la dimensión epistemológica plasmada sobre todo en la Organización Clásica de la Proporcionalidad.

Desde la TAD, la dimensión económica alude a la relación institucional que se establece con la actividad matemática, es decir el modo de interpretar la modelización matemática en la institución donde se realiza la transposición didáctica, para el caso de nuestro objeto de estudio la atención se centra en las actividades propuestas para la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en las instituciones formadoras de docentes. “Podríamos hablar de la economía de la MM en las instituciones en un sentido similar a como se habla de economía de un organismo (o de un sistema complejo cualquiera), para referirse a la coordinación de los componentes (o subsistemas) que intervienen en su funcionamiento” (Moliner, 2007, p. 1098 en Baquero, et al, 2013, p. 15). A diferencia de la MM esta coordinación se verá determinada por el MER retomado como referencia. Algunas cuestiones que corresponden a la dimensión económica del problema didáctico (Baquero, et al. 2013) y que se ajustarían al objeto matemático de la proporcionalidad serían las siguientes:

-¿Qué ámbito institucional se debe considerar para abordar el problema didáctico de la proporcionalidad: el aula, la escuela, el sistema de enseñanza de las matemáticas, la sociedad o incluso la civilización?.

-¿Cómo se considera, cómo se describe y cómo se interpreta la proporcionalidad en cada una de las instituciones propias de la transposición didáctica? ¿Qué tareas o técnicas derivadas del MER se corresponden actualmente en los sistemas de enseñanza de las Escuelas Normales?.

-¿Qué se entiende en las instituciones didácticas por “enseñanza de la proporcionalidad” o, simplemente, por “llevar a cabo tareas matemáticas y tareas didácticas de proporcionalidad”?.

Tales cuestionamientos tienen relación con los niveles de codeterminación matemático didáctico planteados por Chevallard, mismos que se estructuran desde lo más genérico hasta lo más específico, dicha sucesión de niveles es relativa no sólo a la cuestión o conjunto de cuestiones a estudiar sino también a un momento histórico en particular y a la institución escolar en la que se ubique la investigación (García, 2005). Es por la razón anterior que el siguiente apartado se centra en la revisión de las áreas y los sectores que sobre proporcionalidad se incluyen en el currículo de las Escuelas Normales.

La proporcionalidad, tal como se plantea en los planes de estudio, se articula con el estudio de la noción de función lineal en la escuela secundaria (SEP, 2012b, SEP, 2012c), en la licenciatura en Educación Primaria se incluyen en los dos primeros cursos de estudio para la enseñanza de las matemáticas (Aritmética: su aprendizaje y enseñanza y Álgebra: su aprendizaje y enseñanza). El primero se divide en cuatro unidades y en la última se incluye el desarrollo del razonamiento proporcional, en el segundo se inicia el estudio de la función lineal a través del manejo de patrones numéricos.

El análisis económico se focaliza principalmente en el primer curso en virtud de que ahí se incluyen los aprendizajes aritméticos que el profesor en formación deberá desarrollar en la escuela primaria, sin embargo aunque en menor medida, también se hará alusión al segundo curso, ya que consideramos necesario revisar la transición entre la aritmética y el álgebra que se plantea en estos materiales.

En la Unidad de Aprendizaje IV, del curso *Aritmética: su enseñanza y su aprendizaje*, la desincretización[22] del texto divide al saber en cuatro elementos temáticos (SEP, 2012b); cabe señalar que la estructura del tiempo didáctico asignado a tales temáticas es menor en comparación con otras unidades debido al número de conceptos de estudio, a saber:

- Análisis de los conceptos de razón y proporción a través de diversas situaciones.
- Estudio del concepto de porcentaje y su representación gráfica.
- Resolución de problemas que involucran el cálculo de porcentajes.
- El estudio de la variación proporcional directa.

Dichas temáticas profundizan en el razonamiento proporcional y el papel que éste juega en aspectos como el estudio de la variación y el uso de porcentajes al resolver problemas, con ello se establece la relación entre los elementos matemáticos y pedagógicos en la formación. Esta correlación se observa en la imagen siguiente:

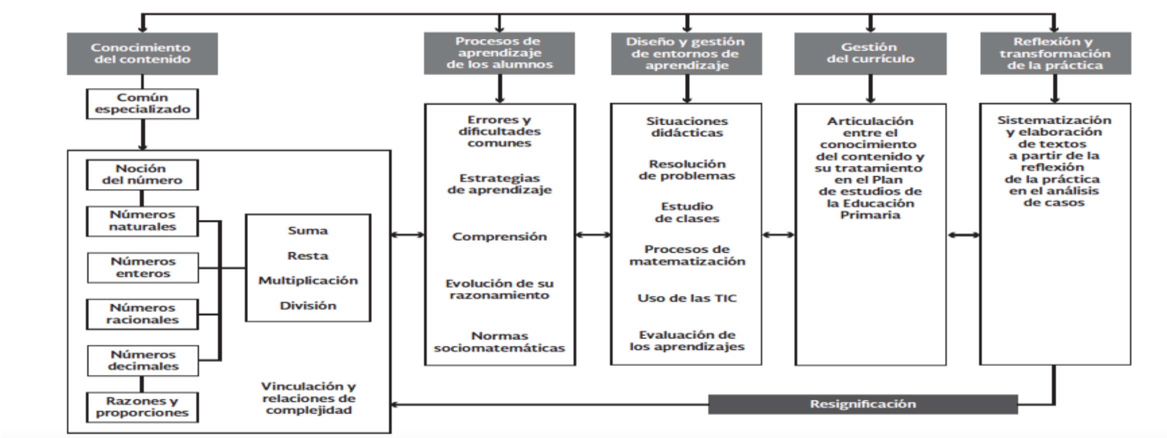


Imagen 1. Componentes de estudio. (SEP, 2012a, p. 9)

[22] La desincretización del saber comprende un proceso que introduce una diferenciación entre lo que pertenece al campo delimitado (nociones matemáticas) y lo que está realmente presente, dicho proceso produce una distinción entre aquello que constituye el objeto de su discurso y aquello que aunque es necesario para la construcción del texto no es su objetivo. Se podría decir que la desincretización es una delimitación de saberes parciales, que se expresan en un discurso autónomo, esta delimitación produce "… la descontextualización del saber, su extracción de la red de problemáticas y de los problemas que le dan sentido completo, la ruptura del juego intersectorial constitutivo del saber en su movimiento de creación y de realización". (Chevallard, 1991, p. 60)

La imagen 1 muestra la vinculación de los saberes aritméticos de la escuela primaria, inicia con la noción de número y termina con el estudio de las razones y proporciones, de modo simultáneo los estudiantes en formación trabajan aspectos asociados a los procesos de aprendizaje de los alumnos, los entornos de aprendizaje, la gestión del currículo y la reflexión sobre la transformación de la práctica, cabe señalar que más que cuestiones didácticas se abordan aspectos generalistas que serán descritos en el análisis de la tareas didácticas.

El programa hace énfasis en la importancia de vincular el saber matemático con los contenidos temáticos de la escuela primaria y en el estudio de las relaciones y cálculos entre los campos numéricos a partir del significado de las fracciones, de su orden y su comparación, de un número decimal y de un porcentaje; un tema en este caso es la escala. Por otra parte se busca que los profesores en formación identifiquen las dificultades propias del manejo de la variación proporcional en la escuela primaria y la forma en que éstas pueden ser atendidas. Las tareas matemáticas y didácticas se estructuran en relación a ciertas competencias generalizadas que son aplicadas no sólo a la unidad sobre el desarrollo del razonamiento proporcional sino al resto de las unidades (SEP, 2012a. p. 50), a saber:

> • Distingue las características de las propuestas teóricas metodológicas para la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria para aplicarlas críticamente en su práctica profesional.
> • Identifica los principales obstáculos que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética y aplica este conocimiento en el diseño de ambientes de aprendizaje.
> • Relaciona los saberes aritméticos formales con los contenidos del eje sentido numérico y pensamiento algebraico del plan y programas de estudio para diseñar ambientes de aprendizaje.
> • Emplea la evaluación como instrumento para mejorar los niveles de desempeño de los alumnos en la resolución de problemas.

Como es de apreciarse, el profesor en formación juega diversos roles durante dicho proceso, por una parte se ubica en una postura de “aprendiz” de matemáticas para relacionar los saberes aritméticos formales propios del nivel que cursa con los saberes de la escuela primaria, para ello deberá enfrentarse a tareas que le permitan dicho dominio. Por otra parte también se ubica en posición de “profesor analista" en tanto que debe reflexionar sobre elementos propios de la enseñanza de la asignatura en cuestión.

Con estas consideraciones y recuperando los elementos del MER descrito en el capítulo anterior, en lo que sigue se hará un análisis tanto de las tareas matemáticas como de las didácticas que se plantean en el currículo oficial de las Escuelas Normales así como la programabilidad[23] que se establece en el texto del saber para el estudio de la proporcionalidad.

3.1.1. Los conceptos de razón y proporción. Las primeras organizaciones matemáticas.

Desde la perspectiva de los Planes y Programas de la escuela normal. el estudio de la razón en la formación de profesores inicia con el profesor en formación jugando el rol de "analista", en un segundo momento ocupa la postura de "aprendiz" de matemáticas, es decir, inicialmente deberá analizar una propuesta didáctica para el estudio de las razones y proporciones que se presenta en los materiales establecidos como textos de apoyo, las tareas planteadas retoman la comparación de cantidades a partir de la resolución de situaciones problemáticas basadas en un modelo tabular, para luego llegar a la razón como resultado de dividir la parte del total entre la cantidad total o bien el resultado de la cantidad que está siendo comparada entre la cantidad de referencia. Con ello se institucionaliza una concepción de razón como "número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente" (Isoda, Cedillo. 2012a, p. 58), dicha consideración alude precisamente al modelo clásico de la Teoría de las Razones y proporciones.

Cuando la fracción significa un cociente, la razón recupera el manejo de los números decimales como resultado de esa "división", que es representada en una recta numérica para establecer la comparación entre dos magnitudes. Una vez modeladas

[23] La textualización del saber establece una programación de los aprendizajes y de los controles, que se determinan en función de las secuencias razonadas que favorezcan la adquisición progresiva de los conocimientos expertos, la programación se considera una norma de progresión del conocimiento que enuncia un comienzo, un intermedio y un fin, es decir el texto procede por secuencias. (Chevallard, 1991)

las representaciones, el estudiante deberá resolver una serie de tareas del tipo:

> *¿Cuál es la razón de respuestas correctas a partir del total de problemas planteados?,*
> *¿Cuál es la razón de tiros acertados respecto al total de tiros? o*
> *¿Cuál es la razón de alumnos de quinto grado, respecto al número total de niños que asisten a una fiesta*?.

Con esta situación se aprecia la lógica institucional, establecer un mecanismo de dominio de la razón como una comparación de magnitudes y se destaca que, al inicio de este primer acercamiento a la razón, ésta se presenta en situaciones donde una magnitud es parte de la otra, por ejemplo, la razón entre tiros y tiros encestados es igual al número de tiros encestados entre el número de tiros. Posteriormente, se plantean tareas asociadas con la razón entre dos cantidades, es decir donde existe una cantidad que es comparada con una cantidad de referencia para adquirir una razón (calcular la razón entre la altura de un edificio A respecto a la altura de un edificio B). El mecanismo de trabajo es similar a la razón primero, la representación gráfica en una recta numérica para la asociación con decimales y después la resolución de situaciones problemáticas del mismo tipo.

En la misma postura de profesor analista, el estudiante revisa en textos sugeridos la relación que existe entre la razón y la idea de “número de veces” en dichos textos se argumenta que, al comparar dos cantidades, en ocasiones se toma a una de éstas como “cantidad de referencia” , en tal caso se calcula la razón entre esas cantidades y cuando la razón es mayor que 1, la razón señala el número de veces que una cantidad es mayor que la otra.

La idea de analizar el “número de veces”, representa la transición hacia la representación de la razón como una fracción, en este caso los materiales de estudio la ilustran con una imagen que indica la división de una cantidad a comparar entre una cantidad de referencia para encontrar el número de veces y señalan que esto puede expresarse mediante una fracción, por ejemplo *en una distancia promedio de 15 metros se recorre una distancia de 25 metros, ¿cuántas veces es esa distancia en* *comparación con la distancia recorrida?* Al expresar el resultado de la siguiente manera 25 ÷ 15 = 25/15 = 5/3 los estudiantes revisan la relación que existe entre la cantidad de referencia multiplicada por la razón para encontrar la cantidad a comparar, por ejemplo: *En una distancia de 56 metros se realiza un lanzamiento de 7/6 veces la distancia promedio. ¿cuántos metros fue el promedio?,* con este ejemplo se retoma la idea del campo conceptual de las estructuras multiplicativas en donde la aproximación a la proporcionalidad se resuelve con una división o una multiplicación.

La situación anterior confirma la hipótesis de Perry (2003), cuando señala que por lo general, en las instituciones educativas la razón se representa como una división indicada, un cociente o un operador multiplicativo y desde la perspectiva de los números fraccionarios. Ahora bien, si la razón efectivamente alude a un par ordenado de cantidades de magnitudes también es preciso considerar que existen diferencias entre la razón y la fracción porque las razones comparan objetos distintos (5 dulces por 25 pesos) mientras que las fracciones comparan el mismo tipo de objetos en términos del todo y la parte (tres de cinco partes), así pues la razón 5 dulces ÷ 25 pesos (5/25) no constituye una fracción. Este aspecto no es aclarado en el texto del saber.

Luego, en la misma tarea (determinar los metros promedio) los estudiantes continúan con la revisión de textos para conceptualizar la proporción, para ello observan situaciones problemáticas de representación gráfica en las que la comparación entre magnitudes se hace presente, área de figuras, mezcla de sustancias, unidades de medida, entre otras. Con ello se institucionaliza que, por ejemplo, “La razón entre el largo y ancho se expresa 2/3. 2/3 se lee dos tercios, 2 entre 3 o dos es a tres. Si una razón es equivalente a otra, por ejemplo 4/6, esta equivalencia se expresa como 2/3 = 4/6. Esta expresión se lee 2 es a 3 como 4 es a 6. A esta igualdad se llama proporción” (Isoda, Cedillo. 2012b, p. 32). Este principio se asocia directamente con el planteamiento de la organización clásica de la proporcionalidad, en el que se estipula que la igualdad de dos razones constituye una proporción cuando se pueden igualar los cocientes indicados por las razones equivalentes, en este sentido una razón a/b no se modifica si se multiplica o divide a y b por el mismo número.

Con la tarea anterior termina el acercamiento al estudio de la razón y la proporción en el que el estudiante funciona como "profesor analista", luego, al revisar textos se supone, ha identificado la razón como comparación de magnitudes a partir de un cociente y comprendido la idea "número de veces" para establecer la relación de la razón como fracción y por último, ha comprendido la proporción como una igualdad de razones mediante la visualización de razones equivalente[24]. Las restricciones de la actividad tienen que ver con el hecho de que, en dichos textos básicos al estudiante se le plantean cuestiones como: ¿Qué dificultades presentan las actividades planteadas?, ¿cuál es la diferencia entre una actividad y otra?. Por lo que se puede apreciar que el papel de "analista" se restringe fundamentalmente a la organización matemática.

Posteriormente, situado en el rol de "aprendiz de matemáticas" los textos oficiales plantean que los estudiantes se enfrenten a tareas matemáticas donde deberán revisar y resolver actividades relacionadas con las razones y proporciones. El propósito y características de tales actividades tiene que ver con "ejercitar" las situaciones revisadas en la unidad anterior, es decir, se les plantean situaciones problemáticas donde deberán encontrar la razón entre magnitudes, uno de estos planteamientos es el siguiente:

> En una clase hay 28 alumnos, cuatro alumnos faltaron a clase.
>
> -Calcular la razón del número de alumnos que no asistieron a clase y expresarla como porcentaje en función al total del grupo.
>
> -Calcular el porcentaje de los alumnos que asistieron respecto al total del grupo.

Al parecer, la intención de este tipo de tareas es retroalimentar los saberes adquiridos en el momento de "profesor analista" y emplear la técnica de la comparación de magnitudes a través de una razón, aunque también se observa la inclusión del concepto de razón que, sin revisarse con antelación, se vincula con la razón y la proporción: el porcentaje. La solución de estas tareas exigirá al estudiante emplear una de las técnicas de la organización clásica más recurrente: la regla de tres. Así se abordan también situaciones para calcular un porcentaje mayor que

[24] Las tareas descritas se encuentran en los textos básicos del programa para las escuelas normales *Aritmética: su enseñanza y su aprendizaje.*

100%, comparar descuentos expresados como porcentaje y como dinero. Además se resuelven situaciones problemáticas asociadas con la probabilidad en problemas como la siguiente:

Analizar dos loterías para identificar en cuál se tiene mayor oportunidad de ganar.

a) Hay 16 boletos ganadores y participan 40 boletos.
b) Hay 7 boletos ganadores y participan 20 boletos.

En una siguiente tarea los estudiantes deberán identificar la razón y utilizarla para resolver problemas de porcentaje en una representación tabular como la siguiente:

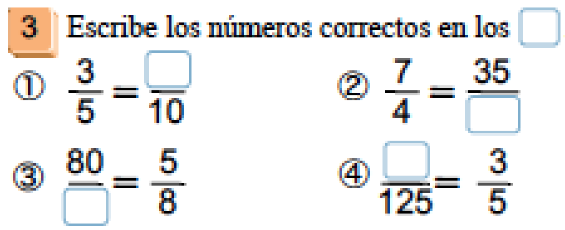
Áreas de bosques tropicales (Una unidad de área son diez mil km^2)

Región	Área		Disminución en los últimos 10 años	Razón (%) de disminución en los últimos 10 años
	1990	2000		
África	687	634		
Asia - Pacífico	349	324		
Latino América	957	913		
Total	1993	1871		

Imagen 2. La razón como porcentaje. (Isoda, Cedillo. 2012a, p. 72)

Esta representación, al parecer conduce a los estudiantes a aplicar la técnica de la regla de tres, aunque no aparezca esta intención de manera explícita en los textos se aprecia como la técnica más viable para este tipo de tareas. De igual forma, en otras tareas del mismo tipo se les pide graficar datos similares a los de la tabla anterior y comparar magnitudes como la razón entre niños y niñas que pertenecen a diferentes grados escolares.

Para cerrar con este bloque de tareas, nuevamente se plantean ejercicios relacionados con aspectos que revisaron en el momento del “profesor analista”, para ello deben realizar tareas donde se les pide obtener la razón en situaciones de comparación entre cantidades por ejemplo, aceite y vinagre, las longitudes de los lados AB y AC de un triángulo, encontrar razones equivalentes a una razón dada o bien encontrar el valor faltante en dos razones equivalentes:



3 Escribe los números correctos en los $\square$.

① $\frac{3}{5} = \frac{\square}{10}$ ② $\frac{7}{4} = \frac{35}{\square}$

③ $\frac{80}{\square} = \frac{5}{8}$ ④ $\frac{\square}{125} = \frac{3}{5}$

Imagen 3. Valor faltante. (Isoda, Cedillo. 2012a, p. 37)

La imagen 3 es una muestra del uso no institucionalizado de la regla de tres, puesto que hasta ese momento sólo se ha explicitado que la multiplicación o división de una razón por un mismo número dará una razón equivalente. Además de los ejercicios anteriores, se plantean tareas de resolución de problemas en las que aplican razones equivalentes, el ejemplo más recurrente es el manejo de magnitudes en recetas de cocina. La incógnita es también una variable muy utilizada en la resolución de problemas, es decir, se plantean actividades donde se muestra la razón y una de las cantidades para encontrar el valor de la cantidad a comparar, un ejemplo similar a esto es cuando se juntan canicas de diferente color y se expresa la razón que existe entre ambos colores de canicas. Otro ejemplo empleado para las razones equivalentes es el uso de diagramas donde a partir de tres magnitudes conocidas deberá encontrarse una cuarta desconocida.

Una vez realizadas las tareas donde se incluye la razón como comparación de cantidades, número de veces, razones equivalentes y porcentaje, los estudiantes vuelven al rol de “profesor analista” y a partir de las tareas resueltas hacen reflexiones sobre la comparación aditiva (Entre 15 y 5 la diferencia es de diez unidades) y la comparación multiplicativa (El 5 cabe 3 veces en el 15, es su cociente). Como se puede apreciar, desde la perspectiva del texto del saber, el concepto de razón puede definirse como una comparación multiplicativa entre dos cantidades mediante un cociente, en ese sentido la razón expresa la relación que existe entre la magnitud de dos cantidades aunque no se expresen las magnitudes originales de tales cantidades. En un ejemplo como la razón 12 y 3 es ¼, el cociente indica que 3 es la cuarta parte de 12*, pero en ¼*, no se observa que las cantidades que lo originaron fueron 3 y 12, podrían haber sido 25 y 100. (Cedillo, Isoda, Chalini, Cruz, Ramírez, y Vega, 2012)

3.1.2. Organizaciones didácticas para la razón y proporción.

Ahora bien, en lo que toca a las tareas didácticas se plantean cuestionamientos a los profesores en formación sobre las tareas matemáticas descritas en los apartados anteriores, véase el siguiente ejemplo:

Actividades que se sugieren para los futuros docentes

1. El concepto de razón es muy relevante en matemáticas, ¿estás de acuerdo en la forma que se aborda su estudio inicial en esta lección? Justifica ampliamente tu respuesta.

2. Compara el esquema parte –todo con las rectas numéricas que aparecen en esta lección, ¿qué similitudes y diferencias encuentras entre ellos? ¿qué propósitos didácticos y matemáticos cubren estas formas de representación?

3. Establece las similitudes y diferencias entre las razones parte-todo y parte-parte. Enuncia las posibles dificultades que podría enfrentar el alumno para la comprensión de cada una.

Imagen 4. Actividades de Razón y Proporción. (Cedillo, et-al., 2012, p. 108)

Los planteamientos en la imagen se refieren a un argumento propio de la Organización Clásica, las nociones de razón y proporción, a las que los estudiantes en formación se han acercado y que se explican en el MER cuyo discurso teórico es la Teoría de las razones y proporciones, resulta destacable la idea de afianzar la relación existente entre la fracción y la razón, hecho que se observa en la modificación de la última tarea en la que los estudiantes en su papel de profesores, deben reflexionar sobre las dificultades de los alumnos de la escuela primaria para distinguir similitudes y diferencias entre las “razones”, como fracciones parte-todo y parte-parte. Lo anterior se ve reforzado cuando el texto oficial instituye que:

> Las razones finalmente son números racionales, son fracciones. Por lo tanto tiene sus propiedades y están sujetas a sus principios. Una cualidad fundamental de los números racionales es la de equivalencia. Dos números racionales A/B y P/Q son equivalentes si y solamente si A x Q = P x B. Los números racionales equivalentes se construyen así: Dado el número racional A/B y K cualquier número racional diferente de cero, entonces: (AxK)/(BK) es otro número racional equivalente a A/B. (Cedillo. T. et-al. 2012, p. 106)

Esta afirmación establece la igualdad entre razón y números racionales, hecho que ha sido debatido, no obstante que si bien existe una relación entre ambos elementos, resulta necesario establecer esa diferencia con el planteamiento de tareas matemáticas y didácticas que permitan esclarecer tal distinción. Con este saber institucionalizado, se cierra al trabajo con la razón y la proporción para dar paso al estudio del concepto de porcentaje y su representación gráfica como una extensión de la razón.

3.1.3. Praxeologías matemáticas sobre el porcentaje.

Al igual que la temática anterior, el estudio del porcentaje como parte de la razón se inicia con la postura del estudiante como profesor analista, se parte del análisis de una situación problemática donde se expresa una razón utilizando al 100 como cantidad de referencia. En los materiales, se le denomina porcentaje a esta razón donde el número decimal (0.01) se emplea como una razón a la que se le llama 1 por ciento o 1% (SEP, 2012a), un ejemplo de ello es lo siguiente: *En un autobús de 25 asientos van 20 pasajeros, ¿cuál es el grado de aglomeración del autobús?.* En este caso el estudiante deberá encontrar el resultado al dividir 20 ÷ 25 = ?, después transformar esa razón a una equivalente cuya cantidad de referencia sea 100 es decir 20 ÷ 25 = ? x 100, de esta manera el grado de aglomeración del autobús será del 80%.

Otra tarea matemática que se convierte en actividad de análisis es la expresión de razones en porcentajes (35%, 12%, 80%) y la expresión de éstos en números decimales (0.50, 0.6, 0.325),con ello se pretende identificar al porcentaje como una razón que puede ser expresada y manipulada en términos numéricos o mediante una gráfica en la que manifiesta la relación parte-todo, cuando el todo se vuelve 100. También se analizan razones mayores que 100 (con la situación del autobús), *si se considera que se tiene un cupo para 25 pasajeros y se suben 30, el grado de aglomeración quedaría expresado como 30 ÷ 25 X 100 = ?.*

Para concluir con esta temática, el estudiante analiza situaciones donde es necesario identificar diversos tipos de gráficas, la idea es hacer énfasis en la comparación de cantidades. En estas tareas se destaca la gráfica de banda que asocia el área de los rectángulos con cada una de las razones involucradas y la gráfica circular que permite visualizar con mayor facilidad la distribución porcentual de los datos. En estas últimas tareas está inmersa la noción de porcentaje ya que es ésta la que permite comprender la representación gráfica.

Una vez que los estudiantes han analizado las tareas matemáticas planteadas en los textos oficiales, se les pide que reflexionen sobre cuestiones como: *el porcentaje establece una comparación de una cantidad respecto a 100*, determinando así el tanto por ciento; al comparar una cantidad con otra no necesariamente la segunda es 100; para determinar un porcentaje mediante una razón se requiere que la cantidad de referencia en la comparación sea 100; la razón ¾ puede representarse como 75/100 lo que indica 75 de cada 100 que al multiplicarse por 100 lleva al 75%, esta situación también se puede realizar al multiplicar por 100 una expresión decimal de la razón, es decir 0.75 x 100 equivale a 75%. (Cedillo. T. et-al. 2012)

3.1.4. El porcentaje y sus organizaciones didácticas.

Entre las tareas didácticas, por lo general las consignas planteadas en los materiales educativos no se modifican de tarea a tarea, generalmente el tipo de preguntas son similares a las que se plantean en la imagen 4, un ejemplo que da cuenta del tipo de cuestiones didácticas planteadas se observa en la siguiente imagen:

Actividades que se sugieren para los futuros docentes

1. ¿A qué crees que se deba la introducción del tema de porcentajes enseguida del de razón? Explica con claridad.

2. ¿Consideras conveniente la forma en que se introduce el estudio de los porcentajes? Justifica tu respuesta.

3. ¿Coincide la forma en qué tú calculas porcentajes con la forma en que se muestra en la lección? ¿Qué diferencias y similitudes encuentras? ¿Cuáles son las bases matemáticas de tu estrategia para calcular porcentajes? ¿Cuáles son las que se aplican en el método que presenta la lección?

4. Resuelve los problemas que se proponen en las páginas 63 a 65 e identifica qué posibles dificultades pueden tener los alumnos con ellos.

Imagen 5. El porcentaje. (Cedillo. T. et-al., 2012, p. 109).

En la imagen anterior puede observarse que las primeras tres actividades piden analizar las OM y OD, es decir se plantean cuestiones sobre la relación entre conceptos matemáticos, pero también se pide una reflexión sobre la forma en que éstos se introducen en la escuela. La tarea 4 coloca al estudiante como “aprendiz de matemáticas” porque deberá resolver problemas e identificar las dificultades que pudieran tener los niños de la escuela primaria para resolverlas, cabe destacar que las actividades son semejantes a las que ya analizó el estudiante en el primer momento de estudio del porcentaje, son situaciones del tipo: *En un área de 24 m^2, expresa el 25% como número decimal,* donde el 24 es la cantidad de referencia que se multiplica por 0.25 (la razón) para encontrar la cantidad comparada. Al parecer, la intención es que el alumno transite de la razón como número decimal a la expresión de un porcentaje y que identifique la relación entre razones y porcentaje, la manera de calcularlo y las representaciones gráficas que le subyacen. Después de esta tarea los estudiantes deberán presentar los procesos matemáticos que se desarrollan para resolver tareas que involucren el cálculo de porcentajes.

Una vez que los estudiantes han transitado sobre esta temática como aprendices de matemáticas ahora cierran su estudio como “diseñadores” de situaciones problemáticas que involucren el cálculo de porcentajes pero también en una postura de “experimentadores” cuando se les da la consigna de ponerlos en práctica con alumnos de educación básica y reflexionar sobre los resultados obtenidos a través de registros de clase.

3.1.5. La variación proporcional directa. La última organización matemática de estudio.

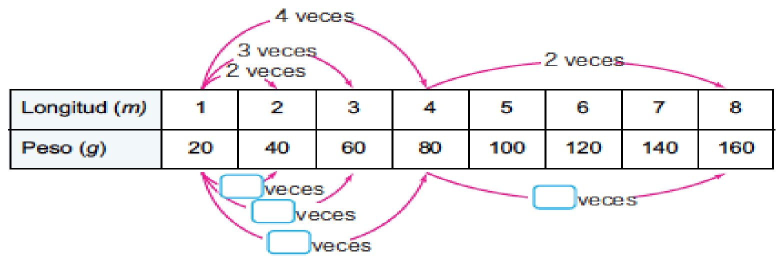
Nuevamente, en el rol de “profesor analista” el estudiante analiza la propuesta didáctica para el estudio de la variación proporcional directa, su representación gráfica y sus aplicaciones. Para ello, revisa en los textos oficiales las situaciones en las que se pueden relacionar dos magnitudes que cambian juntas. Las primeras aproximaciones a la proporción se realizan mediante tareas que plantean la relación entre dos cualidades de los objetos: largo y ancho, agua y jugo, aceite y vinagre, etc. En este tipo de tareas las cantidades a comparar son dos pero ahora la variación entre éstas se presenta de modo diferente, por ejemplo se les pide identificar el número de hojas de papel en un paquete donde se trata de reconocer la relación entre la cantidad hojas y su peso para luego encontrar el número de hojas en un paquete. Una variante es reconocer la relación que existe entre el número de hojas y el grosor del paquete para encontrar el número de hojas existente. Para identificar las relaciones entre magnitudes se presenta una tabla en la que se puede observar la variación proporcional entre el número de hojas y el peso o el grosor.

En estas tareas, las cualidades representadas en las tablas dan la idea de que se pueden tomar en cuenta más valores y que dichas cualidades están relacionadas, por ejemplo el peso depende del número de hojas y el grosor también, sin embargo debe considerarse el supuesto de que todas las hojas son iguales en forma y tamaño. En las tablas se registra la variación del número de hojas con relación a la variación del peso, de esta manera los datos de las columnas forman razones equivalentes y establecen proporciones.

Por otra parte, para identificar la proporcionalidad directa el estudiante analiza las tablas con cantidades preestablecidas en las que es notorio que si una cantidad aumenta 2, 3, 4 y 5 veces la otra cantidad lo hará en la misma proporción, luego se presentan varias tablas donde se relacionan dos magnitudes, en éstas el estudiante deberá identificar en cuál se presenta la misma relación que se observa en los primeros ejemplos. Previo a la conceptualización de la variación proporcional se muestra el siguiente modelo tabular (Isoda, Cedillo. 2012b):

4 Estudiemos la relación que hay entre la longitud y el peso de un cable.

① Si la longitud del cable se incrementa en 2, 3, 4 veces y 5 veces, ¿cómo varía el peso?



Longitud (*m*)	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso (*g*)	20	40	60	80	100	120	140	160

Imagen 6. Variación proporcional directa. (Isoda, Cedillo, 2012b, p. 48).

En la imagen se pretende que el alumno comprenda que cuando se tienen dos magnitudes, si una aumenta la otra también lo hace y, si una disminuye también lo hará la otra, así se podrá decir que esas magnitudes varían en forma directamente proporcional ya que al aumentar o disminuir 2, 3, 4 veces la otra se modifica en la misma forma. Complejizando la situación se pide a los alumnos que en lugar de aumentar o disminuir las cantidades con números enteros lo resuelvan con aumentos (número de veces) decimales o fraccionarios por ejemplo, *¿cómo cambia su peso cuando su longitud disminuye a ½ o 1/5?.*

En la tabla se muestra la variación del peso del alambre y la longitud, y las columnas muestran razones equivalentes, es decir proporciones. Esta tabla, además de mostrar las cualidades (peso y longitud) del cable expresa las modificaciones (flechas curvas de color rojo), de esta manera, si se calculan las razones peso/longitud se obtendrá 20 en cualesquier par de datos, en términos generales esto se puede representar mediante la expresión peso ÷ longitud = 20, donde 20 corresponde a la constante de proporcionalidad. Una vez identificada la variación directamente proporcional, los estudiantes analizan situaciones problemáticas que incluyen modelos tabulares, en éstas se puede apreciar que en algunos casos la relación entre una cantidad y otra no presenta esta misma cualidad, un ejemplo de ello se puede ver en la siguiente tabla:

Volumen de agua (l)	0	1	2	5	8	11	15
Profundidad (cm)	0	2	4	10	16	22	30

Tabla 9. Variación proporcional. (Isoda, Cedillo, 2012b).

En el ejemplo anterior se puede ver que profundidad y volumen no varían en forma directamente proporcional, lo que se pretende es que el estudiante identifique la forma como aumenta la profundidad cuando el volumen aumenta un litro. Cada vez que se agrega un litro de agua la profundidad aumenta en dos centímetros, en esta situación se intenta que el estudiante identifique la pertinencia de utilizar el valor unitario como la técnica más eficiente y que identifique también la constante de proporcionalidad.

Para cumplir con dicha tarea se busca el cociente entre profundidad y volumen para encontrar una cantidad constante que al multiplicarse por una cantidad variable (volumen del agua en litros) permite encontrar otra cantidad variable (profundidad del agua en centímetros). Una vez realizado el trabajo los alumnos deberán generar expresiones aritméticas que correspondan a casos similares (peso ÷ longitud, distancia ÷ tiempo, costo ÷ longitud, peso ÷ número de hojas, etc.). En este caso se observa que dos variables son directamente proporcionales si el cociente entre los valores correspondientes a cada una de las variables se mantiene constante.

Luego de analizar la tabla se retoman ejemplos anteriores para identificar cómo se da la transición de un modelo tabular (tabla) hacia un modelo gráfico, una vez hecha la gráfica cartesiana se analiza comparando las líneas A y B que representan dos cables:

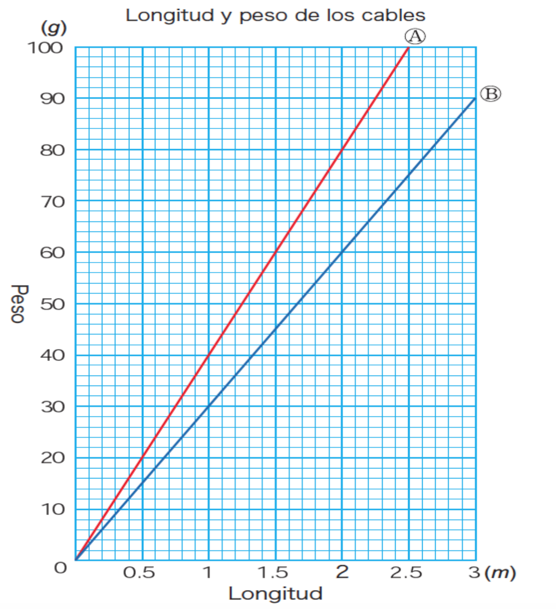


Imagen 7. Gráfica de variación proporcional. (Isoda, Cedillo, 2012b, p. 54)

En esta gráfica se intenta distinguir cuál de los cables es más pesado, además se busca encontrar la longitud y/o peso, dada una de las cantidades. Con ello se establece que en la gráfica de una relación directamente proporcional se construye una línea recta que pasa por el punto (0, 0), es decir la intersección de los ejes vertical y horizontal, además el cociente entre las dos magnitudes (peso y longitud) es constante. Con este tipo de tareas los estudiantes inician el estudio de situaciones para comprender la transición de un modelo aritmético a un modelo algebraico y la relación de las líneas rectas con la función lineal.

Como se puede observar, en su papel de aprendices de matemáticas los estudiantes resuelven tareas relacionadas con la variación proporcional directa, de esta forma se busca que representen relaciones matemáticas en una tabla, que entiendan el concepto de proporcionalidad directa, que expresen con palabras una relación matemática, que construyan gráficas que representen relaciones y que resuelvan problemas de proporcionalidad directa.

En el último tema de estudio asociado a la variación proporcional directa, donde el estudiante funciona como “aprendiz”, los planes de estudio proponen una tarea relacionada con la proporcionalidad inversa, en ella realizan el mismo recorrido que en la proporcionalidad directa, aunque con un menor número de tareas, un ejemplo de éstas, tomado de Isoda y Cedillo (2012b), es *establecer la relación entre el ancho y el largo de varios rectángulos cuya área sea 24* m^2*.*

Una vez identificadas las relaciones entre el largo y el ancho, se da el valor del "ancho" y se pide que llenen una tabla con los datos faltantes que coinciden con el número de relaciones que se pueden establecer dada el área especificada. Luego de establecer las relaciones se pide identificar cómo cambia el "largo" de cada rectángulo cuando el ancho se duplica, triplica, etc. Con ello se instituye que "cuando dos cantidades cambian juntas y una de ellas disminuye a la mitad, la tercera parte y así sucesivamente, mientras la otra aumenta al doble, al triple y así sucesivamente, decimos que esas cantidades varían de forma inversamente proporcional" (Isoda, Cedillo, 2012b, p. 98). Después de analizar y resolver la tabla se pide elaborar la gráfica, la intención es identificar que la proporcionalidad inversa no se representa mediante una línea recta sino una curva, situación que en la modelización funcional constituye el antecedente para abordar el trabajo de la inversa de una función y la función inversa.

Para cerrar el estudio de la proporcionalidad, se plantean tareas para un "aprendiz de matemáticas", en este momento se pretende que "ejerciten" los aspectos trabajados durante el último tema de la unidad, podría decirse que con estas tareas (Ver imagen 8) se concluye el estudio de la proporcionalidad y del modelo aritmético.

Actividades que se sugieren para los futuros docentes

1. El perímetro del círculo se calcula mediante la fórmula: **$P = 2\pi r$,** donde **P** representa al perímetro, la letra **π** representa al número 3.14 y la letra **r** al radio del círculo.
Da los valores al radio para llenar la tabla

Perímetro							
Radio	0						

-¿El comportamiento del perímetro y el radio es directamente proporcional?
- En caso de contestar afirmativamente la pregunta anterior, responde: ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?
- Dibuja una gráfica cartesiana para los valores de la tabla.

2. El área del círculo se calcula mediante la fórmula: **$A = \pi r2$**, donde **A** representa al área, la letra **π** representa al número 3.14 y la letra **r** al radio del círculo.
Da los valores al radio para llenar la tabla

Área							
Radio	0						

-¿El comportamiento del área y el radio es directamente proporcional?
- En caso de contestar afirmativamente la pregunta anterior, responder: ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?
- Dibuja una gráfica cartesiana para los valores de la tabla.

Imagen 8. Actividades de variación proporcional directa. (Cedillo, et-al., 2012, p. 115)

Como se puede observar, con estas actividades los integrantes de la noosfera pretenden cumplir un propósito, que los estudiantes adquieran el dominio matemático de la proporcionalidad mediante tareas enmarcadas en la organización clásica. Si bien en algunos momentos se coloca al estudiante en posición de “analista”, en términos generales sus tareas tienen que ver con el “aprendiz” de matemáticas no así en su rol de profesor.

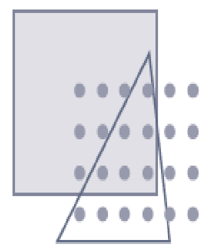
Por otra parte, los actuales programas y libros de texto de matemáticas para la educación básica plantean problemas para lograr el aprendizaje, sin embargo el predominio de las situaciones problemáticas deja un reducido espacio para una institucionalización que permita a los estudiantes reconocer y nombrar los conceptos matemáticos que están implícitos en esos problemas y, cuando se institucionaliza, es claro que se hace con un nivel y desde el soporte que brinda la postura clásica. Este desequilibrio entre problemas y conceptos es propio de las actividades para la escuela primaria pero también se hace presente en las tareas incluidas en los programas para las escuelas normales, es relevante destacarlo porque en general, los profesores en formación resuelven tareas muy similares a las de la escuela primaria.

Para ilustrar el argumento anterior, en la última tarea planteada en el Tema 4 que corresponde al estudio de la variación proporcional directa, se sugiere la resolución de situaciones de variación proporcional directa, incluidas en el bloque 3 del texto “Del sentido numérico al pensamiento prealgebraico” (Cedillo y Cruz, 2012), dicho bloque se asocia con el trabajo de fracciones comunes en el que se incluye una hoja de trabajo denominada “Fracciones y razones”, de ésta se desprenden tareas del tipo “resolución de problemas” como en el siguiente:

Hoja de trabajo 25

Fracciones y razones

Observa la figura de la derecha para contestar lo que se indica en cada inciso.



1. ¿Cuál fracción corresponde a la cantidad de puntos que están totalmente dentro del triángulo respecto al total de puntos que aparecen en la figura? ____________

2. ¿Cuál fracción representa la cantidad de puntos que están dentro del cuadrado con respecto al total de puntos que hay en la figura? ____________

Imagen 9. Actividades de cierre de la unidad de aprendizaje 4. (Cedillo y Cruz, 2012, p. 94)

La imagen 9 constituye un ejemplo del tipo de tareas con las que concluye la unidad de aprendizaje cuatro, sin embargo aunque estas tareas se programan como la última tarea de la temática “El estudio de la variación proporcional directa”, el ejemplo más cercano a la temática que aquí ocupa es el que se muestra en la imagen anterior, el resto se enfoca al estudio de las fracciones comunes, con tareas que contemplan el estudio de la equivalencia, comparación y operatoria de fracciones.

En cuanto a las tareas didácticas es destacable su ausencia en la temática cuatro, las únicas aproximaciones a este tipo de tareas desarrollan aspectos relacionados con la razón, la proporción y el porcentaje, no así en el estudio de la variación proporcional directa, lo que indica un desequilibrio en las OM y las OD que influye de manera significativa en el papel de aprendiz de profesor y por ende en su consecuente desempeño docente dentro de las aulas de la escuela primaria.

Cabe señalar que para las cuestiones didácticas se utiliza la "Guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética en las escuelas normales"[25] (Cedillo, et-al. 2012), en ésta se explicitan las tareas didácticas que hasta este momento se han enunciado para la Unidad IV y son abordadas de modo similar que las tres primeras unidades, su intención principal radica en mostrar a los alumnos ciertas cuestiones de las OD que pudieran ser empleadas para el diseño y experimentación de dispositivos didácticos en semestres posteriores, un ejemplo de esto se muestra a continuación:

[25] La guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética se estructura en cinco partes: Parte I. La enseñanza de las matemáticas: el papel del análisis de videos y de los libros de texto, durante este apartado se enfatiza en el uso del Estudio de Clases como un método basado en el trabajo colaborativo entre maestros que de manera conjunta planean, ponen en práctica y observan críticamente los procesos de enseñanza y de aprendizaje en las aulas. Parte II. Aprendiendo a aprender matemáticas, donde se destaca la importancia de su estudio, el desarrollo del conocimiento matemático con comprensión y el uso de representaciones formales, entre otros. Parte III. Resolución de problemas: el gusto por las matemáticas, en este apartado el objetivo es que el profesor en formación distinga entre una tarea y un problema, la importancia de la formulación de preguntas y las fases de enseñanza en la resolución de problemas, así como otros aspectos relacionados, la Parte IV. Análisis del tratamiento matemático-pedagógico de los temas de aritmética, tal apartado que constituye el más extenso de la guía hace la revisión de todos los conceptos matemáticos abordados a lo largo de las cuatro unidades de aprendizaje y en los cuales se establecen ciertas "Actividades que se sugieren para los futuros docentes", mismas que atienden tanto a OM como a ciertas OD como las que se han presentado a lo largo de este capítulo de la investigación, por último la Parte V. Orientaciones para el trabajo en la Licenciatura en Educación Preescolar, se muestra un análisis similar al que se realiza en la parte IV pero enfocado a la licenciatura enunciada.

Fases de enseñanza en la resolución de problemas.

Las fases de enseñanza en el marco de la resolución de problemas pueden esquematizarse como sigue:

Fase	Participación del maestro	Estatus de los alumnos
Presentación del problema	Presenta el problema sin hacer explícito el objetivo de la clase.	Abordan la tarea pero no necesariamente conocen el objetivo de la clase.
Planeación y predicción de la solución	Guía a los alumnos para que reconozcan el objetivo.	Tienen expectativas, conocen el objetivo de la clase, reconocen tanto los datos como las incógnitas, de qué se trata el problema y proponen ideas para abordarlo .
Resolución grupal /resolución independiente	Apoya el trabajo individual.	Tratan de resolver el problema con las ideas que compartieron. Establecen relaciones entre lo conocido y lo desconocido y tratan de representarlas en diferentes formas. Es suficiente si algunos alumnos proponen ideas, no debe esperarse hasta que todos los alumnos den respuestas correctas, porque responder correctamente no es el propósito principal de la clase. Si se dedica tiempo a esperar a todos, los alumnos pueden perder sus ideas y decrecerá su motivación para discutir las soluciones que se presenten.
Explicación y discusión / validación y comparación	Guía la discusión con base en el objetivo de la clase.	Explican cada acercamiento y los comparan relacionando lo conocido con lo desconocido. Se comunican para entender las ideas de los demás considerando sus acercamientos. Valoran el esfuerzo de los demás y reconocen que es una meta a lograr mediante el trabajo en grupo.
Resumen/aplicación y posteriores desarrollos	Guía la reflexión de los alumnos	Reorganizan lo que aprendieron durante la clase; valoran sus logros, formas de razonamiento e ideas.

Imagen 10. Fases de enseñanza con la resolución de problemas. (Cedillo, et-al. 2012, p. 24)

La imagen anterior muestra la semejanza de esta secuencia con algunos momentos didácticos planteados por Chevallard (1999), así como los tipos de situaciones enunciadas por Brousseau (1980) en la Teoría de las Situaciones Didácticas, misma que se aborda en la Unidad de aprendizaje I, junto con el Estudio de clases en Japón[26], en esa unidad se realiza un análisis de ambos modelos a partir de la revisión de lecturas de textos.

[26] El Estudio de Clases puede entenderse como una modalidad de desarrollo profesional docente, conducida por los propios profesores de una o varias escuelas […]. Un grupo reducido de docentes planifica una clase, uno o dos docentes implementan la clase con sus alumnos, la clase es observada y analizada en público. (Isoda y Olfos, 2009a., p. 17)

3.1.6. Organizaciones matemáticas para la modelización algebraica.

En el segundo semestre los estudiantes de la escuela normal recuperan algunos elementos aritméticos asociados a la proporcionalidad para comprender el modelo algebraico que constituye la modelización funcional, este trayecto se inicia con el estudio de las regularidades que presentan los patrones numéricos (funciones lineales y cuadráticas), las expresiones algebraicas adquieren significado en un contexto numérico, con esta situación se lleva a la formulación de conjeturas que orientan la construcción de expresiones algebraicas para describir las reglas propias de dichos patrones. Este acercamiento permite que los estudiantes puedan asignar significados a las variables de una función como símbolos que pueden admitir muchos valores que dependen de otro valor. (SEP, 2012c)

Se podría decir que una vez trabajada la proporcionalidad y los patrones numéricos, los estudiantes profundizan en el concepto de función, sus representaciones algebraicas, tabular y gráfica, así como los conocimientos matemáticos asociados con dicho concepto, lo hacen a través del análisis del comportamiento de las gráficas y tablas. En este caso es evidente que el curso de Álgebra[27] retoma elementos del curso de Aritmética, por lo que se podría decir se permite el uso del lenguaje algebraico, especialmente para expresar generalizaciones. En este sentido el estudiante comprende que algebrizar brinda una mayor ventaja que el empleo de la aritmética, es decir, que la manipulación algebraica, aunque más compleja, es más eficaz porque sirve para todos los casos de una misma situación.

Entre las actividades que vinculan la proporcionalidad con el estudio del Álgebra y que pudieran relacionarse con un modelo epistemológico de referencia propio de la modelización matemática, están aquellas asociadas a una representación como la siguiente:

[27] El curso de Algebra: su aprendizaje y enseñanza se desarrolla en segundo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria y se compone de tres unidades de aprendizaje: I) Acercamiento a los conceptos de función y ecuación, II) Comportamiento de funciones lineales, cuadráticas y racionales y III) Procedimientos para operar con expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones (SEP, 2012c). Cabe señalar que aunque el curso profundiza en la noción de función, su tipología y representación, no es sino en la función lineal donde se aprecia la asociación más apegada a la proporcionalidad, por tal motivo en este apartado sólo se hace alusión a la descripción y análisis de la función lineal inscrita en el texto del saber.

Valor de entrada	Valor de salida
7	14
8	16
9	18
15	30
18	36

Tabla 10. Representación tabular. (SEP, 2012c)

En esta tarea, el estudiante deberá identificar el valor de salida cuando el valor de entrada es de 5, 25 y 17, indicar las operaciones que permiten obtener los resultados y escribir una expresión matemática que produzca los valores de entrada y salida. El modelo algebraico surge al representar el valor de entrada con “x” y al valor de salida como “y”, para formar la expresión $y = 2x$, en este caso 2 representa dicha constante y establece que, si una magnitud aumenta el doble, el triple, etc., la otra lo hará en la misma proporción, a partir del análisis de la tabla se puede reconocer la relación entre el valor de entrada y de salida (dominio y codominio), de esa manera el estudiante podrá establecer la transición hacia un modelo generalizante que no se limita a los valores absolutos propios de la aritmética.

Luego de esta primera aproximación a los valores proporcionales, el texto del saber se centra en tareas relacionadas con la constante de proporcionalidad fraccionaria, la actividad es similar en todos los casos, plantear una representación tabular con los valores de entrada y de salida para establecer la relación entre ambos a través de una expresión matemática, la diferencia radica en el cociente fraccionario, este hecho al igual que en la perspectiva aritmética se resuelve al dividir el valor de salida entre el valor de entrada, sin embargo la dificultad y transición a la vez, radica en el modelo algebraico que tendrá que emplear el estudiante para establecer dicha relación, para encontrar el valor de *y* dados algunos casos, la expresión quedaría representada como: x/2, x*1.5 o x * 3/2 , x/10 o bien x*1.01.

En cuanto a la función lineal, en el texto del saber se incluyen tareas con representaciones tabular, algebraica y gráfica para estudiar el comportamiento de funciones de la forma $y = mx + b$, reconocer la pendiente de la recta como la razón del desplazamiento vertical en el eje y el desplazamiento horizontal en el eje x, identificar los conceptos de crecimiento y decrecimiento al observar el comportamiento de pendiente de una recta. (SEP, 2012c)

3.1.7. Organizaciones didácticas para la modelización algebraica.

Una vez realizadas las tareas anteriores como parte de la OM, se plantean tareas relacionadas con la OD mediante situaciones como:

- Analizar propuestas didácticas para la transición de la aritmética al álgebra.
- Diseñar secuencias didácticas para la educación primaria en las que se aborde el estudio de las literales y el desarrollo del pensamiento algebraico.
- Revisión y análisis de los contenidos matemáticos que se abordan en la educación primaria e identificación de aquellos que constituyen la base para el estudio de las transformaciones algebraicas.
- Diseñar problemas que requieran el uso del código algebraico en su planteamiento y solución. (SEP, 2012c)

Como puede observarse es a partir del modelo funcional que el estudiante tiene aproximaciones a conceptos asociados con la proporcionalidad, lo mismo desde un papel de aprendiz de matemáticas y como de profesor analista, éste último realiza principalmente análisis matemáticos o de perspectivas teóricas que permiten identificar la transición de la Aritmética al Álgebra. También se hace presente el rol del profesor diseñador de problemas matemáticos y secuencias didácticas, aunque los diseños no se experimentan en la escuela primaria porque no se corresponde el momento del diseño con el de prácticas en las escuelas primarias. Con ello se confirma la dificultad que existe en las restricciones institucionales de formación para la experimentación de dispositivos didácticos en la escuela primaria.

Una vez hecha la revisión general del texto del saber para identificar el número y tipo de tareas que se incluyen en el curso de Aritmética: su aprendizaje y su enseñanza (Modelo clásico de la proporcional) y en la primera unidad del curso de Álgebra: su aprendizaje y su enseñanza (Modelo funcional)[28], las OM que se identificaron fueron las siguientes:

Organizaciones matemáticas (OM)	Tareas/Número	Frecuencia relativa
Razones	7	33.33%
Porcentaje	3	14.29%
Proporcionalidad	5	23.81%
Relaciones funcionales	6	28.57
TOTAL	21	100%

Tabla 11. Organizaciones matemáticas en el texto del saber.

Como lo muestra la tabla 11, las OM relativas al estudio de la razón se incluyen en mayor número (33.33%), principalmente estas tareas se enfocan al trabajo con el concepto de razón, su representación en gráficas, la razón y comparación entre dos magnitudes, la relación entre la razón, la proporción y la fracción así como tareas para la búsqueda de razones equivalentes. Por su parte, para el estudio del porcentaje sólo se incluyen tres tipos de tareas, aquellas donde se vinculan porcentaje y razón, su representación gráfica y la resolución de problemas que involucran el cálculo de porcentajes como una razón.

En el caso del objeto central de esta investigación (la proporcionalidad), el número de tareas se ubica en un lugar intermedio en comparación con el resto de los otros conceptos matemáticos, el 23.81% de las tareas se focalizan en la proporcionalidad y fundamentalmente se refieren al manejo de la variación proporcional directa y la constante de proporcionalidad en modelos tabulares, la construcción de gráficas de proporcionalidad, la resolución de problemas de proporcionalidad directa y la búsqueda de valores faltantes. Por último, con relación a las relaciones funcionales

[28] Se retomó sólo la primera unidad del curso de Álgebra: su aprendizaje y su enseñanza dado que es en ésta donde se presenta de forma más clara y explícita la vinculación de la proporcionalidad con el modelo funcional.

se encontraron tareas asociadas al estudio de los patrones numéricos (valores de entrada y salida), valores proporcionales, reglas de dos pasos, patrones con valores negativos, constante de proporcionalidad fraccionaria y lectura de expresiones algebraicas.

En esta distribución se observa que sólo el 23.81% pertenece al estudio directo de la proporcionalidad, lo que indica un desajuste significativo en el bloque práctico-técnico, dicho desajuste muestra una débil formación matemática en el ámbito de la proporcionalidad y una relación apenas tangencial con los modelos epistemológicos de referencia (El modelo clásico y el modelo funcional). En cuanto a las OD, sólo se hace visible una diferencia de 5 tareas entre las OM y las OD (16 para las primeras y 21 para las segundas), no obstante la distribución porcentual entre los objetos de estudio si refleja diferencias relevantes, sobre todo en las OD de la proporcionalidad, esto se muestra en la siguiente tabla:

Organizaciones didácticas (OD)	Tareas/Número	Frecuencia relativa
Razones	3	18.75%
Porcentaje	9	56.25%
Proporcionalidad	0	0%
Relaciones funcionales	4	25,00%
TOTAL	16	100%

Tabla 12. Organizaciones didácticas en el texto del saber.

La tabla anterior muestra la ausencia de tareas didácticas para el estudio de la proporcionalidad, mientras que, paradójicamente el menor número de tareas matemáticas (para el porcentaje) se corresponde con el mayor número de tareas didácticas, éstas se refieren al análisis del funcionamiento del porcentaje como objeto matemático, a la identificación de dificultades que los alumnos de la escuela primaria pudieran tener en la resolución de situaciones problemáticas, la identificación de saberes previos necesarios para la comprensión de este concepto y la descripción de situaciones en las que el porcentaje se hace presente, cabe señalar que es en el estudio de este objeto de saber donde aparece la única OD cuya tarea corresponde con la puesta en práctica o experimentación de situaciones problemáticas con alumnos de la escuela primaria.

En lo concerniente a la razón, apenas se identificó un 18.75% de tareas didácticas que se centran en la identificación de los propósitos didácticos en ciertas lecciones del libro de texto y las dificultades que podría enfrentar un alumno de la escuela primaria para comprender su significado. En cuanto a las relaciones funcionales, el 25% de las tareas didácticas corresponden a este objeto y se focalizan en la revisión, análisis y diseño de situaciones problemáticas y secuencias didácticas.

En conclusión, el texto del saber refleja una distribución de tareas matemáticas y didácticas que da mayor énfasis al papel de "aprendiz de matemáticas" y sólo incluye pocas tareas en las que se sitúa como profesor en acto, tal situación se muestra en la siguiente tabla:

	Aprendiz de matemáticas	Profesor analista	Ingeniero diseñador	Profesor en acto
No. de tareas matemáticas	21	7	2	1
No. de tareas didácticas	0	5	1	0
Total absoluto	21	12	3	1
Total relativo	56.75%	32.44%	8.11%	2.70%

Tabla 13. Papel del profesor en las OM y las OD.

Tal como lo muestra la tabla 13, más de la mitad de las tareas (56.75%), son matemáticas, donde el estudiante adquiere el rol de aprendiz de matemáticas, mientras que el 43.25% son tareas didácticas en las que el profesor en formación juega un rol de analista, diseñador y profesor en acto, roles que se corresponden con los módulos del REI. No obstante la naturaleza de las tareas didácticas hacen mayor énfasis a la postura de profesor analista, sobre todo cuando se trata de la revisión de estructura, funcionamiento y dificultades de las tareas matemáticas vividas.

Para el caso del rol de profesor ingeniero o diseñador sólo se incluye un 8.11% del total de las tareas didácticas y de este porcentaje sólo una tarea corresponde al modelo aritmético, las dos tareas restantes se enfocan al modelo algebraico y promueven el diseño de situaciones que requieren el uso de un código de esta naturaleza y al diseño de secuencias didácticas para el desarrollo del pensamiento algebraico. Por otra parte, para el rol de profesor en acto sólo se incluye un 2.7% (una tarea) que corresponde al estudio del porcentaje y donde se pide que apliquen una situación problemática previamente elaborada, con alumnos de educación básica.

Como se puede observar, el texto oficial del saber no plantea un espacio curricular para la experimentación de dispositivos de enseñanza para la proporcionalidad, sólo se plantea para el porcentaje. Si bien es cierto que en otras asignaturas los profesores en formación realizan visitas de observación a las escuelas primarias, lo hacen para revisar los contextos en los que se ubican las escuelas, ocasionalmente pueden realizar una observación en aula, pero es hasta el segundo semestre, momento en el que ya ha pasado el estudio de la Aritmética (y de la proporcionalidad), cuando se programan ciertas "ayudantías"[29] en diferentes grados de la escuela primaria lo que minimiza las posibilidades de que cada uno de los estudiantes tenga la posibilidad de experimentar un dispositivo de enseñanza propio de la proporcionalidad.

Finalmente se podría decir que el texto del saber otorga mayor énfasis a las OM, lo que ilustra la importancia que la institución otorga al dominio de lo matemático, no obstante esta consideración, las temáticas que corresponden al estudio formal de la proporcionalidad se limitan al estudio de conceptos matemáticos que conforman el modelo clásico de la proporcionalidad y al bloque tecnológico-teórico propio de la Teoría de Razones y Proporciones, también se minimizan los momentos en que se especifican las técnicas convencionales que precisan identificar para gestionar su estudio y evolución en las escuelas de educación básica. Ambas deficiencias, la

[29] En las ayudantías los profesores en formación realizan actividades de apoyo con el profesor titular del grupo, tales como revisión de trabajos, registro de asistencia y entrega de tareas escolares y en algunos casos aplicación de alguna breve actividad como leer o escribir un texto con los alumnos, plantearles un problema matemático, esto generalmente como actividades diagnóstico que luego analizan bajo la luz de algún sustento teórico en la Escuela Normal, pero no se involucran directamente en el diseño de dispositivos didácticos para trabajar algún campo del saber, esto se presenta hasta el tercer semestre cuando cursan la asignatura de Geometría: su aprendizaje y su enseñanza.

conceptual y la técnica, influirán de manera directa en el diseño y posterior gestión de dispositivos didácticos.

En cuanto a las Organizaciones Didácticas es destacable la intención del texto para favorecer el papel del profesor analista, las tareas están centradas principalmente en las cuestiones matemáticas más que en las didácticas, en muy pocos momentos se pide al profesor en formación que diseñe situaciones o dispositivos para el estudio de la proporcionalidad y menos que pruebe los mismos en el espacio escolar. Es de considerar que el texto oficial del saber aumenta progresivamente la inserción de los profesores en formación en la praxis educativa y aunque en los últimos dos semestres de su formación la mayor parte la desarrollan en la escuela primaria, no es desconocido que al menos en el periodo en el que "estudian" cuestiones aritméticas (que corresponden a una gran carga curricular de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria) las aproximaciones entre el saber y el hacer didáctico guardan un importante desequilibrio en las praxeologías de formación.

CAPÍTULO IV
EL PROFESOR EN FORMACIÓN.
TAREAS, TÉCNICAS Y TECNOLOGÍAS DEL “APRENDÍZ DE MATEMÁTICAS”

Un Recorrido de Estudio e Investigación se establece a partir de una cuestión generatriz, esto es, de una “pregunta viva” (Q0) que permita el estudio de un saber particular, cuyas respuestas no sean directamente accesibles y que a su vez se desglose en cuestiones de diferente grado con las que se trastoquen las nociones relacionadas entre sí (Ruiz, 2015). Dicha cuestión articula los cuatro módulos que componen al REI-FP, esto es: M_1: «Vivir un REI», M_2: «Analizar el REI», M_3: «Diseñar un REI» y M_4: «Gestionar y experimentar un REI». Dado que esta investigación se centró en la formación matemático-didáctica de los estudiantes para profesor se consideraron los módulos, desde un rol en particular de los estudiantes normalistas, M_1: Aprendiz de matemáticas, M_2: Profesor analista, M_3: Ingeniero diseñador y M_4: Profesor en acto. Ante dicha especificación, la cuestión generatriz que de manera general constituye al REI-FP es la siguiente:

> Q0-FP: ¿Cuáles son las praxeologías matemáticas y didácticas ligadas a la proporcionalidad a incluirse en la formación de profesores?

Bajo esta perspectiva el M_1 del REI-FP que se presenta en este apartado se pregunta específicamente sobre la reconstrucción de praxeologías matemáticas, es decir su objetivo es que el profesor en formación “viva” el REI ocupando el rol de “aprendiz de matemáticas”, para ello se inscribe la cuestión (Q1):

> Q1: ¿Cuáles son las técnicas (τ) y el discurso tecnológico teórico (θ, Θ) que despliegan los profesores en formación para cumplir con tareas (T) matemáticas relativas a la reconstrucción de una praxeología ligada a la proporcionalidad?

Para dar respuesta a tal cuestión, en el desarrollo del primer módulo de este recorrido, se gestionaron los seis momentos de estudio[30] propuestos por Chevallard (1999), se inició con el primer encuentro con la proporcionalidad y se concluyó con su institucionalización en tanto saber formal y la evaluación de su dominio. Si bien en este módulo se plantearon algunas tareas que podrían denominarse como rutinarias porque los profesores en formación dominaban ya las técnicas para su solución, también se plantearon tareas para las que aún no disponían de una técnica formalizada o convencional. Con ello "…nuevos tipos de tareas, que son entonces los tipos de problemas, se asientan así, y nuevas praxeologías vendrán a constituirse a su alrededor…" (Chevallard, 1999, p. 227). Dicho asentamiento pretendió establecer un recorrido desde la aritmetización -vista a partir de la Teoría de las Razones y Proporciones- hacia el modelo algebraico, con el cual arribar a la generalización en la solución de situaciones de la proporcionalidad.

Esta cuestión Q1, generó a su vez diversas cuestiones propias de la secuencia de estudio de la proporcionalidad. El siguiente planteamiento denominado "El Petróleo" se constituyó como el eje del recorrido de estudio a través del cual se organizaron todos los módulos del REI-FP.

> En México se preparan varias clases de petróleo crudo para exportación, entre ellas el Olmeca y el Maya, según su demanda tiene variaciones en su cotización, los datos más recientes indican que durante el último cuatrimestre del 2014 el costo de un barril de petróleo Olmeca era de $995 y el de un barril de petróleo Maya era de $865. Dado el impacto que tiene la variación de los precios en la producción del petróleo resulta interesante realizar un estudio que permita identificar la relación que se establece entre el número de barriles y su costo.

En lo que sigue, se pretende dar cuenta del tipo de tareas T1 (cinco) que se desprenden de la situación anterior y de las técnicas matemáticas que los profesores en formación desplegaron ante cada una. Mediante este análisis se busca identificar las técnicas que resultaron más eficientes para cada tarea y la evolución de las técnicas utilizadas, además también se analizará el discurso tecnológico que subyace a las técnicas empleadas.

[30] Los momentos de estudio son: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación.

4.1. EL VALOR FALTANTE Y DISTINTAS MAGNITUDES EN LA VARIABLE

Para dar respuesta a las cuestiones anteriores, primero se planteó a los profesores en formación el tipo de tareas relativas al valor faltante en una relación proporcional entre dos magnitudes (cantidad-costo), se consideró que la técnica más recurrente para resolver este tipo de tareas sería la multiplicación, misma que se asociará en tareas posteriores al concepto de proporcionalidad, la cuestión propia de este tipo de tareas se muestra a continuación:

> Q1.1. ¿Cuáles son las técnicas (τ) que despliegan los profesores en formación durante el desarrollo de tareas (T) asociadas al valor faltante en la proporcionalidad?

Para dar respuesta a dicha cuestión se implementó una tarea (T1.1) relativa al valor faltante con diferentes magnitudes, a partir de los siguientes cuestionamientos:

- ¿Cuál es el costo de 4 barriles de petróleo Maya? (magnitud entera)
- ¿Cuánto se debe pagar por 3/4 de barril Maya? (magnitud fraccionaria)
- ¿Cuánto se debe pagar por 0.358 partes de barril Maya? (magnitud decimal)
- Si se quiere comprar $900.00 de petróleo Maya, ¿qué cantidad de barriles se debe dar? (valor faltante magnitud entera-número de barriles.)

Para este tipo de tareas las técnicas más eficientes son el valor unitario y el factor de proporcionalidad, ello en función del tipo de magnitud que se esté planteando, en este caso se entiende que al tratarse de una relación directamente proporcional el cociente de las magnitudes que varían es siempre el mismo, y en esta variación es $\frac{865}{1}$.

En las tareas enunciadas, la constante de proporcionalidad o valor unitario se relaciona con el precio de cada barril. Entonces, para encontrar *el costo* (valor faltante) en esta variación, se puede utilizar la siguiente técnica: a) identificar el costo de un barril (valor unitario) y, b) multiplicar dicho valor por la cantidad de barriles que se desea comprar (4, ¾ o 0.358). Del mismo modo, para encontrar *el número* de barriles que se compran con determinada cantidad de dinero (valor faltante), se puede utilizar la siguiente técnica: a) identificar el valor unitario (865) y, b) dividir la cantidad de dinero entre el valor unitario.

Durante el momento exploratorio del tipo de tareas T1.1, se esperaba que los profesores en formación identificaran y utilizaran las técnicas enunciadas: valor unitario o factor constante de proporcionalidad (τ1) y regla de tres (τ2) aunque se esperaba también que el valor unitario fuese la más utilizada por su eficacia y economía.

Si bien los planteamientos problemáticos incluyeron diferentes tipos de magnitudes (entera, decimal o fraccionaria), la intención era que los estudiantes identificaran y utilizaran una técnica (τ) para un mismo tipo de problemas (valor faltante). Una vez que utilizaran y validaran la eficacia de la técnica, se gestionaría un momento de trabajo de la técnica [31] para que los profesores en formación la dominaran plenamente, de modo tal que en lo sucesivo fueran capaces de identificar el tipo de tareas para las que τ1 y τ2 resultan eficientes y utilizarlas de modo efectivo. Así, en la medida que comprendan su funcionalidad, será posible gestionar el momento de institucionalización (tecnológico-teórico) relativo a la Teoría de Razones y Proporciones.

a) Magnitudes enteras.

La tarea tenía como propósito identificar el valor faltante (costo de "x" número de barriles) en una relación de variación proporcional entre magnitudes enteras (costo/número de barriles). Para esta tarea, la técnica más eficiente y económica[32] es la de "valor unitario" puesto que en la variación planteada se incluye el costo de un barril ($865), por lo tanto para encontrar el valor faltante bastaría por multiplicar cualquier número de barriles por el valor de un barril. En lo que sigue se describen las técnicas utilizadas por los profesores en formación.

[31] Recuérdese que el momento de trabajo de la técnica se caracteriza por mostrar a través de la consideración de una OM particular (el estudio de la proporcionalidad) la forma en que se puede retomar un ingrediente técnico que los alumnos han aprendido a emplear de modo rígido y limitado para generar nuevas técnicas, nuevas justificaciones, explicaciones y cuestiones con el propósito de que la OM inicial se amplíe y complete progresivamente. (Fonseca, Casas, Bosch y Gascón, 2009)

[32] Si bien, esta tarea también puede resolverse utilizando la técnica "regla de tres", lo que indica que tanto el "valor unitario" como la "regla de tres" son eficientes para esta tarea. La más económica, porque exige menos fases en su desarrollo es la de "valor unitario".

Para resolver la primera tarea *¿Cuál es el costo de 4 barriles de petróleo Maya?*, siete de los ocho profesores en formación utilizaron, la técnica del valor unitario considerándolo como multiplicador, lo que se muestra en la imagen 11 con el ejemplo de PF4.[33]

Imagen 11. El valor unitario como multiplicador. (PF4)

En el caso anterior, la multiplicación se asocia a una situación que corresponde a una relación de proporcionalidad y aunque ésta posiblemente no ha sido identificada todavía desde una definición formal, los profesores en formación, expresan el uso de la multiplicación como una τ plausible con la cual inicia el estudio de la proporcionalidad.[34]

Siguiendo esta perspectiva se presentó el caso de un profesor en formación (PF2) que además de la consideración anterior optó por una representación inicial de la regla de tres:

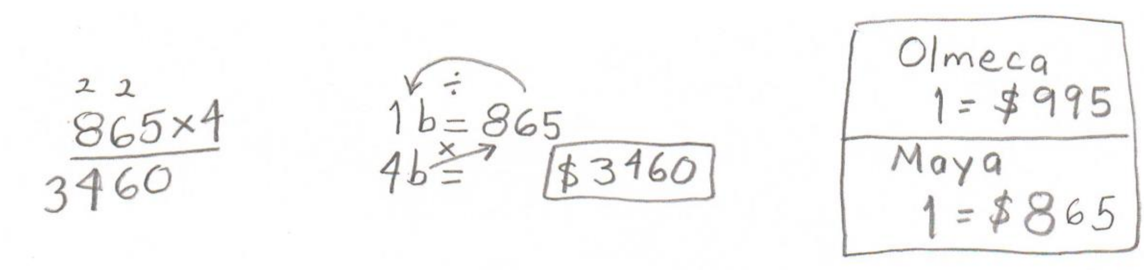


Imagen 12. Representación de regla de tres. (PF2)

No obstante, como se puede ver, esta τ no fue desarrollada completamente ya que durante el proceso se omitió registrar que esta acción resultaba innecesaria para

33 Donde PF significa Profesor en formación seguido por el número asignado a cada uno de los sujetos de estudio para una mejor sistematización.

34 Para el estudio de la multiplicación con números naturales, el primer paso es favorecer la comprensión del producto como cantidad de elementos o medida resultante de grupos de igual número de elementos o medidas que se repiten, lo que se refiere a un caso particular de la proporcionalidad. (Isoda y Olfos, 2009b)

llegar al resultado. En esta tarea los ocho profesores en formación identificaron y emplearon el valor unitario (ᴛ1) como factor en una multiplicación con magnitudes enteras como la ᴛ más eficiente y económica para resolver la situación planteada.

b) Magnitudes fraccionarias.

En la tarea donde se incluyó una magnitud fraccionaria *(¿Cuánto se debe pagar por 3/4 de barril Maya?)* el valor unitario (ᴛ1) también fue la ᴛ más utilizada, seis de los ocho profesores en formación la utilizaron, aunque con algunas variantes como se aprecia en las siguientes figuras:

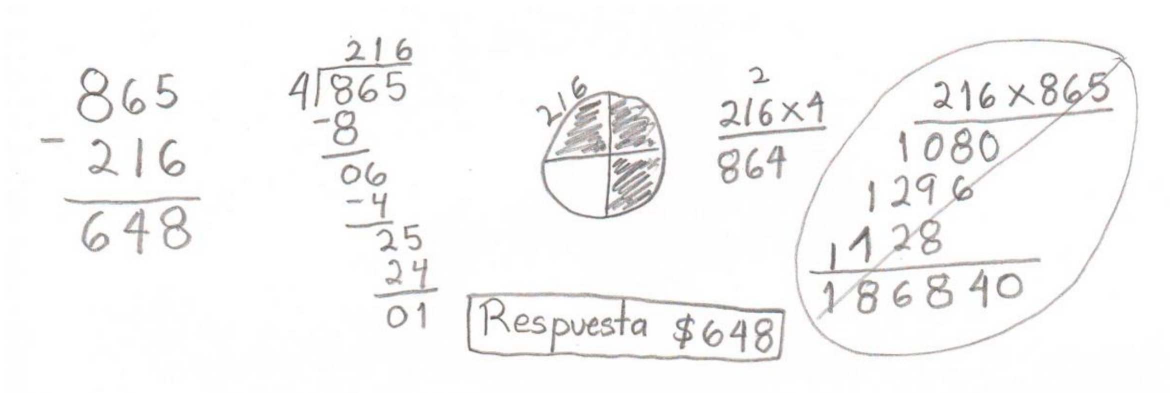


Imagen 13. Representación gráfica de la fracción. (PF2)

Para el caso del PF2 el valor unitario fue retomado como el dividendo a partir del cual identificar el valor de cada ¼ de barril, realizando una división entre cuatro para después establecer una resta del cociente al valor unitario y obtener así el valor de ¾ de barril, en esta tarea destaca la representación gráfica de la fracción en cuestión y la expresión del valor de cada una de las partes, para culminar el desarrollo procedimental el profesor en formación hizo una multiplicación del valor de un cuarto (216) por el valor unitario ($865) posiblemente en un intento de “validación” de la ᴛ, sin embargo el producto encontrado no da lugar a una magnitud afín al planteamiento por lo que PF2 la invalida.

Otro caso asociado al valor unitario (costo de un barril) para encontrar el precio de ¾ de barril, se observa en la siguiente figura en la cual cuatro profesores en formación como PF1 primero dividieron 865 entre 4 y posteriormente multiplicaron el resultado por tres.

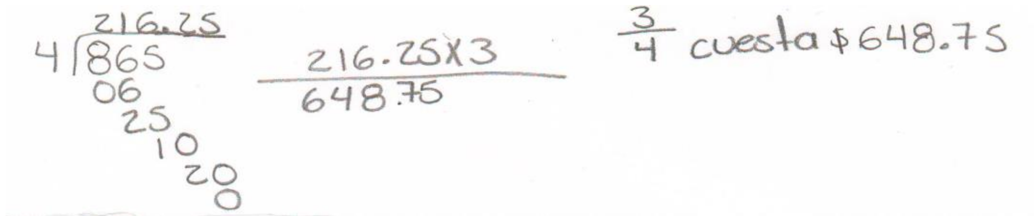


Imagen 14. Valor unitario en la magnitud fraccionaria. (PF1)

Un ejemplo más en el que se hizo uso del valor unitario fue el empleado por PF5 quien transformó ¾ en 0.75 para luego multiplicar 0.75 por 865 (Imagen 15):

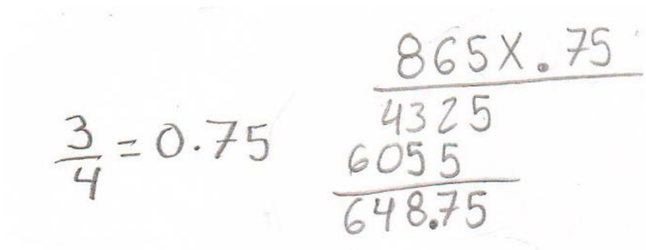


Imagen 15. Cambio de magnitud fraccionaria a decimal. (PF5)

Seis de los ocho profesores en formación utilizan la técnica del valor unitario en los cuatro ejemplos anteriores y como se puede observar, la técnica convencional para esta multiplicación es 865x3/4= 865 por 3, entre 4, cuya equivalencia en números decimales es 648.75. Lo que se desea destacar en este caso es que, si bien llegan al resultado correcto, en su acción se vislumbran dificultades para operar con la técnica para multiplicar fracciones.

En cuanto a la τ2 (regla de tres) dos profesores en formación la utilizan para dar respuesta a la tarea planteada, uno de ellos la representa al inicio del proceso pero termina empleando sólo el producto de 865 por 0.75 para encontrar el resultado, por su parte PF3 si hace el desarrollo total del proceso de la τ2, como se observa en la siguiente imagen:

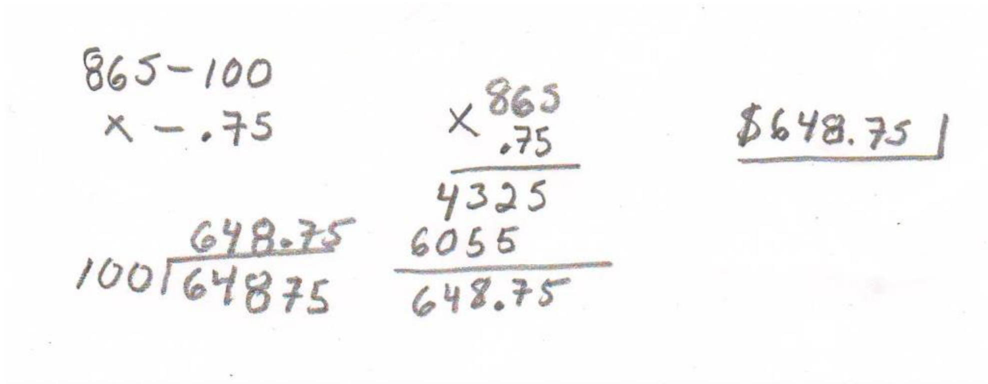


Imagen 16. Representación inicial de regla de tres en decimales. (PF3)

En la imagen 16 se puede ver que la magnitud fraccionaria (3/4) es convertida a expresión decimal, sin embargo la representación del costo de un barril ($865) no es asociada a 1 sino a 100 posiblemente porque dicha cantidad constituye el 100% del costo y aunque la respuesta se obtiene con la multiplicación el valor unitario por ¾ (0.75), el estudiante “elimina” el punto decimal para dividir la cantidad resultante entre 100 y llegar al resultado, paso que resulta innecesario. Con esta situación se puede observar que aunque la técnica τ2 (regla de tres) resuelve la tarea, es la técnica τ1 (valor unitario) la que resulta más económica en la tarea con números fraccionarios sólo que la mayoría opta por utilizar decimales para facilitar su operatoria.

c) Magnitudes decimales.

En lo que corresponde a la tarea que incluye una magnitud decimal, *¿Cuánto se debe pagar por 0.358 partes de barril Maya?*, la técnica más empleada también fue τ1 (valor unitario) aunque no se diversificó tanto como en la tarea con magnitud fraccionaria. Siete profesores en formación encontraron el resultado como el producto del valor unitario (865) por la parte decimal del barril Maya (0.358). Un ejemplo se puede observar en la siguiente figura con una multiplicación directa:

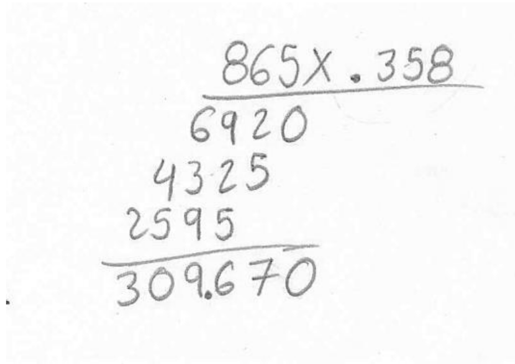


Imagen 17. Magnitud decimal. (PF5)

Como se puede ver, los profesores en formación detectaron que es el valor unitario el que funge como multiplicando y que al tratarse de una relación de proporcionalidad al igual que en una magnitud entera basta con multiplicar por la magnitud decimal de modo directo. No obstante la eficiencia de la técnica anterior, hubo un profesor en formación (Imagen 18) que optó por representar y desarrollar la regla de tres.

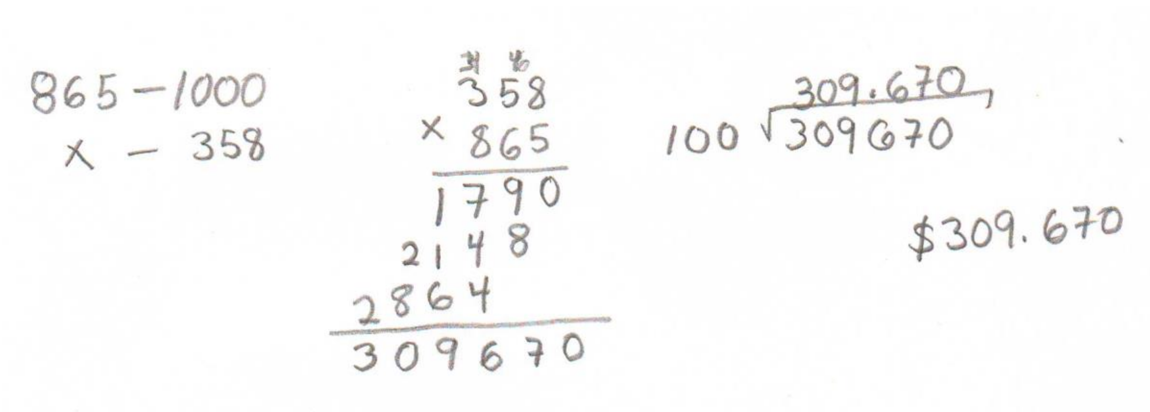


Imagen 18. El uso de milésimos. (PF3)

En este caso el estudiante asoció el 865 con 1000, posiblemente asume que la multiplicación se trata de milésimos (dado que la parte decimal corresponde a milésimos). La representación de la т2 muestra el multiplicador como un entero (358) por lo que la división entre el divisor 1000 se hace necesaria, si bien al momento de colocar la división PF3 omite un cero en el divisor, el cociente es coincidente con el resultado correcto.

En esta primera tarea, la τ1 (valor unitario) resultó ser la más pertinente para la resolución, los profesores en formación identificaron que se trataba de una tarea asociada a la multiplicación con una relación de proporcionalidad que podía resolverse a través del valor unitario como multiplicando, la τ2 (regla de tres) fue empleada en algunas situaciones sin embargo al tratarse de dos términos conocidos y un tercer término con valor 1, la división entre éste resultaba innecesaria; la principal dificultad se observó en la multiplicación por magnitudes fraccionarias, mismas que fueron convertidas a magnitudes decimales para su operatoria. En términos generales, en este primer acercamiento los profesores en formación tuvieron respuestas correctas en la resolución a través de las técnicas desplegadas en cada planteamiento.

Respecto a la tarea que se cuestiona sobre la “cantidad de barriles” ante ciertos costos establecidos, el valor unitario constituía una técnica eficiente en tanto el costo de un barril llegaba a fungir como divisor del número de barriles dado, es decir, el inverso del valor unitario se constituía como la técnica más eficiente y económica. Cabe aclararse que los costos se relacionaban entre sí para observar si esta situación modificaba la técnica empleada.

En el primer caso se trataba de encontrar la cantidad de barriles que se podrían comprar con $900 pesos, la segunda con $450 y la tercera con $45. En esta tarea, seis de los ocho profesores en formación intentaron representar la regla de tres (τ2), pero dos de ellos (Imagen 19) no desarrollaron la técnica completa porque obtuvieron el resultado al dividir 900 entre 865 y la multiplicación de 900 X 1 no era necesaria.

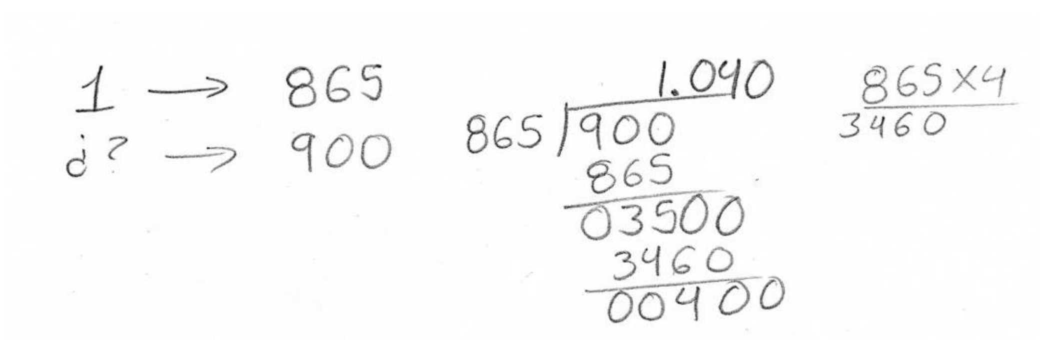


Imagen 19. Valor unitario como divisor. (PF5)

Otros dos profesores en formación hicieron algo similar (Imagen 20), sin embargo, como se puede ver en la siguiente imagen, calculan la diferencia entre el precio de un barril y el dinero que se quiere gastar (900-865), con ello “extraen” un barril entero e intentan encontrar la fracción de barril que falta (representada por la diferencia 35); luego plantean la igualdad 100/865=x/35 donde x es la fracción de barril. Cuando obtienen x=0.04 barriles, lo suman al barril completo que habían separado y encuentran el resultado, es decir 1.04 barriles por $900.

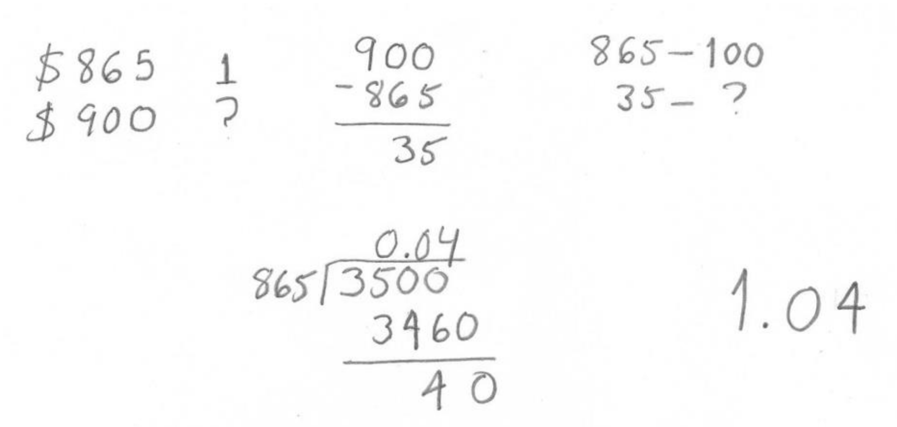


Imagen 20. El uso de diferencias. (PF6)

En esta técnica, pareciera que la regla de tres es la técnica empleada, sin embargo el proceso no se desarrolla de manera explícita ya que la multiplicación 35X100 no es representada y el resultado sólo se coloca como dividendo, siendo el cociente 0.04 la cantidad adicional a un barril por cuyo total se pagará $900.

Cabe señalar que en estos casos, hubo quienes no utilizaron eficazmente esta técnica, PF8 separó un barril completo (900-865), pero en lugar de representar la igualdad 100/865 = x/35 dividió 865 entre 35 lo que indica que establece una variación falsa 1/35 = x/865, con base en este error divide 865 entre 35 y encuentra 24.71 para sumarlo al barril separado inicialmente (Imagen 21):

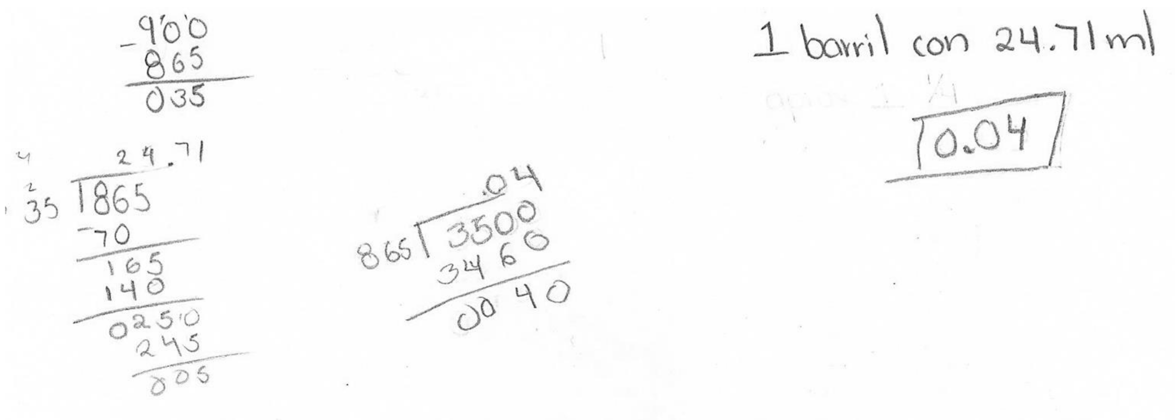


Imagen 21. Falsa variación. (PF8)

La técnica desarrollada por PF8 es replanteada en un segundo momento ya que la respuesta inicial de 1 barril con 24.41ml parece no ser coincidente con el planteamiento de la situación problema, en tanto que ésta no establece en ningún momento el manejo de litros por barril, por ello la respuesta final que se expresa es 0.04, hecho que también resulta erróneo al considerar sólo una parte del costo enunciado ($35 de $900).

Para resolver la cuestión sobre el número de barriles que se compran con $450, tres profesores en formación representan inicialmente la τ2 (regla de tres) pero no la desarrollan, es decir omiten la multiplicación 450X1 y sólo dividen 450 ÷ 865 = 0.52 (Imagen 22), dos profesores en formación siguen esta misma lógica aunque no representan la regla de tres y sólo utilizan la segunda parte del procedimiento, es decir utilizan el valor unitario como divisor.

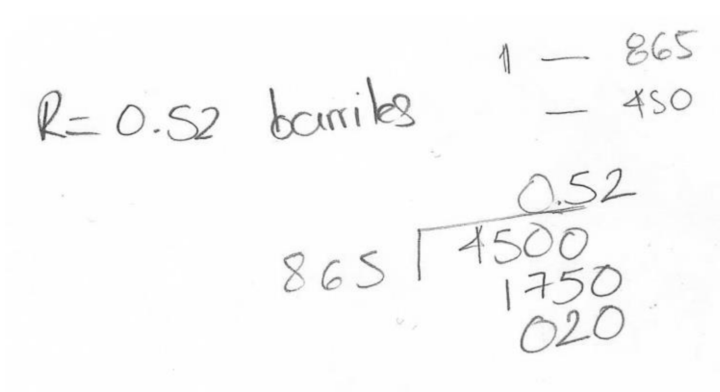


Imagen 22. El uso del divisor. (PF4)

Otros profesores en formación simplifican el proceso y sólo dividen el resultado de la tarea anterior ($900) entre dos, identificando así que al solicitar la mitad del costo dado, la cantidad de barriles también deberá ser proporcional a ello (Imagen 23) .

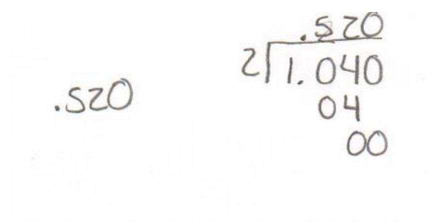
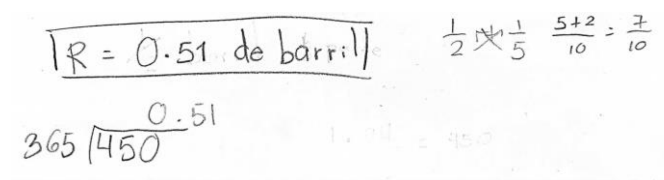
 Caso A (PF1)	 Caso B (PF2)

Imagen 23. División de cocientes. (PF1 y PF2)

Para los casos anteriores resulta más sencillo encontrar el valor de la cantidad de barriles a partir de una magnitud conocida en una tarea precedente, así dos profesores en formación desarrollan acertadamente el caso A, mientras que PF2 del caso B aunque intenta utilizar la misma técnica manifiesta un error semántico en el procedimiento mismo que no guarda relación con la respuesta dada, a decir de lo planteado PF2 inicia con el desarrollo de una suma de fracciones, ½ + 1/5 = 7/10, se deduciría en esta parte que ½ indica que se busca la mitad de la magnitud conocida, sin embargo se desconoce el origen de 1/5, al parecer esta técnica resulta poco eficiente y se opta por dividir el costo de $450 entre una magnitud que tampoco guarda relación con la situación planteada, por último coloca un cociente que no corresponde a la operación planteada pero si al resultado de la tarea.

En la última variante de esta tarea se esperaba que los profesores en formación simplificaran la técnica ya que las magnitudes de esta tarea estaban relacionadas con las cantidades precedentes ($900, $450, $45) es decir, se esperaba que, al reflexionar sobre las técnicas empleadas en las tareas anteriores pudieran establecer que 450 es un medio de 900 y 45 es un décimo de 450. Sin embargo, en esta tarea nuevamente es la técnica del valor unitario que se hace presente. Cinco profesores en formación representaron la regla de tres y uno utilizó directamente la división (Imagen24):

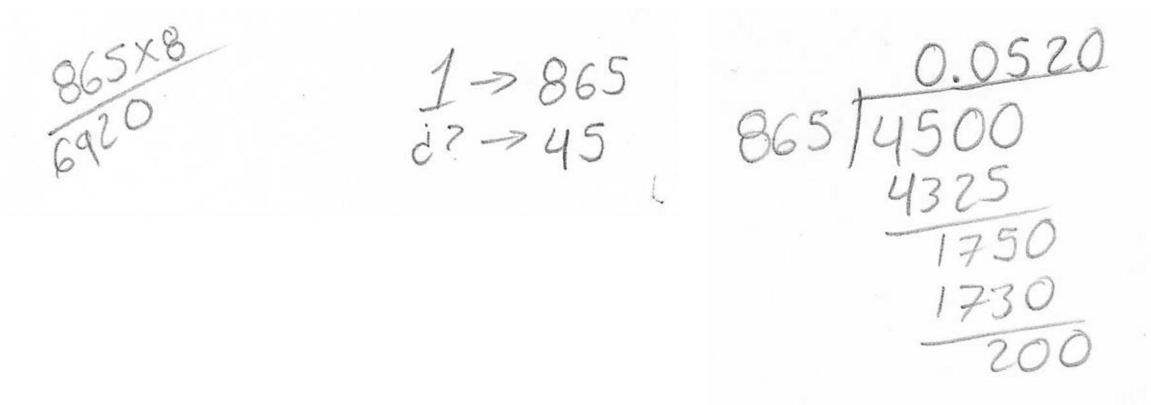


Imagen 24. El valor unitario como divisor. (PF5)

Tres estudiantes simplifican al recorrer el punto decimal al resultado de la tarea anterior, uno de ellos argumenta que “sería una décima parte” y anota 0.052, mientras que el otro con error de cálculo escribe la cantidad 0.050202

En el caso de estas tareas, el valor unitario sigue siendo la técnica más eficiente y económica que se ha empleado, si bien los costos de petróleo dados ($900, $450 y $45) estaban relacionados entre sí con la intención de ver la simplificación en el proceso de resolución el valor unitario en su papel de divisor se ha hecho presente y se ha rutinizado de modo tal que los estudiantes lo identificaron como una técnica propia de ese tipo de tareas.

De acuerdo con los resultados obtenidos en este primer tipo de tareas, la habilidad que muestran los profesores en formación para resolver tareas del tipo valor faltante parecería no tener relación directa con las situaciones que requieren el razonamiento proporcional, es decir, el procedimiento para resolver tareas de valor faltante no presupone de manera inicial el razonamiento proporcional. En los resultados se observa que los estudiantes resuelven tareas de este tipo a través de una práctica dominada, la multiplicación y división, de hecho se podría decir que las tecnologías implícitas para dar justificación al manejo de la técnica no se asocian de modo inicial a la proporcionalidad sino a uno de los usos funcionales de estas dos operaciones aritméticas, esto se hace manifiesto sobre todo en las tareas con magnitudes enteras.

No obstante, ante ciertas circunstancias las tareas enfocadas a encontrar el valor faltante mediante la técnica del valor unitario, si implica una interpretación de la relación que se da entre dos magnitudes –costo y número de barriles-, el manejo implícito de razones y proporciones se hace evidente cuando los estudiantes representan la variación mediante la regla de tres aunque su proceso no sea desarrollado porque la T alude al manejo del valor unitario.

Una de las τ que son empleadas para establecer el sentido de la relación entre las magnitudes enunciadas[35], cuando la regla de tres no resulta una τ económica, es el uso de este valor como multiplicador o divisor y aunque desde el discurso tecnológico para este tipo de T, el factor constante de proporcionalidad también es útil, no lo es para ellos, porque no reconocen un cociente constante, al menos no en la resolución ni en el discurso tecnológico que hacen manifiesto en los momentos de estudio, cuando señalan que las τ de resolución más eficientes para este tipo de situaciones son la multiplicación y la división, que corresponden al manejo del valor unitario.

Si bien dentro de los resultados se identificaron ciertos errores de cálculo, la totalidad de los profesores en formación comprende la tarea y despliegan técnicas eficientes para su resolución, por lo tanto se podría argumentar que las tareas del tipo del valor faltante en la proporcionalidad directa constituyen un recurso eficiente para brindar el primer acercamiento hacia la comprensión y dominio de esta noción matemática al identificar la relación que se establece entre dos magnitudes y su variación de modo proporcional, este hecho se hace presente cuando al manipular cantidades asociadas que se encuentran relacionadas entre sí (como los costos dados en la T para identificar el número de barriles) los estudiantes logran anticipar el resultado para otras parejas de cantidades sin tener que desarrollar la técnica que ya ha sido dominada.

[35] Relación que alude a una proporcionalidad directa en el caso de la T del valor faltante.

Ante las consideraciones anteriores, resulta plausible argumentar la importancia del manejo y reconocimiento de esta técnica como parte predominante del discurso tecnológico matemático, si bien dentro del análisis económico sobre el estudio de la proporcionalidad en las Escuelas Normales como institución, se incluye el cálculo del valor faltante, éste se remite al encuentro del mismo en dos razones equivalentes que difícilmente permite identificar el papel que juega el valor unitario en tanto factor constante de proporcionalidad para este tipo de T.

4.2. LA GRÁFICA DE UNA VARIACIÓN PROPORCIONAL

Ante la necesidad de ponderar la "razón de ser" de las praxeologías matemáticas reconstruidas en la primera tarea, resultaba pertinente el planteamiento de otras tareas que en las que se hiciera presente la necesidad del discurso tecnológico, es decir, de justificar la elección de cierta técnica para un tipo de tareas además de interpretar su funcionamiento y el resultado de su aplicación. Para ello pareció necesario plantear tareas en nuevos contextos matemáticos, aunque, cabe aclarar, también en estos casos están referidas a la utilización de técnicas como el valor unitario y la constante de proporcionalidad. De la tarea T1.2 se desprende la siguiente cuestión que deriva también de la cuestión generatriz (Q0):

> Q1.2. ¿Cuáles son las técnicas (τ) que despliegan los profesores en formación durante el desarrollo de tareas (T) relativas a la interpretación y operación gráfica de una variación proporcional?

El trabajo con expresiones gráficas en la relación proporcional es una representación que permite presentar conjuntos de datos de modo que es factible observar sus relaciones, establecer comparaciones y predecir tendencias. Con la cuestión anterior se intenta destacar la eficacia funcional de las técnicas que se han venido trabajando desde la tarea T1.1 y vincular la actividad matemática con situaciones en las que este concepto matemático tiene lugar.

La intención de la tarea T1.2 es que los profesores en formación desarrollen recursos que se constituyan como nuevos saberes asociados a ciertas praxeologías que ya han sido resueltas con determinadas técnicas. Aunque cabe la posibilidad de que se utilicen distintas técnicas para alcanzar la solución, el propósito de la cuestión Q1.2 y específicamente de la tarea T1.2 es desarrollar dos tareas del tipo “operar con una variación proporcional de modo gráfico”, lo que se busca es que mediante este tipo de tareas el profesor en formación identifique otro tipo de situación donde el valor unitario o la constante de proporcionalidad constituyen una técnica eficiente pero también que identifiquen que en ese tipo de situaciones la regla de tres pudiera resultar una técnica posible.

La representación gráfica de la situación que se trabajó a lo largo del REI-FP se ilustra en la siguiente imagen:

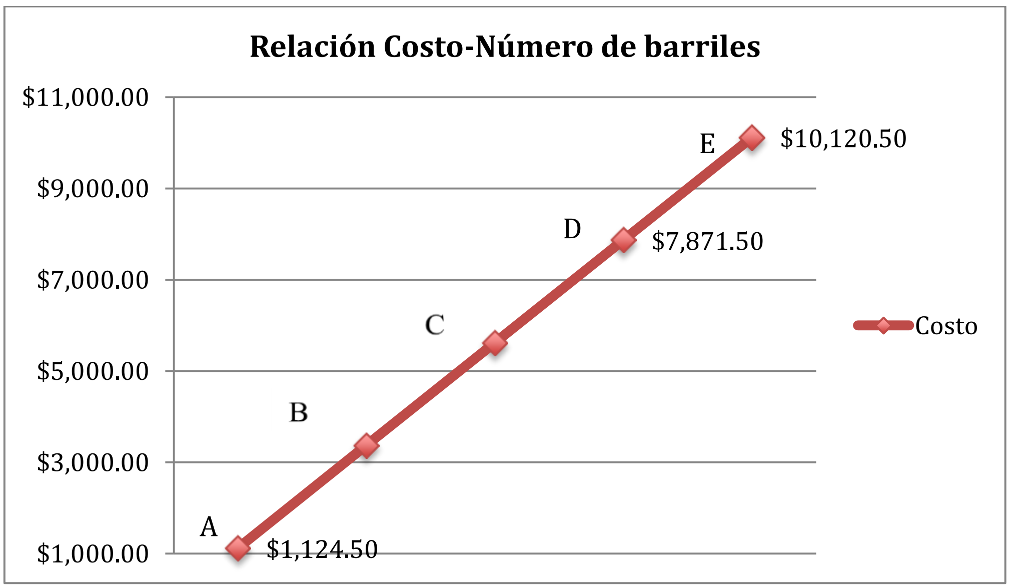


Imagen 25. Gráfica de variación proporcional costo-número de barriles.

Como se puede observar, el gráfico corresponde a una relación de proporcionalidad directa, una de sus características es que al prolongar la línea recta, ésta pasará por el punto de origen en un sistema de coordenadas cartesianas. Además, una vez identificados los valores del eje X, se podrá observar que el cociente entre las dos magnitudes (y/x) es constante. En este caso el valor de la constante de proporcionalidad (k = y/x) es $865, lo que lleva al uso del valor unitario con el costo de un barril.

Las magnitudes variables que se presentan en la gráfica son *Número de barriles* (x) y *Costo* (y), dada la pendiente de la recta se puede identificar que se trata de magnitudes que presentan una variación directamente proporcional, lo que significa que por cada 1.3 barriles que se compren se deberá pagar $1124.50, con lo que se mantiene un precio constante de $865.

Las tareas que se derivaron de la gráfica anterior se enfocaron a dos propósitos:

- Encontrar el valor de dos puntos desconocidos (B y C) dada una gráfica que representa una relación de variación proporcional relativa a los costos del petróleo Maya.
- Identificar el valor en el eje de las X de A, B, C , D y E correspondiente al número de barriles de los costos expresados en cada uno de los puntos

Las técnicas que se intentaron resaltar fueron valor unitario o factor constante de proporcionalidad (τ1) y regla de tres (τ2), sin embargo, el método de diferencias (τ3) también constituye una técnica plausible que podía resultar pertinente para el funcionamiento de la regla de tres. La τ3 resultaba factible sobre todo en la primera tarea ya que permitiría identificar la diferencia entre los puntos D y E al sumar al valor del punto A, luego al de B y finalmente al de C. Esta técnica se diversificará al cuestionar a los profesores en formación sobre los valores del eje X para cada uno de los puntos dados, donde se espera que los estudiantes hagan uso de τ1 y τ2.

a) Los valores de los puntos en una gráfica.

La intención en la primera tarea de esta naturaleza, además de poner en juego las técnicas mencionadas, era la de identificar otros registros de representación de la proporcionalidad dentro del REI planeado, en este caso se trató de identificar el registro gráfico de una variación proporcional.

En esta tarea era importante que el profesor en formación identificara que la distancia entre los puntos es uniforme y que forman una línea recta que pasa por el origen del plano, esto les permitiría comprender que el costo de cero barriles es de cero pesos; ante esta consideración la técnica más utilizada fue el método de diferencias, establecido desde el diseño del REI. Para resolver esta tarea, seis alumnos se apoyaron en los valores conocidos para identificar la diferencia entre éstos y, una vez reconocida sumarla o restarla a dichos valores para encontrar el valor de los puntos faltantes (Imagen 26).

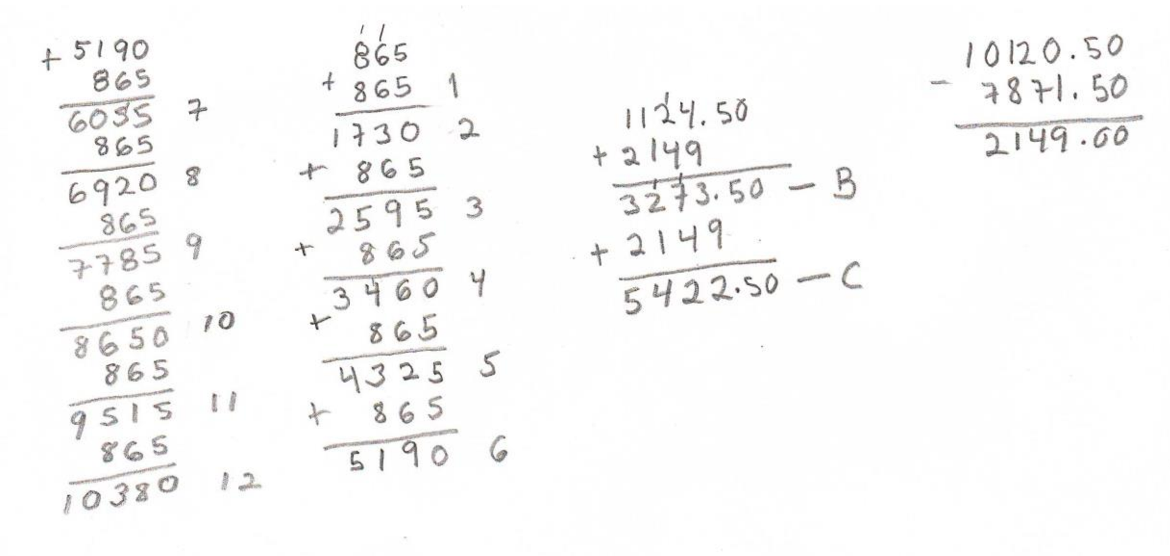


Imagen 26. Método de diferencias. (PF3)

Una primera acción para desplegar la técnica del método por diferencias consistió en establecer ciertas aproximaciones entre la suma de un barril a otro hasta llegar a una cantidad cercana a las mostradas en la gráfica, esta suma iterada culminó cuando se encontró el número aproximado de barriles que corresponde al punto E (12). Esta técnica resultó de utilidad al profesor en formación para dar respuesta a ambas tareas ya que por un lado permitió aproximaciones a la variable “costos” de los puntos desconocidos y por otro logró acercarse al valor de los puntos del eje X, esto es al número de barriles que corresponde a cada punto. Aunque la Imagen 26 muestra que el profesor en formación inició con dicha técnica (que podríamos llamar Método de Diferencias 1) se observa también que al no obtener respuestas precisas, la abandona para utilizar otra técnica que le permite llegar al resultado (Método de Diferencias 2) en el cual al valor del costo conocido en el punto E le restó el valor también conocido del costo mostrado en el punto D, esta diferencia es adicionada progresivamente en los puntos A, B y C, así cinco de los seis profesores optaron por utilizar esta última variante del método de diferencias. Este hecho deja al método de diferencias como la técnica más recurrente y efectiva para esta tarea.

Otros dos profesores en formación optaron por una técnica diferente (Imagen 27), primero encontraron el valor de los puntos en el eje X para tomarlo como referente.

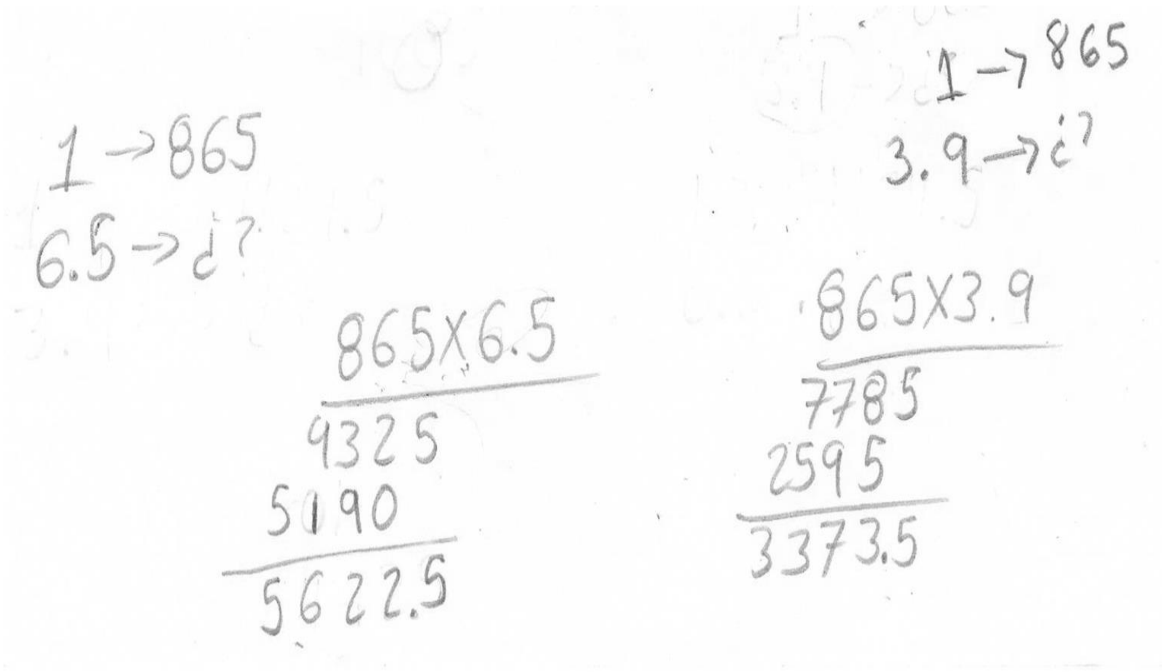


Imagen 27. Constante de proporcionalidad. (PF5)

El ejemplo expresado por PF5 indica la necesidad de conocer previamente los valores de los puntos B y C en el eje X (6.5 y 3.9) para establecer con ello una representación de la regla de tres en la que los valores desconocidos hacen alusión al costo de 6.5 y 3.9 barriles, al conocer el valor unitario sobre el precio del barril, basta con multiplicar el número de barriles de los puntos en cuestión (B y C) por el valor unitario. Las fases de esta técnica indican que, implícitamente, los profesores en formación se basan en la condición de que $y = kx$ (costo total = valor de un barril por el número de barriles).

b) El valor de los puntos en el eje X.

Para resolver esta tarea resultaba útil identificar que la gráfica representa una línea recta con un ángulo de 45º, es decir, un incremento continuamente constante. Cuando las magnitudes cambian a un ritmo constante se percibe la existencia de una relación proporcional y, siguiendo con la representación de la constante de proporcionalidad (*k = y/x)* que constituiría el discurso tecnológico o justificatorio (θ) de esta técnica, es decir, si *k* = 850, *y* = costo total de barriles y *x* = número de barriles, al despejar x, se tiene que *x = y/k.*

Este discurso o esta justificación de la técnica se hizo presente de modo implícito en la técnica utilizada por cinco profesores en formación, ellos se apoyaron en la representación de la regla de tres para visualizar la técnica que finalmente los llevó al resultado (Imagen 28).

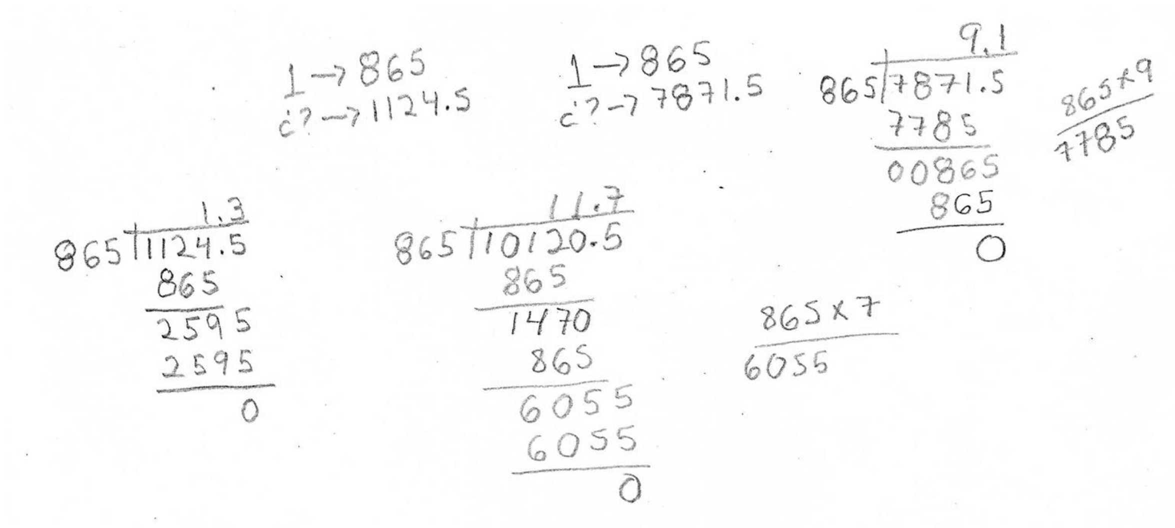


Imagen 28. El eje X con la regla de tres. (PF5)

El ejemplo que muestra PF5 señala el uso parcial de la regla de tres a partir del manejo de los datos conocidos es decir para encontrar el valor del punto A en el eje X retomó el costo de $1124.50 explicitado en la gráfica y lo asoció con el costo de un barril ($865), la multiplicación por uno en la regla de tres se omitió al tratarse de una constante de proporcionalidad coincidente con el valor unitario, cabe señalar que estos profesores en formación habían calculado el valor de los puntos desconocidos

(B y C) a través del método de diferencias por lo que aunque no lo explicitan la lógica de su técnica permite deducir que el valor del eje X en dichos puntos se logró de la misma forma que con los datos de los puntos mostrados.

Otros profesores en formación (dos) utilizaron la división que se hubiese derivado de la regla de tres o del despeje de x en la constante de proporcionalidad, de modo directo para resolver la tarea (Imagen 29):

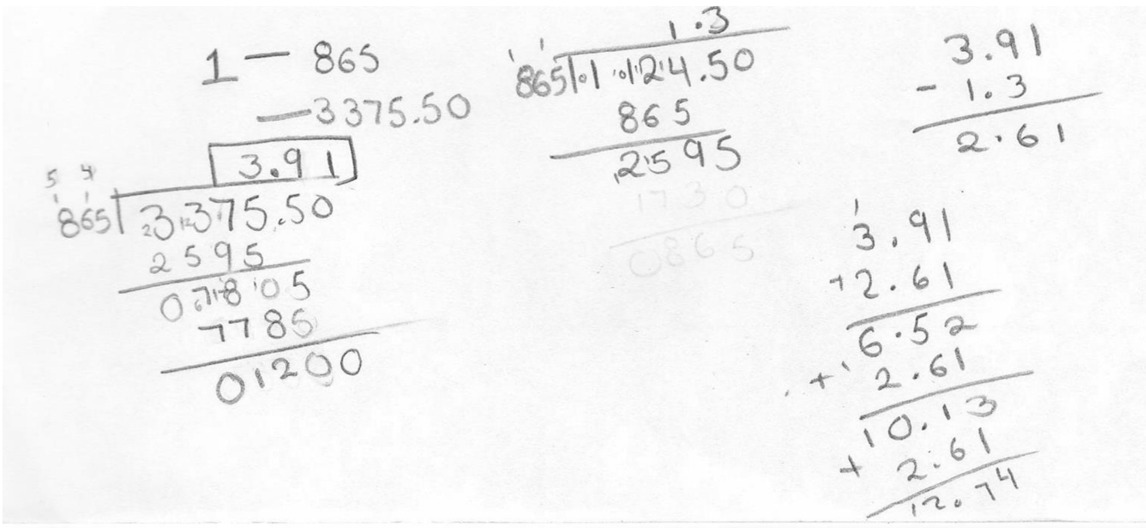


Imagen 29. El eje X con la constante de proporcionalidad. (PF8)

Como puede observarse en el ejemplo de PF8 una vez que se identifica el valor del punto A y el punto B en el eje X a través de los costos por número de barriles, los profesores en formación que emplean esta técnica vuelven a retomar el método de diferencias para encontrar el valor (2.61) mismo que adicionan a cada punto precedente en el eje X, cabe señalar que en el caso de PF8 se presenta un error para el valor del punto B al colocar 3375.50 cuando éste debería de ser 3373.50 lo que repercute al encontrar un valor de 3.91 que afecta con un margen de error de una centésima a cada uno de los puntos restantes.

A diferencia del ejemplo anterior un profesor en formación omitió la técnica del valor unitario como divisor y realiza aproximaciones a partir de las diferencias entre los costos encontrados en la tarea anterior, primero lo estimó a partir de diferencias de $1000 pero consideró que el aumento correcto entre un punto y otro era alrededor de

$2000 hecho que lo llevó a encontrar los valores correctos para los puntos del eje X (Imagen 30).

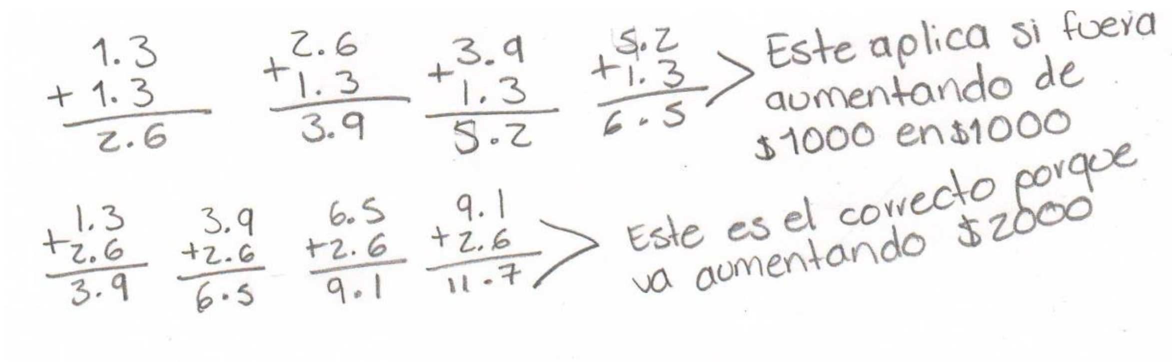


Imagen 30. Diferencias entre puntos del eje X. (PF1)

La imagen 30 muestra que esta técnica permitió a los profesores en formación simplificar el proceso de resolución al evitar la división para cada uno de los puntos ya que, una vez identificada la diferencia aproximada entre cada par de puntos sólo sumaban tal diferencia al punto precedente para encontrar los valores faltantes en el eje X.

Con la realización de esta tarea, los profesores en formación pudieron identificar otro tipo de situaciones en las que es posible utilizar el valor unitario como divisor a través de la constante de proporcionalidad y aunque la justificación tecnológica (θ) no se asoció con el referente teórico (Θ) relativo a la función lineal, el proceso vivido constituyó un contexto aritmético que posiblemente permitirá comprender de mejor manera la noción de función lineal cuando se estudie formalmente. Lo interesante aquí consistió en que los profesores en formación pudieron identificar otro tipo de tareas donde la proporcionalidad y la variación proporcional se hacen presentes y pudieron comprender también cuáles técnicas ya conocidas podrían ser eficaces en este tipo de tareas.

4.3. TABLA DE VARIACIÓN PROPORCIONAL Y VALOR FALTANTE. LA REGLA DE TRES

El trabajo con tablas de variación proporcional permite identificar la relación y el comportamiento entre magnitudes que se manifiesta a partir del factor constante de proporcionalidad (*k)*. Este tipo de situaciones en las que se trata de encontrar el valor faltante, es una de las principales tareas en los diferentes niveles educativos y es en éstas donde la reducción de la unidad a partir del uso de la regla de tres es la técnica más recurrente, aunque en algunos casos también pueda utilizarse la igualdad de razones, la búsqueda del cuarto valor faltante o incluso una estructura aditiva o multiplicativa según el tipo de magnitudes (al doble le corresponde el doble).

En el caso que nos ocupa, la cuestión que orienta la T1.3 del REI-FP es la siguiente:

> Q1.3. ¿Cuáles son las técnicas (τ) que despliegan los profesores en formación durante el desarrollo de tareas (T) relativas al valor faltante en una tabla de variación proporcional?

Para plantear una tarea de este tipo se entregó a los profesores en formación dos tablas con valores faltantes, una con magnitudes menores a un barril de petróleo en la que se expresaba un aumento al costo del petróleo Maya (Tabla.14) y otra con magnitudes mayores a un barril en la que se mostraba el descenso en el precio del petróleo Olmeca (Tabla. 15). Ambas tablas mostraban ciertos valores de las magnitudes asociadas con el número de barriles y el costo de los mismos y la pregunta planteada se relacionaba con el costo de un barril, es decir con el factor constante de proporcionalidad (τ1). Además de lo anterior, el propósito de esta tarea también era destacar el uso de la regla de tres (τ2) cuando los términos conocidos eran diferentes a uno, situación que llevó a plantear el uso de esta técnica en todo su proceso.

Las tablas asignadas fueron las siguientes:

No. de barriles	0.07		0.28	0.42	0.56
Costo		128.1		384.3	

Tabla 14. ¿Cuál es el costo de un barril Maya?

No. de barriles		2.77		7.12	
Costo	855.36	1794.96	2734.56		6492.96

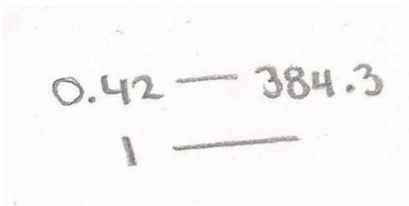
Tabla 15. ¿Cuál es el costo de un barril Olmeca?

La correspondencia que se estableció entre las magnitudes tipo de petróleo y costo era una relación de proporcionalidad directa, es decir, si se compra el doble, el triple, etc., de petróleo, su costo también aumentará el doble, el triple, etc. En ambas variaciones la razón entre las magnitudes es una relación constante, para el caso del petróleo Maya se tiene que 384.3 dividido entre 0.42 se obtenía 915 y para el petróleo Olmeca se tiene que dividir 1794.96 entre 2.77 se llegaba a 648, lo que corresponde al costo de cada tipo de petróleo respectivamente.

Así, la razón entre las magnitudes permitiría encontrar la constante de proporcionalidad, que en este caso correspondía al valor unitario *(y/x=k)*, siendo *y* el costo de los barriles y *x* el número de barriles, con ello el precio unitario se establecía con una igualdad entre razones como la siguiente 384.3/0.42 = x/1 para el caso de la primera tabla, mientras que para la segunda tabla sería 1794.96/2.77 = x/1.

a) Costos menores al valor unitario (Petróleo Maya).

En esta tarea la intención consistió en encontrar el valor unitario y los valores faltantes del petróleo Maya, la técnica que utilizaron cuatro de los ocho profesores en formación correspondió con aquella que, se supuso aparecería al plantear la tarea, es decir, la regla de tres (τ2). Esta técnica fue desarrollada con base en los datos conocidos de ambas magnitudes (precio y costo), en la siguiente imagen puede verse la manera en la que algunos la utilizaron.



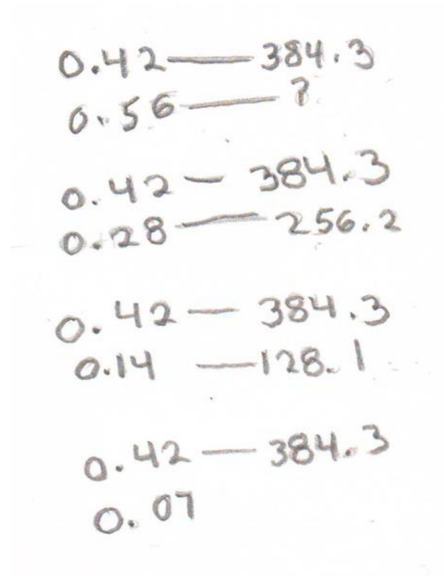


Imagen 31. Uso de la regla de tres. (PF8)

En la imagen anterior se aprecia que aunque PF8 inicia la técnica estableciendo la relación entre 384.3/0.42 = 1/x donde el valor unitario (*k*) corresponde a la vez a la constante de proporcionalidad y al nuevo costo de un barril Maya ($915), este dato, que pudiera resultar relevante para utilizarse como multiplicador o divisor de los datos conocidos, no es empleado, en su lugar se comienza a desarrollar de manera secuenciada la regla de tres en una representación tabular que le permite identificar la relación entre los tres datos que componen las proporciones, para ello retoma en primer término el número más alto de barriles mostrado en la tabla (0.56) y a partir de ahí calcular los cuartos términos desconocidos en la tabla.

La secuencia tabular que establece PF8 permite identificar que se trata de cantidades que disminuyen progresivamente a la mitad, lo que le simplifica el proceso operatorio de la (τ2) para encontrar los valores faltantes en la tabla.

A diferencia de la técnica anterior, tres profesores en formación retomaron el valor unitario en tanto constante de proporcionalidad *(y/x = k)*, una vez que identificaron el valor unitario a través de la regla de tres (τ2) utilizaron el factor constante de proporcionalidad (*k=915)* para encontrar los valores faltantes, multiplican dicho factor por el número de barriles al que hay que asignar el costo *(y=kx),* esto se expresa en la Imagen 32:

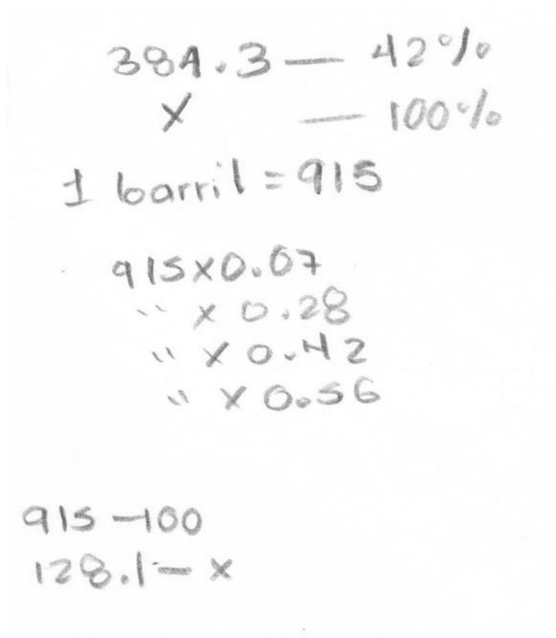
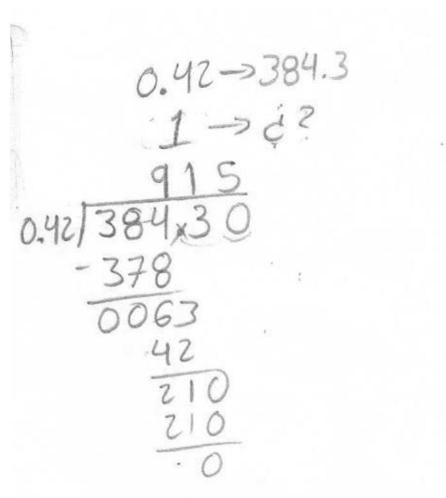


Imagen 32. Factor constante de proporcionalidad. (PF3)

Para los tres estudiantes que emplearon el procedimiento anterior, la regla de tres (τ2) fue utilizada sólo para identificar el valor unitario o el factor constante de proporcionalidad, a partir de ahí éste fue empleado en primer término como multiplicador para identificar el costo faltante de los barriles en la tabla y como divisor para encontrar el número de barriles desconocido. La regla de tres inicial, calculada como porcentaje al 100% permitió la operatoria con valores enteros que llevaron de modo directo al valor unitario.

Una última τ fue empleada sólo por un estudiante quien podría decirse empleó una regla de tres “reducida” que se combinó con un modelo aditivo para completar la tabla (Imagen 33):



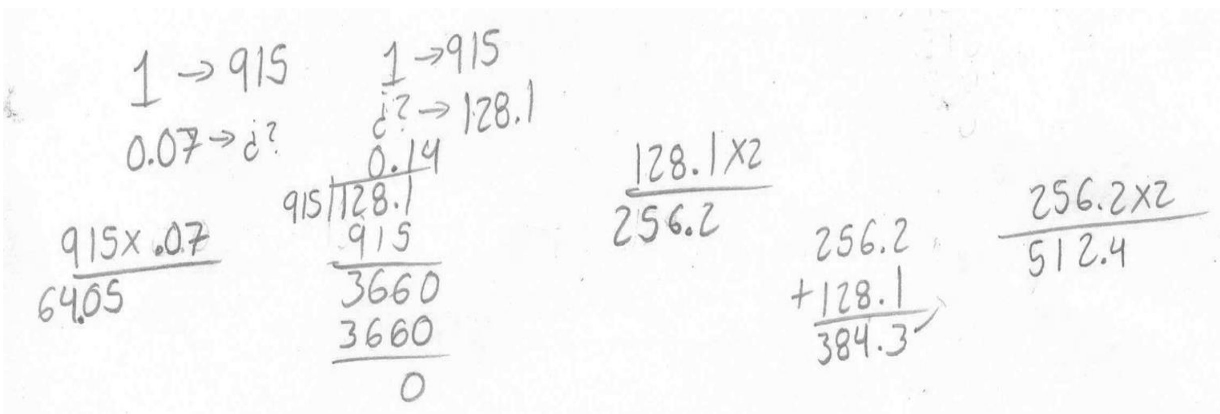


Imagen 33. Regla de tres “reducida”. (PF5)

Como se observa en la imagen 33 el estudiante partió de la regla de tres para encontrar *k,* posteriormente ésta se utiliza como multiplicador para encontrar el primer costo faltante en la tabla (el relativo a 0.07 barriles), en el tercer paso utiliza la misma técnica pero ahora *k* es empleada como divisor para identificar el valor faltante del número de barriles de la segunda columna (para un costo de 128.1), al observar que la siguiente columna maneja el doble de barriles de la columna que le antecede opta por hacer una multiplicación por dos y luego adiciona 128.1 para corroborar los datos explicitados en la cuarta columna, por último vuelve a multiplicar por dos la cantidad encontrada para el costo de la tercera columna y con ello completa todos los datos de la tabla. Lo interesante de esta τ es que para completar los datos concernientes al costo de los barriles el PF hizo uso de un modelo aditivo y multiplicativo con los datos que ya ha completado en la tabla, mismos que se van presentando de manera progresiva a partir de la secuencia de cada columna.

A partir de las τ empleadas en esta tarea, es visible la evolución de los estudiantes hacia el uso de la regla de tres como τ eficaz para este tipo de situaciones donde no se cuenta de modo explícito con el valor unitario a diferencia de T previas en las que dicha τ sólo era representada pero no desarrollada en tanto que se conocía la magnitud del valor unitario.

b) Costos mayores al valor unitario (Petróleo Olmeca).

Para esta tarea, las τ se diversificaron, en cuanto a la regla de tres se observaron seis casos, quienes desarrollaron el mismo proceso mostrado en la tarea anterior pero asociado con el manejo de porcentajes, cinco de ellos emplearon la representación de la regla de tres para trabajar con el valor unitario visto como 100% o 1, ambos asociados al costo de un barril Olmeca un ejemplo de ello es lo desarrollado por PF3:

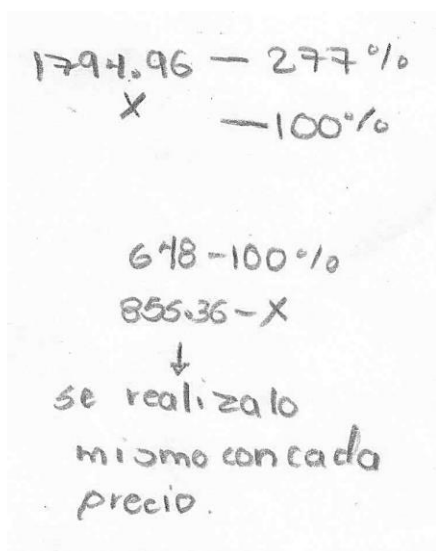


Imagen 34. Regla de tres para el valor unitario. (PF3)

En el caso anterior PF3 no hace el desarrollo explícito de la τ, expresa que ésta es empleada para identificar los valores faltantes pero es de observarse que aunque se trate de la misma т, utiliza dos formas de acomodo para la incógnita, ello en función de los dos tipos de magnitudes con los que está trabajando, la primera por ejemplo es empleada para identificar el valor unitario del barril Olmeca, situación que es representada a partir del 100% como el costo total de un barril, la segunda hace uso del valor unitario identificado en el paso anterior para encontrar los valores relacionados con el número de barriles que se desconocen en la primera fila de la tabla, si bien su técnica no expresa cómo obtuvo el valor del costo para 7.12 barriles se deduce que también empleó la regla de tres para su identificación. En esta misma categoría sobre el uso de regla de tres (т2), se da otro caso donde ésta aparece de modo claro en su proceso de aplicación, tal como lo muestra la Imagen 35:

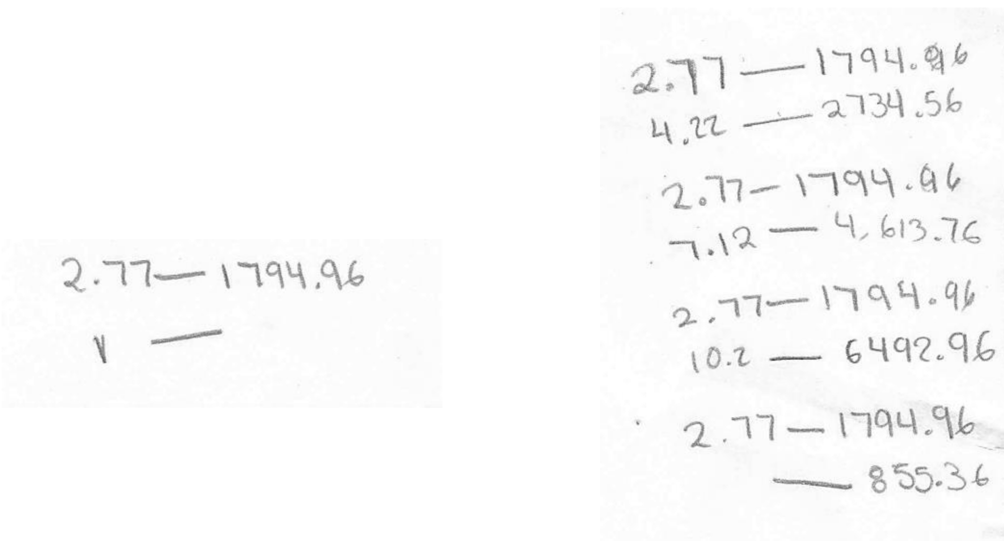


Imagen 35. Regla de tres en tablas de variación. (PF8)

Con el proceso seguido por PF8 se observa la pertinencia de la regla de tres en situaciones donde el cuarto término desconocido no es el valor unitario, así se hace uso de los valores conocidos como número de barriles (2.77) y costo ($1794.96), a partir de ahí se identifica el número de barriles faltante en la primera fila a través de los costos explicitados en la segunda fila de la tabla. Esta técnica constituye el ejemplo más claro sobre la pertinencia de la regla de tres en situaciones relativas a la variación proporcional donde los valores desconocidos son distintos a uno.

Otra técnica (Imagen 36) se presentó en uno de los profesores en formación, quien al parecer intentó utilizar el factor constante de proporcionalidad *(y/x=k)* para identificar el número de barriles faltantes en la tabla tal como se muestra en la Imagen 36:

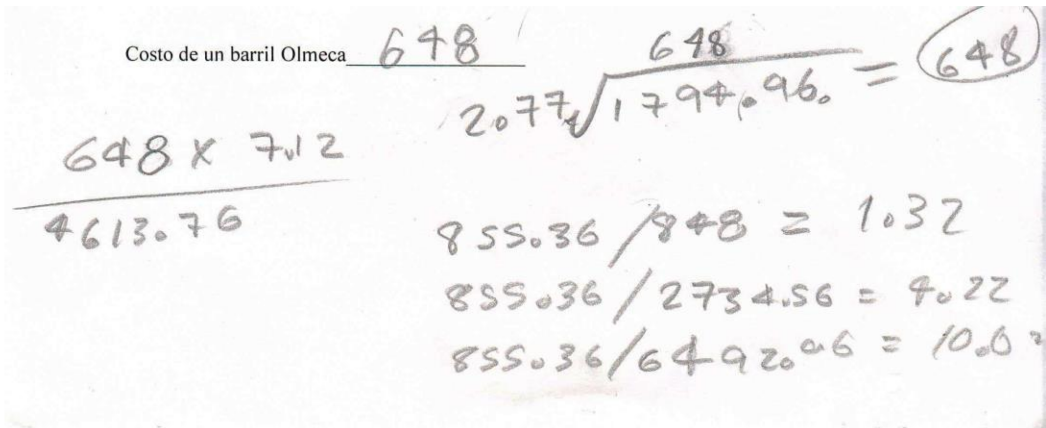


Imagen 36. Constante de proporcionalidad inadecuada. (PF7)

Siguiendo el proceso de PF7 se observa que identificó en primer término la *k (648)*, considerando que *y* representa el costo de barriles y *x* el número de barriles para encontrar el valor del número de barriles faltantes la expresión sería *x=y/k,* no obstante el desarrollo que muestra de la misma resulta erróneo en tanto que se retoman los valores de modo incorrecto, en esta técnica se consideró que la constante era 855.36, lo cual alude al valor de la primera fila y que representa el costo de 1.32 barriles, los datos también son “acomodados” de modo distinto al despeje de x en la expresión enunciada anteriormente. Esta situación no muestra sino la falta de dominio de la técnica del factor constante de proporcionalidad para la identificación de valores desconocidos en una tabla de variación proporcional.

La última T se caracterizó por hacer uso tanto de la regla de tres como de un método de diferencias y un modelo aditivo, ello fue desarrollado como se observa en la Imagen 37:

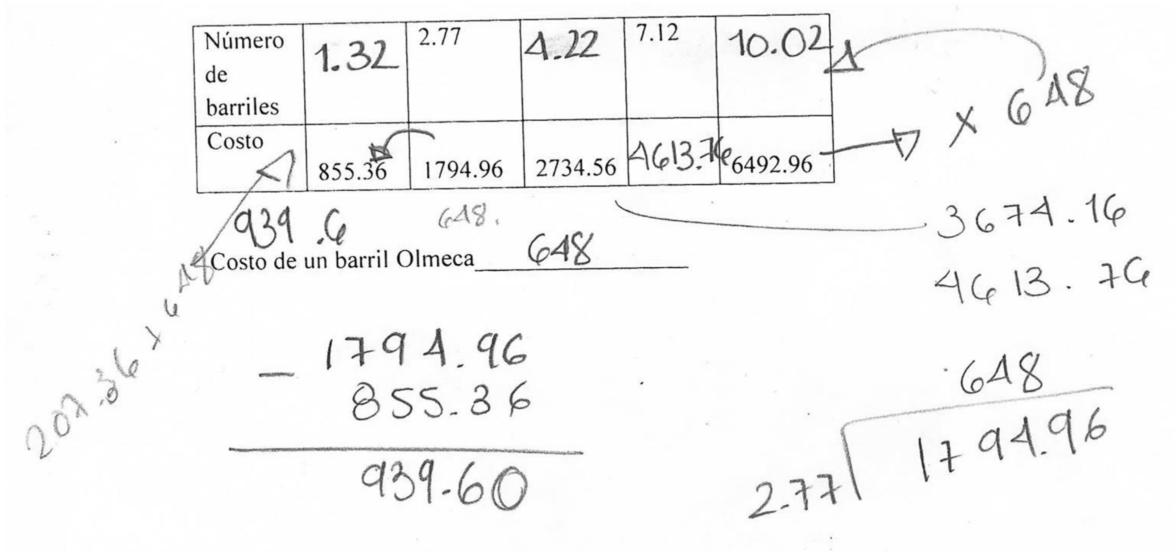


Imagen 37. Uso de métodos combinados. (PF4)

Esta т que fue empleada sólo por un PF denota en primer término el uso de la regla de tres para encontrar el costo de un barril Olmeca y al igual que en casos anteriores no es desarrollado todo el proceso de la misma. En esta representación se observa un resultado correcto ante la incógnita planteada, para el llenado de la tabla se usaron diversas т, destaca principalmente la sustracción 1794.96 menos 855.36 que le permite encontrar la diferencia entre cada uno de los costos expresados en la tabla, una vez identificada la diferencia se procede a adicionarla a la magnitud precedente y así llegar al único valor faltante sobre el costo del petróleo, es decir 4613.76.

Para el caso del número de barriles se intentó hacer uso de *k,* no obstante en lugar de ser empleado como divisor la representación muestra que se utilizó como multiplicador (6492.96X648), pero el resultado que coloca en la tabla es adecuado para el planteamiento, al igual que el resto de los datos, los que posiblemente recuperó de algún compañero sin una significación clara de la т empleada.

A partir de los datos obtenidos en la T1.3 se puede deducir que los estudiantes en su mayoría han logrado identificar el uso de la regla de tres como una т eficiente para ciertas situaciones de proporcionalidad, principalmente aquellas donde el valor unitario no es explícito, la constante de proporcionalidad representó también una т eficaz para este tipo de tareas aunque no eficiente por la dificultad en su uso y la complejidad para identificar los casos en los que juega un papel de multiplicador y aquellos en los que funge como divisor.

Fue visible también el aumento en los errores de cálculo en los algoritmos utilizados y la dificultad para operar con números decimales, que si bien fue superada con el recurso de la calculadora, indica que aunque exista una buena interpretación de la T, el dominio de la τ resulta indispensable para su resolución.

4.4. VARIACIÓN PROPORCIONAL DE TRES MAGNITUDES

La tarea T1.4 plantea la necesidad de encontrar valores faltantes en una variación proporcionalidad de tres magnitudes, esta tarea se incluyó con el propósito de diversificar y ampliar las técnicas reconstruidas en las tareas anteriores. En ésta se esperaba también el uso de la regla de tres (τ1), la razón fraccionaria (τ2) y la técnica tabular (τ3) que, a nuestro juicio tendrían su justificación en la Teoría de las Razones y Proporciones (θ). La T1.4 deriva de la siguiente cuestión:

> Q1.4. ¿Cuáles son las técnicas (τ) que despliegan los profesores en formación para cumplir de tareas (T) relativas a una variación proporcional de tres magnitudes?

El objetivo de la tarea planteada era “romper” con la técnica del valor unitario y generar modelos tabular o algebraico como técnicas más eficientes que podrían presentarse mediante situaciones de combinación de magnitudes como la siguiente:

> En todos los cargamentos hay barriles con dos tipos de petróleo (Olmeca y Maya). En cada cargamento, por cada barril de petróleo Olmeca hay 3 barriles de petróleo Maya, entonces ¿Cuántos barriles de petróleo Maya hay en un cargamento de 200 barriles?

En la tarea anterior se establece que, por cada barril de petróleo Olmeca hay 3 veces más de petróleo Maya, es decir, la relación entre barriles de petróleo Maya y Olmeca es 3 a 1, esta razón se denota 3/1, se puede leer como “tres es a uno” y su valor se obtiene al dividir 3 entre 1, con este se deduce que existe el triple de petróleo Maya que de petróleo Olmeca en ese cargamento.

Ahora bien, lo que pudo observarse es que los profesores en formación utilizaron una técnica basada en el valor unitario. Cuatro de ellos consideran la relación “3 a 1” o “1 a 3” y asumen que se trata de un cargamento con 200 barriles y una combinación Maya-Olmeca de 4 barriles. Así identifican que se trata de una relación de ¼ para los barriles de petróleo Olmeca y ¾ para los barriles de petróleo Maya, esta idea les permite utilizar la división y/o multiplicación como parte de su técnica:

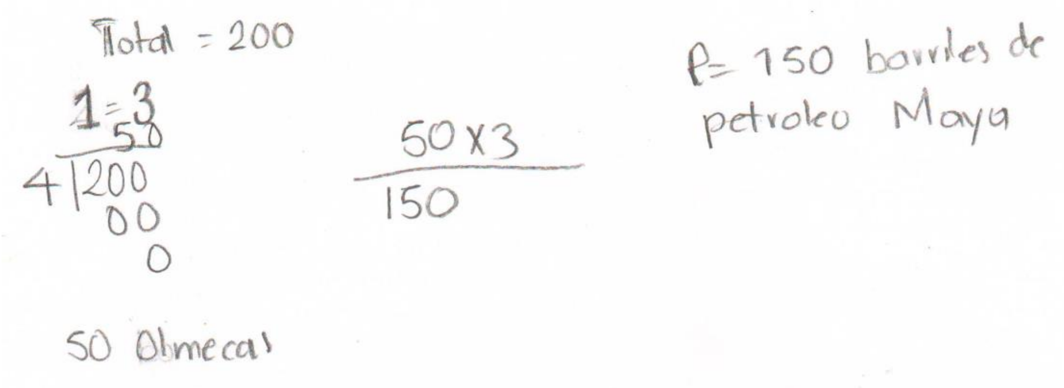


Imagen 38.Uso de la Multiplicación. (PF6)

La técnica mostrada en la imagen anterior fue la más recurrente entre los profesores en formación, en ella puede apreciarse que establecen la relación “1 a 3” (aunque en algunos casos como el de PF6 lo representan como una igualación 1=3) y dividen 200 entre 4 para determinar cuántos barriles hay en ¼ de cargamento, luego multiplican ese ¼ de cargamento (50 barriles) por 3 y obtienen el número de barriles que corresponde al petróleo Maya. Puede decirse que el resultado o la relación “50 a 150” obtenido mediante una técnica aritmética derivó de identificar la razón “1 a 3” o “3 a 1”. Una técnica similar a la anterior es la que se muestra en la siguiente figura y que fue empleada sólo por PF3.

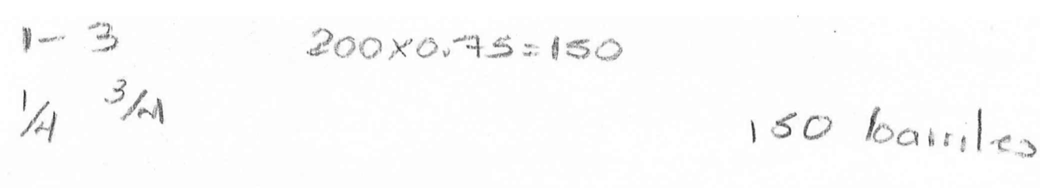


Imagen 39. La conversión a decimal. (PF3)

En esta figura se hace evidente la comparación de razones como parte de la técnica puesto que, este profesor en formación primero estableció la razón 1 a 3. Puede advertirse que establece el número total de barriles en la combinación por ese motivo señala a ¼ y ¾ como las partes de dicha combinación. Posteriormente transforma ¾ en su expresión decimal (0.75) y multiplica para encontrar el valor en barriles de los ¾ en el cargamento, que corresponden al petróleo Maya. Como se puede observar la dificultad para multiplicar por una fracción se sigue haciendo presente en esta tarea.

Por su parte, el modelo tabular, cuya génesis como técnica constituía el propósito de esta tarea, fue utilizado por dos profesores en formación quienes desarrollaron este modelo (tabular) para ilustrar la relación entre los dos tipos de petróleo del cargamento en cuestión, en la siguiente imagen se observa la manera como fue utilizado.

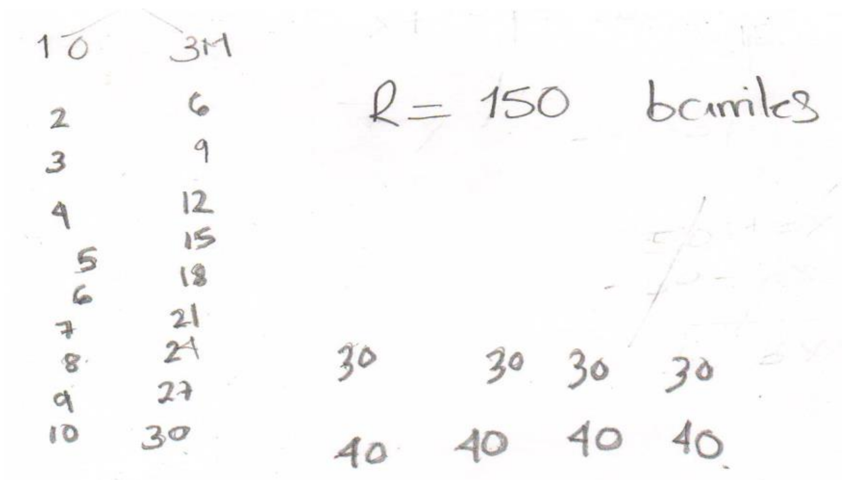


Imagen 40. Modelo tabular. (PF4)

La técnica anterior les permitió visualizar la forma como se va desarrollando la relación creciente entre ambos tipos de magnitud pero conservando la misma razón, es decir establece una razón 1 a 3 donde por 1 barril de petróleo Olmeca hay 3 barriles de petróleo Maya, por cada 2 hay 6, por cada 3 hay 9 y así sucesivamente. En este caso se observa que PF4 desarrolla una secuencia (1-3, 2-6, 3-9, 4-12 hasta llegar a 10-30, con los datos finales de la tabla establece la sumatoria de 10 y 30 para representar el total de barriles de dicha combinación (40), como la situación plantea la existencia de 200 barriles PF4 colocó de modo horizontal la representación de otras 4 combinaciones de 40 lo que le da el total de los 200 barriles, de manera similar lo hizo con los 30 barriles del petróleo Maya para relacionarlos de la misma forma, con lo que deduce que si 5 veces 40 es igual a 200, entonces 5 veces 30 será 150, el número de barriles Maya que es proporcional al cargamento en 1 a 3. Cabe señalar que, de los dos profesores en formación que utilizaron esta técnica, el segundo empleó de modo similar el modelo tabular pero luego de llegar a 10-30 coloca directamente 50-150, lo que hace deducir la posibilidad de un cálculo mental con la lógica encontrada en el modelo tabular.

Finalmente, en lo que respecta a esta tarea, otra técnica (imagen 41) que se utilizó (sólo por uno de los profesores en formación) estuvo asociada con el manejo de literales, es por ello que en nuestra opinión representa en cierta medida la génesis (no exitosa) del modelo algebraico como técnica para solucionar este tipo de tareas. En la siguiente imagen se muestra la manera como se desarrolló.

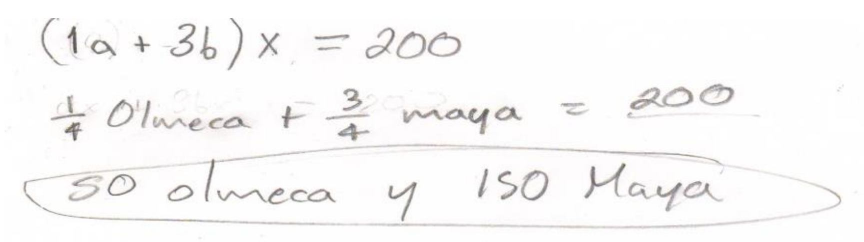


Imagen 41. Modelo algebraico fallido. (PF7)

En la figura puede verse que, de inicio intentó modelizar algebraicamente la tarea, construyó el modelo $(1a + 3b)x = 200$ en el que aparecen dos coeficientes (1 y 3), dos literales (a y b) y una tercera variable (x). En este modelo la suma entre paréntesis indica el total de barriles en la composición y el 200 la cantidad de barriles en el cargamento.

Sin embargo, aunque la inclusión de la x expresa el manejo de un factor común variable, no le quedó clara la naturaleza de dicho factor porque “a” es el petróleo Olmeca, “b” es el Maya y en este caso pareciera que “x” intenta representar al precio. Ahora, al desarrollarse, este modelo quedaría como $ax + 3bx = 200$, situación que no permite obtener el resultado de la tarea. Por ello esta técnica es abandonada por el profesor en formación quien finalmente opta por simplificar la expresión en términos de ¼ de Olmeca más ¾ de Maya es igual a 200 barriles, luego, ¼ de 200 es 50, etc. Lo que constituye finalmente la técnica que le permite encontrar el resultado correcto.

Los resultados muestran que, ante una tarea en la que se hace presente la variación proporcional con tres magnitudes, para resolverla, en su mayoría los profesores en formación desarrollan técnicas que evidencian un logos aritmético, ello a pesar de que la institución (reflejada en los planteamientos curriculares) señala explícitamente que los profesores en formación deben hacer evolucionar sus técnicas hasta utilizar aquellas que tienen un carácter más generalizable, situación que no sucede en esta tarea puesto que sólo el 75% de los estudiantes la resuelven correctamente al utilizar técnicas basadas en modelos aritméticos, el 12.5% intentó emplear un modelo algebraico pero no logró modelizar la tarea planteada y regresa a técnicas menos complejas. Otro 12.5% reconoció la tarea como una situación donde se hace presente la razón al establecer la representación 1 a 3.

4.5. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA. LA VARIACIÓN CON TRES MAGNITUDES

Una tarea (T) asociada a la proporcionalidad compuesta se hace presente cuando las razones involucradas o las magnitudes que varían son más de dos, si bien las situaciones de proporcionalidad compuesta permiten analizar la relación de variables a través de la proporcionalidad directa o inversa, en este caso la T1.5 se enfoca al trabajo con la primera, ello en virtud de que los profesores en formación abordan en su mayoría situaciones de este tipo en la escuela primaria, además el análisis económico del programa de estudios realizado anteriormente enfoca su atención al dominio de la proporcionalidad directa. En el caso del planteamiento eje del REI-FP, las cantidades que se manipularon a partir de la T1.5 fueron el número de barriles, el costo por barril y la mezcla de petróleo (número o costo), esta última magnitud constituyó el resultado de la variación entre las primeras dos magnitudes.

Al intervenir más de dos magnitudes en una tarea, las relaciones proporcionales que se dan entre sí caracterizan una variación que puede expresarse mediante un sistema de ecuaciones, es decir, si las magnitudes enunciadas se representan como A, B y C, entonces A y B aludirán a los coeficientes (los precios de cada petróleo) de dos incógnitas (la parte proporcional de cada tipo de petróleo) y C (el costo de un barril derivado de una mezcla) al término independiente, en este sentido la T1.5 pretende que surja una serie de técnicas (τ) que permitan identificar el valor faltante en cualquiera de las incógnitas o incluso en el término independiente, así pues la cuestión generatriz que rige a esta T es la siguiente:

> Q1.5. ¿Cuáles son las técnicas (τ) y el discurso tecnológico (θ, Θ) que despliegan los profesores en formación durante el desarrollo de tareas (T) relativas al valor faltante de una variación proporcional de tres magnitudes?

La relación entre magnitudes puede traducirse en una ecuación proporcional algebraica, técnica que puede resultar eficiente para la resolución de las T del tipo planteado y su aplicación se verá determinada por los alcances y limitaciones del nivel tecnológico-teórico que los profesores en formación puedan tener. Una vez que desde el REI los estudiantes han trabajado con las técnicas propias de la organización clásica (regla de tres y reducción a la unidad con la identificación de *K*), las T subsecuentes buscan la transición hacia la modelización funcional de los sistemas proporcionales.

Se espera en términos de la evolución de la técnica aritmética, arribar al modelo algebraico, con esta intención la T1.5 se dividió en varias tareas que incluían la aproximación a la resolución de una T con tres magnitudes, un recorrido de estudio para la búsqueda de nuevas técnicas, el uso o modificación de las mismas ante planteamientos similares, el momento del trabajo de la técnica y el momento tecnológico-teórico.

4.5.1. Aproximación a la variación con tres magnitudes.

Con el propósito de identificar la funcionalidad de la proporcionalidad compuesta en el contexto planteado se estructuró una primera tarea que consistía en encontrar el valor faltante, dada la combinación de una variable con distinta magnitud, en esta tarea se planteaba:

> Si el costo de un barril de petróleo Maya es de $865 y de un barril de petróleo Olmeca es de $995 cuando se hace una mezcla usando un barril de petróleo de cada tipo. ¿Cuánto cuesta un barril de petróleo de esa mezcla?

Para resolver la tarea en cuestión se esperaba la aplicación de dos técnicas: valor unitario (τ1) y regla de tres (τ2), si bien estas técnicas habrían sido recurrentes en tareas anteriores, para este caso los estudiantes se enfrentan al manejo de dos magnitudes “combinadas” que se entrelazan con otra magnitud: el costo de la mezcla. La tecnología (θ) buscaba su justificación desde la Teoría de las Razones y Proporciones como en las tareas planteadas inicialmente.

Dado el planteamiento mencionado, las técnicas mencionadas se hicieron presentes en la resolución, la más recurrente fue la de valor unitario que fue utilizada por seis estudiantes como se muestra en la imagen 42.

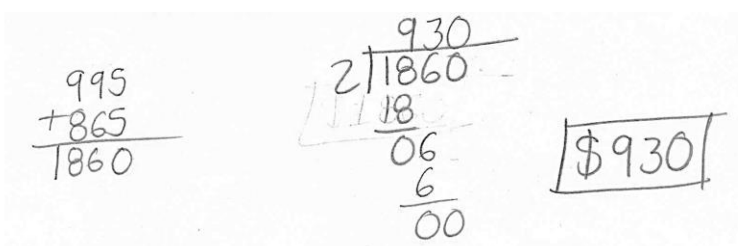


Imagen 42. Valor unitario. (PF5)

Como se puede ver en la imagen anterior, PF5 comprende que para encontrar el valor de la mezcla de dos petróleos de diferente tipo, basta con sumar el costo correspondiente a cada uno y dividir dicha suma entre el número de tipos de petróleo de la mezcla, así encuentra el valor unitario para el barril compuesto por ambos tipos de petróleo. A diferencia de la técnica anterior, dos profesores en formación optaron por calcular un “promedio parcial”, es decir encontrar el costo de medio barril de cada tipo de petróleo para después completar un barril de la mezcla, un ejemplo de ello es lo que realizó PF2:

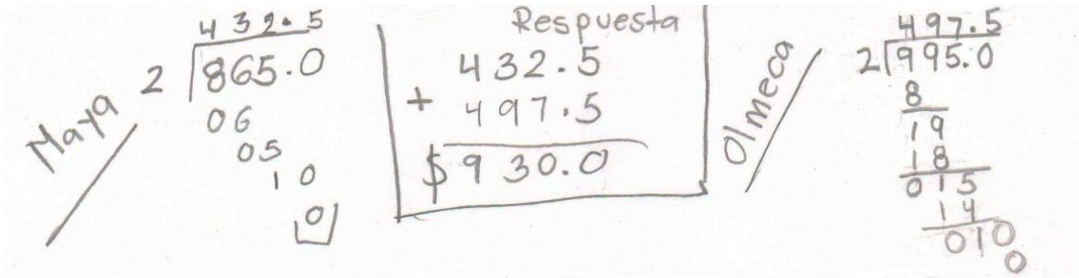


Imagen 43. Promedio parcial. (PF2)

En el caso de PF2, al considerar que se trataba de una mezcla formada por dos tipos de petróleo resultó más eficiente una técnica que dividiera el costo de cada barril en dos partes, mismas que sumó posteriormente para identificar el precio que resulta de la mezcla. Esta técnica, aunque eficiente para la tarea planteada podría no serlo en situaciones donde se incluyeran más tipos de petróleo ya que implicaría un desarrollo más amplio que el del valor unitario. Ante esta consideración se plantearon enseguida tres tareas semejantes pero con variación en el número de barriles de cada tipo, los resultados fueron semejantes al caso anterior, no obstante en la última tarea de este tipo aparece una nueva técnica que se aproximaba al modelo algebraico.

Si mezclo 15 barriles de petróleo Maya y 20 del Olmeca. ¿Cuánto cuesta un barril de petróleo de esa mezcla?

Con el aumento del número de barriles de cada tipo la técnica más utilizada fue el valor unitario, cuando la utilizaron cinco profesores en formación pudo observarse lo siguiente:

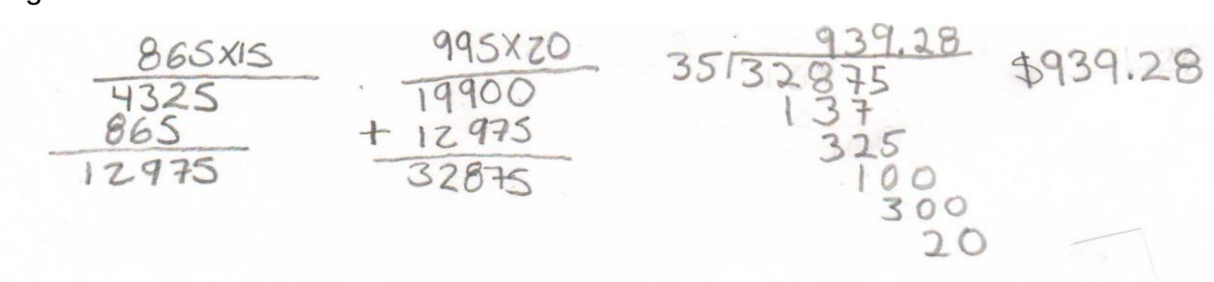


Imagen 44. Valor unitario. (PF1)

La técnica se desarrolló del mismo modo que en las tareas precedentes, sólo modificaron el rango numérico, es decir multiplicaron por separado costo por número de barriles de cada tipo para luego sumar los productos resultantes que luego dividieron entre 35, a partir de esto identificaron el precio de un barril con la mezcla enunciada.

Por su parte dos profesores en formación que en la tarea anterior habían empleado el “promedio parcial”, no modificaron su técnica y decidieron utilizarla nuevamente en esta tarea (Imagen 45):

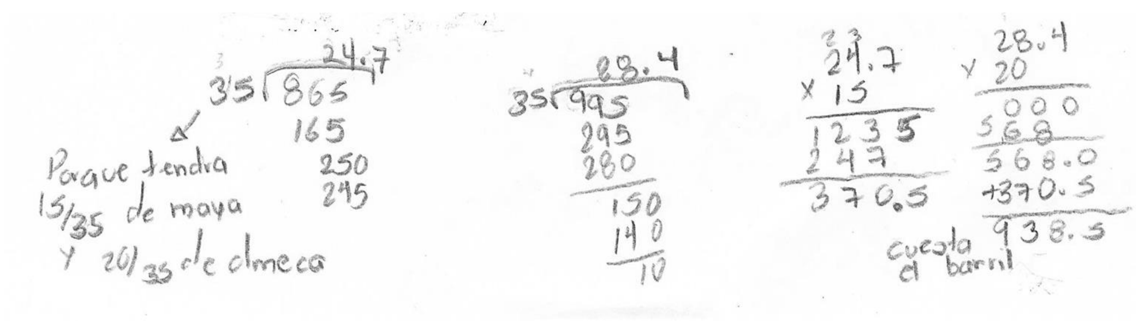


Imagen 45. Promedio parcial. (PF3)

Se observa que PF3 incluye como información adicional la razón entre el número de barriles de cada tipo y el total de barriles que son mezclados (15/35). Sin embargo, debe recordarse que la tarea solicitaba el precio de un barril mezclado no la parte proporcional de cada tipo de barril sobre la mezcla, y la técnica empleada en este caso busca el precio de cada petróleo entre el total de barriles a mezclar, por ello el cociente que resulta en cada división se multiplica por el número de barriles de cada tipo para posteriormente sumar los productos y encontrar el costo de un barril con la mezcla especificada.

El caso de PF7 que se muestra enseguida expresa una evolución en la técnica, inicialmente había empleado el valor unitario en las tareas de este tipo, pero al observar el aumento en el número de barriles de la mezcla opta por una representación “semialgebraica” (Imagen 46).

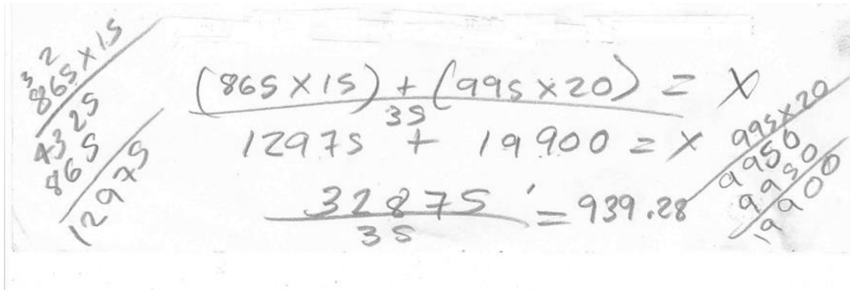


Imagen 46. Modelo semialgebraico. (PF7)

En este caso se aprecia que la operatoria es similar al valor unitario, no obstante, la representación (en el centro) esquematiza el trayecto de resolución seguido, pero sobre todo, muestra claramente el sentido de la tarea planteada, lo que podría plantearse como un esquema que puede ser aplicable a tareas similares y representarse a partir de un modelo generalizable.[36]

Las técnicas empleadas a lo largo de la T1.5 dan cuenta de un dominio adquirido a través del REI, los profesores en formación han identificado el tipo de situaciones para las cuales el valor unitario es una técnica eficiente, pero también resulta claro que al enfrentarse a tareas con tres magnitudes reconocen la necesidad de simplificar las técnicas que habían considerado idóneas. Ante la presencia de un modelo “semialgebraico” resultó necesario plantear otro tipo de tareas que, sin olvidar el momento tecnológico-teórico vivido, diera pie a la exploración en la que los profesores en formación buscaran ayuda con sujetos o materiales especializados, el objetivo es que esta ayuda les permitiera conocer otras técnicas basadas en modelos algebraicos, este momento se concretó al término de la T1.5.

4.5.2. La búsqueda del modelo algebraico.

Otro tipo de tarea asociada a la T1.5 buscaba que los profesores en formación “vivieran” un recorrido de estudio en el que indagaran con “especialistas” (sus profesores de bachillerato o cualquier otro que pudiera ayudarles)[37] o hicieran una

[36] Esta primera aproximación muestra el papel de la división en la estructura semialgebraica, situación que se vuelve compleja de identificar por los profesores en formación a partir de la tarea posterior.
[37] En esta actividad se dejó como tarea que buscarán la manera de resolver la situación, se indicó que podrían buscar un “especialista” que pudiera ayudarles o bien que podrían entablar una búsqueda en diferentes medios

búsqueda individual en textos matemáticos. Para la realización de esta tarea se contó con una semana de trabajo, se trataba de encontrar la forma de resolver una situación del tipo:

> Considerando que el precio del petróleo Maya es de $865 y el petróleo Olmeca es de $995, ¿Qué cantidad se debe mezclar de cada tipo de petróleo si se desea producir una mezcla cuyo costo de cada barril que extraiga de esa mezcla producida sea de $900?.

Esta tarea, al mismo tiempo que buscaba complejizar el planteamiento al cuestionar sobre la cantidad de mezcla a partir de un costo dado, tenía como propósito que emergiera una nueva técnica, un sistema de ecuaciones (τ4), que además del Valor unitario (τ1), la Regla de tres (τ2) y la razón fraccionaria (τ3) utilizadas en tareas previas, permitiera una doble justificación tecnológica, una basada en la Teoría de las Razones y Proporciones (θ1) y otra en la Modelización algebraica (θ2).

En la solución de dicha tarea, se identificaron cinco técnicas, algunas se derivaron del proceso de búsqueda planteado mientras que otras surgieron de modo personal ya que, algunos profesores en formación mencionaron que sus “especialistas” no pudieron ayudarlos, tal es el caso de la técnica de PF3 en la que se observa el uso de operaciones básicas:

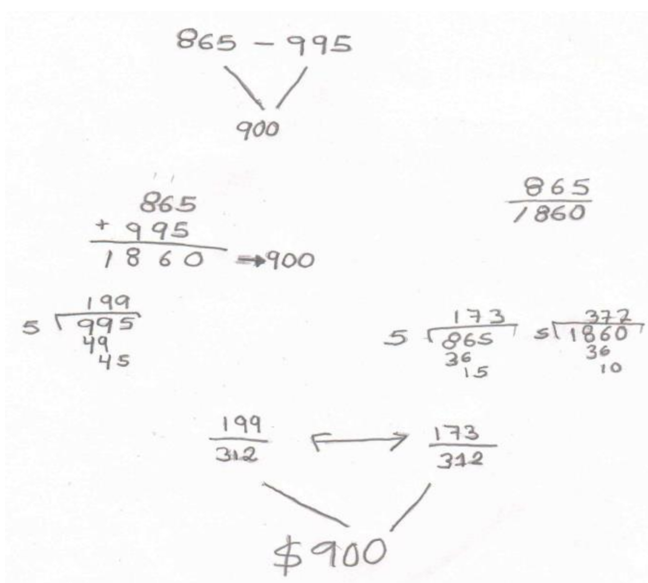


Imagen 47. Suma y división. (PF3)

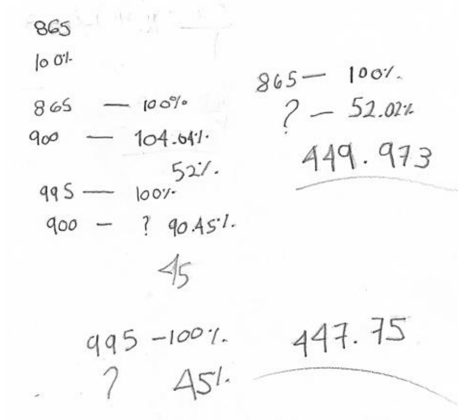
(libros o Internet). El objetivo de esta actividad era acentuar la idea de estudio como un recorrido, como una búsqueda que hace el sujeto a través de diferentes medios.

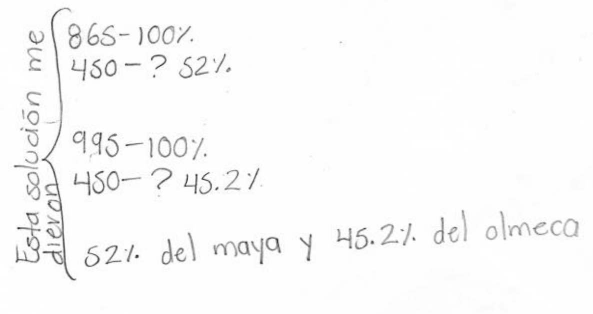
Como se puede observar en la imagen anterior, PF3 considera que se debe hacer una mezcla con dos magnitudes (precio de cada petróleo) para encontrar una tercera magnitud (precio $900), sin embargo la tarea pedía la cantidad de cada tipo de petróleo en la mezcla, es decir, la incógnita está referida al número de barriles como magnitud. Cabe señalar que PF3 elabora esta técnica de manera empírica al no encontrar ayuda en alguien más o en un texto matemático.

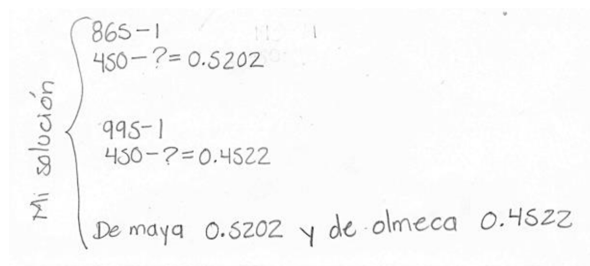
Para el desarrollo de su técnica, una vez que suma el costo de ambos tipos de barril, divide las tres magnitudes conocidas (el precio de barril Maya, el precio de barril Olmeca y la suma de ambos precios) entre cinco, con ello intenta reducir las magnitudes dado que se trata de un divisor común a los tres datos, no obstante no existe indicio de una operación de la cual pudiera resultar el número 5.

Sin llegar a un resultado preciso el profesor en formación opta por representar los cocientes de las tres divisiones a modo de “razón”, pero una razón que no establece de modo directo la comparación de magnitudes, sobre todo porque todos los datos que utiliza aluden a la magnitud “precio”, lo que no corresponde a la situación en cuestión.

La siguiente técnica, también inicia con la consideración de los costos de los petróleos, sin embargo, los asocia con el número de barriles a través de la regla de tres. Está técnica, como se puede observar en la siguientes imágenes, fue utilizada por PF4 y por PF1 respectivamente:

<table>
<tr><td rowspan="2">

PF4</td><td>

PF1A</td></tr>
<tr><td>

PF1B</td></tr>
</table>

Imagen 48. Regla de tres. (PF4 y PF1)

A pesar de que tanto PF4 como PF1 llegan a resultados aproximados y utilizan la misma técnica, la significación y alcance son distintos. PF4 busca un cuarto término desconocido, el porcentaje correspondiente a $900 para lo cual establece la comparación con el precio de cada tipo de petróleo que considera como el 100%. Para el petróleo Maya la cuarta magnitud indica una diferencia de 4.01% de la mezcla por encima del costo de este tipo de petróleo, mientras que en el Olmeca resulta una diferencia porcentual de 0.45% por debajo del precio de la mezcla y el costo del petróleo. Ante dichos resultados PF4 calcula la mitad de ambos porcentajes para “comprobar” con otra regla de tres, que los costos de los porcentajes encontrados se aproximan a 900, así el 52.02% y el 45% constituyen desde su perspectiva las cantidades (porcentaje) de cada tipo de barril para obtener la mezcla solicitada.

Por su parte PF1 hace una interpretación diferente, desde que plantea la regla de tres divide el costo de la mezcla ($900) entre dos tipos de petróleo y calcula el porcentaje correspondiente, esta técnica proviene del “especialista” por lo que PF1 sólo transforma el 100% a la unidad para encontrar la parte proporcional a cada barril en lugar del porcentaje (52% del Maya y 45.2% del Olmeca).

A diferencia de la técnica anterior, basada en la regla de tres, PF5 hace explícita la relación entre el número de barriles de cada tipo y el costo de la mezcla en un modelo que podría denominarse tabular en tanto que refleja a través de estimaciones la posible mezcla y el costo que derivaría (Imagen 49):

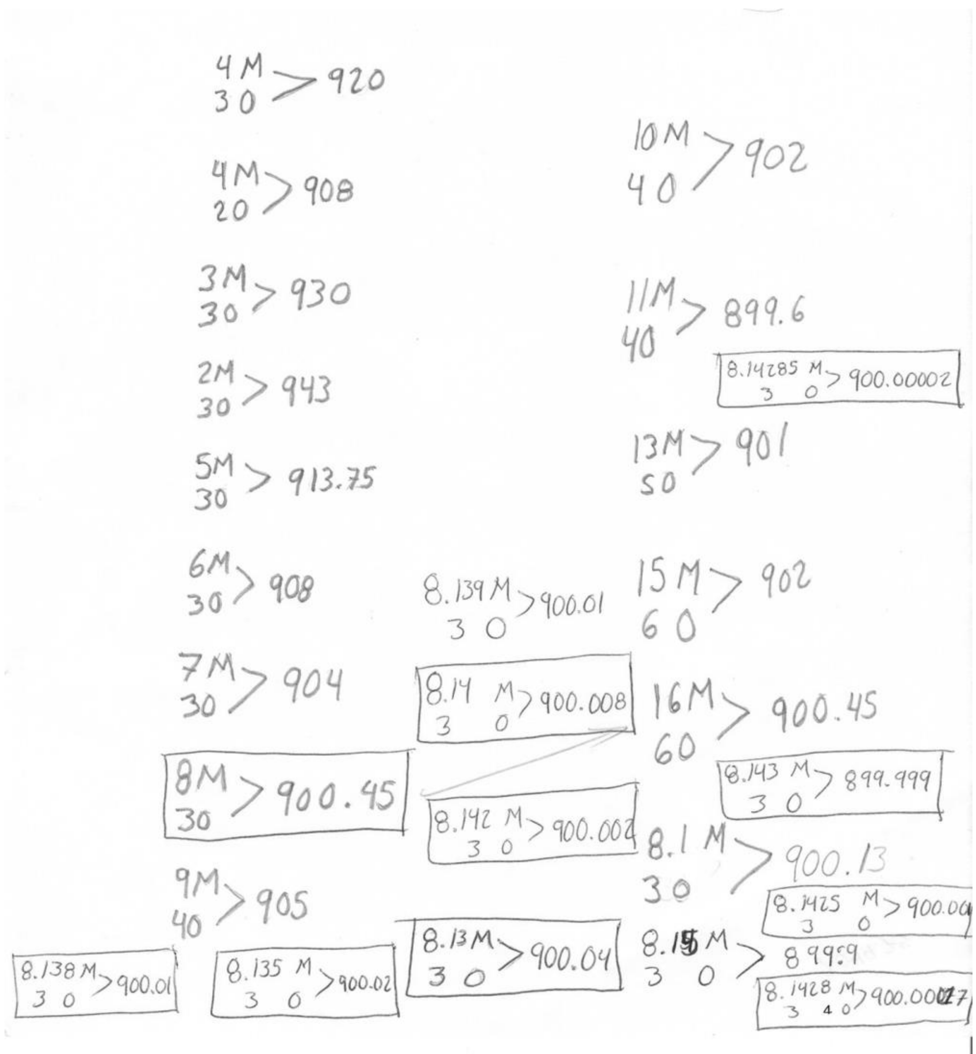


Imagen 49. Modelo Tabular. (PF5)

La técnica de la imagen anterior parte de una estimación de barriles enteros donde PF5 aumenta y disminuye las cantidades para aproximarse a dicho costo. Cuando establece que puede mezclar 16 barriles de petróleo Maya con 6 de Olmeca, busca magnitudes proporcionales a éstas e inicia las aproximaciones con la mitad de los barriles, es decir 8 barriles del Maya y 3 del Olmeca. Al identificar que se trata de magnitudes que son múltiplos entre sí inicia estimaciones con decimales hasta lograr la aproximación más cercana al costo planteado en la tarea. Con el uso de esta técnica fue posible evidenciar que habrá mezclas diferentes que lleven a un mismo costo (4 de Maya y 2 de Olmeca = 908, 6 de Maya y 3 de Olmeca = 908), esta observación permitirá en su momento interpretar que una T de este tipo tiene diferentes soluciones correctas.

Desde la perspectiva de otro profesor “especializado”, la tarea podría modelizarse mediante un sistema de ecuaciones y resolverse a través del método de Gauss-Jordan[38] el cual, como se puede ver en la Imagen 50, fue utilizado por PF2. La técnica empleada resulta de gran utilidad, sobre todo cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones con tres incógnitas y cómo se observa, consiste en emplear el método de reducción de modo que en cada ecuación se tenga una incógnita menos que en la ecuación que le antecede. Si bien en este caso no se trataba de un sistema de tres ecuaciones, el desarrollo que hace PF2 para la búsqueda de las incógnitas de la mezcla lo hace alcanzar un resultado que al comprobarse da cuenta de la eficiencia de la técnica.

[38] El método de Gauss-Jordan consiste en aplicar transformaciones elementales a la matriz ampliada del sistema, de modo que se llegue de ser posible a un sistema de la forma: x+*y+*z =, y+z=*, z=*, donde lo que se hace es convertir el sistema inicial en un sistema cuya matriz ampliada asociada al mismo es una matriz triangular superior. (Tortosa y Santacruz, 1997)

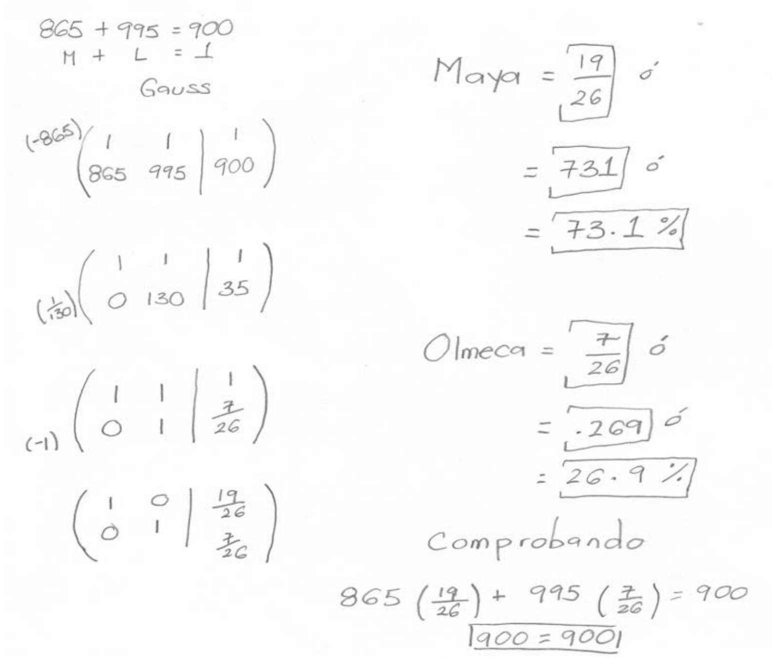


Imagen 50. Método de Gauss. (PF2)

Este método consiste en llevar los coeficientes de cada una de las ecuaciones a una matriz, lo primero que hace PF2 es etiquetar las ecuaciones para lo cual coloca las literales M y L en 1, sin embargo en la primera parte olvida colocar las incógnitas y sólo coloca los coeficientes y el término independiente (865 + 995 = 900) lo que parecería sólo una omisión en la representación pues en la comprobación final los valores de las incógnitas se hacen presentes.

Aunque no lo explicita, la primera columna refiere a *x* (petróleo Maya), la segunda columna a *y* (petróleo Olmeca), mientras que ubica los términos independientes en la tercera columna (costo de la mezcla). Una vez establecida la matriz, en la primera parte busca que el coeficiente 865 se vuelva 0 (utiliza -865); con el 0 ha hecho una matriz escalonada y obtiene los valores de la segunda fila (0, 130 y 35), luego sigue simplificando y multiplica 1/130 (inverso de 130) a la fila dos, para obtener la mayor simplificación posible en la fila 2 (0, 1 y 7/26). Una vez realizado este procedimiento pasa a la primera fila y para eliminar el coeficiente de L utiliza el -1 (-1*0=0+1=1 luego multiplica -1 por 1 = -1 más 1 = 0), posteriormente trabaja con el término independiente de la primera fila y realiza la multiplicación de -1 por 7/26 lo que resulta-7/26 más 1 = 19/26, con esto se ha logrado reducir al máximo la matriz aumentada dejando un solo coeficiente en 1 en la columna de x y un solo coeficiente en 1 la columna de *y* así como reducidos al máximo posible los términos independientes, lo que da por considerado como los valores de la parte de petróleo Maya y petróleo Olmeca que deberá mezclarse. Una vez encontrada la parte proporcional de cada petróleo de la que mezcla los explicita a través del porcentaje correspondiente y colocando los valores de *M* y *L* en la ecuación encuentra la comprobación que muestra la eficiencia de la técnica.

Tal como se había previsto en el diseño del REI, la intención de este recorrido de investigación con "especialistas" o textos científicos tenía como propósito el "encuentro" con técnicas más elaboradas en términos de síntesis y eficiencia, al igual que con la técnica anterior, el objetivo se logró de manera parcial cuando tres profesores en formación resolvieron la tarea a través de un modelo algebraico, PF8 fue quien mostró mayor precisión en el desarrollo del sistema de ecuaciones (Imagen 51).

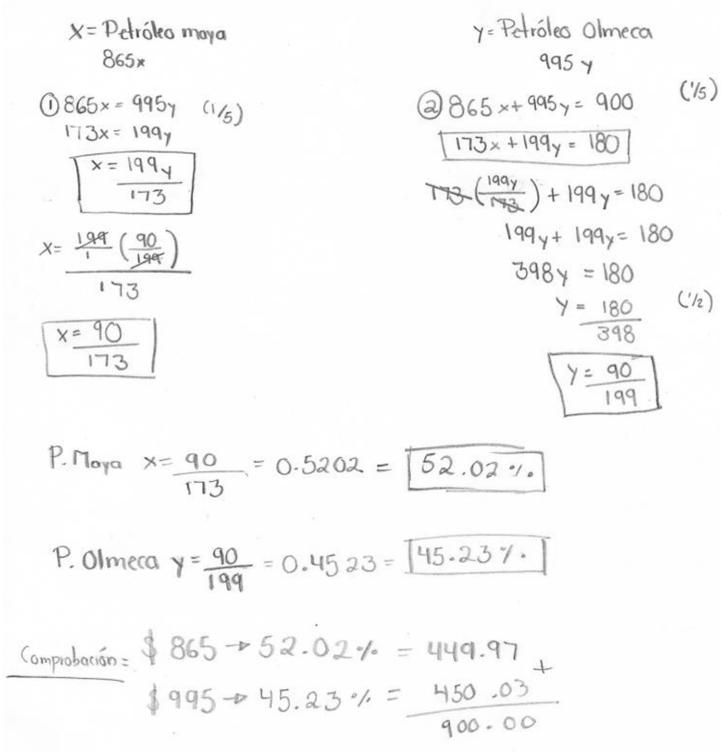


Imagen 51. Modelo algebraico parcial. (PF8)

La técnica empleada por PF8 se basa en una ecuación de primer grado con dos incógnitas que modeliza la T planteada. Para resolverla, de inicio establece una igualdad entre costo de cada tipo de petróleo y su respectiva incógnita (865x = 995y) posiblemente porque considera que la mezcla tendrá aproximadamente la mitad de cada tipo de petróleo, luego reduce los costos a la quinta parte para simplificar el despeje de *x y* establece la ecuación (865x + 995y = 900) en la que sustituye el valor de *x* encontrado en el despeje anterior y agrupa los términos iguales (199y+199y) para encontrar el valor de *y.*

Una vez identificados los valores de *x* y *y* se identifica la parte proporcional a cada uno, la cual también se expresó de modo porcentual, esta situación se comprueba y la suma de ambos valores lo lleva al costo de la mezcla establecida. Durante el momento tecnológico-teórico del recorrido esta técnica fue considerada como la más eficiente.

Otro modelo algebraico diferente al anterior es el que planteó PF7 quien realizó lo siguiente:

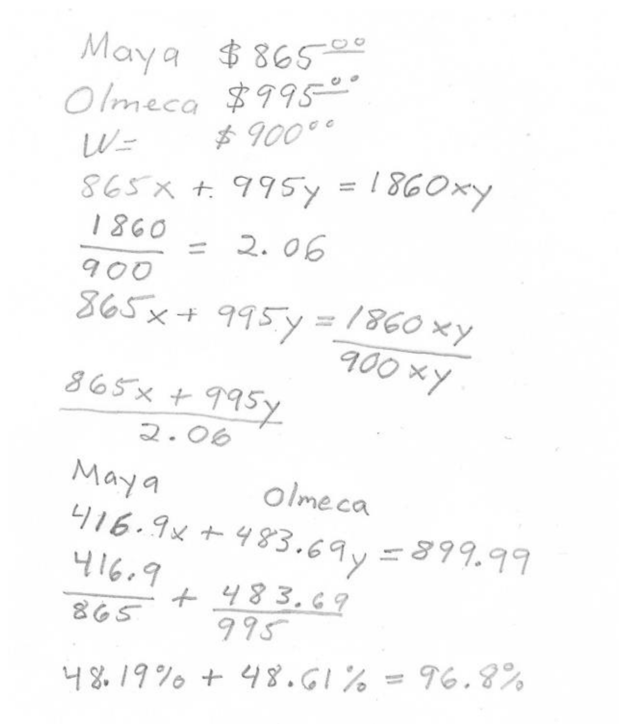


Imagen 52. Uso del porcentaje. (PF7)

En esta técnica aparece una tercera variable, el precio total de la mezcla (W), también asigna una incógnita (*x* y *y)* para cada tipo de petróleo y una vez determinadas suma los costos parciales y los divide entre el costo total. No obstante, deja de lado que se trata de términos no semejantes y suma los coeficientes, aunque los coloca como si los hubiera multiplicado (865x + 995y = 1860xy). Luego utiliza el cociente de la división (2.06) como divisor para cada uno de los valores de ambos tipos de barril y una vez que realiza la división, establece los costos proporcionales a cada petróleo (416.9 de *x* y 483.69 de *y*) pero aún le falta identificar la parte de cada petróleo que deberá mezclarse para obtener un barril de $900, por lo que opta por dividir los costos encontrados entre el costo del barril completo de cada tipo y así obtener dicha parte, luego hace la transformación a porcentaje donde se aprecia un faltante de 3.2% para completar el total.

Con este recorrido de estudio los estudiantes observaron desde perspectivas especializadas la diversidad de técnicas que pueden utilizarse para resolver tareas de este tipo, aunque en su mayoría se observaron deficiencias para la aplicación correcta de cada una de las ellas, el propósito definido para esta parte de la T1.5 se alcanzó en cierta medida con la aplicación de un modelo algebraico incipiente que al igual que las otras técnicas fue explicado y justificado de manera grupal con la intención de socializar y validar los resultados encontrados por cada profesor en formación.

4.5.3. El trabajo con la Técnica. Continuidad o ruptura.

Como se ha mencionado, el propósito de la tarea T1.5 era que, una vez identificadas diversas técnicas, los profesores en formación utilizaran aquella que les pareciera más eficiente para resolver tareas de relación proporcional entre tres magnitudes. Para observar si en efecto los profesores en formación utilizarían alguna técnica más eficiente a la anterior, se planteó otra tarea similar a la anterior en la que sólo se modificó el costo de la mezcla, el planteamiento de dicha tarea fue el siguiente:

Si el precio del petróleo Maya es de $865 y el petróleo Olmeca es de $995. ¿Qué cantidad se debe mezclar de cada tipo de petróleo si se desea producir una mezcla, cuyo costo de cada barril que se extraiga de esa mezcla producida sea de $975?.

En este caso varios profesores en formación modificaron sus técnicas, aunque tres de ellos continuaron con la que habían utilizado anteriormente, es decir, volvieron a aparecer el método de gauss, la regla de tres y el modelo algebraico, aunque el uso del modelo algebraico se amplió a seis profesores en formación. Un profesor en formación, como se muestra en la imagen 53 continúa empleando el método de gauss y lo desarrolla de la misma forma que en la tarea anterior:

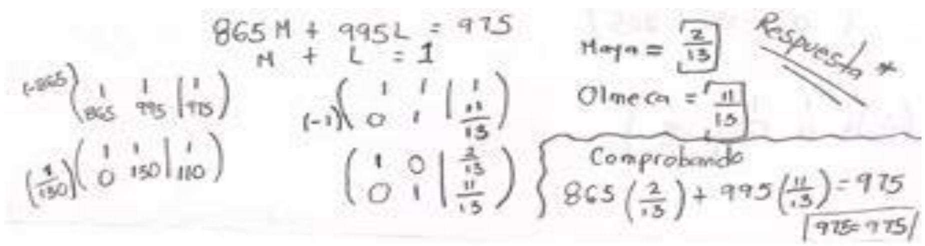


Imagen 53. Método de Gauss. (PF2)

Para PF2, además de eficiente esta técnica resultó también confiable, como se puede observar, nuevamente modeliza la tarea a través de un sistema de ecuaciones y a diferencia de la solución en la tarea anterior, en este caso si expresa las literales M y L en el lugar de las incógnitas. La comprobación muestra una igualdad que vuelve a definir la pertinencia de la técnica, razón por la cual sigue siendo empleada.[40]

De la misma manera, PF1 utiliza la misma técnica (la regla de tres) que en la tarea anterior, para ello opta por dividir en dos partes el costo de la mezcla (975) y establece la regla de tres con los costos de cada uno de los tipos de petróleo (Imagen 54):

[40] Durante la gestión del momento en el que se explicaban y justificaban las técnicas en el grupo, PF2 reconoció su técnica como la más efectiva y confiable además de expresar un claro dominio de ella.

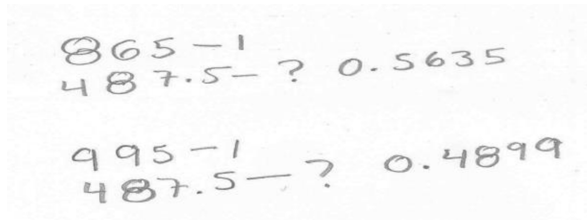


Imagen 54. Regla de tres. (PF1)

Esta técnica sigue siendo predominante en PF1 porque parece ser económica, eficiente y sobre todo dominada, aunque sólo le permite hacer ciertas aproximaciones sin llegar a un resultado certero ya que no se puede hablar de un promedio de la mezcla y considerar los costos de cada tipo de barril por separado porque con ello se olvida que se trata de una mezcla y considera la mitad de $900 para cada uno de los petróleos.

A diferencia de los dos casos anteriores, seis profesores en formación cambiaron su técnica en la solución de esta tarea, por ejemplo PF5 quien en la anterior había utilizado un modelo tabular, retoma la técnica de PF8 por considerarla eficiente[41] pero sobre todo más económica que su técnica anterior.

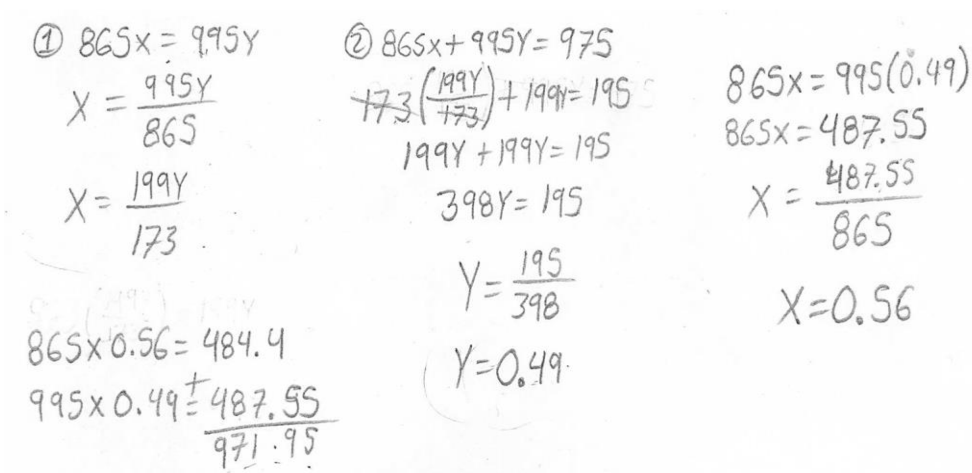


Imagen 55. Modelo algebraico parcial 1. (PF5)

[41] Las razones de su cambio de técnica las expresó en el momento grupal de explicación y justificación de técnicas.

Desde la perspectiva de seis profesores en formación, el modelo algebraico resultó ser la técnica más adecuada para la resolución, aunque el resultado final (971.95) fue aproximado porque no se ha considerado que la tarea pide la cantidad que se debe mezclar de cada tipo de petróleo y que el costo de cada barril que se extraiga de esa mezcla sea una cantidad determinada. No obstante, la técnica retomada, también surgió en uno de estos seis profesores otro modelo algebraico que parecía más económico que el anterior y que ya se había presentado, dicho modelo fue el de PF7:

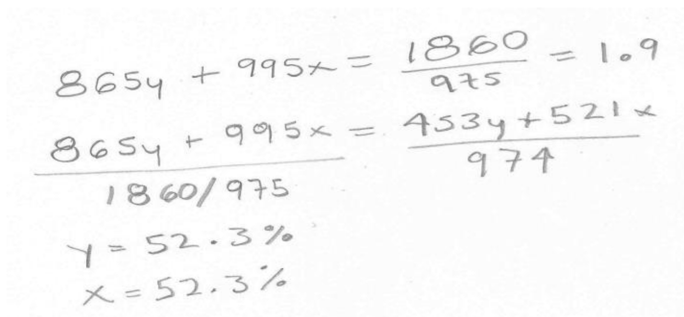


Imagen 56. Modelo algebraico parcial 2. (PF7)

Como se puede observar el error que PF7 sigue cometiendo es sumar dos términos no semejantes para encontrar un valor (1.9) que constituye el cociente de todos los costos de la tarea, sin embargo cuando divide los costos parciales y obtiene 453y+521x, vuelve a dividirlo entre 974 lo que no queda claro porque tampoco coincide con los porcentajes obtenidos.

Como se ha podido ver, la tarea T1.5 hasta el momento ha permitido observar la evolución de las técnicas y el uso de un modelo algebraico en un número considerable de profesores en formación (siete incluyendo a quien utiliza el método de Gauss-Jordan). De modo diversificado, utilizan una expresión algebraica para encontrar la cantidad de cada tipo de petróleo para obtener una mezcla con un costo dado. Uno de los profesores en formación por su parte continúa empleando la regla de tres porque no ha comprendido que su uso sólo podrá darle ciertas aproximaciones a los valores del resultado, ni la necesidad de construir un modelo generalizado que sea eficiente para todas las tareas de este tipo.

4.5.4. Hacia el modelo algebraico.

La T1.5 tenía como objetivo que los profesores en formación utilizaran un modelo algebraico como generalización de la técnica para tareas cuya incógnita estaría representada con una literal, tal como se planteó en lo siguiente.

> ¿Qué cantidad se debe mezclar de cada tipo de petróleo si se desea producir una mezcla cuyo costo de cada barril que extraiga de esa mezcla producida sea de n pesos?

El planteamiento de la tarea complejizaba la situación al colocar una literal en lugar de una cantidad específica, la intención era que reconocieran la técnica más que un desarrollo procedimental, como una estructura algebraica que representara las relaciones implicadas entre las magnitudes expresadas pero que también llevara en su desarrollo a la resolución. No obstante este propósito, tres de los profesores en formación consideraron necesario dar un valor cualquiera a *n* para poder justificar el desarrollo de la técnica que habían utilizado ya, como se muestra a continuación ese fue el caso de PF2, PF1 y PF6:

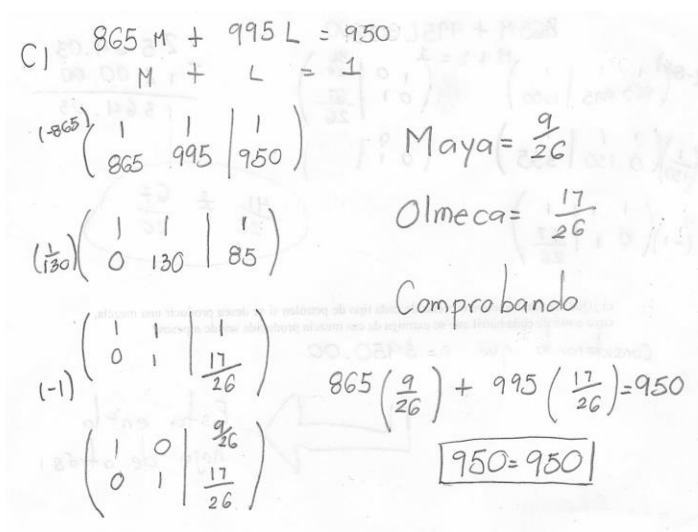


Imagen 57. Método de Gauss. (PF2)

Como se puede apreciar, si bien PF2 plantea una estructura algebraica parcial (865M+995L = 950) al colocar M y L como incógnitas, este modelo no resultaba generalizable pues se aplicaba sólo al valor dado a *n,* es decir a 950. Lo que se aprecia aquí es una “resistencia” para abandonar la técnica dominada que, aunque se basa en un modelo algebraico (un sistema de ecuaciones) no representa fielmente a la tarea planteada (la generalización).

Para el caso de PF1, quien vuelve a utilizar la regla de tres, se podría decir que es él quien presenta la técnica con mayores matices aritméticos ya que no se aproxima a un modelo algebraico que exprese el planteamiento de la tarea, sólo representa la incógnita que habrá de despejarse a través de la regla de tres:

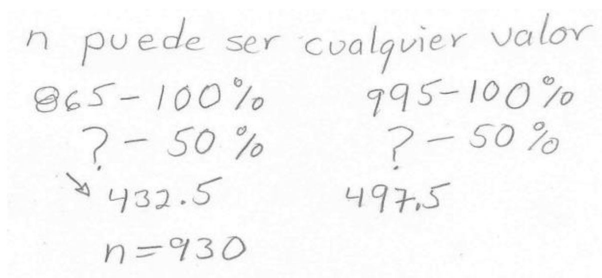
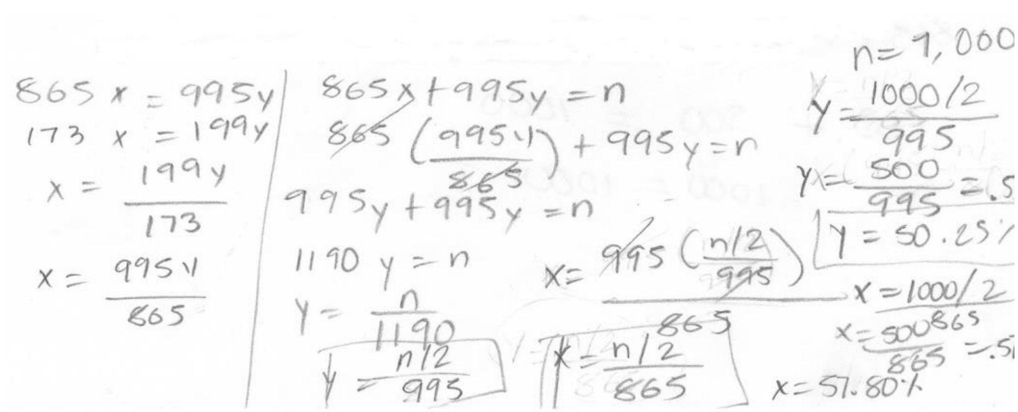


Imagen 58. Regla de tres. (PF1)

Cabe señalar que para este caso, la técnica de PF1 resultó eficiente pues recuperó el costo de una mezcla que ya había sido planteada desde las primeras tareas, además calculó el promedio del costo de ambos petróleos y con ello encuentra un resultado adecuado. Empero, a diferencia de PF2 y PF1, otro profesor en formación (PF6) utiliza el modelo algebraico parcial que había sido explicado y justificado por la mayoría de los profesores en formación, pero da un valor específico a *n* (1000) para desarrollar su técnica (Imagen 59):



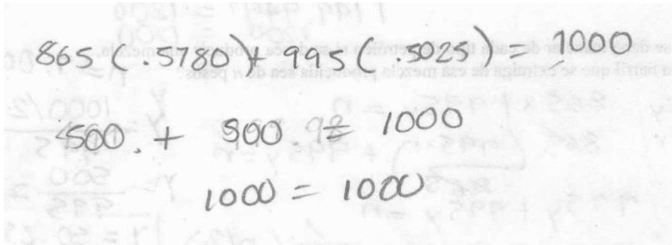


Imagen 59. Modelo algebraico “parcial 1”. (PF6)

La estructura inicial podría tomarse como un modelo algebraico parcial en tanto que todavía asigna un valor numérico a los costos de cada tipo de barril (865x+995y=n), aunque estos datos son parte de la tarea planteada, el propósito de la misma era que se estableciera un modelo algebraico que representara el proceso de resolución cuando se trata de *n* costo de mezcla.

A diferencia de las técnicas anteriores, dos profesores en formación evidencian la transición de un modelo parcial a un modelo algebraico al realizar lo siguiente (Imagen 60):

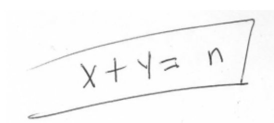
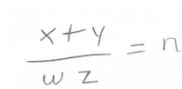
 PF4. Adición de variables	 PF7. Adición y división de variables

Imagen 60. Uso de la adición.

En el caso de PF4 la técnica consiste en una suma de variables, cabe señalar que este profesor en formación había empleado la regla de tres en tareas previas, así como un modelo semialgebraico retomado por la mayoría de los estudiantes (865x + 995y = 975), sin embargo para esta tarea se olvida de que *x* y *y* constituyen las incógnitas de cada tipo de petróleo que conforman la mezcla (n) y que a las incógnitas les corresponde un valor diferente que es el precio de cada petróleo ($865 y $995).

Lo mismo ocurre con PF7 quien además de expresar lo enunciado en el caso anterior, coloca dos variables (*w* y *z*) como divisores de la suma de *x* e *y*, de lo que se deduce su necesidad de colocar los precios de los petróleos con la representación de una literal, o bien que existe una interpretación sobre la división como la mezcla de dos tipos de petróleo, esto último resulta coherente desde la perspectiva del planteamiento de la tarea.

Por su parte, tres profesores en formación retoman la expresión inicial con la que habían trabajado desde tareas previas, es decir, colocan los costos de petróleo respectivos para cada incógnita para después sustituir los datos numéricos por literales (Imagen 61).

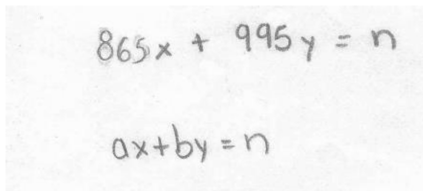


Imagen 61. Modelo algebraico "incompleto". (PF8)

Para estos tres profesores no fue necesario desarrollar la técnica porque una vez que escriben la estructura algebraica, sustituyen los datos aritméticos por las literales *a* y *b* para establecer la generalización en la igualdad, con lo que establecen de manera implícita que se trata de una ecuación lineal con dos incógnitas[42], de esta forma se entiende que las parejas ordenadas de *x* y *y* que satisfagan la igualdad, serán las soluciones de la ecuación.

Cabe mencionar que todas las técnicas anteriores fueron validadas conforme a los momentos planteados en el REI-FP planificado, sin embargo, es evidente que los estudiantes no habían llegado a instalar el modelo algebraico como técnica para la solución de estas tareas, por esa razón hubo de diseñarse y aplicarse tareas adicionales que permitieran replantear las técnicas y observar que falta considerar cierta cantidad de mezcla (x + y) como divisor de la estructura que ya habían encontrado, es decir, cuando ellos establecen el modelo ax + by = n hacen referencia

[42] Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad de un modelo algebraico del tipo ax+by=c, las incógnitas están representadas por *x* e *y*, mientras que a, b y c son números reales conocidos donde a y b no pueden ser 0 al mismo tiempo, una solución para dicha ecuación se presenta como un par de números reales (*x,y*) que pueden encontrarse asignando un valor arbitrario a *x* para despejar *y* o viceversa. Una ecuación de este tipo tiene infinitas soluciones y toda solución determina un punto en el plano cartesiano que se representa a través de una línea recta, de ahí el nombre de ecuación lineal. (Fernández, 2012)

a una mezcla pero no a la parte que se extrae de la mezcla (“de cada barril que se extraiga de esa mezcla sea de *n* pesos”) es la división que aún no se ha presentado porque todavía no se logra la coherencia entre el modelo con la tarea, situación que buscó enfatizarse. Lo que resultó de estas actividades ulteriores se presenta en el siguiente apartado.

4.5.5. ¿La consolidación del modelo algebraico?.

En esta última parte de la T1.5 el objetivo era que los profesores en formación establecieran una técnica y una tecnología (θ) generalizable para cierto tipo de tareas asociadas a la proporcionalidad. Aquí lo relevante no era sólo llegar al modelo algebraico como tal, sino comprender la función e interpretación del mismo e identificar qué significa cada parte, qué puede ser útil para predecir en términos del problema, eso es, el conocimiento matemático en el contexto del problema, expresado en una praxeología.

El REI-FP en su módulo matemático prevé la necesidad de implementar una última tarea mediante la cual se pueda identificar el comportamiento de las magnitudes en una relación de variación proporcional del tipo (ax+bc)/(x+y)=c, con esta tarea además de validar las técnicas de carácter aritmético, el REI permitiría el uso de un modelo algebraico con una justificación sustentable como lo es la Teoría de las razones y proporciones (θ1) y la Modelización algebraica (θ2), para ello se planteó lo siguiente:

> Teniendo en cuenta que el precio del petróleo Maya es de $865 y el petróleo Olmeca es de $995, se hace una mezcla usando 13 barriles de petróleo Maya y 12 del Olmeca. ¿Cuánto cuesta un barril de petróleo de esa mezcla?.

La tarea tenía como objetivo identificar la evolución de la técnica hacia el modelo algebraico pero sobre todo recuperar una situación con la cual se observara la necesidad de establecer la división entre (*x* + *y*) que faltaba en la estructura algebraica que habían logrado concretar en tareas precedentes.

En esta tarea dos profesores en formación iniciaron con el modelo algebraico parcial que habían desarrollado, aunque no lo explicitan de modo algebraico (Imagen 62).

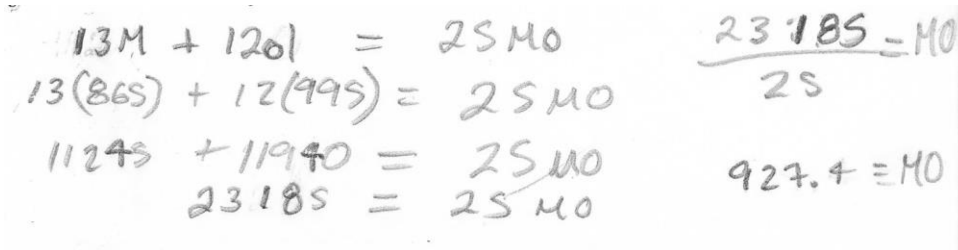


Imagen 62. Estructura algebraica compacta. (PF7)

Al lado izquierdo se observa el proceso seguido para la expresión 13M+12O=25MO, cabe señalar que los datos expresados son todos conocidos, lo que permitió facilitar su acomodo, algo que debe destacarse en esta técnica es que el proceso mismo denota la necesidad de expresar la división entre 25 (12M + 13O) un dato que había pasado desapercibido en la construcción del modelo en tareas anteriores. Al lado derecho se aprecia la comprensión de esta situación y se alude al cociente de la división como la cantidad que se extrae de la mezcla de ambos tipos de petróleo.

Por su parte seis profesores vivieron el proceso en sentido inverso, es decir, desarrollaron la técnica de modo aritmético con lo cual pudieron establecer la construcción e interpretación del modelo algebraico por el que pugnaba este recorrido de estudio (Imagen 63).

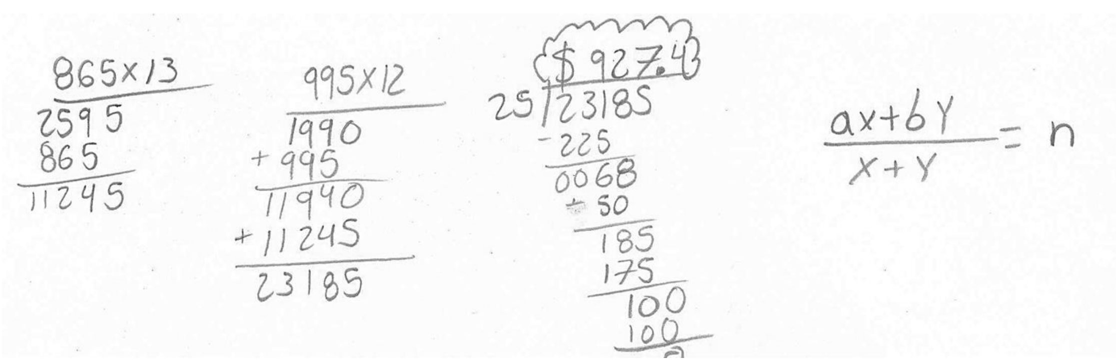


Imagen 63. Estructura algebraica desarrollada. (PF5)

Como puede observarse, la técnica empleada por PF5 es un ejemplo del proceso que justifica el modelo algebraico, los profesores en formación inician conociendo el precio total para cada uno de los tipos de petróleo, una vez que identifican el valor de ambas magnitudes las suman y dividen entre el número total de barriles (25), con esta acción identifican que la estructura algebraica que habían planteado en tareas previasestaba incompleta pues sólo se había conocido “una mezcla”, no la parte que se extrae de esa mezcla, la cual se representa con la divisón entre x + y.

Si bien los profesores en formación retomaron una técnica aritmética que ya habían empleado en una tarea similar, con la expresión algebraica se aprecia la aparición de una técnica que ha sido comprendida y derivada de un proceso planteado a través de un REI-FP cuyo propósito de implementación era precisamente ese.

Con la intención de gestionar el momento relativo al trabajo de la técnica se planteó otra tarea para fortalecer el dominio del modelo algebraico construido, pero con la cuestión centrada en identificar la parte proporcional de cada tipo de petróleo en una mezcla dada, lo que se planteó de la siguiente manera:

> ¿Qué cantidad se debe mezclar de cada tipo de petróleo si se desea producir una mezcla, cuyo costo de cada barril que se extraiga de esa mezcla producida sea de $940?.

A diferencia de la tarea anterior y posiblemente por el manejo de la incógnita planteado en la cuestión, los ocho profesores en formación que usaron el modelo algebraico para resolver la situación planteada, en esta tarea inician colocando el modelo construido en la tarea anterior, cabe señalar que al tratar de identificar el costo de cada barril que se extrae de una mezcla es preciso realizar el despeje de *x* y de *y,* por lo que el proceso para el caso de *y* por ejemplo se haría de la siguiente manera:

$$\frac{Ax+By}{x+y}=C$$

$$Ax+By=Cx+Cy$$

$$By-Cy=Cx-Ax$$

$$y=\frac{x(C-A)}{B-C}$$

De lo anterior se deduce la necesidad de orientar el despeje de la incógnita, lo que plantea una dificultad mayor a la manifiesta en la tarea previa de ahí que los profesores en formación retomen el modelo como referente para encontrar los datos faltantes en la cuestión planteada, lo que hacen PF1 y PF2 en las siguientes imágenes es un ejemplo del desarrollo de la técnica implementada.

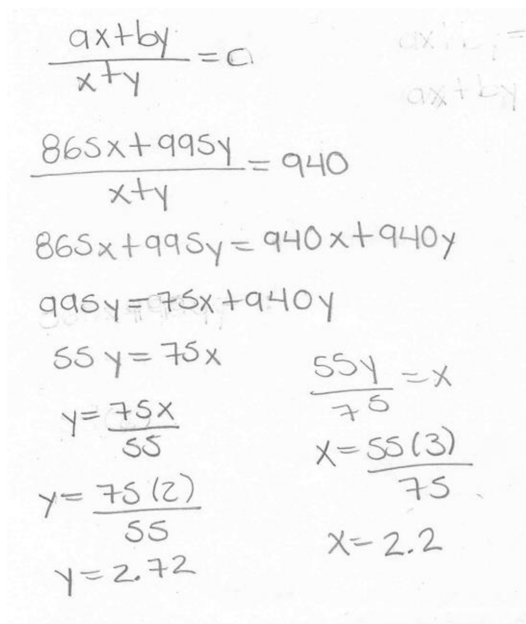


Imagen 64. Modelo algebraico. (PF1)

Como se puede apreciar, PF1 coloca los datos conocidos (costos de cada petróleo y costo total de un barril extraído de la mezcla), a partir de ahí inicia el despeje de ambas variables, primero lo hace con *y,* simplifica algunos pasos hasta que encuentra $y=\frac{75x}{55}$, al llegar a este punto es interesante observar que coloca un valor cualquiera a *x* (2), con lo que llega a establecer que el valor de *y* (cantidad de petróleo Olmeca) sería de 2.72 cuando la cantidad de petróleo Maya (*x*) sea de 2.

Esta misma acción la realiza para el despeje de *x,* otorga el valor 3 a *y* para obtener que, cuando la cantidad del petróleo Olmeca sea 3, la cantidad del petróleo Maya (*x*) será de 2.2. Esta situación permite identificar de manera implícita que este profesor en formación ha comprendido que existe una cantidad infinita de mezclas que puedan dar el costo de un barril de $940 pesos.

A diferencia de la técnica anterior, PF2 hace el despeje desde la estructura algebraica, tal como lo muestra la Imagen 65.

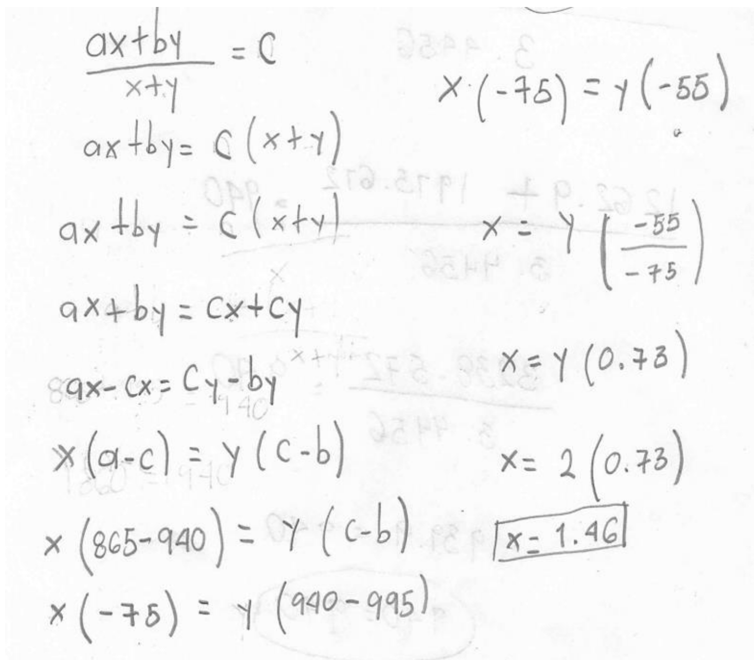


Imagen 65. Modelo algebraico. (PF2)

Con este segundo ejemplo se observa la eficiencia y economía de la técnica, una vez dominada resulta sencillo manipularla e identificarla como pertinente para este tipo de situaciones, PF2 también otorga un valor cualesquiera a *y* (2) para identificar que en este caso *x* (Petróleo Maya) tendría un valor de 1.46, podría decirse entonces que el momento de estudio referido al trabajo de la técnica ha permitido comprender que para este tipo de tareas las soluciones son infinitas.

Lo importante en este proceso del REI-FP es que los profesores en formación han construido el significado de cada uno de los elementos que componen el modelo algebraico así como su funcionalidad, todo ello vivido a través de un recorrido de estudio que fue llevando paulatinamente desde planteamientos sencillos con un modelo aritmético hasta la utilización de un modelo algebraico, proceso que tuvo que ver con una progresiva complejidad de las tareas y con la gestión de los seis momentos de estudio de la organización didáctica.

En esta última tarea, los ocho estudiantes hicieron uso del modelo algebraico y sólo uno de ellos mostró dificultades para su manejo pues olvidó dar un valor cualquiera a cada una de las incógnitas para el despeje de la otra. No obstante, esta dificultad podrá ser superada con el planteamiento de otras tareas similares donde la técnica sea justificada y validada.

Finalmente, cabe señalar que, aunque el modelo aquí construido es propio de la función lineal, esta noción no fue institucionalizada al no constituir el objetivo principal ni el objeto de investigación además de que dicha noción no es trabajada por los profesores en formación en las escuelas de educación primaria, la intención era que como aprendices de matemáticas observaran la relación de proporcionalidad que se establecía entre dos magnitudes con una tercera, identificar ese tipo de tareas, pero sobre todo, provocar la evolución de la técnica, que pasarán de técnicas aritméticas a un modelo general y eficiente.

CAPÍTULO V
EL ANÁLISIS DEL REI. LA PERSPECTIVA DEL PROFESOR EN FORMACIÓN

Las praxeologías didácticas derivan de situaciones en las que se hace alusión a un saber matemático como una cuestión a enseñar, con el planteamiento de tareas que constituyen una praxeología que retoma el profesor en formación y la lleva a los espacios escolares de una institución donde se estudia la disciplina, desde una área como la aritmética hasta un sector como la proporcionalidad.

Hacer el análisis de una praxeología didáctica implica (re)conocer los alcances y restricciones que una institución ha establecido para el estudio de un saber, las cuestiones que plantea, las tareas que señala, las técnicas que demanda y hasta el discurso tecnológico con el que las justifica, por ello en el módulo dos (M_2) donde se analiza el REI, se actúa sobre un determinado número de variables relacionadas con el problema estudiado, es decir, en este capítulo la atención se centra en identificar la justificación y argumentación expresada en el discurso tecnológico de los profesores en formación al reflexionar sobre conceptos, tareas y técnicas de la proporcionalidad, que desde una perspectiva matemática-didáctica, se hacen presentes en el REI-FP y que de una forma u otra se encuentran sujetos a las determinaciones de una institución, la educación primaria.

El análisis se conforma por un elemento descriptivo y uno predictivo y se centra en las características de la situación trabajada en el M_1 (Vivir el REI), se hace referencia a las cuestiones identificadas por los estudiantes en la estructura del REI vivido como estudiantes de matemáticas y predictivo al transitar a un papel de profesores donde describen las elecciones locales y las características de una tarea para la enseñanza de un objeto de saber. Se analiza aquello que el estudiante podría aprender con dicha situación así como sus posibilidades de acción, decisión, control y validación al trabajar de modo independiente al formador; se prevén los comportamientos posibles tratando de demostrar la forma en que el análisis permite controlar su significado y asegurar que se produzcan los conocimientos esperados. (Godino, Batanero, Contreras, Estepa y Lacasta, 2013)

Ante dichas consideraciones, la cuestión generatriz que orientó el trabajo de este módulo (M_2) es la siguiente:

> Q2: ¿Cuál es el discurso tecnológico-teórico (θ, Θ) que despliegan los profesores en formación durante el desarrollo de tareas (T) referidas al análisis de una praxeología didáctico-matemática ligada a la proporcionalidad?

Para dar respuesta a dicho cuestionamiento, el M_2 se analizó a partir de dos momentos de una entrevista semiestructurada, cada uno con una cuestión planteada a través de dos tareas en las que el estudiante normalista toma por un lado la postura de analista del REI como profesor en formación y por otro, la de un profesor enseñante en la escuela primaria.

5.1. LA REFLEXIÓN SOBRE EL REI. LA POSTURA DEL PROFESOR ANALISTA

Para el primer momento se realizó un análisis matemático-didáctico (praxeológico) sobre la actividad desarrollada en el M_1, en la que se plantearon cuestionamientos relacionados con los elementos matemáticos como nociones, técnicas, propiedades y otros elementos identificados y usados en la “vivencia” del REI. En este punto es preciso que los profesores en formación utilicen una terminología específica para describir y analizar la actividad matemática que deberá posteriormente ser estudiada en la escuela primaria, para tal efecto la cuestión derivada es la siguiente:

> Q.2.1. ¿Cuál es el discurso tecnológico-teórico (θ, Θ) que expresan los profesores en formación, durante el desarrollo de una tarea (T) relativa al análisis conceptual, técnico (τ) y funcional del recorrido de estudio e investigación posterior a su aplicación en la escuela normal?

Para tal efecto la T2.1 consistió en dar respuesta a preguntas como: ¿cuál es el concepto o conceptos centrales que se plantean en la “Situación Petróleo”?, ¿qué tipos de proporcionalidad se incluyen?, ¿cuáles son las diferentes estrategias a que da lugar esta situación?, ¿es pertinente plantear la situación petróleo en la escuela primaria?, ¿cuáles serían los conceptos y estrategias que aprenderían los niños con el estudio de esta situación?, entre otras.

En el caso de la identificación del *concepto central*, seis profesores en formación señalaron que se trataba de la proporcionalidad, argumentaron que en términos generales todas las tareas estaban implicadas con dicho concepto, un profesor más agregó que también se trabajó el factor constante de proporcionalidad, manifestó que posiblemente dentro del *tema,* la *cuestión* de estudio era dicha noción, así lo expresa PF2:

> Se trabajó el concepto de proporcionalidad y el factor constante de proporcionalidad porque en los problemas que estuvimos analizando había una relación constante entre dos razones que eran x y y, una variaba y la otra dependía de la otra, si una aumentaba la otra disminuye entonces es por eso que era el factor constante de proporcionalidad. (PF2)

En esta respuesta se observan varios elementos asociados a la proporcionalidad, la relación entre magnitudes incluidas en las diversas tareas vinculadas a la “Situación Petróleo”, donde uno de los puntos centrales era el análisis de la variación de una magnitud con respecto a otra, por lo tanto la noción de variación proporcional fue un eje central de análisis. Aunque la constante de proporcionalidad constituyó una noción que se vio involucrada en algunas tareas (las tablas de variación proporcional) no era el concepto principal que derivaba de esta situación pero si una noción adyacente que se hizo presente en el recorrido de estudio.

Por otro lado hubo un caso que, además de identificar a la proporcionalidad como concepto central, también lo percibe como noción que puede evolucionar hacia otra perspectiva dependiendo de la institución, tal es el caso de la siguiente afirmación:

> Lo que se trabaja es proporcionalidad, pero la proporcionalidad nos lleva hacia el uso de ecuaciones más adelante, entonces es como dependiendo, porque yo por ejemplo este problema lo puedo aplicar a mi grupo y me va a dar resultados aritméticos con un tema aritmético, pero si voy y lo aplico a secundaria muy probablemente, dependiendo de los conocimientos que ellos tengan me puede dar resultados algebraicos. (PF7)

Con las afirmaciones hechas por PF7 se observa la identificación del concepto central en la “Situación Petróleo”, lo interesante de esta idea es la dualidad de los modelos en los que se hace presente, el aritmético y el algebraico. Si bien no se explicitan nociones derivadas del concepto de proporcionalidad, excepto el uso de ecuaciones, este profesor en formación ha comprendido que el contexto y las restricciones institucionales determinarán el alcance de las nociones y de las técnicas que se podrán estudiar.

A partir de lo anterior podría decirse que todos los profesores en formación identifican el concepto implícito en la situación problema. Si bien esta situación puede deducirse a partir de lo abordado en los momentos de estudio del M_1, en este M_2 se intentó reafirmar los conocimientos identificados en el REI al preguntar sobre los tipos de proporcionalidad en las diversas tareas matemáticas resueltas.

Uno de los profesores en formación identificó solamente el trabajo con la proporcionalidad directa, al cuestionar sobre los *tipos de proporcionalidad* que se trabajaron en la situación, indicó que:

> Proporcionalidad… mmm... no sé si sea un tipo de proporcionalidad o más bien como de razón ¿no entra?. Cuando por cierto dinero ajustó tantos barriles o viceversa, ah… es la directa. También por ejemplo cuando vimos que si se aumenta el precio aumentaba la cantidad de petróleo. (PF4)

En el ejemplo anterior se observa que al inicio, PF4 parece no identificar los tipos de proporcionalidad, incluso confunde la noción de razón como parte de la tipología, lo que indica que puede tener ciertas dificultades para identificar situaciones que implican diversos tipos de proporcionalidad, aunque su respuesta también hace referencia a la proporcionalidad directa cuando ejemplifica con las magnitudes de precio y cantidad de petróleo sin embargo no identificó que en el resto de la situación se plantearon tareas en las que se incluye otro tipo de tareas, tal como lo hace PF3:

> Pues la directa y la inversa, ya que, dependiendo de la consigna que se nos daba o la pregunta, nosotros podríamos obtener o desarrollar un procedimiento ya sea de proporcionalidad directa o inversa dependiendo del resultado que se nos pedía. (PF3)

En el caso anterior se hace alusión a las dos relaciones de proporcionalidad y, aunque no se ejemplifica, se expresa que ello depende del planteamiento dado en la situación, cabe señalar que en esta categoría se ubicaron cinco de los ocho estudiantes, aunque ninguno la define o ejemplifica, sólo expresan los tipos de proporcionalidad.

Se presentó un caso que además de identificar los dos tipos de relación, también enunció que existe otro tipo de relación cuando se manipularon tres magnitudes en la situación problema:

> La directa cuando una cantidad la dividíamos entre un número entonces la otra magnitud con el mismo número pero dividido entre la constante por eso era directa además la inversa que dependía una de otra. Y este… había una que bueno en lo que son los problemas se manejaba como compuesta, la compuesta era donde teníamos que encontrar donde faltaban valores y teníamos que buscarlos a partir de la sustitución. (PF2)

En la respuesta anterior se aprecia que, aunque no explica claramente la proporcionalidad compuesta, hay un indicio de que el profesor identifica que ésta se presentó cuando se trabajó “la sustitución”, lo que pudo ser interpretado a partir de las últimas tareas del M_1, donde se sustituyó el valor numérico por el manejo de literales, momento en el cual intervinieron tres magnitudes en la mezcla de petróleos. Además de los casos enunciados, PF6 no logró identificar las relaciones de proporcionalidad implícitas en la situación petróleo, manifestó que no recordaba esa tipología.

A partir de los datos anteriores, se puede deducir que la mayoría de los profesores (siete de ocho) identifica el significado y la funcionalidad de la proporcionalidad directa, pero no la proporcionalidad inversa y compuesta, tal vez porque en las instituciones formadoras de docentes dan poca atención a este tipo de relaciones en tanto que no son abordadas profundamente en las escuelas primarias.

Por otra parte, cuando se cuestionó a los profesores en formación sobre *las técnicas empleadas* para la resolución de las tareas planteadas en el REI, las respuestas se diversificaron, tres profesores identificaron tres técnicas, mientras que dos identificaron 4 y tres profesores hasta 5 técnicas.

Las técnicas que se mencionaron con más recurrencia fueron la multiplicación y la división sin asociarlas con la regla de tres, posiblemente porque las tareas planteadas explicitaban en su mayoría el valor unitario y resultaba innecesario desarrollar el proceso de multiplicación-división propio de la regla de tres. A continuación el ejemplo de este tipo de respuestas:

> PF1.- Bueno me acuerdo que al principio usábamos la multiplicación, porque era cuando empezábamos, de que si uno cuesta tanto ¿cuánto costará cierta cantidad?, entonces usábamos multiplicación, usamos también lo que fue la regla de tres cuando desconocíamos algún valor, usábamos la división por ejemplo, cuando decíamos que, que si teníamos cierta cantidad de dinero, cuántos podríamos completar, ¿qué más usamos?
>
> M: ¿Sólo esas?
>
> PF1.- Si el precio de un barril es tanto, ¿cuál es el costo de tantos?, bueno sí, fue multiplicación, aunque por ejemplo yo usé divisiones cuando teníamos que sacar el precio de una fracción por ejemplo, también usé decimal, porque decía si en un entero hay cuatro cuartos pero sólo voy a pagar lo de tres cuartos, entonces hacía una división para saber a cuánto equivalía cada cuarto, bueno la regla de tres cuando fuimos llegando al concepto de proporcionalidad, porque por ejemplo decíamos, si con cuatrocientos cincuenta ajustamos tanto, entonces ya luego nos está preguntando que con novecientos cuánto ajustamos, ah pues es el doble entonces ya sólo lo multiplico por dos y ya era pues ir doblando cantidades. Pues es que según lo veo y según lo recuerdo la mayoría de las veces utilizamos los mismos procedimientos, ya al final llegamos a lo que era el álgebra, ya por medio de cierta fórmula era que obteníamos el valor desconocido.

En el ejemplo anterior se observa que la multiplicación y la división parecen ser las principales técnicas identificadas en tareas asociadas con la proporcionalidad. El trayecto “vivido” para llegar al modelo algebraico, como lo enuncia PF1, no fue modificado, sólo en el tipo de número trabajados (enteros y fraccionarios) y aunque se menciona la regla de tres, aparece de modo tangencial, el valor unitario como operador multiplicativo también es el más identificado.

En segunda instancia, los profesores en formación aludieron a la regla de tres como una de las técnicas que dio continuidad a las anteriores, sobre todo la identificaron al encontrar el valor faltante en las tablas de variación proporcional, tal como lo especifica PF4:

> Empezamos con multiplicaciones para saber cuánto cuestan tantos barriles con el precio de uno y luego seguimos con división, a partir de esta multiplicación la dividíamos entre tantos barriles o cuando hacíamos las mezclas. Utilizamos también mucho la regla de tres para resolver gráficas y dar con los costos en las tablas de variación. Y bueno también usamos eso de razones entre dos cantidades. Los últimos problemas ya fueron más algebraicos de buscar incógnitas ya un poco más complejo pues se trataba de despejar variables. (PF4)

A diferencia de PF1, PF4 indica las técnicas que se implementaron a lo largo del REI, al hablar de inicio de la multiplicación y la división refiere implícitamente al uso del valor unitario como operador multiplicativo en coincidencia con PF1, pero expresa además la transición entre una técnica y otra al ejemplificar su uso en las tareas correspondientes.

Por su parte PF2 hace una descripción de las técnicas sin mencionar el uso de operaciones básicas, él hace un recorrido que inicia con la regla de tres y termina en las últimas tareas resueltas con expresiones algebraicas:

> Bueno una estrategia fue la regla de tres, otra estrategia eran las tablas de proporcionalidad, otra era más directamente por ejemplo cuando en una tabla no utilicé regla de tres ni tabla sino que sumé un valor y otro y encontré la diferencia para ver cuánto había entre el punto B y el C, esta es otra estrategia, otra fue el método de Gauss y ya el último con la institucionalización fue la expresión algebraica como tal. (PF2)

En este caso se observa la ausencia del valor unitario, técnica recurrente en las primeras tareas, lo que pudiera indicar que ésta no fue considerada como técnica asociada a la proporcionalidad o bien que al ser resueltas por la multiplicación y la división, las primeras tareas no fueron vistas como propias del valor unitario. Entre los profesores en formación que mencionaron dos técnicas, uno señala la ecuación y otro la técnica aritmética y la algorítmica, puede decirse que el segundo identifica las que son justificadas por el discurso tecnológico.

Posteriormente, se preguntó a los profesores en formación *la pertinencia de la “Situación Petróleo” en la escuela primaria*, siete de ellos respondieron que sí y sólo uno comentó que no resultaba pertinente, lo argumentó de la siguiente manera:

> Considero según mis experiencias, mi poca experiencia en las primarias, considero que no, porque a lo mejor los primeros problemas de las primeras sesiones tal vez sí y lo resolverían algunos, pero la verdad ahorita que estoy ahí si se plantea un problema es muy difícil que se ponga en práctica simplemente con mencionarles el problema, sin darles una explicación o sin analizarlo entre todos, simplemente con plantear el problema es muy complicado que lo resuelvan hasta la primer sesión, tal vez una o dos personas podrían resolver los problemas que realizamos en la primer sesión o segunda, pero ya a partir de ahí no, yo creo que se les reburujaría más a ellos. (PF5)

En el argumento anterior se expresa la dificultad de plantear la situación considerando las características del grupo escolar con el cual se encontraba trabajando (sexto grado), lo que supone un deslinde del uso posible de técnicas más rudimentarias que pudieran ser dominadas por sus alumnos y con las cuales se podría dar respuesta a las tareas planteadas.

En el caso de quienes afirmaron su pertinencia se encuentra PF6. quien además justificó su aplicación con algunas sugerencias:

> Yo creo que sí, nada más que la dificultad sería modificar en cuanto a los números bueno se supone que en primaria en los grados más altos ya se maneja lo que son decimales y fracciones, porque a nosotros nos causó dificultad las operaciones con los decimales pues está difícil con los niños y la otra parte las expresiones algebraicas a lo mejor también ya necesitaríamos bajar de nivel, me parece que la última que trabajamos se me hace como una expresión demasiado amplia o demasiado extensa para trabajarla con un niño de sexto no digo que no sea posible, puede trabajarse, pero si a nosotros en un cierto momento nos causó dificultades entender el significado de *x,* es que está complicado tanto valor por ejemplo en la última que era (ax+by)/x+y como que de repente te pierdes en algunos momentos entonces sería como esa partecita a lo mejor detallarla un poco más simple pero si es posible trabajarla en primaria. (PF6)

Como se puede observar, las dificultades y situaciones que podrían replantearse tienen que ver con el manejo de la notación decimal y fraccionaria de los números así como el uso de un modelo algebraico, aunque desde su perspectiva no se elimina la posibilidad de emplear otras técnicas para resolver las tareas de la situación petróleo.

Otro caso similar es el de PF8 quien argumentó la necesidad de simplificar la situación en función de los grados escolares donde se planteara:

> PF8. Mmm…sí, quizá no con las mismas palabras, bueno y tal vez sí, sí, yo digo que sí hasta en niños de primaria de primer grado.
>
> M. ¿cómo sería en niños de primer grado?
>
> PF8. Bueno, se manejaría en lenguaje un poco más acorde a ellos, se les pediría no sé, bueno yo con mis niños de primer grado lo uso así más como en una situación cotidiana, ¿metiendo así exactamente lo mismo del petróleo o cómo el mismo procedimiento?
>
> M. Así la situación del petróleo como está, que tú dijeras si me la puedo llevar a la escuela primaria y si la puedo aplicar, ¿la consideras pertinente?
>
> PF8. Sí, yo digo que sí, bueno yo lo utilizo como a modo de cuento, una situación didáctica, este… las cantidades no creo que en mi grupo puedan utilizar números tan grandes, sería buscar otras cantidades. Buscar cantidades más pequeñas que ellos puedan utilizar, quizás nosotros utilizamos la división, con ellos sería como reparto ¿no?

En esta respuesta se aprecia que algunos estudiantes toman como referencia la experiencia que han adquirido como profesores y aunque afirman la viabilidad de la aplicación, también consideran la necesidad de hacer ajustes en función de los saberes previos, PF8 por su parte hace alusión al tipo de presentación de la situación, es decir a contextos concretos, manipulables y accesibles a los saberes de los alumnos a quienes se plantearía.

En cuanto a *los conceptos matemáticos para ser aprendidos por los niños*, identifican tres categorías, la primera en la que se ubicaron tres profesores hace referencia al manejo de las operaciones básicas, un ejemplo de este tipo de respuestas es el siguiente:

> Bueno sería como multiplicación, división, sumas, restas, también vendría siendo como encontrar los comunes múltiplos, eso también lo vimos. (PF8)

Cabe resaltar que las respuestas dadas por PF8 se distinguen por referirse al trabajo con los primeros grados, espacio donde desarrolla sus prácticas profesionales y, más que identificar los conceptos de la "Situación Petróleo", alude a los conceptos que sus alumnos pueden aprender con la misma. En la segunda categoría se ubica la mitad de los profesores en formación quienes identificaron que al igual que ellos, los niños de la escuela primaria abordarían el concepto de proporcionalidad y sus nociones subyacentes.

> Proporcionalidad, factor constante, razón, magnitudes cuando es x y y, expresiones algebraicas, qué otro concepto podría ser… el de gráfica, implícitamente los ejes x y y pues creo que son los más concretos a lo que tiene que ver con proporcionalidad. (PF2)

A diferencia de los casos anteriores, la postura de un profesor en formación es un tanto ambigua al señalar que el concepto a trabajar era una variable:

> Una variable, podría ser también que los niños identifiquen que si se modifica el costo automáticamente aumenta la cantidad de petróleo entonces que se vea cómo va aumentando. (PF4)

Como se puede apreciar, se habla de la variación proporcional directa, aunque el concepto que se maneja es la noción de variable, posiblemente esta argumentación aludía al trabajo con expresiones algebraicas.

Siguiendo con la implementación de la situación en la escuela primaria, se cuestionó a los profesores en formación acerca de las posibles técnicas que pudieran ser utilizadas por los niños en esta situación. La mitad de los profesores identifica menos de tres técnicas, la otra mitad señala entre cuatro y siete técnicas. Un ejemplo del primer caso es el que se muestra a continuación:

> Pues es que los niños son muy impredecibles, de repente si les damos un problema de decir cómo lo resuelven puede ser que hagan por ejemplo, en el problema de lo primerito del costo de cuatro barriles puede ser que dibujen los cuatro barriles, le pongan el precio y lo sumen o sea de repente salen con procedimientos así, entonces no sé, pueden ser dibujitos, operaciones. (PF5)

Otro caso es el siguiente:

> Pues por ejemplo auxiliarse de fichas para contar, por ejemplo los niños pequeños utilizan fichas, ábacos, no sé, llenado de tablas. (PF8)

En los ejemplos anteriores se observa una tendencia, el empleo de técnicas informales cuyo uso se atribuye a los niños pequeños, nuevamente se presenta la técnica en función de los alumnos, más que derivadas de la tarea en sí. En el caso de los profesores que mencionan más de tres técnicas, se ubica quienes hacen referencia a las técnicas que derivan de las tareas como tal, es decir técnicas propias de la proporcionalidad:

> Bueno la primera sería la básica, la multiplicación y división es lo primero que corremos a hacer, luego sería irnos a un segundo nivel lo que es la regla de tres o sea una de las formas más sencillas de ver lo que es la proporcionalidad, de tanto equivale a tanto entonces cuánto me equivale esto a tal cosa, otra cosa para ver también fácil son las equivalencias, por ejemplo tal fracción me da qué decimal y luego ya trabajar equivalencias de otra forma pero yo pienso que se empieza por ahí si vamos a trabajar decimales y fracciones entonces es bueno decir un 1/3 es a 0.33 del entero y ver esa parte de equivalencias entonces a partir de eso yo creo que es posible ir adentrándote a lo que son las expresiones algebraicas de un modo más conciso o sea más de me va a resultar b+c por ejemplo b vale tanto, c vale tanto entonces cuánto va resultar, es decir algo sencillo no tan complicado. (PF6)

En este caso se observa que más que señalar las técnicas que utilizarían los alumnos de la escuela primaria, se alude a las técnicas que el profesor desarrolló en el M_1, pero establece ciertos ajustes como enseñante, esto es, plantea modificaciones que pueden facilitar su manejo en la escuela primaria. A diferencia del ejemplo anterior, PF2 hace un recorrido por las tareas que conforman la "Situación Petróleo" pero vista desde la perspectiva de lo que harían los alumnos de la escuela primaria:

> Pues primeramente lo resolverían con sus propios medios o métodos, posteriormente si se socializara… bueno más bien se tiene que socializar, se sacaría una manera más convencional o más sencilla de resolver el problema y ahí comenzarían a entender que a lo mejor hay un método más rápido o más entendible para ellos en vez de reborujarse con todas las incógnitas con las que se cuenta. Y ya después pienso que sí utilizarían la regla de tres porque es algo muy rápido o que es algo que se le está enseñando a los niños un poco más atrás, desde quinto y sexto y ya después yo creo que esa regla de tres la utilizarían en la tabla, después de la tabla tendrían que encontrar la relación que

> hay entre el costo y el número de barriles bueno en dado caso que esa fuera la pregunta y ya pues conjuntamente tendría que ver en este caso cómo se le haría para esos números suplirlos con expresiones algebraicas. (PF2)

En la postura de profesor analista se explicitan las posibles técnicas que emplearían los alumnos de la escuela primaria, esta caracterización de técnicas está determinada por la experiencia obtenida durante su práctica docente. Algo que resulta interesante en este cuestionamiento es que en el rol de profesores, se marca una tendencia hacia la recuperación de técnicas informales que pueden ser generalizables en sus alumnos y no consideran aquellas que corresponden a la proporcionalidad como tema en cuestión.

También se les cuestionó sobre *el objetivo que tendría trabajar esas técnicas en la escuela primaria* mediante una situación como la del petróleo, en este caso se pretendía conocer si los profesores en formación habían identificado que la situación petróleo generaba la evolución de técnicas rutinarias hacia técnicas más especializadas. Se encontraron tres categorías de respuestas: como mecanismo de ejercitamiento (pero con significado), como descubrimiento de nuevas técnicas y como evolución de las mismas, en el caso de la primera categoría se ubicó sólo un profesor en formación quien argumentó lo siguiente:

> M. ¿Cuál crees que sea el objetivo principal respecto de las estrategias al presentar esta situación problema?
>
> PF4. Podría ser que ejerciten operaciones y que se vayan encaminando más a lo algebraico, que entienden el porqué, yo en la primaria por ejemplo no sabía que significaba x y y, de dónde salió esa incógnita, con esta situación si se observa para que sirve una cosa y otra las multiplicaciones que vimos al principio y las divisiones que las utilizamos para una regla de tres.

En el ejemplo anterior se observa la idea de que el objetivo de trabajar esas técnicas es que los alumnos de la escuela primaria ejerciten las operaciones básicas, lo que significaría un planteamiento de tareas para la aplicación de técnicas, no obstante PF4 también ofrece una justificación basada en la idea de significado, sobre todo en lo que al modelo algebraico se refiere. En la segunda categoría se ubican tres profesores en formación quienes afirmaron que el propósito de trabajar esa situación era que los alumnos descubrieran diversas formas de solucionar un problema, en este sentido se mueve el siguiente ejemplo:

> Pues que ellos descubran nuevas formas para resolver ciertos problemas, sí que vean que no hay sólo un procedimiento y pues ya ahí ir acercándolos a este tipo de temas. (PF1)

Afirmaciones como la anterior muestran que los profesores en formación tienen la idea de que a través de este tipo de tareas los alumnos podrán identificar que un problema se resuelve a través de diversas técnicas y que una vez discutidas y validadas es posible el trabajo con un concepto matemático. Estas ideas derivan de los discursos teóricos que fundamentan las praxeologías didácticas en las instituciones formadoras de docentes.

Por su parte, cuatro profesores identifican que el propósito de trabajar dichas técnicas alude a la praxeología matemática, es decir que los alumnos puedan evolucionar hacia técnicas más elaboradas, como lo afirma PF7 a continuación:

> Muy probablemente mi objetivo sería que los alumnos abandonaran… bueno no que abandonaran sino que no se quedarán en la simple idea de que todo se resuelve con simples operaciones básicas y que al final de la suma, la resta, la multiplicación y la división hay una combinación de todas de ellas para llegar a algo más avanzado, podría decir a una ecuación tal vez no les mencionaría yo una ecuación como tal sino trataría de que llegaran a ese punto para tratar de diseñar una ecuación u otras fórmulas en las que se puedan basar para resolver un problema de este tipo. (PF7)

El 50% de los profesores en formación logran identificar que la intención de proponer ciertas tareas a partir de una situación generatriz, conlleva a la búsqueda de una técnica que pueda ser generalizable a tareas con las cuales se vuelve más económico y eficiente su empleo.

El último cuestionamiento de la T2.1 buscaba la recapitulación y validación de los argumentos expresados por los profesores en formación, por lo cual se preguntó sobre *el objetivo de estudiar esta situación como estudiantes de una escuela normal*; en este caso las respuestas se diversificaron, cinco profesores dieron una respuesta diferente:

> -Entender un concepto progresivamente. (PF1)
>
> -Encontrar diversas estrategias de resolución. (PF3)
>
> -Ver el proceso de resolución de un problema. (PF4)
>
> -Identificar problemas de proporcionalidad. (PF6)
>
> -Encontrar sentido al Álgebra. (PF7)

Esta diversidad de respuestas indica ciertas intenciones, sin embargo el objetivo primordial era que los profesores en formación evolucionaran de las técnicas del modelo aritmético hacia técnicas más generalizables como las del modelo algebraico.

Tres profesores en formación asociaron el objetivo de estudiar esta situación como una oportunidad o un "ejemplo" sobre cómo enseñar, tal es el caso de PF2, quien argumentó lo siguiente:

> Ver cómo se puede llevar a los alumnos de la mano desde lo más general hasta lo que ya es un pensamiento más formal partiendo desde lo que ellos saben y para saber cómo son las etapas de las situaciones didácticas, primero pues la parte de acción luego la socialización y luego ya institucionalizamos los conceptos. (PF2)

A partir del análisis del REI vivido se observa que los profesores en formación se asumen como profesores enseñantes, si bien en ciertos casos, como en la identificación de los tipos de relación proporcional, se manifiestan algunas dificultades, en su mayoría identifican aspectos matemáticos como conceptos y técnicas vinculadas con la proporcionalidad así como su manejo en la escuela primaria.

Con los datos de este primer encuentro, además de un análisis praxeológico matemático se observan indicios de una praxeología didáctica establecidos a partir de la revisión de un REI para el estudio de la proporcionalidad, es visible que los profesores en formación identifican la existencia de ciertas tareas que se remiten a una institución como la educación primaria y que dicha institución conlleva también el uso y estudio de una(s) técnica(s) determinadas. A decir de los profesores en formación esas restricciones institucionales son las que limitan o favorecen la persistencia de una técnica y la aplicación de ciertas tareas, es visible que la regla de tres y el valor unitario como operador multiplicativo son dos técnicas que los alumnos de la escuela primaria pueden emplear para dar respuesta a tareas referidas a la proporcionalidad, además es visible que desde su perspectiva, el trabajo con modelos algebraicos en la educación primaria no es factible ya que la limitación institucional promueve su justificación tecnológico-teórica hasta la educación secundaria.

De aquí que los profesores en formación argumenten que los tipos de tarea se vuelven factibles cuando los alumnos dispongan de algún tipo de técnica y ciertos discursos tecnológicos que le permitan comprender la tarea. En ese sentido las técnicas que pudieran derivar de la implementación de un REI como la "Situación Petróleo” están en función de una actividad en particular. Con este primer análisis se deduce la distinción de la función que toma el estudio de la proporcionalidad en diferentes instituciones (la Escuela Primaria y la Escuela Normal) y en diversas actividades institucionales (aprender proporcionalidad y aprender a enseñar la proporcionalidad).

5.2. LA REVISIÓN DEL TEXTO DEL SABER. LA PROPORCIONALIDAD “A ENSEÑAR”

Desde una perspectiva praxeológica se ha considerado que una de las primeras tareas que tiene un profesor en formación es determinar, a partir de los planteamientos institucionales, el tipo de organizaciones matemáticas que deberá “enseñar”, así como los tipos de tareas que puede plantear y el nivel de manejo técnico, tecnológico y teórico con el que puede desarrollar un saber.

La dimensión institucional determina la actividad matemático-didáctica de los profesores en formación al puntualizar las condiciones y restricciones con las que se debe abordar la proporcionalidad en tanto objeto de saber y de enseñanza, por tal motivo, en el segundo momento del M_2 se realizó un análisis didáctico (praxeológico) de aquellas organizaciones matemáticas que desde los programas de la educación primaria determinan lo que puede ser enseñado, es decir los profesores en formación revisaron y reflexionaron sobre tareas y técnicas en el texto del saber y se les cuestionó sobre los conceptos, técnicas y dificultades que pudieran presentarse en los alumnos de educación básica, al enfrentarse a tareas vinculadas a la proporcionalidad, de manera particular en quinto y sexto grado de educación primaria. Para tal efecto se puntualizó lo siguiente:

Q.2.2. ¿Cuál es el discurso tecnológico-teórico (θ, Θ) que expresan los profesores en formación, durante el desarrollo de una tarea (T) relativa al análisis conceptual, estructural y técnico (τ) de la proporcionalidad y su enseñanza en la escuela primaria?

Para dar respuesta a la cuestión anterior la T2.2 planteó la revisión y análisis de dos lecciones de los libros de texto de quinto y sexto grado, la primera denominada "Botones y camisas" de quinto grado, era la primera lección que abordaba el trabajo con la proporcionalidad mientras que la lección "¡Entra en razón!" de sexto grado constituía la última lección sobre este concepto matemático, en ambas lecciones se plantearon las mismas preguntas: ¿qué tipos de proporcionalidad o concepto matemático se incluyen en la lección?, ¿cuál es la tarea principal de la lección?, ¿se sugiere implícita o explícitamente el uso de alguna técnica por parte de los alumnos? ¿qué dificultades pueden enfrentar los alumnos al resolver las tareas planteadas en la lección? y ¿qué deben saber los alumnos para resolver esta lección?.

5.2.1. El estudio de la proporcionalidad. El inicio de su formalización.

La enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria inicia de manera formal en quinto grado con el planteamiento de problemas en los que se presentan dos magnitudes que varían de modo proporcional, situación que se inscribe como primer modelo de una relación de proporcionalidad según la organización clásica.

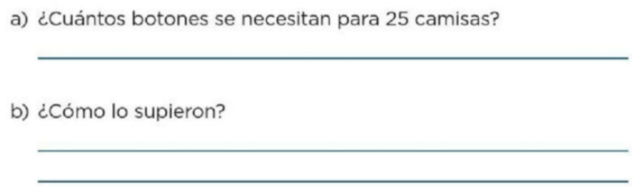
17 Botones y camisas

Consigna

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

1. Luisa trabaja en una fábrica de camisas. Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten las preguntas.

Camisas de adulto					
Cantidad de camisas	1	6	14	75	160
Cantidad de botones	15				


a) ¿Cuántos botones se necesitan para 25 camisas?

b) ¿Cómo lo supieron?

Imagen 66. Primera lección de proporcionalidad. Quinto Grado. (SEP, 2013a. p. 45)

En un problema de proporcionalidad se encuentran cuatro cantidades (a, b, c, x), las dos primeras corresponden a una misma magnitud y las dos últimas se vinculan a otra magnitud diferente, una de éstas resulta desconocida, tales magnitudes guardan una relación directa o inversa dependiendo del planteamiento de la situación. La lección de quinto grado (botones y camisas) planteaba como tarea principal la resolución de problemas con tablas de variación proporcional directa donde debería encontrarse el valor faltante, una vez completados los datos, la lección pedía a los alumnos dar respuesta a dos cuestionamientos, encontrar el valor de una magnitud desconocida y la explicación implícita de la técnica empleada para encontrar dicho valor.

Como se puede observar, el uso de la tabla pretendía fungir como la representación y sistematización de los resultados ya que los números expresados en la cantidad de camisas no guardan una relación observable entre sí que permitiera desarrollar una técnica diferente al valor unitario como multiplicador (técnicas como doblar cantidades, uso de múltiplos, entre otros).

Al ser la primera lección formal sobre proporcionalidad, se aprecia la simplificación de la tarea, ya que se da la cantidad de botones de una camisa (valor unitario), en este caso el uso de la multiplicación se convierte en la técnica más viable para la resolución, hecho que se busca validar con las siguientes preguntas:

Si bien los alumnos de quinto grado pueden hacer uso de diversas técnicas (suma iterada, sumas parciales o incluso agrupamientos), la intención de la lección es establecer el uso del valor unitario como operador multiplicativo en tanto antecedente de la regla de tres, situación visible con el planteamiento de la segunda tarea, nuevamente expresada a modo de un problema que se apoya en una tabla de variación proporcional:

2. Luisa utilizó 96 botones en ocho camisas para niño. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten la pregunta.

Camisas de niño					
Cantidad de camisas	1	8	10		200
Cantidad de botones		96		1440	

¿Qué puede hacer Luisa para saber cuántos botones se necesitan para 140 camisas de niño?

Imagen 67. Segunda tarea formal de proporcionalidad. (SEP, 2013a, p.46)

En la imagen anterior puede observarse un tipo de tareas, como hay muchas en el libro, que pueden resolverse con la regla de tres o el valor unitario, técnicas referidas a la organización clásica de la proporcionalidad. Como se puede apreciar, la tabla puede servir de apoyo para la formalización de la regla de tres, aunque los alumnos también pueden usar la división para encontrar el valor unitario y una vez obtenido usarlo como operador multiplicativo (en 1440 botones), en este caso al tratarse de magnitudes que son múltiplos (número de camisas 1, 10 y 200), es posible que los alumnos encuentren alguna simplificación a través de las operaciones básicas.

Luego de la identificación del valor unitario, se busca la validación de la técnica empleada en el último cuestionamiento, donde se le pide que describa el procedimiento que puede emplearse para encontrar cuántos botones se necesitan para 140 camisas, es a partir de dicha pregunta que la lección sirve como preámbulo para la formalización de la regla de tres como técnica eficiente y económica.

Una vez revisada la lección por cada uno de los profesores en formación, se planteó una entrevista semiestructurada para observar si lograron identificar los conceptos, tareas y técnicas expresadas en el texto del saber, para ello se inició cuestionando sobre: *El tipo de proporcionalidad o concepto implicado en la lección*, en este punto seis de los ocho profesores en formación identifican de modo acertado que se trata de la proporcionalidad directa cuando expresan:

> Es proporcionalidad directa porque siempre el número depende de… en las camisas todos los botones van a ir aumentando según aumenta la cantidad de camisas. (PF2)

La mayoría de los profesores en formación identifican tareas en las que dos tipos de magnitudes aumentan una en función de la otra, aunque es necesario precisar que dicho aumento deberá darse en la misma proporción en ambas magnitudes, hecho que no es del todo claro en el argumento de PF2.

Por su parte un profesor en formación mencionó que se estaba trabajando tanto la relación directa como la inversa:

> PF3. Pues por ejemplo, serían las dos, la directa y la inversa, en la primer tabla nos dan la cantidad de camisas y la cantidad de botones, aquí por ejemplo es proporcionalidad directa porque aquí nos menciona que de una camisa se necesitan quince botones, la proporcionalidad directa sería igual encontrar los resultados a partir de estos dos datos y acá ya nos complican un poquito más al niño y ya sería este, ya le cambian acá los datos y entonces tienen que encontrar otro dato y a partir de ese cambio de datos tienen que modificar sus procesos cognitivos para encontrar ese resultado.
>
> *M. Entonces ¿en la segunda tabla el tipo de proporcionalidad es diferente?*
>
> PF3.Sería inversa.
>
> *M. ¿Por qué?*
>
> PF3.Por ese mismo cambio, que está, aquí al principio les daba el número de camisas y les pedía el número de botones, pero ahora le pide el número de botones, la cantidad de camisas que se necesitan, entonces como es otro proceso como que inverso el que tienen que encontrar el resultado a partir del resultado que ellos antes tenían, entonces antes tenían digamos un dato X y necesitaban encontrar el Y … más bien tenían el X para encontrar el Y, ahora tienen el Y tienen que encontrar el X.
>
> *M. ¿Qué diferencia encuentras entonces entre la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa?*
>
> PF3. Que depende de la consigna que se esté dando a los niños, de los procedimientos iníciales que se están dando y luego después de los procedimientos secundarios que se están dando.

Como se puede observar, no existe una comprensión clara de los tipos de proporcionalidad, el profesor en formación considera que la relación que se establece entre el valor faltante y los valores conocidos es lo que determina su significado y que la diferencia entre una y otra radica en el planteamiento de la tarea y no en la relación de proporción que se da entre dos magnitudes (aumento-aumento, aumento-disminución).

Por otro lado también se observa la respuesta de un profesor en formación que no logra identificar el tipo de proporcionalidad implicado en la tarea cuando señala que:

> PF8. Bueno yo le entendí así, que a partir de un dato podemos ir como en escalerita encontrando las siguientes ¿sí, no?. Es que no sé cómo explicar, yo digo que este es directo. (se refiere a la primera tabla)
>
> M. ¿Consideras que en toda la lección se trabaja sólo la proporcionalidad directa?.
>
> PF8. No, también la compuesta, porque, bueno creo que aquí es compuesta, porque tenemos aquí, o ¿no será compuesta?. Ahí es que no me acuerdo como es la definición de cada una, pero esta es diferente porque aquí ya buscas la cantidad de arriba.
>
> M. Pero ¿entonces eso la convierte en compuesta?
>
> PF8. No, porque en la compuesta, tenemos dos cantidades y se busca una tercera, pero por ejemplo en el problema del Olmeca teníamos dos precios y ya buscábamos una tercera cosa que era diferente.
>
> M. ¿y aquí?
>
> PF8. Entonces es directa e ¿inversa?
>
> M. Mmm… ¿qué diferencia hay entre una y otra?
>
> PF8. Ay maestra no me acuerdo.

En la primera parte de su respuesta afirma “que a partir de un dato podemos ir como en escalerita encontrando los siguientes” parece indicar ciertas nociones de la proporcionalidad directa aunque no determina la idea básica de un aumento de magnitudes en la misma proporción, además, también se aprecia que identifica implícitamente una tarea del tipo valor faltante pero no logra explicitarla, para la segunda tarea de la lección es evidente el desconcierto sobre el significado de la proporcionalidad inversa y compuesta, aunque al tratarse también de una proporcionalidad directa se puede deducir que no tiene claridad para identificar el tipo de tareas en las que se hace presente.

No obstante esta situación, en este primer encuentro con el texto del saber, se aprecia que la mayoría de los profesores en formación identifican un elemento que caracteriza a la proporcionalidad, la relación entre magnitudes, aunque también se aprecia la necesidad de reafirmar que dicha relación deberá ser proporcional, esta situación habla de un primer dominio de aquello que deberá ser formalizado y considerado para las tareas de los alumnos de quinto grado.

En este dominio conceptual resulta relevante que el profesor identifique la tarea que se plantea en el libro de texto, ya que representa las posibles tareas que serán desarrolladas de manera adicional a lo que se expresa en el texto, por ello se cuestionó sobre: *Las tareas principales a las que el alumno de quinto grado deberá enfrentarse al resolver esta lección*.

En este caso los ocho profesores identifican la tarea aunque de forma distinta ya que sus respuestas están relacionadas entre sí. Tres afirman que se trata de buscar un valor faltante, otros tres señalan que la tarea es llenar tablas y dos más hacen referencia a la resolución de un problema. Para la primera categoría, directamente relacionada con la intención del texto, los profesores en formación refirieron la búsqueda del valor faltante, como se muestra en el siguiente ejemplo:

> Bueno lo que les pide aquí es encontrar los valores faltantes, te da los valores principales, en el primero te dice Luis para una camisa ocupa 15 botones entonces cuántos va necesitar para 6 para el 14 y así, entonces ellos tienen que encontrar el número de botones que se ocupa para cada uno de los casos podría ser eso, y en la segunda parte cambia un poco no te da lo que es un valor unitario es decir no te dice una camisa tiene tantos botones, sino que te dice son ocho camisas y ocupó 96 botones, entonces encuentra primero cuánto ocupa una camisa pero luego de eso ya en diez camisas te pide que saques cuantas camisas hizo con 1440 botones o sea se cambia el valor que se pide en el primero eran todos botones y ahora no ahora se pide el número de camisas a partir del número de botones. (PF6)

El argumento anterior manifiesta que se identifica el tipo de tareas planteadas en la lección, PF6 expresa que aunque ambas tareas corresponden al valor faltante hay variables didácticas que las distinguen y que se verán reflejadas al momento de la resolución. Por su parte, quienes refirieron que la tarea era el llenado de tablas dieron respuestas como la que se muestra enseguida:

> Bueno primero el trabajo colaborativo que es entre compañeros y luego es el llenado de tablas y se busca una cantidad total de una parte de las variables que sin antes resolver la tabla no pueden contestar esa pregunta porque no saben que hay entre dichos números. (PF2)

Como se puede observar, aunque las tareas implican completar dos tablas, el tipo de tarea que subyace es encontrar valores faltantes, situación que parece afirmar PF2 cuando menciona que “se busca una cantidad total de una parte de las variables”, no obstante esta consideración, el resto de su respuesta resulta poco clara al referirse a que “no saben que hay entre dichos números”, por tal motivo se deduce que en este caso identificar el propósito de las tareas se vuelve compleja para el profesor en formación.

Quienes argumentaron que la tarea consistía en resolver problemas se reflejan en la respuesta de PF5 quien plantea lo siguiente:

> Pues son dos problemas un poquitito diferentes, en el primero ya está dado por un, ¿cómo se llama?, valor único o algo así, o sea por una camisa ¿cuántos botones? Serían 15, entonces lo único que tienen que hacer es multiplicar los quince por seis camisas, quince por catorce ese es un tipo de problema y el otro es poquito fácil sólo que al inicio deben de hacer otra cosa para saber por el valor único que vendría siendo, nos da que son 96 botones por ocho camisas, entonces lo que tendríamos que hacer es dividir 96 entre 8 para saber cuántos botones son en una camisa y a partir de ahí ya se obtienen los demás valores simplemente multiplicándolo como el problema anterior para saber cuántos van a ser. (PF5)

Con los ejemplos anteriores se pudo observar cierta explicación de las posibles técnicas para la resolución de la tarea, se buscó precisar si los profesores en formación identifican las técnicas que se reflejaban en el libro de texto aunque no se hicieran de manera explícita.

Para este planteamiento se esperaba que consideraran la organización clásica respecto a los problemas de proporcionalidad de valor faltante, de modo particular, que identificaran las técnicas como el método de reducción a la unidad y la regla de tres, aunque no se descartaba que mencionaran un método aditivo. Por ello se les cuestionó si identificaban *la técnica que deberían formalizar con los alumnos de quinto grado*, la mayoría (cinco) señaló que era la regla de tres, hecho contrastante si se recuerda que la lección planteaba un trayecto desde el valor unitario como operador multiplicativo hasta la regla de tres, un ejemplo de esta observación se muestra a continuación:

> PF7. El valor unitario.
>
> M. ¿Por qué?
>
> PF7. Porque aquí está de hecho. Mmm… Yo creo que también la regla de tres.
>
> M. ¿Por qué?
>
> PF7. Porque al tener el valor unitario ya nada más lo multiplicas.
>
> M. ¿Cuál es la relación entre el valor unitario y la regla de tres?
>
> PF7. El valor unitario pues es el de la unidad, la regla de tres hay que dividir el total entre el número de productos y multiplicarlo por el número que se quiere, pero como al número

> de productos que está aquí es el valor unitario pues se ahorra ese ejercicio aunque en realidad se va a la regla de tres.

Se puede apreciar que PF7 identifica el recorrido que se plantea en la lección; donde primero se hace presente el valor unitario y posteriormente la tarea se replantea para dar paso a la regla de tres, que podrá ser formalizada a partir de esa tarea o bien de otras que el profesor en formación puede decidir en el proceso de la práctica docente.

En menor proporción, dos profesores en formación aludieron a elementos vinculados con la proporcionalidad más que a la técnica, uno de ellos señaló que la técnica sería la proporcionalidad directa en tanto que aumenta una cantidad y aumenta la otra, el otro profesor argumentó que la técnica era la estrategia que ayudaría a resolver el problema, pero no la señaló explícitamente.

Por su parte PF8 indicó que la multiplicación es la técnica principal para resolver las tareas y además cuando se le cuestiona sobre la técnica que se hace presente en el libro de texto describe el proceso que seguiría con los alumnos para la aplicación de la misma.[43]

> Multiplicar, si ya nos están dando una cantidad de botones decirles a los niños, bueno con una camisa ustedes utilizan quince botones ahora para utilizar seis, o sea se tendría que multiplicar, ¿qué haríamos?.Siempre hay niños que ya dicen no pues multiplicación y ¿qué vamos a multiplicar? ¿Qué números vamos a multiplicar? Pues no sé tal vez si nadie contesta ya decirles que por cada una camisa son quince botones, por dos camisas ¿cuántos serían? No sé, como aquí se brinca luego del uno hasta el seis quizá llevárnosla así de una y dos cuántos y tres cuántas y así como que ellos mismos vayan fijándose que se necesita la multiplicación, quizá al principio podríamos usar las sumas, quince más quince, dos veces, dos camisas. (PF8)

Como se observa, PF8 describe paso a paso lo que se haría durante el trabajo con la tarea y aunque plantea las posibles acciones de los alumnos, no identifica la regla de tres como técnica formal. Si bien esta situación sólo se dio en este caso, en términos generales puede afirmarse que la mayoría de los profesores en formación identifican la técnica implícita en esta tarea.

[43] Cabe destacar que al explicar el proceso que seguirían con los niños, varios profesores en formación plantean acciones que contravienen al enfoque basado en la resolución de problemas, por ejemplo, cuando PF8 dice “se tendría que multiplicar” está planteando “dar” a sus alumnos la técnica que ellos deberían buscar.

Ahora bien, considerando que en la proporcionalidad se inscribe una gran diversidad de saberes aritméticos (para el caso de la educación primaria) como la razón, la proporción, fracciones, números decimales, porcentajes, entre otros, también se cuestionó sobre cuáles serían *los saberes que necesitan los alumnos de quinto grado para resolver la lección*. Los ocho profesores en formación afirmaron que era necesario el dominio de la multiplicación y la división porque dichas operaciones permitirían solucionar la tarea aún sin el conocimiento formal de las técnicas que subyacen al valor faltante.

A continuación un ejemplo de las respuestas sobre los saberes que requieren los alumnos para resolver la tarea:

> Este… ¿de antecedentes básicos? pues lo que es la multiplicación y la división creo que van a ser las operaciones como prioritarias para poder desarrollar lo que es una regla de tres y pues realmente lo que ya sabemos los números, las tablas y todos esos conceptos que van implícitos en las operaciones. (PF6)

En todos los casos, los profesores en formación argumentaron que el manejo de las operaciones básicas, principalmente la multiplicación y la división constituyen los saberes básicos con los que el alumno de quinto grado pueden dar respuesta a la lección, si bien siete de los profesores expresaron que la multiplicación y la división eran el antecedente para la comprensión de la regla de tres, PF8 quien no logró identificar en la pregunta anterior la técnica a formalizar, señaló que con sólo saber las operaciones básicas se podría dar respuesta a la lección en cuestión.

Por último también se cuestionó a los profesores en formación sobre *cuáles serían las principales dificultades que podrían tener los alumnos de quinto grado para resolver las tareas planteadas*, algunos señalaron que era la falta de conocimientos previos (1), que no sepan las tablas de multiplicar y la división (1), mientras que la mayoría se centró en la comprensión semántica (3) y sintáctica (3) en la resolución. En cuanto a quienes señalaron que el principal problema radicaría en la comprensión semántica del problema se encuentra el siguiente ejemplo:

> Bueno yo pienso que el problema les muestra cantidades muy separadas por ejemplo empieza 1, 6, 14 y luego ya los pasó hasta el 75, los niños a lo mejor lo van a querer sumar, no van a comprender lo que les dice el problema, pero cuando ven que son cantidades más elevadas tienen que usar otros procedimientos. (PF4)

Por su parte, quienes se refirieron a la comprensión sintáctica, se refieren al dominio de la regla de tres, así lo expresa PF1 a continuación:

> Si lo que queremos trabajar es una regla de tres a lo mejor una dificultad podría ser el acomodo de los números, que digan por cuál se multiplica, por cuál se divide, que el procedimiento no lo realicen de la manera correcta. (PF1).

Con este último ejemplo, se puede observar que los profesores en formación consideran que la dificultad se haría presente una vez institucionalizada la regla de tres más que las tareas planteadas, cabe señalar que al ser la primera lección formal que aborda la proporcionalidad, el dominio de la regla de tres es posterior a la resolución de las tareas de esta lección.

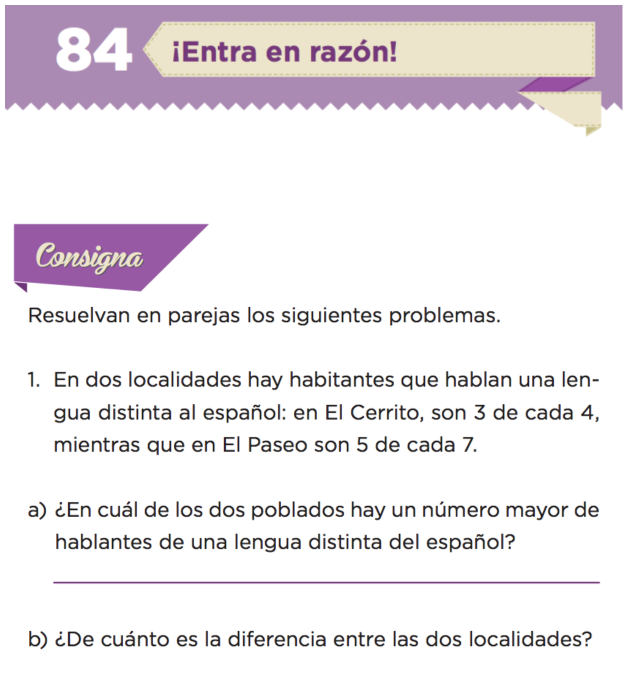
En términos generales se puede decir que la mayoría de los profesores en formación identifican los conceptos, las tareas y las técnicas que conforman esta lección, en su papel de profesores hacen un análisis pertinente que ha derivado de la reflexión sobre un REI en el que como estudiantes de matemáticas tuvieron su primera aproximación al estudio de la proporcionalidad.

5.2.2. El modelo aritmético en la educación primaria.

La determinación que hace una institución sobre el estudio de la proporcionalidad a través del texto del saber expresa ciertas sujeciones de lo que el profesor en formación puede abordar en su clase, las praxeologías matemáticas que establece la educación primaria implican ciertas transposiciones que regulan el uso y la transmisión de organizaciones matemáticas, esto se hace más evidente en el discurso tecnológico generado desde la organización clásica y el modelo aritmético.

En el texto del saber de sexto grado (libro de texto) se incluye la lección “¡Entra en razón!”, en ella se plantean problemas que implican la representación de razones a través de una fracción y empleando fracciones equivalentes (SEP, 2013b), esta lección se ubica en el último bloque de este grado escolar y es también la última lección que aborda de manera formal aspectos relacionados con la proporcionalidad.

Siguiendo la idea de que la razón se presenta entre dos cantidades que pertenecen a una misma magnitud, la estructura de la lección plantea el desarrollo de dos tareas, que aunque pareciera tienen un planteamiento similar, incluyen ciertas variables didácticas sobre el orden de las magnitudes y el rango numérico. De este modo, la primera tarea plantea la comparación de dos razones con magnitudes de un dígito como se observa a continuación:



84 ¡Entra en razón!

Consigna

Resuelvan en parejas los siguientes problemas.

1. En dos localidades hay habitantes que hablan una lengua distinta al español: en El Cerrito, son 3 de cada 4, mientras que en El Paseo son 5 de cada 7.

a) ¿En cuál de los dos poblados hay un número mayor de hablantes de una lengua distinta del español?

b) ¿De cuánto es la diferencia entre las dos localidades?

Imagen 68. Última lección de proporcionalidad en la escuela primaria. (SEP, 2013b, p.151)

La tarea planteada es una situación en la que deben compararse razones, 3 de cada 4 (3/4) y 5 de cada 7 (5/7) para posteriormente reconocer cuál razón es mayor y la diferencia en habitantes representados con dichas razones. No obstante, la lección del libro de sexto grado de educación primaria vigente en el momento del estudio muestra un error determinante para la resolución de la tarea, ya que la consigna resulta imposible de resolver cuando plantea ¿En cuál de los dos poblados hay un número mayor de hablantes de una lengua distinta del español?, la imposibilidad radica en que se ignora cuántas personas habitan un poblado y otro pues el libro no proporciona dicho dato, en tal caso la pregunta debiera ser: Proporcionalmente, ¿en cuál de los dos poblados hay un número mayor de hablantes de una lengua distinta del español?.

A pesar del error enunciado, el manejo de la razón en el texto muestra una relación que se establece con el significado de la fracción como razón en la que se busca la comparación entre dos cantidades de igual o diferente magnitud, de este modo, al ser parte de uno de los significados de las fracciones, la razón representa un par ordenado de números enteros asociados a la relación parte-todo. Las técnicas que posiblemente se utilicen es el cálculo de fracciones equivalentes con común denominador (productos cruzados) en la que se multipliquen los denominadores y luego se multipliquen los numeradores por el denominador de la otra fracción (SEP, 2013b), es decir:

3/4	5/7	⇒	21/28	20/28

También podría utilizarse la técnica del mínimo común múltiplo (m.c.m.) donde el denominador común constituya el resultado del mínimo común múltiplo de los denominadores originales, en este caso se obtiene dividiendo el m.c.m. entre cada denominador y luego multiplicarlo por el numerador correspondiente, en la tarea el m.c.m. sería 28.

Otra técnica podría ser el uso de dos tablas en las que los alumnos fueran comparando el número de hablantes con una lengua distinta al español hasta llegar al número 28. Si bien el uso de porcentaje en tanto noción inscrita en la relación parte-todo de las fracciones, pudiera ser una técnica plausible para la resolución de esta tarea, la equivalencia en porcentaje de cada razón tendría dificultades ya que mientras para ¾ es 75% (0.75), para 5/7 sería un número extenso (0.7142857142857143) lo que dificultaría su operatoria. En la pregunta sobre la diferencia entre las dos localidades, bastaría con restar una fracción a otra en tanto se trata de fracciones con un común denominador. Es importante para este análisis visualizar si los estudiantes identifican el error descrito en la lección del libro de texto y de ello derivan alguna técnica particular.

En esta lección se plantea una segunda tarea, la comparación entre razones, aunque con ciertas variables, como se observa a continuación:

2. En una escuela primaria del poblado El Cerrito, de los 30 alumnos del grupo 6º A, 18 aprobaron el examen de matemáticas, mientras que de los 40 alumnos de 6º B aprobaron 32.

a) De acuerdo con esos resultados, ¿qué grupo tuvo mejor aprovechamiento en matemáticas?

____

b) ¿De cuánto es la diferencia en el aprovechamiento de los grupos?

____

Imagen 69. Última tarea formal de proporcionalidad. (SEP, 2013b, p.151)

Para esta segunda tarea la variable didáctica complejiza la situación, hacer la división para obtener el porcentaje resulta más sencillo que simplificar las razones y compararlas. Tampoco sería fácil obtener la mitad de cada grupo y ver si las cantidades son mayores o menores, pues ambas son mayores que la mitad de sus correspondientes totales (SEP. 2013b). Para simplificarlas pueden realizar lo siguiente:

$$18/30 = \frac{18 \div 6}{30 \div 6} = 3/5$$

$$32/40 = \frac{32 \div 8}{40 \div 8} = 4/5$$

Una vez realizada la descripción anterior, se presentan a continuación las respuestas que los profesores en formación dieron ante el cuestionamiento de *cuáles conceptos matemáticos se abordaban en la lección asociadas a la proporcionalidad*. Tres de los ocho profesores en formación identificaron que el concepto abordado en la lección era la comparación de razones, un ejemplo de ello es lo que plantea:

> Pues es la razón, porque nos presenta la comparación de dos cantidades, bueno de datos, entonces nos dice hay tres de cada cuatro y cinco de cada siete ahí está una razón cuántos de éstos pertenecen a un grupo y así. (PF4)

A esta consideración se une lo que afirma PF7 cuando señala que:

> Son razones porque simplemente en la frase son tres de cada cuatro ya es una fracción como razón y ya. (PF7).

Un profesor en formación fue más específico, hace referencia a las fracciones.

> Aquí puedo observar las fracciones, fracciones para que ellos encuentren los resultados. más bien la fracción como razón. Porque… porque aquí ya nos viene una cantidad de tantos, entonces los niños tienen que razonar cuál es la cantidad que más atrae o cuál es la cantidad que más significa para encontrar y después se tiene que hacer una comparación entre cada una para poder encontrar un resultado. (PF3)

Con los ejemplos anteriores se observa que identifican el concepto central inscrito en la lección, algunos profesores comentan que incluso el nombre de la lección aludía al contenido de la misma y que las tareas planteadas remitían directamente a una comparación de dos magnitudes en las que se hacía presente la relación parte-todo. Bajo esta consideración, de la relación parte-todo, dos profesores en formación argumentan que el concepto a trabajar es el porcentaje tal como lo explicita PF6 en su respuesta:

> Pues el porcentaje porque por ejemplo te está pidiendo tres de cuatro o cinco de siete entonces ellos deben tener claro el 4 y 7 van a hacer como un total, si un total, entonces tienes que representarlo algo así como si cuatro es igual a un entero que al porcentaje sería al 100 y si cuatro es al 100% es un total que estoy metiendo como límite para poder sacar entonces cuánto sería tres es decir cuánto me corresponde partir del cuatro. (PF6)

En el argumento anterior se aprecia la asociación al significado de la fracción como parte-todo, ya que el 100% constituye el todo del que se retoma una parte. Por otro lado, dos estudiantes no hacen referencia a un concepto matemático como tal sino a la tarea que implícitamente se plantea, señalan que se trata de igualar cantidades, aunque uno de los profesores en formación hace referencia al factor común. “se tiene que buscar el factor común, igualar las cantidades porque si no se van a confundir” (PF2). Posiblemente se dio una confusión y en lugar del factor común se hacía referencia al común denominador o al mínimo común múltiplo.

En este primer cuestionamiento se observa que los profesores en formación no han detectado el error que subyace a las consignas planteadas en el libro de texto.

Respecto al tipo de tareas planteadas en la lección del libro de texto la mayoría de los profesores en formación (5) hicieron referencia directa a la comparación de fracciones:

> PF6. Bueno creo que es a partir de lo que es la proporción o números desconocidos ya se adentra en lo que son los problemas o sea ya los mete a una situación problema que te mete en un aspecto de comparar o encontrar números faltantes para poder compararlo con otro y llegar a un resultado que es el resultado que te pide.
>
> M. ¿Qué es lo que se compara?
>
> PF6. Por ejemplo aquí te compara dos magnitudes que sería fracciones no total, por ejemplo este total tengo tantas y de este total tengo tantas pero son números desconocidos, o sea por ejemplo 7 y 4 en este caso, son totales pero son distintos, entonces yo tengo que saber cuál de los dos es mayor, tengo cuatro pero sólo me dan tres y tengo siete pero sólo me dan cinco entonces debo decirlo directamente en cuál de los dos tengo más, no es posible necesito sacar un número que me diga aquí hay más hablantes que acá. Entonces es como ese problema, no tanto como en quinto que nada más será encontrar un valor desconocido a partir de tales números que te arrojan.

La idea anterior deriva del manejo que el programa escolar hace de la razón al considerarla como elemento de las fracciones, situación que debe establecer la distinción de la razón como noción y como significado de las fracciones, este hecho se observa cuando el valor de la razón 3 de cada 4 o 5 de cada 7 puede no entenderse en términos numéricos, lo que indica que el trabajo con este tipo de razones resulta de gran relevancia para comprender las fracciones como ¾ y 5/7 y su comparación. En el argumento anterior parece que PF6 detecta la necesidad de conocer el número total de personas que habitan un poblado y otro cuando señala que “no es posible, necesito sacar un número que me diga aquí hay más hablantes que acá” para realizar la comparación, no obstante la precisión del error enunciado en el libro de texto, el estudiante no profundiza en esta situación.

Otra respuesta cercana a la anterior es la de un profesor en formación que argumenta que la tarea es encontrar la diferencia entre dos cantidades, aunque no las considera como razones o fracciones, sino que trata de identificar la diferencia entre dos magnitudes, por su parte dos profesores en formación argumentaron que la tarea se centraba en la resolución de problemas, uno de ellos añadió que se trataba de sacar el porcentaje o la razón en cada problema para saber cuál es mayor o menor en porcentaje.

Por otro lado, cuando se les cuestionó sobre *la técnica que se trabajaría como profesores*, la mayoría estuvo asociada a las tareas que el texto planteaba, dos técnicas a la que se hizo alusión (por cuatro profesores) fue la comparación de fracciones y el mínimo común múltiplo, mismas que se encuentran directamente relacionadas entre sí, tal como lo hizo PF7 en el siguiente diálogo:

> PF7. Sería como comparar fracciones.
>
> M. ¿Comparar fracciones?
>
> PF7. Sí.
>
> M. ¿Por qué?
>
> PF7. Porque nos está preguntando cuál de ambos tiene mayor número de hablantes, pero al decir tres de cuatro pues ya es una fracción, tres sobre cuatro y si nos dice cuál es más tres de cuatro o cinco de siete, entonces ahí nos está preguntando cuál de las dos comparaciones es más amplia y la tienen que comparar para saber cuál de las dos es más amplia.

Por su parte PF3, involucra al mínimo común múltiplo como técnica que permite la comparación de fracciones.

> M. ¿Cuáles serían las técnicas implicadas en la resolución de la lección?
>
> PF3. Yo creo que la división, primero las fracciones y ya después la división.
>
> M. ¿La división de fracciones?
>
> PF3. Mmm, no, no este primero es obtener las fracciones y ya ver… más bien comparar esas fracciones entre ellas para saber cuál es el dato que se va a comparar.
>
> M. ¿Cómo se comparan?
>
> PF3. Este, también utilizando el mínimo común múltiplo, máximo común divisor, algo así, para este… para saber cuál es la que está más acercada, por ejemplo aquí les preguntaba el mayor número, entonces van a saber ellos a partir de esas fracciones ponerlas iguales, o sea en su dividendo y divisor, saber cuál es el que esta mayor para poder resolverlo.

Dos de estos cuatro profesores aunque no refieren explícitamente el manejo de fracciones, señalan que la técnica aludía al uso del mínimo común múltiplo para igualar el número de hablantes y hacer la comparación entre las razones de los hablantes. En esta comparación, tres profesores refieren la necesidad de comparar pero lo expresan en términos del empleo del porcentaje un ejemplo de ello a continuación:

> PF1. Pues yo pienso que es el porcentaje o si utiliza porcentajes o hacer comparaciones.

> M. Cuál sería esa técnica para comparar, qué tendrían que hacer esos alumnos para comparar, imagina que tienes un grupo de sexto grado y que ellos tienen que comparar, o bueno en algún momento tú tendrás que institucionalizar alguna técnica para resolver esto ¿cuál sería?.
>
> PF1. Pues es que como no nos maneja el número total de habitantes nada más nos dice que de tantos son tantos, podríamos sacar como si, por ejemplo el porcentaje, qué porcentaje es ese, de cuatro que porcentaje son tres, y luego de siete que porcentaje son cinco entonces ya ahí veríamos cuál es mayor y cuál es menor.

En su respuesta, PF1 hace latente la presencia del "error" en la primera tarea del libro de sexto grado, es decir no se explícita cuántas personas habitan en un poblado y otro, si bien el profesor en formación no lo señala como un error propio del texto del saber si expresa la necesidad de conocer este dato para determinar la comparación de magnitudes.

Por otro lado, aunque el uso de porcentaje es una técnica eficiente para algunos casos de comparación de magnitudes, cuando se trata de comparar fracciones como razón, esta técnica puede no ser económica ya que las fracciones convertidas a porcentaje son sólo aproximaciones de las magnitudes a comparar, lo que derivaría en un margen de error que volvería a la técnica poco eficiente.

En este mismo sentido, otro profesor en formación retoma esta idea de comparación pero desde la idea de razón.

> Pues es que no sé, a lo mejor sacar la razón por ejemplo de cada una de las dos situaciones para a partir de ahí poder resolver la pregunta, es que la pregunta no te dice saca el porcentaje de este o la razón de este o la fracción que por ejemplo sería tres cuartos, o sea no dice saque esto y luego ya te preguntamos, no o sea la pregunta te va haciendo que vayas haciendo tus procedimientos para poder resolverlo entonces no te dice. (PF5)

El planteamiento anterior muestra que debe hacerse una comparación de razones, sin embargo se deslinda del uso del porcentaje o de la fracción para dicha comparación, no obstante PF5 deja abierto el uso de la técnica ante la falta de precisión de aquello que debe formalizar. Como se puede observar, la mayoría de los profesores en formación identifican la necesidad de establecer una comparación y expresan una diversidad de técnicas plausibles, algunas más eficientes y económicas que otras pero en su totalidad asociadas con la tarea de la lección.

Otro aspecto sobre el cual se les cuestionó fue: *las posibles dificultades para resolver las tareas asignadas en el libro de texto*, punto en el cual la mayoría (cinco profesores en formación) señaló que la principal dificultad para los alumnos de sexto grado radicaba en la falta de comprensión del problema, tres de ellos argumentaron que ante la comparación de magnitudes era probable que los alumnos dijeran que 5/7 era mayor que 3/5 al tratarse de cantidades “más grandes”, por su parte otros dos profesores señalaron que los alumnos pudieran no entender lo que la tarea planteaba y de qué manera se relacionaban las magnitudes expresadas, tal como lo señala PF3:

> Desde el principio es un reto cognitivo para los alumnos encontrar esa relación que existe entre cada una de las cantidades, porque primero lo tienen que saber expresar matemáticamente en las estrategias, los procedimientos de cómo lo voy a escribir, cómo lo voy a expresar para que mi compañero o el maestro, generalmente el maestro, lo entienda, para saber también yo lo que estoy haciendo, cómo expresarlo y cómo lo estoy entendiendo primero yo para que el otro lo entienda. (PF3)

La respuesta anterior plantea ciertas dificultades de comprensión que van desde la representación del problema en términos matemáticos, la técnica adecuada para su resolución y la certeza de su comprensión, esto mismo plantea PF1 en la siguiente respuesta:

> Encontrar la técnica para resolverlos, porque hasta para mí es un tanto difícil de comprender, entonces a lo mejor ellos igual, bueno puede ocurrir que también no comprendan bien el problema y luego que no encuentren la técnica para resolverlo y digamos que si se va a resolver por ejemplo con porcentajes entonces a lo mejor puede haber niños que no sepan cómo. (PF1)

Otro profesor en formación señaló que la operativización con fracciones sería lo que resultaría complejo para que los alumnos pudieran resolver la tarea, lo expresa de la siguiente manera:

> PF7. A mí el título me dice que es “entrar en razón” y la razón pues son fracciones, fracciones como razón, pero el alumno no sabe, a veces, que hay fracciones como razón, entonces se supone que el docente si lo sabe, entonces por el título se da cuenta que hay que utilizar fracciones, pero el alumno, a mí me sucedió que mis alumnos me evitaban las fracciones o mejor convertían a decimales o los porcentajes los convertían a decimales y se les hace más fácil operar con ellos aunque se les complique la vida y ya no obtengan el mismo resultado.
>
> M. Entonces crees que la dificultad es que no sepan ¿cómo comparar las fracciones?.
>
> PF7. Probablemente, aunque creo que terminarían comparando decimales.

El caso de PF7 muestra que ha identificado la técnica posible para resolver la tarea, sin embargo plantea que además de no identificar cuál técnica utilizar, es posible que el alumno que no tenga dominio de la misma y opte por otra forma de representar el proceso de resolución.

En el mismo sentido otro profesor argumentó que la dificultad radicaría en la falta de dominio en el uso del porcentaje, considerado como la técnica con la cual se resolvería la tarea planteada:

> Los alumnos tienen que sacar a cuánto equivale el porcentaje de cada uno de ellos porque es diferente cantidad de alumnos y diferente cantidad que aprobaron entonces tiene que encontrar la proporcionalidad por qué no puede ser directo y en el primero pues es como también el ejemplo que habíamos visto de los barriles que por cada tanto se regalaba otro tanto entonces se tienen que equilibrar para poder sacar la cantidad. (PF2)

Como se puede apreciar, los profesores en formación identifican la posibilidad de que existan dificultades para que los alumnos de sexto grado resuelvan la tarea planteada, aunque en este caso, la omisión del número de habitantes en ambos poblados en el planteamiento de la tarea no es considerada como parte de las posibles dificultades.

En concordancia con las tareas, técnicas y dificultades para la resolución, cuando se les cuestionó sobre los saberes que los alumnos de sexto grado deberían tener para resolver las tareas planteadas en el libro de texto, todos los profesores dieron argumentos asociados a la técnica que posiblemente utilizarían para la resolución, tres de éstos señalaron que los alumnos necesitaban saber porcentajes, aunque también lo asociaron con otro tipo de saberes como el caso de PF2.

> PF2. Tienen que saber multiplicar y dividir.
>
> M. Si un alumno sabe multiplicar y dividir ¿Con eso puede resolver la lección?
>
> PF2. No, debe ser competente en el manejo de la información y debe de saber sacar porcentajes mediante reglas de tres o si multiplican igual para el manejo de los porcentajes, el punto decimal, debe de saber trabajar con variables de darles el significado o darle un valor a cada uno de *x* y *y*.
>
> M. Bien entonces el alumno necesita saber el manejo de variables *x* y *y* para resolver esta lección, ¿si no lo sabe no la puede resolver?
>
> PF2. Sí, lo puede resolver con una regla de tres.
>
> M. Entonces podemos decir que si sabe multiplicar, dividir, el uso de la regla de tres y porcentajes con eso la puede resolver?

PF2. Y pues con el manejo de la información.

Por su parte, tres profesores en formación afirmaron que para resolverlo era necesario tener el dominio de las operaciones básicas, aunque en dos de estos casos también se habló de la necesidad de conocer el manejo del mínimo común múltiplo.

PF3. Ahí sí se implican más habilidades, ese que decía del máximo común divisor y múltiplo, lo de la división, la multiplicación porque aquí también ya tienen que encontrar relaciones entre los números y las fracciones.

M. ¿Qué de las fracciones?

PF3.Este, saber cómo expresar las cantidades que te dan en fracción.

M. Por ejemplo.

PF3.De la razón, por ejemplo aquí tres de cada cuatro entonces serían tres cuartos, entonces cinco de cada siete entonces cinco séptimos, ahí ya se pueden expresar y ahí es lo que decía para la resolución del problema.

En concordancia con el manejo del mínimo común múltiplo, dos profesores en formación argumentaron que era necesario saber “el manejo de las fracciones”:

PF7. Nociones de fracción.

M. ¿Cómo?

PF7. Primero lo que es una fracción, o sea de base porque ellos tienen que saber que tres es una fracción de cuatro. Luego saber las magnitudes de las fracciones, por ejemplo, las fracciones de séptimos son más pequeñas que las de cuartos y ahí también la multiplicación y la división para poder hacer la comparación en caso de que la quieran hacer cruzada o no sé, depende de los métodos.

M. Entonces ya sabiendo lo que es una fracción ya lo pueden resolver.

PF7. No tan simple.

M. Qué más necesitarían.

PF7. Más cosas de la fracción.

M. Por ejemplo

PF7.Operar con fracciones.

M. Qué tipo de operaciones.

PF7. Pues la comparación, equivalencia de fracciones.

Para finalizar la entrevista, se preguntó si una vez revisadas las lecciones que se encuentran en los programas de estudio, consideraban que *el trabajo con la proporcionalidad en la escuela primaria resultaba suficiente para transitar hacia la* *modelización algebraica* de los conceptos asociados con la educación secundaria. Sólo un profesor en formación argumentó que era suficiente:

> Yo creo que sí porque, bueno de hecho no sé si estuve bien en lo de las lecciones o no pero yo observé en la práctica muchas lecciones que tienen que ver con eso y la verdad y lo comprobé más en los programas que vimos aquí tiene muchísimo que ver la proporcionalidad con los problemas de la vida diaria, se relaciona mucho. Si un problema se plantea de este modo tiene mucho que ver nada más buscar la estrategia pero tiene mucho que ver para resolverlos si este problema está así, entonces a mí me parece adecuado que se trabaje mucho este tipo de lecciones para que los alumnos puedan resolver problemas de su vida diaria. (PF5)

Dos profesores en formación argumentaron que, más que señalar lo que se planteaba en los programas de la escuela primaria, lo que permitía la transición era el manejo que diera el docente al no basarse exclusivamente al trabajo con el libro de texto, sino al manejo de tareas adicionales en el aula.

Por su parte, cinco de los ocho profesores en formación argumentaron que no era suficiente el trabajo de la proporcionalidad en la escuela primaria, algunos argumentaban la necesidad de ampliar el número de tareas, de lecciones en los libros de texto o bien establecer la formalización de los conceptos, tal como se muestra en la siguiente respuesta:

> No yo creo que no, bueno a lo mejor está muy superficial pero yo pienso que hace falta que lleguen a la fórmula porque aquí en la resolución de problemas todavía lo deja muy abierto resuélvelo como quieras y si llegas al resultado va estar bien. Yo no digo que esté mal pero sí hay una forma más convencional de hacerlo deberían de irse por las que son más rápidas y efectivas pero es una de las competencias de las matemáticas que sepan resolver y usar incógnitas de la forma más eficiente y rápida pero que lo resuelvan de una forma no quiere decir que está mal, está bien de hecho se debería de comenzar con ello para llegar a lo que es la fórmula pero aún en sexto grado sigue diciendo que lo hagan como ellos puedan. (PF2)

Las respuestas dadas, donde la mayoría de los profesores en formación señalan que es suficiente el estudio de la proporcionalidad en la escuela primaria para transitar de manera eficiente a la escuela secundaria o bien del modelo aritmético al modelo algebraico, hacen suponer que los profesores en formación validan las cuestiones plasmadas desde la institución (escuela primaria) en los programas de estudio.

Para el caso del análisis tanto del REI como del texto del saber en la escuela primaria que los profesores en formación hacen sobre la proporcionalidad en su papel de profesores, muestra un (re)conocimiento del tipo de tareas y el privilegio de ciertas técnicas, también, de manera implícita, al carácter tecnológico y teórico que promueven las instituciones para la integración de praxeologías matemáticas a enseñar.

Las principales dificultades que mostraron los profesores en formación estaban asociadas con la identificación de ciertas nociones vinculadas a la proporcionalidad tanto como objeto de estudio como de enseñanza, por otra parte en algunos casos les resultaba compleja la distinción entre tarea y técnica, así como la tipología que de éstas corresponde a la proporcionalidad, esta situación permite deducir la necesidad de revisar los tipos de problemas y las técnicas que desde un modelo aritmético se hacen presentes en el contexto que analizaron, pero también el conocimiento de que éstas evolucionan de manera natural hacia un modelo algebraico.

5.3. REFLEXIONES SOBRE LOS ANÁLISIS DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN

En términos generales, el M_2, dirigió la mirada a la descripción y comprensión del modelo epistemológico inscrito en el proceso de estudio que vivieron los profesores en formación en el primer módulo. Los cuestionamientos planteados se enfocaron especialmente sobre las tareas matemáticas que se les plantearon y las técnicas que utilizaron para resolverlas durante el REI que "vivieron", aunque también se les preguntó sobre las tareas y técnicas "a enseñar" incluidas en el entorno institucional. Este análisis contribuyó para que ellos diseñaran o seleccionaran una praxeología para desarrollar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria, lo que constituye un tercer módulo del Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP).

Respecto del modelo epistemológico, se pudo ver que en su mayoría, los profesores en formación identifican las relaciones de proporcionalidad y otras nociones asociadas como la proporción y la razón; en cuanto a las relaciones, reconocen mejor la directa, las relaciones inversa y compuesta les generan mayores confusiones que parecen derivar de una formación en la que se abandona el estudio de este tipo de relaciones, esto es, no forman parte de la tareas que se proponen en las instituciones formadoras.

En las tareas vinculadas al M_1 destaca el reconocimiento que los profesores en formación hacen de contextos (tablas de variación proporcional, gráficas, situaciones problemáticas, entre otros) y de técnicas (como el uso de la regla de tres, la multiplicación y la división en tanto elementos predominantes del valor unitario como operador), lo que nos permite suponer que el MER, en tanto modelo de relaciones entre tareas y técnicas, cumplió con el propósito que se le asigna en esta experiencia que consistió en orientar el diseño del REI-FP y al mismo tiempo servir como herramienta para el análisis de la evolución de la técnica.

Ahora, en tanto profesores analistas, con la T2.1 es evidente que comprenden las ventajas de emplear ciertas técnicas ante unas tareas determinadas, en algunos casos enuncian los alcances y limitaciones de las técnicas aritméticas para ciertas situaciones, pero también mencionan la relevancia que éstas tienen en el proceso de construcción de técnicas algebraicas, de ahí que se identifique la relación que guarda la proporcionalidad con situaciones de modelización funcional. Con las respuestas dadas se podría decir que algunos de los profesores en formación muestran conocimiento de los elementos del MER propios de la organización clásica de la proporcionalidad para interpretar la actividad matemática analizada.

En cuanto al análisis de las tareas del REI, pudo apreciarse que en su mayoría, los profesores en formación consideran que resultan pertinentes, aunque mencionan posibles modificaciones que tienen que ver con la modelización funcional o algebraica. También consideran que el REI “vivido” puede plantearse en la escuela primaria porque permite la articulación de diversas cuestiones a partir de una cuestión generatriz, lo que genera el trabajo articulado de varias nociones asociadas a la proporcionalidad.

Respecto a la relación del REI con la escuela primaria, los profesores en formación identifican las nociones y los discursos tecnológicos presentes en esta institución, la mayoría considera que sólo la proporcionalidad directa y las técnicas aritméticas deben estudiarse en este nivel aunque cabe señalar que asocian estas técnicas más a la experiencia vivida con el REI que con el análisis del currículo oficial. En lo que a lo didáctico concierne, resulta relevante que la mayoría de los profesores en formación identifican el propósito primordial del REI, el trabajo con la actividad matemática para lograr la evolución de la técnica, es decir, consideran que el objetivo del REI es provocar que las primeras técnicas (aritméticas) evolucionen hasta convertirse en situaciones generalizables que parten de una cuestión presente a lo largo de todo el proceso de estudio.

En cuanto a las nociones que se proponen estudiar en la escuela (5º y 6º grado), vistas en la T2.2, algunos profesores en formación reconocen en el programa escolar la presencia de relaciones de proporcionalidad, y de las cuestiones a las que da respuesta la proporcionalidad en las tareas planteadas.

En general, identifican los componentes relativos a la organización clásica: la relación entre razón (como el cociente entre cantidades) y proporción (como igualdad entre dos razones); la tipología de relaciones de proporcionalidad y; las tareas alusivas al valor faltante y la comparación de razones. También hacen referencia a nociones que no se incluyen explícitamente en los libros de texto como el uso del porcentaje, la ven como técnica que permite resolver las tareas planteadas en el texto. En cuanto a las técnicas implícitas en las propuestas curriculares, la mayoría de ellos identifica la regla de tres y el cálculo del valor unitario cuando analizan las lecciones de los libros de texto, aunque también identifican que no aparece un discurso matemático que las justifique.

Por otra parte, en las reflexiones se considera que los alumnos de quinto y sexto grado tendrán dificultades para resolver las tareas planteadas en el libro, lo que indica que los profesores en formación atribuyen tales dificultades a las restricciones institucionales, es decir, a la ausencia de una explicitación y justificación de la técnica propuesta. En este mismo sentido, algunos manifiestan que es poco tiempo el asignado para el estudio de la proporcionalidad en el currículo oficial de la escuela primaria ya que, mencionan, es necesario “fijar” los antecedentes a través de las técnicas aritméticas para la futura comprensión de las técnicas algebraicas.

Finalmente, podemos decir que el análisis previo al diseño o reconstrucción de un REI para la escuela primaria, da cuenta que en su mayoría, los profesores en formación reconocen los elementos de un MER, esto es, de un modelo aritmético para la proporcionalidad en tanto objeto matemático y de enseñanza, objeto que es propuesto con las restricciones propias de una institución educativa determinada.

CAPÍTULO VI
GESTIÓN Y EXPERIMENTACIÓN DEL REI.
LAS PRAXEOLOGÍAS DIDÁCTICAS

El proceso de estudio de una organización matemática (OM) como el de la proporcionalidad, requiere un proceso de diseño y organización en el que se reconstruyen las cuestiones que aparecen en el texto del saber de cierta institución, esta reconstrucción produce una praxeología didáctica cuya puesta en práctica, en nuestro caso, es competencia del profesor en formación porque es él quien requiere resolver el problema docente de diseñar tareas propias de un proceso de estudio que deberá dirigir con sus eventuales alumnos. Para tal proceso el profesor en formación parte de un modelo de problemas en el que se establecen ciertas tareas cuya intención es generar una o varias técnicas y un discurso tecnológico con el cual se le de justificación.

En tal caso el problema al que se enfrenta el profesor en formación es la elección de varias tareas que permitan generar una técnica determinada, empero tal elección está condicionada por los lineamientos y restricciones institucionales y también por un Marco Epistemológico de Referencia (MER) que subyace en el campo en el que se mueve y en la institución donde desarrolla su actividad. Ahora bien en el caso del formador, para resolver este problema además del dominio conceptual de la OM, requiere el dominio del sistema de tareas de la Organización Didáctica (OD) con las cuales orientar al profesor en formación en su interacción con el alumno de la escuela primaria y el saber matemático como tal.

A través de una praxeología didáctica, el profesor en formación modela una secuencia de enseñanza de la praxeología matemática, donde se puntualizan los tipos de tareas, las técnicas que se relacionan con esas tareas y el discurso tecnológico-teórico que justificará el uso de dichas técnicas. Para tal efecto, durante su formación, el estudiante normalista precisa conocer la segmentación de la materia que deberá enseñar, el tema y su relación con el sector y el área de la asignatura o disciplina, en otros términos debe conocer el MER porque es en él donde se expresan las técnicas que competen a determinado saber matemático.

En este sentido, la presente investigación tiene que ver con la experimentación de un dispositivo didáctico que tiene su origen en un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) que mediante ciertas adaptaciones fue preparado como un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP). Es por esta razón que en el trabajo se observa una doble mirada, por un lado se identifica la actividad matemática que los profesores en formación despliegan al enfrentarse a diversas tareas matemáticas propias de una situación eje “El petróleo”, por otra parte se enfoca también al análisis de las praxeologías didácticas expresadas en el diseño, gestión y experimentación de un REI reconstruido (M_3, M_4), es en este segundo punto donde se enfoca la atención del presente apartado.

Previo a la gestión y experimentación del REI-FP, los profesores en formación realizaron el análisis “económico” de la proporcionalidad en la escuela primaria, es decir tomaron el papel de profesores “ingenieros” al revisar los programas de estudio y libros de texto de quinto y sexto grado (en los cuales se trabaja este concepto) para identificar el número de lecciones, el tipo de tareas y la secuencia del saber, al reconstruir el REI vivido en el M_1. En un primer momento de modo empírico elaboraron un plan de clase para ser aplicado de modo hipotético en un grupo de sexto grado, después se estudió el MER didáctico propuesto por la institución formadora de docentes a decir, la Teoría de las Situaciones Didácticas. Una vez analizado un texto asociado a este referente teórico-didáctico se procedió a un segundo diseño del REI en el que finalmente se puntualizaron las tareas de estudio en sexto grado que vincularan tanto el REI vivido como el referente didáctico.[44]

Al igual que en la “vivencia” del REI, el estudio del aspecto didáctico parte también de una cuestión generatriz que se articula con los módulos diseñados para la gestión

[44] Si bien estas tareas didácticas se llevaron a cabo por los ocho profesores en formación, sólo se analizó la evidencia de dos de ellos, en tanto que en su momento eran quienes trabajaban con sexto grado y podían desarrollar el REI en un contexto más “natural”.

y la experimentación de un REI en la escuela primaria, en este sentido se planteó la siguiente:

> Q3: ¿Cómo organizan, reconstruyen y diseñan los profesores en formación el estudio de la proporcionalidad a través de una Organización Didáctica (OD)?

La cuestión anterior está formulada en términos de la enseñanza de la proporcionalidad derivada del REI vivido y desde el entorno donde los profesores en formación se desempeñan, esto significa la necesidad de considerar la ecología institucional, el marco epistemológico de referencia, las tareas matemáticas planteadas, el tipo de técnicas que utilizaron en la enseñanza y el discurso tecnológico-teórico que se hizo explícito en la institucionalización para el diseño de un REI propio de la escuela primaria lo que constituyó la T3.

6.1. EL DISEÑO Y ORGANIZACIÓN DE UN REI PARA LA ESCUELA PRIMARIA

Para dar respuesta a Q3 se inició con el diseño de un REI, tal como se plantea en el M_3 del REI-FP, en éste se trata de reconstruir el REI vivido en M_1 para facilitar el diseño, cabe señalar que dicha reconstrucción tuvo ciertas raíces brousseaunianas derivadas del MER didáctico institucional que se estudió, se intentó que fuera adecuado a los alumnos de sexto grado y de cierta manera semejante a la experiencia vivida como estudiantes de matemáticas.

El análisis sobre los elementos considerados en el REI diseñado así como la situación problemática eje de la que se derivaron las tareas planteadas a los alumnos de sexto grado, el orden en su planteamiento, la intencionalidad de la secuencia, las técnicas estudiadas y los discursos institucionalizantes que permearon el diseño, se analizarán a partir de la gestión que hacen en sus eventuales grupos, dos profesores en formación (PF5 y PF7). De aquí se deriva la siguiente cuestión:

> Q3.1: ¿Cuáles son las organizaciones praxeológicas y los momentos de estudio que los profesores en formación organizan en la gestión del estudio de la proporcionalidad a través de una Organización Didáctica (OD)?

Cabe mencionar que la secuencia (T3.1) que ambos establecieron resultó análoga al REI vivido por ellos aunque modificaron la situación problemática planteada (Ver

Anexos 1 y 2), PF5 partió de un planteamiento cercano a los alumnos de sexto grado, el consumo de refrescos. Por su parte PF7 estableció un planteamiento eje basado en la problematización con la exportación de cajas de calcetines, en la tabla 16 pueden observarse ambos planteamientos.

Situación problemática eje en el REI de PF5 **“Los refrescos”**	**Situación problemática eje en el REI de PF7** **“Las cajas de calcetines”**
En nuestro país se consumen grandes cantidades de refresco, principalmente refresco de cola (negro); entre los más consumidos encontramos la Coca y la Pepsi. Dichas marcas tienen algunas variaciones en sus precios; sin embargo, en la actualidad, año 2015, la botella de Coca tiene un precio de $25, mientras que la botella de Pepsi de $20.	En una fábrica textil se producen dos tipos diferentes de calcetines para exportar, que varían su calidad según el algodón que utilizan en su elaboración. Los calcetines “Cotton” cuestan $625 la caja, precio a mayoristas y los calcetines “El Mexicano” cuestan $885 la caja, precio a mayoristas, debe aclararse que la caja de ambas clases de calcetines contiene la misma cantidad.

Tabla 16. Situaciones eje del REI. (Elaboración Propia)

En ambos casos plantean una situación problema con un contexto cercano a lo cotidiano de los alumnos, establecen un recorrido con diversos tipos de tareas que promueven la “aparición” de diferentes técnicas, hecho que se hace presente en el planteamiento de varios momentos de estudio que explícita o implícitamente, son aceptados en la institución de la escuela primaria. En el caso de PF5 se planean cuatro tareas que van desde el manejo del valor unitario, el uso de un modelo tabular, comparación de razones y el uso de la proporcionalidad con tres magnitudes de un rango numérico de dos cifras, por su parte PF7 plantea cinco tareas en las que se aborda el valor faltante, el modelo tabular, la comparación de razones y una aproximación al modelo algebraico pero con rango numérico de tres cifras.

6.1.1. El valor faltante en situaciones problemáticas.

En ambos casos, la tarea inicial que plantean los profesores en formación se trata de la explicitación del primer momento didáctico (Chevallard, 1999), mismo que inicia con la entrega de una hoja de papel en la que se expresa la situación problema, seguida de preguntas relativas al planteamiento y a la manipulación de magnitudes, tal como lo presenta PF5 en el siguiente fragmento de su planeación:

> Entregar hoja de trabajo de la primera sesión y pegar hoja en cuaderno. En la primer sesión se maneja la siguiente situación problema, la cual se leerá y analizará de forma grupal:
>
> En nuestro país se consumen grandes cantidades de refresco, principalmente refresco de cola (negro); entre los más consumidos encontramos la Coca y la Pepsi. Dichas marcas tienen algunas variaciones en sus precios; sin embargo, en la actualidad, año 2015, la botella de Coca tiene un precio de $25, mientras que la botella de Pepsi de $20.
>
> Resolver las siguientes preguntas de forma individual (de la forma en que ellos lo puedan realizar):
>
> ¿Cuál es el costo de 4 botellas de Pepsi?
>
> ¿Cuánto se debe pagar por ¾ de botella de Pepsi?
>
> ¿Cuánto debe de pagar por 0.750 partes de una botella de Pepsi?
>
> Si se quisiera comprar $25 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas le darían?
>
> Y si se compraran $15 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas se darían?
>
> Y si sólo se compraran $12.50, ¿qué cantidad de botellas se darían?

Como se puede observar, en el primer momento PF5 plantea tareas con distintas magnitudes (enteros, fracciones y decimales) pero todas asociadas al valor faltante en las que se cuestiona sobre el precio que deberá pagarse dada una cierta magnitud. Por otra parte establece diversos rangos de precio para identificar también el valor faltante asociado al número de botellas que podrán adquirirse con ciertos precios, en este caso la técnica que se busca generar es el uso del valor unitario como operador. Hasta este momento las tareas enunciadas guardan total relación con el REI vivido, sólo se modifica el rango numérico con el que se aborda para los alumnos de sexto grado.

Otras situaciones alusivas a esta tarea se observan cuando PF5 plantea el momento del primer encuentro, en éste solicita a los alumnos que peguen una hoja en su cuaderno y de manera individual resuelvan los siguientes problemas:

> Pablo desea hacer una fiesta pero al comprar todo lo que ocupaba para realizarla, le sobraron $4600 para comprar el refresco, ¿cuántas botellas de Coca ajustará?
>
> Antes de comprar los refrescos, su mamá le habló y le pidió que sólo comprara 123 botellas de Coca, ¿cuánto pagó?

Esta tarea se asocia a la resolución de dos situaciones del tipo encontrar un valor faltante en las que se emplea la técnica de valor unitario como operador, que constituye el costo de una botella de refresco. Para el primer inciso la cantidad de dinero se divide entre el valor unitario de la botella, mientras que para el segundo inciso, el valor unitario se multiplica por el número de botellas que se pretende comprar.

Una vez expresado el primer momento PF5 hace explícito el momento de organización del entorno tecnológico-teórico de la técnica exactamente de la misma forma en que lo plantea en la tarea anterior, es decir señala que reunirá a los alumnos en tercias para que compartan sus procedimientos y seleccionen el más adecuado, luego pasará al frente a algunos estudiantes para que expliquen sus procedimientos. En este momento una vez que los alumnos de sexto grado encuentren la técnica para resolver la tarea, deberán explicar la razón por la cual funciona, con ello se pretende utilicen un discurso tecnológico-teórico[45]. Finalmente plantea el momento de la institucionalización sin expresar las cuestiones o elementos teóricos que serán abordados sólo se enuncia que dicho momento se apoyará con la información recabada de los procedimientos mencionados por los alumnos.

Por su parte PF7, plantea sólo algunas cuestiones relacionadas con la comparación de costos en el primer encuentro.

> En una fábrica textil se producen dos tipos diferentes de calcetines para exportar, que varían su calidad según el algodón que utilizan en su elaboración. Los calcetines “Cotton” cuestan $625 la caja precio a mayoristas y los calcetines “El Mexicano” cuestan $885 la caja precio a mayoristas, debe aclararse que la caja de ambas clases de calcetines contiene la misma cantidad. Tomando en cuenta los precios de las dos clases de calcetines:
>
> -¿Cuál es el costo de 3 cajas de calcetines “Cotton?
>
> -¿Cuál es el costo de 3 cajas de calcetines “El Mexicano”?

[45] El cuarto momento didáctico, asociado al trabajo de la técnica en el cual la vuelve más eficaz y más segura a través de la práctica de la misma para su manejo automático, no se hace presente en el diseño del REI. Esto ocurre a lo largo de toda la planeación.

-¿Cuál es más barato?¿Cuál es más caro?

Con esta tarea, una comparación de tipos de calcetines, PF7 busca que los alumnos apliquen la técnica del valor unitario como operador con magnitudes enteras dejando de lado el trabajo con magnitudes fraccionarias y decimales abordadas en el REI vivido, sin embargo las dos últimas cuestiones sobre la comparación del costo parecería ser irrelevante en tanto que la respuesta puede deducirse a partir del valor unitario de la caja.

A diferencia de PF5, en esta primera tarea el diseño de PF7 no expresa el momento de la constitución del entorno tecnológico teórico referido a la técnica ni la institucionalización.

6.1.2. El valor faltante en tablas de variación proporcional.

Para la segunda tarea del diseño, PF5 plantea nuevamente situaciones de valor faltante, en el momento del primer encuentro pide que los alumnos lean los problemas escritos y completen tablas como la siguientes.

Miguel trabaja en una tienda, pero el dueño le pidió que llevara un registro de las botellas de Coca vendidas, por lo que realizó las siguientes tablas para facilitar su trabajo, ayúdale a completarlas:

No. de botellas	1	2	6	15	23	45	91
Precio							

No. de botellas							
Precio	25	75	125	200	250	325	500

La economía en México está pasando por un mal momento y la población ya no alcanza a comprar botellas completas, pero aun así siguen comprando; por lo que Miguel se vio en la necesidad de vender en vasos la Coca para seguir obteniendo ganancias, ayúdale a completar la siguiente tabla:

No. de botellas	0.1	0.25	0.5	0.75	0.8	1.5	2.25
Precio							

Esta tarea, en un contexto tabular donde se busca el valor faltante, también exige la técnica del valor unitario como operador, en el caso de la primera y tercera tabla, la multiplicación resulta ser la técnica más eficiente, aunque la diferencia radica en el uso de magnitudes enteras y decimales. La segunda tabla requiere la división como la técnica más eficiente ya que al colocar los datos sólo en una de las filas (número de botellas o precio), deja de lado la posibilidad de utilizar la técnica de la regla de tres.

El momento de constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica es similar a la primera tarea, ya que se plantea reunir a los estudiantes para que compartan sus procedimientos y elijan el más adecuado, una vez seleccionado se propone la explicación de los procedimientos al resto del grupo. Finalmente PF5 expresa el momento de la institucionalización sin aludir a algún significado conceptual o al uso de una determinada técnica para la tarea resuelta.

Por su parte PF7 plantea la segunda tarea también del tipo valor faltante mediante un modelo tabular, es decir, solicita a través del primer encuentro que los alumnos completen una tabla con valores faltantes y den respuesta a las preguntas derivadas de la información encontrada:

Tomando en cuenta que el precio de los calcetines “Cotton “es de $625, completa la siguiente tabla.

Número de cajas	1.5			6
Precio por caja	937.5	1875	2812.5	

- ¿Cuál es el costo de cajas de calcetines “Cotton”? ¿y de calcetines “El Mexicano”?
- ¿Cuál es el costo de 0.700 partes de caja?
- ¿Cuántas cajas en cada caso si sólo se quieren comprar $700 de calcetines?

Con los datos mostrados en esta tarea, PF7 busca el uso de la regla de tres como técnica, sobre todo en el trabajo con la tabla. En las siguientes preguntas el valor unitario se vuelve la técnica más eficiente, en este caso se hace explicita la intención de que la técnica evolucione, que pase del valor unitario a la regla de tres. Hasta después de la resolución se hace presente el momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico al señalar que *“se comparten procedimientos y se validan resultados”.* También en esta segunda tarea PF7 establece el momento de la institucionalización y a diferencia de PF5 él describe los saberes que serán formalizados:

> Se institucionaliza tomando en cuenta lo siguiente:
>
> - Existe un valor proporcional que hace que conforme aumenta el número de cajas, la cantidad a pagar también lo haga
> - Si la cantidad de dinero disminuye, también disminuye la cantidad de cajas

En este momento se observa el intento de institucionalizar el significado de la proporcionalidad directa aunque no se aprecia la institucionalización de técnicas como el valor unitario y la regla de tres.

En la segunda tarea se observan ciertas diferencias en los diseños de ambos profesores, por una parte PF5 establece una tarea que da continuidad al uso del valor unitario pero que resulta diferente al REI vivido porque aumenta el rango numérico ya que el uso de la multiplicación y la división implícitos en el valor unitario como operador se trabajó desde la primera tarea. Es posible que desde esta segunda tarea PF5 busque instituir el momento del trabajo de la técnica mediante la resolución de tareas similares. Por su parte PF7 plantea el cambio de técnica (de valor unitario a regla de tres) entre la primera y la segunda tarea, aunque en ambos casos, el uso de gráficas de variación proporcional abordado en el REI vivido no es considerado por ninguno de los profesores para plantearse con los alumnos de la escuela primaria.

6.1.3. El trabajo con razones.

En este tipo de tareas, PF5 plantea el momento del primer encuentro pidiendo que peguen en su cuaderno una hoja con situaciones problemáticas para que sean resueltos de forma individual, uno de esos problemas es el siguiente.

En un cargamento que lleva Doña Lupita a su taquería, transporta 100 botellas de refresco; si por cada botella de Coca, hay 3 de Pepsi, ¿cuántas botellas hay de Pepsi y cuántas de Coca?

El total del cargamento es la suma de dos números, las 100 botellas de refresco están en relación de 1 a 3 con los diferentes tipos de refresco y, al expresar los datos a modo de razón se tiene 1/3, eso es, un refresco de Coca por cada tres de Pepsi, lo que da un total de cuatro refrescos. En este problema es necesario que el alumno encuentre una técnica para identificar el valor de cada uno de los números de modo que la suma sea 100, la razón 1 a 3 indica que una de las magnitudes es 3 veces un número de 1 vez de otro, de esta forma 75 y 25 son las magnitudes que cumplen con esa condición. Si bien esta tarea puede resolverse utilizando diferentes técnicas, dada la secuencia establecida, la técnica que posiblemente aparezca en los alumnos de primaria es el modelo tabular, esto es:

Coca	1	5	10	20	25
Pepsi	3	15	30	60	75
Total	4	20	40	80	100

Por su parte PF7, establece el momento del primer encuentro planteando en la tercera tarea una situación de la que derivan preguntas y problemas que deberán contestarse de forma grupal e individual:

Debido al aumento de impuestos, la fábrica de textiles tuvo que aumentar sus precios, por lo que ahora el costo de la caja de calcetines "Cotton" es de $670 y el costo de la caja de calcetines "El Mexicano" es de $915

- ¿Qué creen que sucederá ahora que cambiaron los costos? ¿el valor proporcional será el mismo que en los costos anteriores? ¿por qué?

En este planteamiento se incluyen preguntas que podrían denominarse "predictivas", ya que se busca que los alumnos elaboren predicciones respecto del comportamiento que la variación proporcional tendrá con los nuevos costos, no obstante, las preguntas son un tanto ambiguas y posiblemente se requiera la contextualización de las tareas previas para que los alumnos puedan dar respuesta a tales cuestionamientos. Derivado de este planteamiento PF7 los remite a una tarea vinculada a una situación problemática con el uso de la razón, a saber:

Se pide que en base al problema resuelvan los siguientes planteamientos:

- Al día la fábrica vende 300 cajas. Si por cada 5 cajas de calcetines "Cotton" se venden 2 cajas de calcetines "El mexicano" ¿Cuántas cajas de calcetines "Cotton" venden al día?

En la tarea anterior se pide encontrar una razón a partir de la relación entre dos magnitudes de diferentes tipos (5 cajas de calcetines "Cotton" a razón de 2 cajas de calcetines "El Mexicano"), no obstante se observa una dificultad en el diseño ya que, si se trata de magnitudes enteras la relación 5 a 2 no coincide con las 300 cajas en venta, sino con 294 o 301 cajas, es decir si las cajas se representan con a y b y se sabe que al hablar de razón entre dos cantidades existe una comparación entre éstas, los datos quedarían expresados como $a/b = 2/5$, La tarea plantea que la suma de los dos números debe dar 300 cajas, al trabajar con una constante que puede ser "x", la representación sería $a/b = 2x/5x$, al reemplazar los datos de la ecuación se tendría:

$$2x + 5x = 300$$

$$7x = 300$$

$$x = 300/7$$

$$x = 42.85$$

Una vez obtenido el valor de x se sustituyen los valores a y b para establecer que $a/b= 2(42.86)/ 5(42.86)$, así el valor de *a* es 85.7 mientras que el valor de *b* es 214.25 y la suma de ambos valores será un aproximado de 299.95 cajas en total. Si bien desde la perspectiva matemática la técnica y la resolución son adecuadas, no lo es así desde el contexto del problema al considerar la dificultad de hablar de 85.7 cajas de calcetines "El Mexicano" y 214.25 cajas de calcetines "Cotton".

En ambos casos, los profesores no señalan en su planeación que fueran a desarrollar otro momento de estudio, los que plantean se ubican después de la resolución de las tareas relacionadas con la comparación de razones, y en éstas, nuevamente gestionan un momento del primer encuentro. En el caso de PF5 plantea dos tareas del tipo siguiente:

> Se realizó una encuesta acerca de las preferencias de las personas hacia las dos marcas de refresco de cola, obteniendo los siguientes resultados: 8 de cada 15 personas prefieren Pepsi y 7 de cada 11 prefieren Coca. ¿Qué marca de refresco de cola prefiere más la población?, ¿qué porcentaje representa la población que lo prefiere en cada caso?
>
> Ha estado disminuyendo el consumo de refresco debido al sobrepeso en la población, así que las dos marcas tuvieron que manejar ofertas para que las personas volvieran a comprar: Al comprar 5 botellas de Coca te regalan 1 más, y por comprar 15 botellas de Pepsi te regalan 4 botellas más. ¿Cuál promoción resulta mejor?

En ambas tareas se observa la relación entre dos pares de magnitudes 8 de cada 15 y 7 de cada 11 para la primera, 1 por cada 5 y 4 por cada 15 para la segunda, las técnicas que tal vez se intenten utilizar son el modelo tabular o la conversión de fracción a decimal. Luego de la resolución de estos problemas, PF5 plantea el momento para la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica, planea reunir a los alumnos en tercias para que compartan sus procedimientos y posteriormente que presenten y expliquen al grupo sus resultados para luego institucionalizar los procedimientos seguidos por los alumnos.

Por su parte, para el momento del primer encuentro PF7 plantea sólo una situación de comparación de razones:

> Si al comprar 8 cajas de calcetines “Cotton” te regalan 1 caja y al comprar 15 cajas de calcetines “El mexicano” te regalan 2 cajas. ¿Cuál promoción conviene comprar más?

El problema implica comparar razones, es decir 1 caja por cada 8 cajas y 2 cajas por cada 15 cajas. Las fracciones que representan estas relaciones son 1/8 y 2/15, por lo tanto una técnica plausible para resolverlo es determinar y comparar esas fracciones que en esta situación funcionan como razones. Como se puede ver, el rango entre las magnitudes que presenta PF7 es de menor dificultad que las presentadas por PF5, en este caso la comparación permite usar la técnica de igualar ambas razones a 2 es decir 2 por cada 16 y 2 por cada 15, lo que permite con mayor facilidad hacer la comparación.

Luego de las tareas de este tipo PF7 no planea momento para la constitución del entorno tecnológico-teórico ni para el trabajo con la técnica, tampoco planea institucionalización. Todo ello lo planea hasta el trabajo con la siguiente tarea donde se aborda la proporcionalidad con tres magnitudes. Se podría decir entonces que la institucionalización del uso de la razón y la comparación de razones resultó en ambos casos sólo una resolución de problemas en las que no se promueve una técnica explícita para su estudio.

6.1.4. La variación proporcional con tres magnitudes.

Otra de las tareas programadas en el diseño del REI, tiene que ver con el manejo de tres magnitudes en situaciones de proporcionalidad, para ello ambos profesores en formación plantearon tareas muy similares a las del REI vivido. PF5 nuevamente incluye un momento del primer encuentro mediante una situación que incluye diversos cuestionamientos, para resolverse de manera individual.

> A Toñito y a José les gusta jugar a “Los científicos” así que decidieron hacer una mezcla, utilizando una botella de Coca ($25) y una de Pepsi ($20). Decidieron vender su mezcla ya que tenía un rico sabor, ¿cuánto costará toda la mezcla? ¿Y cuánto costará sólo una botella de esa mezcla?
>
> Si hubieran mezclado dos botellas de Coca y dos de Pepsi, ¿cuánto costaría toda la mezcla? ¿Y sólo una botella de esa mezcla?
>
> Y si juntaran dos de Coca y una de Pepsi, ¿cuánto costaría toda la mezcla y cuánto una botella?
>
> ¿Y si juntaran 2 de Coca y 5 de Pepsi…?

La técnica que parece pertinente para esta situación remite al uso del valor unitario pero empleado junto con la media aritmética, es decir con el cociente de la división realizada con la sumatoria de los valores unitarios. Puede verse que los cuestionamientos son progresivos y llevan a los alumnos de cuestiones sencillas como la mezcla uno a uno, hasta situaciones más complejas como la mezcla “dos a cinco”. Una vez que la resuelvan individualmente, PF5 planea gestionar un momento para la constitución del entorno tecnológico-teórico de la misma forma en que lo ha hecho en las tareas precedentes, reúne al grupo en tercias para la elección del procedimiento y luego algunas tercias lo explican al grupo.

Por último, señala el momento de la institucionalización aunque no específica qué es lo que pretende institucionalizar ni tampoco la manera de hacerlo. De esta manera concluye la planeación del REI de PF5, con tareas de mezcla de dos magnitudes en las que se utiliza el valor unitario. No planea tareas para la exploración de un modelo algebraico, tampoco que se enfoquen a encontrar el valor de cada magnitud dado el costo de una mezcla. Cabe mencionar que en el REI diseñado por PF7 esta tarea también se hace presente aunque con menos cuestionamientos, se plantea un momento del primer encuentro en el que el alumno individualmente deberá resolver la siguiente tarea:

> Por temporada, la fábrica estará vendiendo cajas mixtas, que consiste en una mezcla de ambos tipos de calcetines según la petición del cliente, por lo que el precio varía según el contenido de cada caja
>
> Si se producen cajas con la combinación de una caja de cada clase de calcetín ¿Qué precio tendrá esa caja?
>
> Si se produce una caja, combinando dos cajas de calcetines “Cotton” y una “El Mexicano”¿Cuál será el costo de esta caja?

Como se puede ver, la idea de combinación se encuentra un tanto “forzada”, lo que realmente se combina son dos tipos diferentes de calcetines, hecho que pudiera repercutir en la comprensión del problema, aunque el valor unitario de esa combinación o media aritmética permita la solución a la tarea. Una vez que establece este primer encuentro, PF7 planea un momento para la constitución del entorno tecnológico-teórico mediante la validación grupal de las respuestas para luego, gestionar el momento de la institucionalización donde expresa que:

- Al cambiar el precio de las cajas de calcetines inmediatamente el total de dinero a pagar por n cajas también se modifica.
- Al realizar mezclas de ambos calcetines el precio varía según la calidad del contenido de la caja, es decir, si tiene un mayor porcentaje de calcetines de mayor precio y menor cantidad de calcetines de menor precio, el costo final se eleva, por lo contrario disminuye.

Cabe señalar que esta institucionalización se plantea después del trabajo con tareas donde se incluye la razón y la proporcionalidad con tres magnitudes. En las primeras no se incluye información sobre la institucionalización aunque sí en las de tres magnitudes. Lo que resulta interesante de este momento de estudio es la inserción de un lenguaje algebraico al hablar del costo de “n” cajas.

6.1.5. La deducción algorítmica.

A diferencia de PF5, PF7 plantea situaciones de variación con tres magnitudes en las que se pregunta por el número de cajas que se combinarían para un costo dado, a diferencia de las anteriores, se plantea un momento del primer encuentro de manera grupal, posteriormente se resolverían otras cuestiones de manera individual:

> Tomando en cuenta que la caja de calcetines “Cotton” cuesta $670 y la caja de calcetines “El Mexicano” cuesta $915.
>
> - ¿Qué cantidad de calcetines de cada clase debe contener una caja que tenga un valor de $800?
>
> De forma individual se pide contesten las siguientes preguntas con base al primer problema
>
> - ¿Se puede armar una caja con un valor menor de $670? ¿Por qué?
> - ¿Se puede armar una caja con un valor superior a $915? ¿Por qué?
> - ¿Qué cantidad de calcetines de cada clase debe de contener una caja que tenga un valor de x, es decir un valor cualquiera que sea?

La estructura de esta tarea tiene sus dificultades, desde el contexto se observa que el cuestionamiento no alude a la cantidad de cajas de cada tipo como se había planteado en tareas anteriores, ahora se cuestiona sobre la cantidad de calcetines de cada clase, esta situación resulta compleja porque en ningún momento se ha mencionado el número de calcetines que tiene cada caja, ese dato no era necesario en las primeras tareas, por otra parte hablar de “partes de caja” rompe también con la lógica de la funcionalidad de la tarea. En este sentido en la planeación de PF7 se lee:

> Se comparten procedimientos y resultados, intentando que lleguen a un razonamiento algebraico inicial, haciendo preguntas como:
>
> Durante las sesiones de trabajo ¿qué relación han encontrado entre el precio y la cantidad de cajas?

> ¿Qué pasa con el contenido de las cajas de calcetines cuando el precio que pagamos es mayor? ¿Y qué pasa cuando es menor?
>
> ¿Ustedes creen que pudiera haber una fórmula general para que pudiéramos conocer los porcentajes que deben de incluir una caja de cada clase de calcetines para obtener determinado precio final? ¿Cuál?

Esto significa que a partir de este momento PF7 pretende generar una técnica algorítmica a partir de la mayéutica socrática, específicamente una fórmula para conocer los porcentajes de cada caja que den el costo total, de aquí se deduce que la técnica que se pretende institucionalizar es el uso de porcentajes, aunque no se explicita la forma en que será abordado si como técnica o como concepto en esta última tarea del REI. Por último PF7 cierra el diseño del REI con una expresión que parecería constituir la institucionalización:

> Se llega a una conclusión de cuál sería el costo menor que pudiera tener una caja de calcetines y el costo mayor, argumentando el por qué ocurre esto.

Se observa que la atención está centrada en institucionalizar los rangos mínimos y máximos (costos) de la combinación de cajas, no así en el funcionamiento de una técnica que resulte eficiente para resolver la tarea planteada. Es con este momento que PF7 da por terminado el diseño del REI.

En términos generales el diseño del REI por parte de los profesores en formación, muestra rasgos que permiten identificar su adhesión con la estructura y funcionalidad del REI que vivieron como “aprendices de matemáticas”. En lo que respecta a la praxeología matemática, ambos plantean una situación eje ubicada en un contexto en particular bajo el cual se ubican todas las tareas. Es en los contextos “refrescos” y “cajas de calcetines” que se diseñan entre cuatro y cinco tareas relacionadas ligadas a la proporcionalidad, lo que nos permite decir que los profesores en formación asumen la noción de “recorrido” y la intención de que aparezcan técnicas diferentes relacionadas con la evolución. No obstante también es visible la dificultad para diseñar la situación eje, el contexto que elige PF7 (cajas de calcetines) da cuenta de dichas dificultades, sin duda esto significaría conflictos para sus alumnos al momento de resolver tareas con magnitudes fraccionarias y decimales.

Por otra parte, es posible observar que las tareas planteadas tienen una estrecha relación con el REI vivido, la diferencia estriba en el número de cuestionamientos y el rango numérico, en ambos casos se omite el estudio de la proporcionalidad a través del manejo de gráficas y de técnicas algorítmicas. La evolución de técnicas es una intención presente, hay tareas relativas al uso del valor unitario y a la regla de tres, en el caso de PF7 es más clara la intención para llegar al menos a la representación de una técnica algorítmica, aunque también se aprecia que ambos profesores en formación establecen una relación estrecha con los saberes instituidos en el currículo oficial asociados con un modelo epistemológico basado en la organización clásica de la proporcionalidad.

En cuanto a las praxeologías didácticas, se puede ver que plantean casi los mismos momentos de estudio (Chevallard, 1999), esto es, el primer encuentro, la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica y en algunos casos el momento de la institucionalización, aunque en este último momento se aprecia la dificultad para establecer los saberes que la institución ha formalizado y el funcionamiento de las técnicas que resultan más eficientes ante las tareas planteadas, sobre todo en el caso de PF7 quien sólo señala que se llevará a cabo dicho momento con los procedimientos encontrados pero sin especificar de modo explícito aquello que será institucionalizado.

CAPÍTULO VII
ORGANIZACIONES DIDÁCTICAS.
LA EXPERIMENTACIÓN DEL REI EN LA ESCUELA PRIMARIA

Como lo hemos mencionado, en el M_4 del REI-FP el profesor en formación juega el rol de “aprendiz de profesor” o “profesor en acto”, es decir plantea tareas que le permitan dirigir el proceso de estudio de una organización matemática con un grupo de niños. Este rol requiere el dominio de la OM que se “vivió” en el M_1 además del planteamiento de OD en las que se refleje el dominio de los momentos didácticos durante el desarrollo de las clases escolares.

En este rol se considera la existencia de una obra matemática construida a partir del estudio de cuestiones problemáticas y de una manera específica el proceso en que dicha obra se construye, es decir, una forma en que pueda organizarse el estudio de las cuestiones. El primer aspecto (el producto u OM) es resultado de la construcción, mientras que el segundo aspecto (manera de construirlo u OD) es el proceso de estudio y construcción (Lucas, 2010). Desde esta perspectiva no hay una OM sin un proceso de estudio que lo engendre y tampoco puede haber un proceso de estudio sin una OM en construcción (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003). En este sentido, la cuestión generatriz que orienta la elaboración del M_4 del REI-FP es la siguiente:

> Q4: ¿Cuáles son las tareas (T), técnicas (τ) y discurso tecnológico-teórico (θ, Θ) que desarrollan los profesores en formación durante la gestión de una praxeología didáctico-matemática vinculada a la proporcionalidad?

Las OM se hacen visibles en los momentos didácticos que se desarrollan tomando en consideración las restricciones institucionales y las decisiones del profesor en formación. Cuando se intenta dar respuesta a una cuestión (didáctica) aparecen: el momento del primer encuentro con la OM, el momento exploratorio del tipo de tareas, el momento de la constitución o construcción de un entorno tecnológico-teórico, el momento de trabajo de la técnica que busca la evolución de las técnicas existentes para la construcción de otras nuevas, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación. (Chevallard, 1999)

Sin embargo, debe asumirse que el proceso de estudio no es lineal, cada momento didáctico puede ser experimentado con diferente magnitud, en diferentes tiempos y repitiéndose las veces que sea necesario, algunos momentos pueden presentarse casi de modo simultáneo como es el caso del primer encuentro y el momento exploratorio o bien que alguno no se desarrolle durante el proceso. “Lo que es importante destacar es que cada uno de los seis momentos o dimensiones del estudio tiene una función específica necesaria para llevar a cabo el proceso y que existe una dinámica interna global que se manifiesta en el carácter invariante de ciertas relaciones entre los citados momentos”. (Serrano, 2013, p. 23)

El análisis de la experimentación didáctica que los profesores en formación realizaron y que aquí planteamos, es la parte esencial del M_4 del REI-FP el cual se caracteriza porque en él se realiza la gestión de los momentos del proceso de estudio. En este caso, el objetivo es identificar las tareas que los profesores en formación ponen en juego, las técnicas que implementan para gestionar dichas tareas y los elementos tecnológico-teóricos que las justifican. Como herramienta de análisis tomaremos los diferentes momentos didácticos que previamente habían sido descritos, en otras palabras el objetivo de la T4 del REI-FP es identificar el tipo de OD que reconstruyen los profesores en formación cuando juegan el rol de “aprendiz de profesor”.

7.1. EL RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA ESCUELA PRIMARIA

Antes de iniciar el análisis propuesto cabe señalar que para cumplir con esta tarea se utilizan conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas con los que se da cuenta de lo que ocurre durante el desarrollo de los momentos de estudio y las interacciones que se desarrollan entre el profesor en formación, sus alumnos y las tareas en cuestión, la determinación de utilizar estos conceptos tiene que ver con el hecho de que en la TAD no se han realizado estudios en los que se establezcan conceptos que permitan explicar todo aquello que ocurre en el proceso de estudio de una OM.

El M_4 o la experimentación de un REI por parte de los profesores en formación se desarrolló en dos grupos de sexto grado de educación primaria, uno con 30 alumnos y el otro con 32, en estos grupos trabajaron respectivamente PF5 y PF7. El primero quien a partir de ahora llamaremos José, trabajó cuatro sesiones de dos horas que se distribuyeron a lo largo de dos semanas en las que fundamentalmente planteó cuatro tipos de tareas. El segundo (PF7), a quien a partir de ahora llamaremos Luis, trabajó 3 sesiones que duraron entre dos y dos horas y media, mismas que se distribuyeron también en un lapso de dos semanas en las que se observó el planteamiento de cinco tipos de tareas.

7.1.1. Las razones y condiciones del REI.

Cabe destacar que la experimentación didáctica en las escuelas primarias fue una tarea extracurricular, es decir, aunque las sesiones se desarrollaron en el horario escolar se intentó evitar ciertas restricciones del ámbito curricular como el tiempo específico destinado para la clase de matemáticas y el abordaje convencional de las lecciones del libro de texto, circunscritas a un tema en particular.[47] A diferencia de ello, el REI diseñado por los profesores en formación intentó articular diversas cuestiones, temas y sectores que permitieran gestionar un proceso de estudio en torno a la proporcionalidad. En lo que sigue describimos cada elemento de la estructura de los REI experimentados con los dos grupos de la escuela primaria así como las razones y/o condiciones de cada elemento:

A. *Un problema didáctico-matemático al que el sistema de enseñanza tiene que dar respuesta:* promover el estudio de la proporcionalidad a través de organizaciones matemáticas que permitan la identificación y utilización de

[47] En la escuela primaria se trabaja por aprendizajes esperados a través de lecciones en el libro de texto y el manejo de los conceptos matemáticos no es secuencial, es decir en una lección pueden abordarse nociones de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico y en la siguiente Forma y Medida.

técnicas aritméticas (el valor unitario y la regla de tres)y algebraicas para la resolución de cuestiones problemáticas.

B. *Una institución concreta donde se plantea el problema en cuestión:* nivel de educación básica. Escuela Primaria "General Pánfilo Natera", grupos 6º "A" y 6º "C", en la ciudad de Zacatecas, Zac.

C. *La razón de ser de las organizaciones matemáticas:*

- Resolver diferentes tareas matemáticas en torno a la proporcionalidad.
- Identificar las diversas técnicas que se utilizan para resolver situaciones de proporcionalidad.
- Identificar la evolución de modelos aritméticos a modelos algebraicos.
- Comprender el funcionamiento y significado de modelos algebraicos en torno a la proporcionalidad.

D. *Elegir una cuestión o situación generatriz (SG):*¿Cuáles son las técnicas y tecnologías que permiten resolver y justificar tareas de proporcionalidad?.

E. *Un dispositivo didáctico que puede ser considerado como un proceso de ingeniería matemática denominado Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas (OMLRC):*

- "El Refresco", una reconstrucción elaborada por José para trabajarse con el grupo de 6º "A" y,
- "Las cajas de calcetines" dispositivo prediseñado por Luis cuya experimentación se llevó a cabo con el grupo de 6º "C".

F. *Un contrato didáctico donde se observarán las responsabilidades del profesor y del alumno ante las situaciones de aprendizaje y de enseñanza:* Las tareas planteadas a los alumnos de sexto grado están vinculadas con actividades cotidianas y con saberes precedentes adquiridos en los grados escolares anteriores, lo que permitió otorgarles la responsabilidad en la resolución de las situaciones problemáticas. En función de la tarea y la búsqueda de la técnica se observó el tipo de contrato que se establece entre profesor y alumnos.

G. *Una Organización Matemática Local Relativamente Completa (OMLRC) en la que se genera el proceso de estudio de la actividad matemática: s*e identificaron los momentos didácticos que los profesores en formación pusieron en juego a lo largo de las sesiones propuestas.

Considerando los elementos anteriores, el proceso de estudio no es sino la búsqueda de la respuesta a una cuestión generatriz, respuesta que requiere la reconstrucción de la OM que será estudiada por los alumnos de sexto grado sin dejar de lado que: “La noción de Momento didáctico se utiliza, no tanto en el sentido cronológico, como en el sentido de dimensión de la actividad. Lo importante es la estructura interna de las relaciones que deben establecerse forzosamente entre momentos del proceso de estudio”. (Dorado y Díaz, 2014, p. 80)

Sin embargo, siguiendo a Fonseca (2011) debemos considerar que es necesario plantear una mínima infraestructura praxeológica para el estudio de la nueva OM, la cuestión generatriz que se proponga facilita el proceso de estudio aunque el tiempo institucional (limitado) obstaculice la familiarización con toda la información. Este primer momento resulta familiar para el alumno por el equipamiento praxeológico inicial con el que cuenta, ya que cuando cursan el sexto grado han resuelto situaciones de proporcionalidad en grados anteriores, de hecho el estudio formal de la proporcionalidad inicia en quinto grado.

Con base en el equipamiento inicial con el que cuentan los alumnos, en esta primera etapa se deben proponer tareas en las que se utilicen las técnicas con que ya cuenten los alumnos de sexto grado. En este caso los profesores en formación plantearon tareas de diverso tipo, a saber:

T1. Tareas relacionadas con el valor faltante en situaciones que se resuelven con el uso del valor unitario.

T2. Tareas ligadas al valor faltante en tablas de variación proporcional en las que se pueda deducir el uso de la técnica de la regla de tres.

T3. Tareas vinculadas con el uso de la razón en las que se enfatiza la comparación de razones como técnica.

T4. Tareas asociadas con la variación proporcional de tres magnitudes, que pudieran servir de preámbulo para la génesis de modelos algebraicos.

T5. Tareas asociadas a la deducción algorítmica cuyo propósito es establecer la significación algorítmica en términos del modelo aritmético y su posible uso en cuestiones problemáticas.

Cabe señalar que si bien estos tipos de tareas se plantean en una secuencia similar a la del REI que “vivieron” los profesores en formación[48] el proceso de estudio que gestionaron los “aprendices de profesor” es el objeto principal de nuestro análisis en este capítulo.

7.2. ORGANIZACIÓN PRAXEOLÓGICA CON DEVOLUCIÓN AUTÓNOMA. EL CASO DE JOSÉ

El primer momento didáctico representa también el primer encuentro que tienen los alumnos con la OM, esta primera aproximación permite que los alumnos analicen la OM con el fin de comprender su estructura, significado, el tipo de tarea que se está planteando y la técnica que puede ser empleada para su resolución. Este primer momento puede gestionarse de formas diversas no sólo por las tareas matemáticas sino también por las tareas didácticas que el profesor en formación pone en juego.

Considerando que los REI surgen y son el estudio de cuestiones problemáticas cuya resolución requiere la construcción de una serie de praxeologías, la cuestión generatriz aparecerá como una forma de hacer “vivir” la actividad matemática en el salón de clase (Rodríguez, Bosch, Gascón, 2006), en otras palabras, la cuestión generatriz es la “razón de ser” de la reconstrucción de las praxeologías. Para tal efecto es necesario que los alumnos dispongan de recursos que les permitan apropiarse de la cuestión inicial ya que en los momentos del primer encuentro y exploratorio, el profesor en formación les devuelve la responsabilidad de su

[48] El M_1 del REI-FP (vivir el REI) tenía como intención principal promover la evolución de técnicas aritméticas hacía técnicas algorítmicas, lo que se hace presente en el recorrido que reconstruyen en la escuela primaria.

aprendizaje para que analicen y exploren los elementos que conforman la praxeología matemática implícita en la tarea planteada.

7.2.1. El momento del primer encuentro de José.

José es un profesor en formación que cursa el octavo semestre de la licenciatura en educación primaria, realiza su servicio de práctica profesional con un grupo de sexto grado, además se destaca por la facilidad en el diseño de organizaciones praxeológicas y su gusto por la enseñanza de las matemáticas, no obstante al tratarse de la experimentación de un REI que difiere del modo de trabajo convencional de la escuela primaria, las tareas que plantea en clase se caracterizan por un nivel de complejidad menor a las que corresponden a dicho grado escolar. Ahora bien, la gestión del momento del primer encuentro llevada a cabo por José se centra en una tarea ligada a la búsqueda del valor faltante como operador con el manejo de dos magnitudes (refresco de Coca y refresco de Pepsi) expresadas en decenas, centenas con números enteros y decimales hasta centésimos en otro tipo de tareas.

Como se puede apreciar en el siguiente fragmento, José gestiona el primer encuentro a partir de una situación problemática eje, en forma escrita, de la cual se derivan diferentes tipos de tareas, la primera de ellas alude al uso de la técnica del valor unitario como operador con magnitudes enteras, fraccionarias y decimales:

> José. Les voy a entregar una hojita donde vienen algunas instrucciones y dice pegar en su cuaderno y resolver de manera individual el problema de “El refresco”, que dice lo siguiente:
>
> En nuestro país se consumen grandes cantidades de refresco, principalmente refresco de cola (negro); entre los más consumidos encontramos la Coca y la Pepsi. Dichas marcas tienen algunas variaciones en sus precios; sin embargo, en la actualidad, año 2015, la botella de Coca tiene un precio de $25, mientras que la botella de Pepsi es de $20.
>
> ¿Cuál es el costo de 4 botellas de Pepsi?
>
> ¿Cuánto se debe pagar por ¾ de botella de Pepsi?
>
> ¿Cuánto debe de pagar por 0.750 partes de una botella de Pepsi?
>
> Si se quisiera comprar $25 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas le darían?
>
> Y si se compraran $15 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas?

Y si sólo se compraran $12.50, ¿qué cantidad de botellas sería?

José. ¿Quién me falta de entregarle el problema?

A1. Yo

A2. Yo

José. Como decíamos, lean el problema piensen cómo lo pueden resolver, hagan dibujitos, operaciones, lo que ustedes crean que pueden usar para resolverlo.

Esta forma de gestionar el momento del primer encuentro tiene que ver con una especie de "devolución parcial", en estos casos José "devuelve" la tarea pero no se preocupa por devolver el "medio", es decir, no realiza acciones que permitan al alumno recuperar el significado de la tarea antes de emprender los intentos de solución. La devolución "sólo del problema" es una manera de gestionar el primer encuentro y como se puede ver en el fragmento anterior José les da "señales" (hagan dibujitos, operaciones…) sobre la manera en la que lo pueden resolver.

Como hemos mencionado, el fragmento anterior da cuenta de un proceso de devolución[49] "parcial" en el que José entrega la tarea e indica técnicas posibles, es decir habla a la clase sólo para presentar el problema, no existe una validación del significado conceptual y sintáctico del problema, la consigna se reduce a indicar que se va a entregar un problema para que se resuelva de modo individual y que utilicen la técnica que les permita resolverlo. Debe recordarse que no basta con plantear una situación a un alumno para que ésta se vuelva su problema a resolver y se sienta el único responsable de dicha resolución. Tampoco basta que el alumno tome esa responsabilidad para que el problema que se resuelva se convierta en un problema universal. Es a través de la devolución donde el profesor en formación busca alcanzar ambos resultados. (Brousseau, 1995)

Si con Brousseau existe la perspectiva de plantear situaciones donde la participación del profesor no es directa (situaciones a-didácticas), y ofrecen al alumno la posibilidad de construir el conocimiento, de modo similar, el momento del primer encuentro en Chevallard promueve una intervención de esta naturaleza.

[49] La devolución es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia. (Brousseau, 2007, p. 87)

7.2.2. El momento exploratorio. La búsqueda de la técnica.

El primer encuentro con la OM se encuentra ligado por lo general al segundo momento didáctico, el momento exploratorio, es decir la transición entre uno y otro resulta a veces imperceptible por la cercanía de las acciones que corresponden a uno y otro. El momento exploratorio alude a la exploración del tipo de tareas que han sido planteadas y a la búsqueda y elaboración de una técnica con la cual se pueda resolver dicha tarea, lo que implica la posibilidad de explorar una técnica que resulte eficiente para resolver las tareas planteadas.

La elaboración de dichas técnicas tiene una evolución gradual, la resolución de la tarea constituye el medio[50] para que los alumnos identifiquen en ese proceso cuál es la técnica que resulta más eficiente, económica y por ende con mayor cercanía al saber convencional que pertenece a cada institución. De aquí la importancia que tiene el M_4 del REI-FP en el que el profesor en formación debe propiciar mediante ciertos tipos de tareas, la evolución de las técnicas identificando el tipo de tareas que son una especie de preámbulo a cada técnica y así generar la evolución en este caso, de modelos aritméticos a modelos algebraicos.

a) La exploración y la devolución sin acompañamiento.

Una vez que José establece el primer encuentro a través de la devolución de la tarea, el momento de la exploración se lleva a cabo mediante trabajo en equipo, es visible que como orientador asume dos tendencias, por una parte, la más persistente tiene que ver con una actitud un tanto apartada del trabajo del alumno, es decir establece una gestión donde no acompaña, no busca la comprensión de la tarea sino la resolución autónoma a partir del trabajo en equipos. Este rol de mero observador se aprecia en el siguiente fragmento:

> As. (Trabajan de manera individual resolviendo el problema, José recorre por las filas de los niños).

[50] Desde la perspectiva de Brousseau (1977, en Ávila, 2001) el medio implica todo lo que actúa sobre el alumno o sobre aquello en que recae la acción del alumno por lo que tiene un papel fundamental en el aprendizaje al causar adaptaciones a propósito de un objeto de enseñanza.

José. ¿Ya terminaron?, Ahora se van a juntar en equipos de tres para comparar sus resultados.

As. (Los alumnos comentan sobre todo los resultados que cada uno obtuvo y en algunos casos se observa la corrección de las operaciones realizadas en cuanto a errores de cálculo en sumas o multiplicaciones).

En el fragmento anterior se puede observar que mientras ocurre el momento exploratorio José observa que sus alumnos busquen de manera individual la técnica, luego da paso a una segunda fase colectiva también de búsqueda de la técnica más eficiente. Durante el recorrido que se hizo por los equipos de trabajo se pudo observar que más que comentar sobre las técnicas empleadas los alumnos sólo comparaban resultados y cuando éstos no coincidían buscaban de modo individual si habían presentado algún error de cálculo en la técnica empleada (por ejemplo 20X0.750=16), aunque ello no fuera validado o invalidado por el profesor en formación, sino hasta el momento teórico-tecnológico.

Si bien en la mayoría de los momentos exploratorios referidos a los diversos tipos de tareas José no dio acompañamiento a los alumnos con la devolución completa de la tarea, también se encontraron algunas aproximaciones en las que su acercamiento al equipo de trabajo marcaba otras tendencias que podrían ser consideradas como logros en el momento exploratorio realizado por José: la evocación y la mayéutica.

b) La exploración orientada a la "evocación". Aplicación y control.

En el contrato didáctico de aplicación y control[51] para Brousseau (1994b) resulta importante identificar de qué manera se manifiesta el hecho de que los alumnos incorporan o no ciertos conocimientos, además de revisar si en el acto de enseñanza se ignora o se contempla lo que los alumnos han hecho previamente, si se identifica el nivel de aprendizaje que alcanzaron o sólo llegaron al punto marcado en el programa de estudios.

[51] En este tipo de contrato el receptor decide si se considera lo suficientemente informado o si se requiere más información, aquí el informador toma a su cargo parte de esa responsabilidad dando al informado un criterio para determinar si se ha comprendido bien el saber comunicado. Ese criterio se busca establecer una relación entre los saberes comunicados y el del ámbito de las aplicaciones. (Ávila, 2001)

El trabajo realizado al interior de los equipos constituyó el momento más claro de la exploración de la técnica, en el caso de la "evocación"[52] el accionar del profesor se hizo más palpable una vez que los alumnos emplearon una técnica de manera individual, en el momento "colectivo del equipo" se gestionó la discusión sobre las técnicas empleadas, fue ahí donde el profesor planteó ciertas cuestiones al suponer que los alumnos contaban con saberes que pudieran aplicarse y controlarse para dar respuesta a nuevos cuestionamientos relacionados con tareas más complejas que no les permitían resolver la tarea a los alumnos. Veamos lo que pasa con estas cuestiones en el siguiente fragmento.

> As. (Empiezan a resolver la tarea de manera individual, haciendo diversas operaciones en su cuaderno)
>
> José. Ya que terminaron, se van a juntar en equipos para comparar lo que hicieron. (Hace recorridos por los equipos, interviniendo en algunos casos como el siguiente:)
>
> Eq. 2. Aquí en ésta no le entiendo (se refiere a la segunda pregunta del primer problema: A Toñito y a José les gusta jugar a "Los científicos", así que decidieron hacer una mezcla, utilizando una botella de Coca ($25) y una de Pepsi ($20). Decidieron vender su mezcla ya que tenía un rico sabor, ¿cuánto costará toda la mezcla?, ¿y cuánto costará sólo una botella de esa mezcla?)
> José. ¿Qué no le entiendes?
>
> Eq. 2. ¿Nada más una botella?
>
> José. Por eso cuántas juntamos al inicio?
>
> Eq. 2. Dos
>
> José. Dos, Y ya sacamos cuánto valen esos dos juntos verdad?, ¿Cómo le haremos para saber cuánto vale sólo una de esa mezcla?
>
> Eq. 2. Dividiendo
>
> José. ¿Qué?
>
> Eq. 2. Dividiendo el 25 entre el 20.
>
> José. ¿Estás seguro?
>
> Eq. 2. No.

Como se puede apreciar, a pesar de que en esta gestión los alumnos han reconocido la técnica adecuada (la división o el valor unitario como operador), José no valida la respuesta de los alumnos sino que pone en discusión la respuesta de uno de los

[52] Perrin (1993) distingue dos tipos de situaciones de evocación: "las que evocan una situación de acción, no inmediatamente después de realizada sino otro día, y las que se refieren a una serie de problemas sobre un tema, que ha abarcado un período prolongado de tiempo". (p. 59)

alumnos ante el resto del equipo, cuando éste no puede justificar el uso de la técnica, el profesor sigue cuestionando con la intención de "evocar" la respuesta correcta.

No obstante, la intención del profesor en formación es buscar que los alumnos regularan y validaran por si mismos su aprendizaje y guiar la tarea con base en ciertos cuestionamientos, de modo ocasional orienta a los alumnos hacia la respuesta en lugar de permitir que el proceso de resolución de la tarea les lleve al uso y funcionalidad de la técnica, lo que se vuelve una dificultad en la gestión del momento exploratorio:

> José. Mira juntamos una botella de Pepsi y una de Coca entonces tenemos una mezcla, ¿esa mezcla cuánto vale?
>
> Eq. 2. 45
>
> José. Pero esa mezcla solamente ocupó una botella y quiero saber cuánto vale, ¿Cómo le harías?
>
> Eq. 2. ¿Dividiendo no?
>
> José. ¿Dividiendo qué?
>
> Eq. 2. Lo que costó, los 45 entre 1.
>
> José. ¿Cuánto es 45 entre uno?
>
> Eq. 2. 45
>
> José. Entonces no ¿verdad? Haber el resto del equipo ¿qué opina?
>
> Eq. 2. Dividir entre 45
>
> José. ¿Están seguros? No será al revés, si dividimos chicles entre 45 niños ¿de cuánto les toca?
>
> Eq. Ah no entonces es 45 entre 2, sale 22.5.
>
> José. Muy bien.

Al tratarse de una tarea que implica el manejo de magnitudes compuestas (mezclas), es visible que los alumnos reconocen que la división es la técnica pertinente para ser empleada, sin embargo la falta de comprensión de la tarea los lleva a emplearla con una asociación fortuita de las magnitudes (45 entre 1, dividir entre 45), ante este hecho el profesor despliega cuestionamientos *¿cómo le harías?, ¿dividiendo qué?, ¿cuánto es 45 entre uno?,* para finalmente señalar que la técnica es incorrecta, con ello se vuelve parte de la exploración al invalidar los argumentos de los alumnos cuando señala*: "Entonces no ¿verdad?, A ver el resto del equipo ¿qué opina?" y "¿están seguros? No será al revés, si dividimos chicles entre 45 niños ¿de cuánto les* *toca?”*. Al final valida el proceso expresando “Muy bien”, acción que da cuenta de una dificultad de José en el momento exploratorio al tomar un papel que correspondía a los alumnos.

Como se puede observar ante las dificultades de los alumnos para la resolución de la tarea, el profesor se ve obligado a dar un indicador *(si dividimos chicles entre 45 niños)* que los lleve a la respuesta esperada. Esta acción sugiere la evocación de situaciones ya tratadas, con esto los alumnos tienen la oportunidad de volver a discutir el sentido de los conocimientos que están en juego en las tareas propuestas. Desde la perspectiva de Perrin (1993), cuando se tiene la necesidad de hablar sobre algo que ya se ha hecho sin que tenga que volver a realizarse se ofrece la oportunidad de reconstruir el papel que tienen en el aprendizaje para los alumnos las tareas que se han abordado, en el fragmento anterior la técnica de la división parece identificarse como la herramienta que permitirá resolver la tarea, no obstante el profesor se enfrentó a dificultades en este momento exploratorio al externar la técnica adecuada para resolver la tarea.

c) La exploración a través de las preguntas. Una aproximación a la mayéutica.

En varios de los momentos didácticos, como el exploratorio, la mayéutica socrática[53] ha sido una de las técnicas didácticas de mayor uso, sin embargo el objetivo de las preguntas se vuelve diferente en función del objetivo del profesor. Mientras algunas se orientan a la comprensión del problema, otras tienen la intención de guiar el proceso de resolución o la identificación de la técnica.

En lo que al momento exploratorio se refiere, los cuestionamientos fueron empleados de manera recurrente por José, sobre todo cuando utiliza el contrato didáctico basado en la mayéutica socrática para identificar las técnicas empleadas y su justificación, en el siguiente fragmento puede verse esta acción.

[53] Conforme a este contrato, el profesor escoge preguntas de las cuales el alumno pueda encontrar las respuestas con sus propios recursos. Las preguntas se modifican en función de las respuestas del alumno. (Ávila, 2001, p. 34)

José. ¿Y en el último problema? (Los alumnos de este equipo sólo tienen escrito el problema *"Ha estado disminuyendo el consumo de refresco debido al sobrepeso en la población, así que las dos marcas tuvieron que manejar ofertas para que las personas volvieran a comprar: Al comprar 5 botellas de Coca te regalan 1 más, y por comprar 15 botellas de Pepsi te regalan 4 botellas más. ¿Cuál promoción resulta mejor?".* No hay desarrollo de una técnica sólo la respuesta).

Eq. 1. Pepsi, Porque son 15 botellas y por cada 15 te regalan 4 y por cada 5 te dan una.

José. ¿Y cómo sacaste eso?

Eq. 1. Porque Perla nos dijo que así le hiciéramos.

José. ¿Y eso qué? Que Perla les haya dicho, ¿Perla sabe todo? ¿Ya está resuelto?, ¿está bien? A ver explícame, por qué en una dan 4 y en otra dan 1.

Eq. 1. Mmmm.

Eq. 1. Porque haga de cuenta es que me está pidiendo que ha estado disminuyendo el consumo de refresco debido al sobrepeso en la población, así que las dos marcas tuvieron que manejar ofertas para que las personas volvieron a comprar, entonces pusieron promociones en una entonces por cinco botellas de Coca me regalan una y por cada quince de Pepsi me regalan cuatro entonces aquí nos dan más.

José. Sí, pero piensen cómo pueden explicar cuál promoción conviene más.

En la gestión de este momento exploratorio además de la mayéutica socrática en la que José intenta la justificación de las técnicas, dada la dificultad que representó para los alumnos identificar la relación entre las magnitudes la comprensión de la tarea también los alumnos hicieron una comparación según el rango numérico de la compra (15 y 5), así la justificación que hacen los alumnos del equipo es describir lo que el problema plantea no así la técnica que lo resuelve.

Al observar que los alumnos no responden con una técnica precisa José continua cuestionando, acción en la que se aprecia de modo implícito un contrato constructivista en el que no existe una intención directa de enseñar la técnica, sino que deja a los alumnos la responsabilidad de su aprendizaje a través de la devolución de la tarea.

7.2.3. El discurso tecnológico teórico.

La constitución del entorno tecnológico-teórico es uno más de los momentos didácticos propuestos en la TAD y se relaciona con los momentos analizados en los apartados anteriores, por ejemplo con el momento del primer encuentro se relaciona por el tipo de tareas en las que se plantea una cierta relación tecnológica-teórica previamente elaborada o con los indicios de un entorno que busca crearse mediante la precisión de una relación dialéctica ante la emergencia de la técnica y su posterior dominio[54] (Lucas, 2010). Esto significa que para diseñar una tarea es necesario el dominio del discurso teórico que orienta la organización, la progresión y la concreción de la praxis hacía la búsqueda de una técnica en particular, en este sentido, para que se pueda establecer dicha técnica debe existir una tecnología, un discurso que describa la técnica como producto de un proceso de estudio.

Desde esta perspectiva, Chevallard (1999) señala que la primera función de la tecnología es justificar la técnica al asegurar que produzca bien eso que es pretendido, la segunda función es la de explicar, la de esclarecer la técnica, esto es, explicar por qué está bien y una última función sería entonces la producción de técnicas.

Ahora bien, en los procesos de formación de profesores es preciso que se desarrollen técnicas didácticas que permitan resolver las tareas vinculadas de enseñanza en la escuela, dichas tareas aluden por lo general a un discurso que deriva de la institución que las produce, en este caso se puede decir que hay una doble mirada tecnológica, por un lado de la institución formadora de docentes y otra de la institución en la que se lleva a cabo la enseñanza de las praxeologías matemáticas, es decir la escuela primaria. En ambas instituciones este discurso se sustenta idealmente en la Didáctica de las Matemáticas.

Esta doble postura discursiva mostraría según Chevallard (2007) una cierta ambigüedad sobre la naturaleza y función del discurso tecnológico-teórico de las organizaciones matemáticas, puesto que "… es tecnología eso que, en una institución o para una persona, cumple la función tecnológica […]. Del mismo modo, es teoría eso que asume, en cierta institución o para cierta persona, una función teórica". (p. 714). Este argumento justifica la idea de que el discurso tecnológico,

[54] El cuarto momento es el del trabajo de la técnica, a través de éste la técnica se vuelve más eficiente y confiable, lo que implica a su vez retocar la tecnología abordada hasta el momento, así en la medida en que una técnica se practique, se adquiere habilidad en su uso hasta llegar a emplearla de manera automática en la tarea asignada.

aunque parte de un campo del saber particular, no es por su pertenencia a ese campo que se le valora en una institución u otra, esto significa que el estudio de la proporcionalidad no será el mismo en una institución formadora de maestros que en una institución formadora de ingenieros.

En correspondencia con las ideas de Aguayo y Mendoza (2015), para el caso de las organizaciones didácticas existe un problema similar al tratar de dilucidar si las instituciones aceptan la existencia de teorías didácticas que justifiquen las técnicas y las tecnologías empleadas para resolver tareas didácticas o si por el contrario reconoce la ausencia de tales teorías y aceptan sólo la existencia de discursos tecnológicos con los cuales explicar las técnicas empleadas para la resolución de tareas didácticas. De modo similar a lo que ocurre con el discurso matemático, el discurso didáctico se verá delimitado por la institución al considerar la existencia de una teoría referencial o sólo la presencia de una tecnología.

En este mismo sentido, Castela y Romo (2011) señalan que dentro del modelo praxeológico pueden existir praxeologías sin teoría y al desglosar todas las diversas funciones posibles de la tecnología encuentran una diversidad bastante amplia[55]. De hecho, en el siguiente fragmento puede verse un pasaje en el que José trabaja una tarea basada en el uso del valor unitario como operador de números decimales y cuando gestiona el momento tecnológico hace aparecer varias de las funciones del discurso tecnológico.

> José. Bien, ya que terminaron de comparar sus resultados, ahora vamos a ver qué fue lo que obtuvieron, a ver ¿quién pasa a mostrarnos lo que hicieron?
>
> A1. Yo, el problema nos habla de dos refrescos, la Coca y la Pepsi, cada uno tiene diferente precio, entonces en la primera pregunta dice ¿cuánto se debe pagar por 0.750 partes de una botella?
>
> José. ¿Quién nos muestra lo que hizo?
>
> Lupita. Yo multipliqué 0.750 por lo que cuesta la botella completa (pasa al pizarrón y multiplica 0.750 × 20 = 15.00).
>
> José. ¿Por qué le hiciste así?
>
> Lupita. Lo hice así porque si lo dividía me iba salir más chiquito

[55] Describir la técnica, facilitar la aplicación de la técnica, motivar la técnica y los gestos que la componen, evaluar la técnica, validar la técnica y aplicar la técnica.

José. Pero, ¿por qué multiplicaste?

Lupita. Porque era el costo de la Pepsi

José. Pero, ¿por qué por 0.750?

Lupita. Porque por esa parte pide el problema.

José. Entonces, ¿qué costará más? ¿Una botella o 0.750 de una botella?

As. Una botella.

En este fragmento se observa que el profesor gestiona el momento tecnológico y hace que surjan diferentes usos de la tecnología. Una vez que los alumnos desarrollaron el momento exploratorio el profesor solicita describir la técnica. Cuando pregunta *¿Quién nos muestra lo que hizo?* lleva a los estudiantes a que describan la técnica empleada, así, con este uso de la tecnología no sólo identifica el dominio de la técnica sino al uso de un vocabulario adaptado a la tarea planteada donde se observa que Lupita identifica cuáles son los datos que deben considerarse para la resolución.

Por otro lado cuando cuestiona *¿por qué multiplicaste?,* el profesor busca que la tecnología permita al alumno validar la técnica, es decir, que indique la justificación en función de que la técnica produce aquello que dice que produce y que su empleo permite alcanzar los objetivos asignados: en este punto se observa que Lupita justifica por qué emplea la multiplicación y no otra técnica.

Una tercera función se hace presente al explicar la técnica, cuando el profesor pregunta *¿por qué multiplica por 0.750?* pide a la alumna explicar ¿por qué la técnica hace bien lo que se espera que haga? y ¿por qué su uso produce tal resultado, si bien la alumna no hace una explicación extensa, al señalar que esa parte pide el problema y concluir que el costo de una botella es mayor al costo de 0.750 de botella, se vuelve explícita la explicación de la técnica al indicar que permite identificar los costos requeridos.

Otras funciones de la tecnología que se hicieron presentes en la experimentación del REI de José, como se puede observar en el siguiente fragmento, fueron la de motivación y de evaluación de la técnica:

José. ¿A alguien le salió de otra forma? ¿Tú lo hiciste de otra forma?, Pásale.

A6. (Escribe 1000 - 750 = 250 = ¼ X 3 = ¾ = 15 de 20) luego afirma 1000 menos 750 es igual a 250 que sería ¼ por tres que sería ¾ que es igual a 15 de 20.

José. ¿Sí entendieron por qué 1000 - 750?

A6. Porque 1000 – 750, 1000 serían los 4/4 y 250 sería ¼ .

José. ¿Sí entendieron?, ¿Alguien lo hizo de otra forma?, pásale Reyes, borra el pizarrón.

R. ¿Cómo era la pregunta?

As. ¿Cuánto se debe pagar por 0.750 parte de una botella de Pepsi?

R. (Escribe lo siguiente:)

$$100\% \rightarrow 20$$
$$75\% \rightarrow X$$

R. El 100% es igual a 20, el 75% es lo que queremos saber cuánto es?, primero es 75 X 20, aquí está la operación y me da 1500, ese resultado lo divido entre 100 y me da 15.

José. ¿Cómo se le llama a eso que aplicó Reyes?

As. Regla de tres

Mo. Sí se acordaban que ya la habíamos visto ¿o no?

As. Sí

Mo. ¿Y sí le salió el resultado?

As. Sí

Mo. Es un poco complejo pero pues si le salió está bien, ¿cuál procedimiento utilizarían de los tres?

As. El de Lupita

Mo. ¿Alguien utilizaría otro?

As. El de la lógica

José. ¿Por qué el de la lógica?

A1. Porque ya sabiendo, bueno porque algunos ya se les graba que 0.25 es igual a ¼, ahora 0.75 es tres veces 0.25 son ¾.

Mo. ¿Y ya sería lo del problema anterior?

A1. Sí.

José. Muy bien, siguiente pregunta Gema.

En la primera parte del fragmento se observa que el profesor, además de la descripción de la técnica busca que desplieguen la motivación, es decir que los alumnos identifiquen para qué se utiliza tal técnica y si ésta produce el efecto buscado, cuando cuestiona si entendieron *¿por qué 1000-750*?, está favoreciendo que los alumnos anticipen las etapas de la técnica y se prevengan cuando sea necesario adaptarla a ciertos cambios del contexto, en este caso dicha técnica implica la comprensión de que 0.750 –que es lo que numéricamente plantea la tarea- se transforma en 750 para su operatoria al considerar que se está trabajando con decimales y facilitar su manipulación.

En la segunda parte del fragmento, cuando el alumno usa una técnica diferente, el profesor pretende que la evalúen, por ello pregunta a los alumnos *¿cómo se le llama a eso que aplicó Reyes?*, es decir busca que los alumnos identifiquen el tipo de técnica a partir de la estructura y el acomodo de los datos. Aunque una vez que los alumnos señalan que se trata de la "regla de tres", el profesor tiene ciertas dificultades para expresar la ergonomía de dicha técnica, esto es observable cuando afirma que "e*s un poco complejo pero pues si le salió bien"*. Esta situación lleva a que los alumnos, en lugar de identificar la regla de tres como una técnica eficiente para la resolución de la tarea, la vean como una técnica difícil de aplicar y prefieren utilizar la técnica de "la lógica" como señala A1 cuando afirma: *porque ya sabiendo, bueno porque algunos ya se les graba que 0.25 es igual a ¼, ahora 0.75 es tres veces 0.25 son ¾.*

La situación anterior permite deducir que aunque la gestión del momento tecnológico permite describir, explicar, motivar y evaluar la técnica, una vez que los alumnos han dado respuesta a dichos cuestionamientos, no existe una validación sobre la eficiencia y eficacia de cada técnica mostrada. En otras tareas planteadas, tal como se muestra en el siguiente registro, el tipo de preguntas que plantea el maestro José sirven de preámbulo para la reflexión sobre el dominio de la técnica implementada:

> José. A ver, vamos a ver qué pasa con el siguiente problema que dice que "Se realizó una encuesta acerca de las preferencias de las personas hacia las dos marcas de refresco de Cola, obteniendo los siguientes resultados: 8 de cada 15 personas prefieren Pepsi y 7 de cada 11 prefieren Coca". ¿Qué marca de refresco de cola prefiere más la población?, ¿qué porcentaje representa la población que lo prefiere en cada caso? Haber Germán pásale a explicarnos.
>
> G. Son ocho de cada 15 serían 8/15 Y para esto se divide quince entre ocho y me salieron 53.3, en el otro 7 de cada 11 serían 7/11 y si lo divido me sale 63.6.

José. ¿Y por qué 70? ¿Y por qué 80?

G. Porque son las personas que prefieren Pepsi

José. ¿70?

G. (Señala el 80)

José. Por eso ¿y por qué 80?

G. Porque si divido 15 entre 8 sale cero y por eso le agrego el cero al ocho.

José. Pero después de que se agrega el cero ¿ya nomás se agrega el cero y ya?

G. (se queda pensando)

José. ¿Cómo se hacen esas divisiones?

A1. Como el 15 no cabe en el 8, se pone el punto y se agrega un cero al lado del ocho y después cuántas veces cabe 15 en el 80 cabe 5, después 5 por 15 son 75.

José. ¿Entonces dónde iría el punto?

A2. (Pasa y corrige el cociente y coloca 0.53 y 0.63) ya no se le seguiría porque se repite el resultado por ejemplo en el 0.53 sería 333333 y así.

En este fragmento se aprecia que una vez escrita la técnica, el maestro nuevamente gestiona su descripción, aunque es visible que en dicha descripción Germán tiene dificultades para explicar porqué se divide entre 70 y 80, es por estas dificultades que el profesor busca facilitar la aplicación de la técnica cuestionándolo sobre el algoritmo, lo que favorece el uso de la técnica, su mejora y la prevención de posibles errores, sin embargo, la función de la tecnología gestionada sólo se limitó al dominio del algoritmo de la división, cuando cuestiona ¿cómo se hacen esas divisiones? la atención se centra en el manejo de decimales no así en el uso de la fracción como razón, que inicialmente Germán había planteado al señalar 8 de cada 15 serían 8/15 y que corresponde a la tecnología implícita en la tarea planteada.

Una vez que facilita la aplicación de la técnica, como se puede ver en el siguiente fragmento, el profesor procede nuevamente a gestionar la descripción de la misma al preguntar a otro equipo sobre la técnica empleada.

José. ¿Y luego Lesly ustedes cómo le hicieron?

L. (Coloca el signo de porcentaje al lado de los cocientes, quedando 53% y 63%), mejor le mostramos otro procedimiento (pasa la compañera de equipo y anota lo siguiente)

$$15 \rightarrow 100\%$$
$$8 \rightarrow \quad ?$$

L. aquí vamos a multiplicar 8 por 100 Y salen 800 luego esos 800 los vamos a dividir entre 15.

José. ¿Cómo se le llama a eso?

As. Regla de tres

José. ¿Y sale qué?

L. 53

José. Entonces ¿qué era lo único que le faltaba a Germán?

As. Los puntos

As. Multiplicarlo por cien

José. ¿Para qué multiplicarlo por 100?

As. Para sacar el porcentaje

José. Germán estaba bien nada más le faltaba multiplicarlo por 100

L. (Escribe lo siguiente)

$$11 \rightarrow 100\%$$
$$7 \rightarrow \quad ?$$

L. hacemos lo mismo que el anterior, multiplicamos y luego dividimos pero ahora nos sale 63.

José. ¿Entonces cuál prefieren más?

A1. Los dos están bien

José. ¿Pero cuál prefiere más la gente? ¿La Coca o la Pepsi?

As. La coca

José. ¿La Pepsi cuánto?

A2. Tres.

José. ¿Tres qué?, ¿cuánto porcentaje prefieren la Pepsi?

As. 53

José. ¿Y la coca?

As. 63

José. ¿Entonces cuál prefieren más?

As. La Coca.

José. ¿Alguien tiene otro procedimiento?, ¿cuál se les hace más fácil? ¿El de la fracción o el de la regla de tres?

As. (Algunos dicen que la fracción y otros que la regla de tres.

A2. Pues en los 2 se multiplica y se divide ¿no?

José. Exactamente, en los dos te tardarías lo mismo. Muy bien

En la primera parte de este fragmento se observa cierta continuidad con la técnica implementada por Germán (ver fragmento anterior), por esta razón además de facilitar la aplicación de la técnica el profesor pretende motivarla, lograr que anticipen las etapas de la técnica, esto es observable cuando les pregunta por el resultado de las divisiones y el propósito de la multiplicación en la regla de tres. Además, pretende que evalúen dicha técnica, que señalen su funcionalidad en una tarea de porcentaje, con esta acción observa el campo de eficacia y los límites de la técnica en función de la tarea.

También a través de cuestionamientos el profesor gestiona la identificación de la técnica más económica y eficiente de las que han presentado los alumnos, aunque cabe destacar que no enfatiza el uso de alguna en particular, lo que permite que sean los estudiantes quienes a partir de la validación de la técnica decidan cuál de las técnicas presentadas resulta más pertinente.

A partir del análisis anterior, se puede observar que el profesor José gestiona sus momentos tecnológicos generalmente a través de cuestionamientos que permiten la aparición de cuatro funciones de la tecnología: la descripción de la técnica, la facilitación de su aplicación, la motivación de la técnica y los gestos que la componen así como la validación de la técnica. La explicación y la evaluación de la técnica llegan a hacerse presentes pero aparecen en menor número de veces.

7.2.4. La institucionalización de la organización matemática.

La institucionalización constituye uno de los momentos de estudio de una organización praxeológica que permite la precisión del saber formalizado, varios han sido los autores que han descrito este momento para dar cuenta de la puesta en juego de un saber convencional desde la perspectiva del profesor, a decir de Covián (2005 en Castela, 2008) “es a través del proceso de institucionalización que la práctica social viene a ejercer la función normativa, a constituirse en algo que ya no es propio del individuo, sino del grupo social; es a través de este proceso que la construcción del conocimiento llega a constituirse para formar parte de un sistema o grupo social”. (p.160)

Sobre este concepto Brousseau (1982) afirma que las situaciones de institucionalización se destinan a establecer convenciones sociales, es a partir de éstas que se intenta que los alumnos asuman una significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones previas de acción, formulación y validación. Es en este tipo de situación donde los profesores observan lo que los alumnos han elaborado, describen lo que ha sucedido en términos del conocimiento en cuestión, otorgan un estado a los eventos de la clase en función de los resultados de los alumnos y los resultados de la enseñanza, asumir un objeto de enseñanza, acercar las producciones del conocimiento a otras creaciones y a la identificación de cuáles pueden ser reutilizadas nuevamente.

> Desde esta perspectiva, los conocimientos son los medios transmisibles […] aunque no necesariamente explicitables, de controlar una situación y obtener de ella determinado resultado conforme a una expectativa y a una exigencia social. El saber es el producto cultural de una institución que tiene por objeto identificar, analizar y organizar los conocimientos a fin de facilitar su comunicación. (Brousseau y Centeno, 1991, en Brousseau, 2007, p. 28)

Se puede decir entonces que la institucionalización constituye un momento de cierre de una situación didáctica en la que los alumnos ya han construido un conocimiento pero es el docente quien viene a retomar ese proceso de construcción para formalizarlo a partir de otros aportes y de la comprensión conceptual durante la cual se hayan presentado dificultades. Ante la ausencia de la institucionalización el docente corre el riesgo de que los estudiantes se limiten sólo a la validación de procedimientos o técnicas incipientes e informales y que se desconozca el sentido real de la situación didáctica en tanto medio para el estudio de un objeto matemático.

Por su parte Chevallard (1999) señala que la institucionalización tiene como objetivo precisar el significado de una OM elaborada, proceso en el que se distinguen los elementos involucrados en su construcción, aquellos que no hayan sido integrados y además los elementos que se inscriben de modo definitivo en la OM, es decir constituye una “distinción que buscan precisar los alumnos cuando le preguntan al profesor, a propósito de tal resultado o tal procedimiento, si hay o no que saberlo". (pp. 249-255)

El profesor en formación va a institucionalizar la técnica que usa el grupo social, lo convencional, podrá decir cuáles son las técnicas que vale institucionalizar, puede gestionar que las expliquen, que las describan, pero no va a institucionalizarlas si no son técnicas convencionales. Es a partir de la institucionalización cuando se identifica si una técnica resultó ser de utilidad para la resolución de la tarea y se consolida como una herramienta que puede ser empleada al resultar eficiente y al justificarse a partir de un cierto modelo tecnológico-teórico. Desde esta perspectiva, que brinda sustento a la presente investigación, se muestra a continuación la manera como José desarrolla el momento de la institucionalización. Un primer acercamiento a este momento es cuando José se apoya en la gestión del momento tecnológico-teórico para intentar hacer el cierre de la tarea con una institucionalización.[56]

> José. Pero por qué dividieron?
>
> A3. Para ver el número de botellas que se comprarían con ese precio.
>
> José. ¿Quién lo dice? ¿O qué determina que tienes que dividir?
>
> As. Para obtener un resultado
>
> José. Sí, es obvio si vas a dividir es para obtener un resultado, pero ¿por qué se tiene que dividir? ¿Qué parte del problema te hizo pensar que tenías que utilizar una división?, eso es lo que queremos saber, ¿si hubo una parte del problema que les diera una pista de que tenían que multiplicar en uno y dividir en otro?. ¿En qué parte observan que dice aquí debo dividir, aquí debo multiplicar?
>
> Enrique. Porque es lo que estamos viendo.
>
> José. ¿Por qué es lo que están viendo? ¿Por eso saben?, estamos hablando del problema, analicen el problema, véanlo, léanlo, ¿qué parte me dice que es división y qué parte me dice que es multiplicación.
>
> A3. Yo vi que el precio y el número de botellas van aumentando, vi el precio e intenté convertir ese precio entre el precio de la Coca Cola, para saber cuántas botellas se iban a comprar.
>
> José. A ver en el primer problema, dijeron que era una división, pero qué les ayuda a encontrar que es una división, ¿porque dividir? algunos dieron otro procedimiento por ejemplo dijeron que podían sumar 25 varias veces hasta llegar a 4600, esa era una opción, pero dijiste no mejor vamos a dividir ¿qué parte de ese problema te ayudó a tomar esa decisión?
>
> A3. En que era más tardado y llegábamos al mismo resultado.

[56] El problema a resolver era: "Pablo desea hacer una fiesta pero alcomprar todo lo que ocupaba para realizarla, le sobraron $4600 para comprar el refresco, ¿cuántas botellas de Coca ajustará si cada botella tiene un precio de $25?

José. Muy bien, entonces aunque hay diversas formas de resolver un problema, hay algunas que nos permiten hacerlo más rápido que otras, lo importante es comprender qué nos pide el problema para saber cuál vamos a utilizar. Bueno con esto terminamos.

En este primer fragmento se observa que al parecer José va a institucionalizar la división, la técnica que apareció de manera recurrente en la resolución de la tarea, pero en realidad no hay indicios de un saber convencional que pueda ser institucionalizado ni de la técnica más eficiente para resolver ese tipo de tareas. Este momento se queda sólo en señalar que hay diversas formas de resolver un problema pero que deben retomarse aquellas que permiten resolverlo de forma más rápida en comparación con otras, además de la sugerencia de comprender el problema para poder resolverlo correctamente, esto más que una institucionalización se queda en una orientación para futuras resoluciones pero no en una formalización de un objeto o praxeología matemática.

El siguiente fragmento de clase, hace alusión al desarrollo de una técnica que fue elegida por el profesor en formación para la institucionalización, si bien previamente se presentaron otras tareas del mismo tipo y se mostraron ciertas técnicas para su resolución, la que aquí aparece fue la que constituyó un mayor acercamiento a la convencionalidad, en lo que sigue se presenta el desarrollo de varios momentos de estudio para contextualizar finalmente el momento de la institucionalización.

José. Pásale Richard con el tercer problema.

A4. Yo lo leo “Ha estado disminuyendo el consumo de refresco debido al sobrepeso en la población, así que las dos marcas tuvieron que manejar ofertas para que las personas volvieron a comprar: al comprar cinco botellas de Coca te regalan una más y por comprar 15 botellas de Pepsi te regala cuatro botellas más. ¿Cuál promoción resulta mejor?”

R. la de la Coca

José. ¿Por qué?

R. Nomás así le puse

José. ¿Y luego?

As. Yo profe, yo.

José. A ver espérense. Lee otra vez el problema por favor (se lee nuevamente) ¿cuál crees Reyes?

R. Coca cola

José. ¿Por qué?

R. No se

José. A ver Ángel tú estabas en el mismo equipo que dices? ¿Es la Coca?

A. (no contesta)

José. Nomás estaban jugando ¿verdad?

Una vez que los alumnos se enfrentaron al primer encuentro y al momento exploratorio José busca gestionar el momento tecnológico-teórico con resultados poco favorables, ya que los primeros cuestionamientos hechos a los alumnos parecen indicar falta de comprensión de la tarea y más aún la ausencia de una técnica, puesto que sólo dan una respuesta aleatoria sin un discurso tecnológico. No obstante, Enrique, muestra la síntesis de una técnica que iguala ambos tipos de “refresco” para poder compararlos y que finalmente es la que permite gestionar el momento de la institucionalización, tal como se muestra a continuación:

Enrique. Yo paso!!

José. A ver Enrique pásale y ustedes pongan atención.

E. (pasa y escribe lo siguiente:)

15 botellas de Coca te regalan 3
15 botellas de Pepsi te regalan 4
PEPSI

José. Bien ahora explícalo

E. Quince botellas de Coca te regalan tres y de Pepsi con 15 botellas te regalan cuatro entonces conviene más la de Pepsi porque además de que te regalan una más su precio es más bajo.

José. ¿Y porque dices que con 15 botellas de Coca te regalan tres?

E. Porque….

A6. Porque es un múltiplo de 5 (en voz baja)

José. ¿Por qué Vitalia? Él dice que por cada 15 botellas de Coca te regalan tres

V. porque por cinco botellas te regalan una

José. ¿Y luego?

V. Entonces por 15 regalan tres.

Arath. Yo profe!!

José. ¿Por qué Arath?

A. Porque por cinco botellas te regalan una y por decir si compro tres veces cinco botellas serían 15 y me van a regalar tres botellas y serían 15 y 3 y acá por 15 botellas me regalan cuatro entonces en la primera (Coca) me dan menos que en la otra (Pepsi).

En el fragmento anterior puede observarse que Enrique desarrolla una técnica basada en la igualación de 15 botellas para cada tipo de refresco, lo que le permite hacer una comparación y determinar cuál promoción resulta más conveniente, sin embargo muestra dificultades para establecer un discurso tecnológico que le permita justificar cómo y por qué hace dicha igualación, algunos de sus compañeros hacen alusión a dicho discurso cuando señalan que *15 es un múltiplo de 5 o si compro tres veces cinco botellas serían 15,* sin embargo pareciera que dicha justificación resulta incomprensible para algunos de los alumnos, como se observa en el fragmento siguiente:

José. A ver Ángel ¿qué dijo Arath?, ¿O qué razonas tú de acuerdo a lo que dice el problema?

Ángel (no contesta)

José. Ayúdale Richard.

R. No, no sé.

José. ¿Y tú Camila?

C. (Tampoco contesta)

José. ¿No Camila? Primero lo explicó Enrique y luego lo explicó Arath, ahora qué nos puedes decir tú?

C. 15 botellas de Coca regalan 3

José. ¿Por qué? Porque eso dice ahí, pero ¿por qué puso eso Enrique?

C. porque… (No encuentra la respuesta)

José. A ver Luis explícales.

L. por cinco botellas de coca te regalan una entonces de 15 te regalan tres y si compras la promoción de 15 botellas de Pepsi te regalan cuatro, es mejor que la primera promoción.

José. ¿Sí entendieron?, ¿ya entendiste Richard?

R. Sí, en la primera promoción son 15 botellas de coca y te regalan tres,

José. ¿Así dice el problema? ¿O cómo sacaron ellos que de 15 de coca regalan tres?

R. No, o sea que si de la promoción de la coca te dan tres.

José. Lee el problema para que te ayudes. Fíjense bien, el problema dice que con la promoción en las botellas de Pepsi por cada 15 te regala 4 y en la de arriba (se refiere a la de la Coca) por cada cinco te regalan una, por eso igualaron la promoción 15 botellas de Pepsi y 15 botellas de coca 15 y 15 para poder comparar.

José. ¿Cuántas promociones está comprando Enrique de la primera?

As. Tres

José. Tres, ¿Y en la segunda?

As. Nada más una

José. Entonces igualaron ahí, en la primera compro tres para igualar a 15 botellas las que iba a comprar, ¿si se fijan? Con una promoción de la segunda (Pepsi) son 15 y con tres promociones de la primera (Coca) ¿cuántas son?, ¿cuántas compra con tres promociones?

As. 15

José. 15, ¿Y cuántos le dan?

As. Tres

José. Muy bien una en cada promoción, ¿sí? A ver Ángel explícame porque ya son como cinco veces las que explicamos.

A. (Se queda callado)

José. ¿No?

A. No.

José. Levanten la mano los que entendieron (la mayoría la levanta), los mismos todavía no, ¿todavía no Camila?

C. Que la promoción son que te den tres

Lesly. (Le explica) es que se trata de igualar los dos a 15 para poder ver en donde nos dan más, así en las dos vas a pagar sólo 15 botellas pero de Coca sólo te dan tres de regalo y en las de Pepsi te dan cuatro.

José. Ahora si Camila?

C. Sí

José. A ver Ángel fíjate bien, ¿qué hacemos con el 5 para tener 15?, se suma tres veces y se llega a 15 y si vemos por cada 5 me dan una. (Represento lo siguiente apoyándose en lo que Enrique había hecho pero agrega una suma iterada previa a los resultados).

$$\begin{array}{rr} & 5 \rightarrow 1 \\ + & 5 \rightarrow 1 \\ & \underline{5 \rightarrow 1} \\ & 15 \rightarrow 3 \end{array}$$

15 botellas de Coca te regalan 3

15 botellas de Pepsi te regalan 4

PEPSI

José. Entonces al sumar todas las promociones también son 15 y me dan 3 y acá (Pepsi) también tengo 15 pero acá me están dando cuatro, entonces en los dos compro 15 pero aquí me dan más (Pepsi) por eso me conviene más comprar las botellas de Pepsi, ¿ahora si ya me entendieron?. Por eso les decía yo que igualaron la promoción sus compañeros en 15 y 15.

En el fragmento anterior se observa que José intenta institucionalizar la técnica, se basa en lo que hizo Enrique y valida el resultado *15 botellas de Coca te regalan 3 y 15 botellas de Pepsi te regalan 4*, entonces explica que en ambos se tienen 15 botellas pero se regala diferente cantidad. El intento de institucionalización se observa cuando José pregunta y responde a la vez *¿qué hacemos con el 5 para tener 15? se suma tres veces y se llega a 15*, al retomar la técnica de Enrique, el profesor en formación considera que es la más viable y la amplía al expresar la suma iterada que permite observar la igualación de magnitudes a comparar.

José retoma la técnica para explicarla, es una técnica basada en tablas donde se representa la suma iterada, sería interesante en este punto identificar cuál sería una técnica convencional más corta que pudiera institucionalizarse, en este caso la comparación de fracciones que implica conocer qué fracción es más grande, misma que puede desarrollase como la suma de fracciones 4/15+1/5 = (20+15)/75. Cuando una técnica se simplifica esconde pasos, la primera es una tabla que llevaría a la búsqueda de fracciones con igual denominador, esta técnica se basa en buscar una fracción equivalente de denominador 15, que es el principio de la suma, para sumar fracciones primero se debe tener un denominador común que permita la suma o bien la comparación en el caso de la tarea que los alumnos resolvieron, esta técnica recortada llevaría a decir que 4/15+1/5 = 20/75+15/75 lo que sería un saber formalizado.

Se podría decir que en esta tarea José explica y justifica la técnica como parte del proceso de institucionalización, implícitamente al hablar de igualación señala la técnica del mismo denominador a través de la igualación. Como profesor le puede pedir a un niño que describa su técnica, que la explique, pero cuando hubo tres técnicas y sólo elige una en especial para justificarla y para explicarla, pareciera ser que hay una intención institucionalizadora en el sentido profundo de institucionalización, es decir ese tipo de tareas en este grupo social de sexto grado se resuelve con esta técnica lo que se convierte en el discurso tecnológico que justifica las técnicas.

Aquí, al parecer el profesor toma un momento, su momento, lo que se analiza es ¿qué hace con su momento? parece que hay una intención de institucionalizar, retoma una técnica, la esclarece, la explica, justifica si es efectiva con la igualación a 15 en ambas botellas de refresco, está probando la eficacia de la técnica. Entonces retoma un momento didáctico pero al parecer tiene dificultades para encontrar la técnica mayormente convencional para el tipo de tareas relativas a la comparación de razones.

Dentro de la institucionalización se retoman conceptos matemáticos, en este caso los conceptos serían comparación de fracciones con la igualación de denominadores, en lo que presenta el profesor durante la tarea no aparece la palabra fracción, esto es paradójico porque cuando los profesores en formación vivieron el REI trabajaron las fracciones como razón, lo que indica que en términos generales no identifican el concepto y el tipo de tarea de comparación de razones o fracciones, lo que José si presenta es una técnica efectiva para ese tipo de tareas pero tiene dificultades para identificar el elemento convencional y por ende la técnica. Se puede decir que hay una intención intuitiva de poner una comparación de razones, pero es en las técnicas donde no aparece la técnica convencional, se queda en técnicas informales y no aparece el concepto ni se detecta que ahí hay dos fracciones operando como razones.

Por otra parte, además de conceptos durante la experimentación del REI de José también se identificó otro tipo de institucionalización basado en el manejo de magnitudes tal como se muestra en el siguiente fragmento:

> C. A Toñito y a José les gusta jugar a "Los científicos" así que decidieron hacer una mezcla, utilizando una botella de Coca ($25) y una de Pepsi ($20). Decidieron vender su mezcla ya que tenía un rico sabor, ¿cuánto costará toda la mezcla?, ¿y cuánto costará sólo una botella de esa mezcla?
>
> José. A ver Ricardo explícanos cómo le hicieron en tu equipo.
>
> R. Primero se suma el precio de la Coca que es 25 y el precio de la Pepsi que es 20 y son 45 en total.
>
> José. ¿Entonces cuánto cuesta toda la mezcla?
>
> As. Cuarenta y cinco.
>
> José. ¿Y luego?
>
> R. Después divido 45 entre 2

José. ¿Por qué?

R. Para saber cuánto costará una botella de esa mezcla.

José. ¿Y cuánto salió?

R. 22.5

José. Bien, lee la siguiente Manuel fuerte

M. Y si juntaran dos de coca y una de Pepsi, ¿cuánto costaría toda la mezcla y cuánto una botella?

As. Yo yo yo

José. ¿Quién no ha pasado en todos los días? A ver Wendy pasa tú

W. (Escribe 50 + 20 = 70 ÷ 3 = 23.33)

José. Explícanos por qué hiciste eso

W. Sumé 50 + 20, 50 porque eran dos cocas y 20 porque sólo era una Pepsi el resultado da 70, luego dividí 70 entre tres.

José. ¿Por qué entre tres?

W. Porque son dos Cocas y una Pepsi, en total tres. Y me salió 23.33

José. 23.33 ¿Y eso qué significa?

W. Que es todo lo de la mezcla

José. ¿Es cierto eso?

As. No. Es lo que cuesta sólo una botella de la mezcla.[57]

José. A ver una pregunta, si vemos todos los resultados que obtuvimos de una botella vemos que todas las cantidades están ¿entre cuánto y entre cuánto?

As. Entre 20 y 25

José. ¿Y porque creen que está entre 20 y 25?

As. Porque son los precios de las botellas

José. Levantando la mano, haber Richard.

R. porque es el precio de las botellas de la Coca y la Pepsi

José. Muy bien, si juntáramos una mezcla de puras botellas de Pepsi, ¿cuánto saldría una botella?

As. 20

José. ¿Y si juntamos una mezcla de puras botellas de coca?

As. 25

José. Entonces por eso las cantidades están ¿entre cuánto y cuánto?

As. 20 y 25.

José. Muy bien ahora otra pregunta, en el problema C, ¿juntamos cuántas botellas?

As. Dos de coca y una de Pepsi

José. ¿Cuánto nos sale el resultado de una botella?

---

[57] José continúa planteando preguntas del mismo tipo y variando las magnitudes de Coca y de Pepsi para la mezcla.

As. 23.3

José. Porque creen que no salió más de la mitad, ¿cuánto es la mitad entre 20 y 25?

As. 22.5

José. ¿Por qué creen que en esa nos salió más de 22.5?

As. Porque hay más de una que de otra

José Manuel. Porque hay más botellas de coca que de Pepsi

José. ¿Y eso qué tiene que ver?

José Manuel. Determina el precio de la Coca.

José. Muy bien, si hubiéramos juntado dos de Pepsi y una coca qué pasaría?

AS. Hubieran salido como 22, 21.

José. ¿Hubiera salido menos de cuánto?

As. De 25

As. De 22.5.

José. Exactamente, entonces el precio se determina según del refresco que sea, mientras más Cocas se tengan, el precio de una botella de la mezcla se acerca más al de las Cocas y mientras más Pepsis sean, entonces el precio de una botella de la mezcla será más cercano al de la Pepsi, esto es por las mezclas que hacemos y el número de botellas de cada tipo que mezclamos. Muy bien con esto terminamos los problemas de los refrescos.

Como se puede observar en el diálogo anterior, esta tarea es la última planteada en el REI que experimentó José, en el fragmento puede verse que realiza la institucionalización de la relación entre magnitudes, misma que fue concretando progresivamente desde el momento tecnológico-teórico. Su discurso se enfoca a determinar que el precio se determina según el refresco y que la mezcla que se pueda hacer de los diferentes tipos de refresco establecerá el rango en que se encuentre el precio de dicha mezcla, en este caso lo que se está institucionalizando es la relación de proporcionalidad en la que se hace presente una relación específica entre magnitudes.

Siguiendo a Chevallard (1999) puede decirse que es necesaria la evaluación de la praxeología porque es conveniente que el sujeto-alumno sepa exactamente lo que se ha estudiado de esa praxeología matemática y lo que quedaría por estudiar en otros momentos, para Chevallard el momento tecnológico-teórico es más del alumno, igual lo piensa Brousseau (1982) en el momento de la validación, en ambos autores se piensa como momento a-didáctico, mientras que la Institucionalización constituye desde ambas perspectivas el momento del profesor, aquel donde el saber y la práctica toman forma e intencionalidad en el momento de estudio.

7.3. ORGANIZACIÓN PRAXEOLÓGICA CON TENDENCIAS A LA FORMALIZACIÓN. EL CASO DE LUIS

El segundo caso analizado es el de Luis, quien al igual que José cursa el octavo semestre de la licenciatura en educación primaria y desarrolla su servicio de práctica profesional con un grupo de sexto grado, desde el inicio de su formación en la Escuela Normal ha manifestado el gusto por la asignatura de matemáticas, además ha mostrado un buen dominio del contenido matemático y su preferencia por el diseño de OD en dicha asignatura. Al encontrarse en el último año de su formación decide realizar su trabajo de titulación en el área de matemáticas, de manera particular con el proceso de enseñanza de un concepto específico. En este sentido la experimentación del REI que previamente ha diseñado, retoma algunos aspectos de dicho trabajo y promueve el manejo gradual de conceptos.

7.3.1. El momento del primer encuentro de Luis.

La gestión del primer encuentro realizada por Luis se basa en la entrega y lectura grupal de una situación problemática, a partir de la cual va incorporando progresivamente diversos tipos de tareas. En la primera se establece una comparación directa sobre magnitudes y a partir de ello se trabaja el valor unitario como operador. Como se observa en el siguiente fragmento, a diferencia de José sólo retoma las magnitudes enteras:

> Luis. A cada uno le entregué una hoja con un problema, lee por favor el problema Nancy.
>
> N. En una fábrica textil se producen dos tipos diferentes de calcetines para exportar, que varían su calidad según el algodón que utilizan en su elaboración. Los calcetines “Cotton” cuestan $625 la caja, precio a mayoristas y los calcetines “El Mexicano” cuestan $885 la caja, precios a mayoristas, debe aclararse que la caja de ambas clases de calcetines contiene la misma cantidad.

Luis. Hasta ahí, ¿cuánto cuestan los calcetines Cotton Diego?

D. $625

Luis. ¿Y cuánto valen los mexicanos Reina?

R. $885

Luis. Ahora sí, ¿cuánto costarán tres cajas de calcetines “Cotton” Edgar?. Hagan las operaciones en su cuaderno. Saquen su cuaderno y anotan ahí las operaciones que necesiten.

En este momento didáctico se observa la devolución de la tarea como preludio para su comprensión, cuando cuestiona sobre los costos de los calcetines y el costo total de tres cajas. Para ilustrar este fenómeno Luis plantea una tarea ligada al valor unitario con la que trata de recuperar ciertas ideas que permitan a los niños comprender la tarea. En este caso, los alumnos reflexionan sobre los datos para responder a los cuestionamientos del profesor en formación y solamente hasta que se percata de que los alumnos identificaron las relaciones entre los datos, es que les pide que continúen buscando la solución de manera individual.

También se aprecia como Luis verifica que los alumnos comprendan la tarea e identifiquen el valor unitario. Con su acción, el profesor da indicios de la importancia del valor unitario como técnica para resolver el problema, si bien dicha técnica no se explica, las expresiones: *Ahora sí, cuánto costarán tres cajas de calcetines Cotton y anotan ahí las operaciones que necesiten* constituyen ciertas “señales” para que los alumnos retomen las respuestas a los cuestionamientos previos.[58]

Otra forma en la que Luis gestiona el primer encuentro con la OM consiste en hacer cuestionamientos cuyo propósito busca algo más que la comprensión de la tarea, en estos casos, mediante sus cuestionamientos Luis intenta que los alumnos comprendan las estructuras conceptuales que están inmersas en un contexto problematizador. Generalmente este tipo de momentos suele presentarse en sesiones en las que el profesor en formación intenta recapitular los saberes adquiridos en sesiones previas. A esta forma de gestionar el primer encuentro la hemos llamado “la devolución socrática con indicios conceptuales” porque el

[58] A esta situación Brousseau le denomina Efecto Topaze, que se presenta cuando el profesor sugiere la respuesta disimuladamente, planteando cuestiones que facilitan la resolución de la tarea.

aprendizaje exige que el alumno se haga cargo de la tarea de forma autónoma y es a través de las rupturas que la mayéutica permite que al alumno identifique ciertas técnicas que resultan eficientes en la resolución de la tarea.

En los dos procesos de estudio analizados, es común que la técnica didáctica de los profesores en formación para gestionar el primer encuentro con la OM sea el contrato basado en la mayéutica socrática y, más que "devolver" una tarea mediante este contrato, los cuestionamientos buscan provocar el análisis de la tarea en la que se hace presente el valor proporcional tal como se observa en el siguiente fragmento.

> Luis. Raymundo, ¡lee el problema!
>
> R. Debido al aumento de impuestos, la fábrica de textiles tuvo que aumentar sus precios, por lo que ahora el costo de la caja de calcetines "Cotton" es de $670 y el costo de la caja de calcetines "El Mexicano" es de $915.
>
> Luis. A ver niños, aquí el problema ¿qué nos dice Reyna?
>
> A1. Que está muy caro
>
> R. Que aumentó
>
> Luis. ¿Que aumentó qué?
>
> A2. El costo de la caja de calcetines
>
> Luis. ¿Y qué crees que va a pasar a diferencia de lo de ayer?
>
> A3. Van a salir más caros, aumentaron proporcionalmente.
>
> Luis. Muy bien, ¿qué dijimos que es el valor proporcional? ¿Qué dijo ayer Nancy?.
>
> A4. Lo que aumentaba cada cosa respecto a otra, por ejemplo una caja de algo cuesta $600 y se quieres saber cuánto cuestan dos va aumentar otros $600 porque cada caja cuesta $600.

Al igual que en otros momentos se observa que si bien los cuestionamientos tienen la intención de que los estudiantes comprendan el problema *(A ver niños, aquí el problema ¿qué nos dice Reyna?*) son modificados cuando los alumnos hacen ciertas deducciones sobre lo que ocurre con el aumento del precio *(Que está muy caro, Que aumentó*). Con estas respuestas Luis relaciona las inferencias de los niños con el concepto a estudiar, esto se hace evidente cuando un alumno expresa *van a salir más caros, aumentaron proporcionalmente*, y aunque el profesor no explica el significado de la proporcionalidad directa sí lo hace del valor proporcional.

A decir de Brousseau (1995), la respuesta inicial que dan los alumnos sólo debe permitirles emplear una estrategia de base con apoyo de sus conocimientos anteriores, pero dicha estrategia debería mostrarse lo suficientemente ineficaz como para que el alumno se vea obligado en un momento dado a realizar modificaciones para responder a la situación propuesta. En este sentido la labor del profesor en formación es proponer al alumno una situación de aprendizaje para que dé respuesta a una pregunta en donde los conocimientos sean modificados en función a las exigencias del medio.

Desde esta misma perspectiva, lograr que los alumnos asuman la responsabilidad de reconstruir una OM significa también que se acepten ciertas normas matemáticas del trabajo, en este caso es claro que si el profesor en formación demanda explicaciones sobre lo que se está planteando también está expresando que no se pueden plantear afirmaciones contradictorias y que es necesario dar argumentos de las propuestas dadas. (Sadovsky, 2005)

En los dos casos que son nuestro objeto de análisis, una de las tareas didácticas que suelen gestionarse en el primer encuentro con la OM es la institucionalización del saber formal, esto es, en los momentos del primer encuentro se da la explicación a priori, de los significados del objeto matemático que los niños deberían construir, esta institucionalización por lo general se hace para recuperar los significados de la tarea planteada y es por ello que le llamamos "la institucionalización anticipada".

"La institucionalización a priori le confiere a la tarea una naturaleza particular al momento del primer encuentro, la devolución del problema más que un primer encuentro representa entonces el inicio de una ostensión"[59] (Aguayo, 2005, p. 286), es decir el alumno identificará el objeto matemático como representante de una clase que deberá ser reconocido en otras circunstancias similares. En este caso, el profesor en formación muestra una OM o una propiedad de la misma y el alumno lo observa como un espectador que deberá identificar dichos elementos en otras situaciones donde ésta se haga presente.

[59] En este tipo de contratos "(…) el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos, las propiedades. Lo que el alumno no percibe de primer golpe, lo descubre y aprende por frecuentación repetida de las mismas circunstancias". (Ávila, 2001, p. 35)

En el fragmento siguiente puede observarse que Luis intenta resolver el problema de forma colectiva, al parecer quiere provocar la participación de los alumnos, que expresen ideas y sugerencias que puedan tornarse punto de partida para establecer conjeturas sobre la tarea. A través de estos cuestionamientos, además de expresar sus ideas, los alumnos buscan también responder a cuestiones conceptuales, vinculadas con la proporcionalidad, ello con apoyo del profesor en formación.

> Luis. Vamos a recapitular un poquito lo de la sesión anterior, la del martes ¿se acuerdan? ¿Qué hicimos el martes con el problema de las cajas de calcetines Diego, te acuerdas?
>
> D. Hicimos lo que decía que aumentaba…
>
> A1. La proporcionalidad
>
> Luis. La proporcionalidad ¿qué hicimos César?
>
> C. Vimos que si aumenta una caja iba a aumentar el precio de la cantidad, porque si una caja costaba 600 al momento de que aumenta otra caja va a aumentar otros 600, también vimos lo de juntar cajas.
>
> Luis. ¿Cómo era lo de juntar cajas Sherlyn?
>
> S. Juntarlas con el dinero
>
> Luis. Ah caray ¿cómo es eso?
>
> C. No, es juntar por ejemplo dos cajas del “Cotton” y una caja del “Mexicano”, veíamos su precio y luego lo dividíamos entre tres para saber cuánto valía una caja.
>
> Luis. ¿Si te acuerdas Óscar que en la sesión pasada revolvíamos cajas y sacamos el valor de cajas que eran producto de la combinación de otros?, por ejemplo ¿quién se acuerda cuánto valía la caja “Cotton”?
>
> A1. 670
>
> Luis. ¿Y el mexicano?
>
> A2. 915
>
> Luis. ¿Y cuánto nos daba la combinación de una caja “Cotton”?, ¿y una caja del Mexicano?
>
> As. La suma de las dos cajas y luego la dividíamos entre dos.
>
> Luis. Ya más o menos se están acordando, muy bien.

Se podría decir que el docente gestiona el momento del primer encuentro mediante la institucionalización de los saberes que se construyeron en la solución de una tarea anterior.

Ante la búsqueda de respuestas a preguntas como: ¿qué se quiere que aprenda con esa situación problema?, ¿qué tiene que ver esto “nuevo” con lo que ya se conoce?, ¿por qué es importante vincular ambos saberes?, parece que se modifica el orden de los momentos didácticos ya que se presenta un tipo de institucionalización en el primer encuentro. No obstante, Luis no establece un discurso “sabio” sobre el significado de la proporcionalidad sino que lo “devuelve” mediante una serie de cuestionamientos a modo de mayéutica socrática que le permite retomarlo como un saber previo para la tarea matemática que planteará en el momento exploratorio. Esta situación resulta favorable dentro del proceso de estudio ya que permitirá en su momento llevar al profesor en formación a la institucionalización del saber formalizado.

La situación anterior permite comprender la idea de Brousseau (1986) cuando afirma que de alguna manera la institucionalización y la devolución se complementan en tanto que es ahí donde se reconocen los dos procesos sobre los roles principales del maestro, es decir con la devolución le asigna al alumno la responsabilidad de actuar de forma autónoma en la resolución de la tarea mientras que en la institucionalización se establecen las relaciones entre las producciones libres de los alumnos con el saber cultural o científico.

En el ejemplo anterior también es posible observar una situación de evocación a partir de la cual los alumnos tienen la oportunidad de discutir los saberes adquiridos en las situaciones de estudio que han sido abordadas en días previos. Así pues los alumnos se ven confrontados ante la necesidad de hablar sobre lo que ya han realizado sin volver a hacerlo, las situaciones que se derivan de la evocación de días anteriores ofrecen la oportunidad de reconstruir, a aquellos alumnos que no lo han hecho en el momento de la acción, el papel que tienen para el aprendizaje los problemas abordados. (Sadovsky, 2005)

A partir de los análisis anteriores se ha podido observar que la gestión del primer encuentro, en tanto tarea didáctica, tiene ciertas dificultades para los profesores en formación. Iniciar el proceso de estudio puede tener múltiples variantes, en el caso de los profesores en formación, en el caso de PF5 esta dificultad se hizo más evidente ya que en todas las tareas que plantea gestiona la “devolución parcial”. Por su parte Luis diversifica este momento inicial, en algunos momentos recurre a la devolución con apoyo de la mayéutica socrática y en otros a la institucionalización a priori. Una situación favorable es que en ambos casos no se sugiere explícitamente alguna técnica cuando los alumnos se enfrentan a la tarea, lo que indica que este rol se verá determinado en el momento exploratorio. Finalmente, parece que la devolución (sólo) de la tarea es la técnica más recurrente para gestionar el primer encuentro entre la OM y el alumno, ello a partir de que PF7 identifica claramente la necesidad de establecer un momento adidáctico para poder desarrollar el resto de los momentos de estudio.

7.3.2. Momento exploratorio. El acompañamiento a los alumnos.

El momento de la exploración de la tarea y de la emergencia de la técnica es una parte fundamental del recorrido de estudio y de investigación, la búsqueda inicia con el uso de una técnica rudimentaria que le resulta útil al alumno en la resolución de las tareas, a decir de Chevallard (1999):

> Se señalará que, contra cierta visión heroica de la actividad matemática, que la presenta como una serie errática de enfrentamientos singulares con dificultades siempre nuevas, lo que está en el corazón de la actividad matemática es más la elaboración de técnicas que la resolución de problemas aislados. A la ilusión moderna del alumno-héroe que supera sin necesidad de lucha toda dificultad posible, se opone también la realidad indispensable del alumno-artesano laborioso que, con sus condiscípulos, bajo la conducción reflexiva del profesor, elabora pacientemente sus técnicas matemáticas. (p.243)

En correspondencia con este autor, se trata pues de una dialéctica en la que resolver tareas constituye un medio que permite crear y poner en marcha una técnica asociada a las tareas de un mismo tipo, técnicas que posteriormente serán el medio para resolver de modo casi rutinario las tareas de este tipo.

Lo que a continuación se muestra da cuenta de cómo Luis gestionó los momentos exploratorios incluidos en el REI que experimentó con alumnos de sexto grado, lo importante en este análisis es identificar cómo se establece la interrelación entre el alumno y la tarea, además de observar el papel que toma Luis en la búsqueda y elaboración de las técnicas. Cabe señalar que el grado de dificultad de las tareas varía en función de lo desconocido, la orientación y las variantes planteadas, en tanto el objetivo de los profesores en formación es que los alumnos progresen en la solución de esas tareas.

7.3.2.1. La exploración habitual. El profesor como eje central de la clase.

Cuando se presenta una tarea en el salón de clase, ésta puede convertirse en una situación de “costumbre” que se trabaja bajo la lógica de la cotidianeidad del aula o bien puede convertirse en el preámbulo de conflictos cognitivos que modifican la relación entre alumno y profesor. Una tarea entonces constituye una oportunidad para que los alumnos se enfrenten a una OM de modo habitual sin generarles tensiones que modifiquen las condiciones habituales del proceso de estudio.

A decir de Ávila (2001) en las clases de matemáticas es común apreciar una noción empirista del aprendizaje de la que deriva una forma de gestionar la clase que ha devenido por costumbre, en el caso de aritmética señala el uso de estrategias muy similares como es ostentar, interrogar, ejercitar, repetir, entre otras. Al hablar de proporcionalidad es común el uso de tablas y gráficas para encontrar el valor faltante, es en esta parte donde se intuye lo habitual de la clase.

Un caso de esta costumbre relacionada con el momento exploratorio es precisamente aquel donde el profesor funge como el actor central principal de la clase al orientar y sugerir las acciones a seguir para determinar la técnica. A partir de las acciones sobre una tabla proporcional, se intenta orientar el uso de la regla de tres como técnica. Este tipo de situaciones en las que el profesor determina las acciones y los alumnos “siguen” indicaciones es un ambiente habitual en la mayoría de las clases de matemáticas.

El momento exploratorio que desarrollaron los estudiantes de Luis se hizo presente durante el trabajo individual y en equipo, al igual que José, la experimentación del REI de Luis manifiesta dos orientaciones en el momento exploratorio, la primera, que aparece como más recurrente es el trabajo autónomo de los estudiantes sin la intervención u apoyo del docente, como se observa en el siguiente fragmento:

> Luis. Vamos a leer el inciso dos,
>
> A1. Tomando en cuenta que el precio de los calcetines “Cotton “es de $625, completa la siguiente tabla.
>
> Luis. Vamos a llenar la tabla que tienen en su hoja y ahorita lo revisamos.

As (Trabajan de manera individual en la resolución mientras la maestra dibuja la tabla en el pizarrón).

En lo anterior se aprecia que el profesor establece la consigna con el apoyo de un alumno y simultáneamente con la exploración elabora la representación gráfica que los alumnos deberán completar, lo que servirá para que los alumnos identifiquen la técnica, cabe señalar que el profesor no les muestra indicios de la técnica, su papel como eje central en el momento exploratorio es la participación simultánea en el desarrollo de la tarea. Ello en tanto que el profesor se inclina por una resolución conjunta de la tarea. Lo anterior da cuenta de la vinculación que establece Luis entre los momentos del primer encuentro y exploratorio, permite identificar que el primero lleva a Luis a que haga la revisión de la tarea de manera grupal para identificar en qué consiste, luego de ello indica un trabajo individual para la resolución y búsqueda de la técnica que será socializada posteriormente en el momento tecnológico-teórico.

De esta manera lo que permanece en la clase, las reglas de interacción social que giran en torno al saber matemático y la distribución de responsabilidades que se hacen presentes en un grupo escolar se conceptualizan a partir de la noción de costumbre en tanto da cuenta del modo de regulación del funcionamiento social de la clase, al tiempo que puede delimitar el dominio de validez del concepto de contrato didáctico. Un profesor puede estructurar su clase sobre ciertos principios, suponiendo que las definiciones y los conceptos tienen una única forma; la institucional y supone que debe mostrarlos y los niños captarlos. (Ávila, 2001)

La segunda orientación que se da al momento exploratorio es cuando Luis participa en la búsqueda de la técnica, interviene con ciertos cuestionamientos cuando los estudiantes trabajan en equipo. Durante el momento exploratorio la intervención que pueda realizar el profesor es determinante para orientar a los alumnos ante las dificultades de comprensión de la tarea o la selección y elaboración de una técnica, no obstante el profesor no siempre tiene el control total de la tarea, cuando la OM expresa ciertas irregularidades que son detectadas por los alumnos la clase tiene un deslizamiento cognitivo[60], como se puede ver en el siguiente fragmento:

> Luis. Bien ahora vamos a contestar las siguientes preguntas en nuestro cuaderno con base en el problema que se nos da, realizando las operaciones que necesiten.
>
> As. (Trabajan en equipos) Una de las cuestiones a las que debían responder los alumnos era:
>
> Al día, la fábrica vende 300 cajas. Si por cada 5 cajas de calcetines "Cotton" se venden 2 cajas de calcetines "El Mexicano", ¿cuántas cajas de calcetines "Cotton" venden al día?
>
> Eq1. Maestra pero te sobran seis o te falta uno.
>
> Luis. ¿Por qué?
>
> César. Porque son 7, 5 del "Cotton" y 2 del Mexicano, entonces para llegar a 300 y 300 dividiendo entre 7, no se puede de siete porque sobran seis o te faltaría uno, tendrían que ser 301 o 294.
>
> Luis. A ver hágalo, demuéstrelo.
>
> Eq.1. ¿No importa que sobre?
>
> Luis. O no importa que lo hagan en decimales.
>
> Eq.1. Pero no se pueden hacer en decimales porque están en unidades.
>
> Luis. Podemos vender cajas y media, como lo hicimos ayer, ¿o no se podrá?, ayer decíamos de 700 milésimas de partes de una caja, 4/5 de una caja, ¿cierto?. Piénsenlo.
>
> (Después de un tiempo de trabajo en equipo, se da paso a la validación de los resultados)

En este caso la intervención de Luis surge a partir de las inquietudes de los alumnos del equipo 1, quienes identifican falta de precisión en el planteamiento de la tarea al manifestar implícitamente que 300 no es múltiplo de 7. Al observar la tarea es posible identificar que el contexto "cajas de calcetines" rompe con una de las razones para justificarla en los sistemas de proporcionalidad, es decir una necesidad matemática o lógica en la que las cajas de calcetines de cada tipo coincidan con las cajas que se venden al día, situación que numéricamente no es posible con magnitudes enteras.

Este hecho es identificado por un equipo durante el momento exploratorio, quien incluso muestra la técnica que permite justificar la dificultad de cumplir con esa tarea, a pesar de ello el equipo encuentra dos resultados (301 y 294) no satisfactorios para Luis quien los orienta al uso de decimales o fracciones para dar una aproximación

[60] Desde Brousseau (1986) el deslizamiento cognitivo se presenta ante el fracaso de una actividad de enseñanza, es decir cuando el profesor muestra sus propias explicaciones como objetos de estudio, en lugar del verdadero conocimiento matemático.

más exacta a las 300 cajas que se venden por día. Incluso se intenta establecer una evocación cuando les recuerda que han trabajado con *700 milésimos de una caja y 4/5 de una caja* y les devuelve la resolución de la tarea.

La interacción que se dio entre PF7 y el equipo de alumnos permite la devolución de la tarea, misma que generó un debate entre ambos donde las respuestas de los alumnos obedecían a razones justificadas que derivaron de sus técnicas y del contexto de la tarea, así cuando PF7 solicitaba justificaciones, las explicaciones provocaron una ruptura en el proceso de estudio en el que los alumnos pusieron en duda el contrato didáctico en el que el profesor tiene la respuesta a todas las tareas que plantea.

A partir de lo observado, se puede identificar lo que Brousseau (1998) denomina como deslizamiento cognitivo que se caracteriza cuando una actividad de enseñanza ha fracasado y el profesor intenta justificarse para continuar su acción al tomar sus propias explicaciones ante un objeto matemático descontextualizado.

En términos generales, el momento exploratorio en el que se buscaba un desarrollo progresivo de cierta técnica y la generación de técnicas relativamente nuevas desde el contexto de la enseñanza se mostró con diversas caracterizaciones: aquellas en las que los alumnos de modo autónomo se aproximaron a la tarea para la búsqueda de la técnica sin intervención alguna del profesor, otras en las que los alumnos dieron seguimiento puntual a lo que el PF realiza al frente de la clase para reproducir sus gestiones, algunas más donde la evocación, la aplicación y el control resultaron de gran relevancia para resolver la tarea y otras más donde Luis estableció una postura más activa para gestionar la justificación del uso de ciertas técnicas o incluso para “devolver” la responsabilidad en la resolución de la tarea.

7.3.3. El momento tecnológico-teórico.

En este momento didáctico se entiende por tecnología un discurso racional sobre la técnica cuya función consiste en justificar racionalmente la técnica para asegurar que permite un buen desempeño en las tareas de cierto tipo, esto sin olvidar que dicha racionalidad varía en función de una institución determinada. (Chevallard, 1999)

Durante la gestión del momento tecnológico, se observaron diferentes acciones que se corresponden con la perspectiva de Chevallard (1999) en cuanto a las funciones de la tecnología, que van desde la justificación de la técnica hasta explicar, hacer inteligible y esclarecer la técnica, esto es exponer ¿por qué hace bien lo que tiene que hacer? y una tercera función que se enfoca a la producción de técnicas.

Para seguir con el desarrollo de las funciones del discurso tecnológico, se retoma la postura de Castela y Romo (2011) con el propósito de identificar con mayor precisión aquellas que fueron gestionadas por Luis durante este momento de estudio. Entre los saberes que se hacen presentes en las seis funciones de la tecnología algunos se encuentran asociados a una teoría matemática mientras que otros se desprenden de la práctica matemática validada en un contexto empírico, estas consideraciones se muestran en varios fragmentos de clase donde se manifiestan varios tipos de funciones

Una de las funciones que pudo apreciarse fue la "descripción de la técnica", en ésta destacó el papel del discurso descriptivo con el vocabulario necesario que en su momento será de utilidad para el proceso de emergencia, institucionalización y transmisión de una praxeología (Castela, 2008). Esta función se observa en el siguiente fragmento:

> Luis. Lee el problema Sherlyn.
> S. ¿Cuántas cajas en cada caso serán si sólo se quieren comprar $700 de calcetines?[61]
> Luis. Ok ¿cómo le hicieron?
> S. Dividimos $700 entre $885 que es el precio del mexicano Y nos dio 0.7.
> Luis. ¿Y 0.7 qué es?

[61] Tomando en cuenta que el precio de los calcetines "Cotton" es de $625 y del Mexicano es de $885.

A. ¿Son lo que le sobra?

Luis. ¿Y luego?

S. (sigue desarrollando la división, aparte multiplica 885X9 para encontrar el número faltante en el cociente, que le da finalmente 0.79)

S. 0.79 y éste ya sería el resultado del calcetín El Mexicano.

Luis. ¿0.79 que?

S. eh.. ¿Pesos?

Luis. Centésimos de caja. Muy bien, vamos a ver el siguiente con Nancy, ¿tú cómo le hiciste?

N. Para el Cotton es igual se va dividir 700 entre 625 y va a salir 1.12

Luis. Ok siéntense.

En lo anterior se observa que Luis gestiona una tecnología para la descripción de la técnica, cuando pregunta ¿cómo le hicieron?, los estudiantes enuncian con un vocabulario matemático la división entre el costo de las cajas de calcetines que se quieren comprar y el precio unitario por caja según el tipo de calcetines, esta situación da cuenta de la comprensión semiótica de las estructuras multiplicativas y su consiguiente descripción aunque no así del significado de los datos encontrados, ya que cuando Luis cuestiona sobre el significado de 0.79 como cociente de la división, Sherlyn responde que se trata de pesos en tanto que la división alude a $885 o $625 entre $700. Luis rectifica la respuesta al señalar que el cociente corresponde a centésimos de caja, pues en realidad se trata de una regla de tres simplificada donde una caja cuesta $625 por ejemplo, y el dato desconocido es el número de cajas que se obtienen con $700.

Mediante estas acciones Luis no genera que los alumnos justifiquen la técnica puesto que se limita a preguntar cómo le hicieron para resolver la tarea, la confusión sobre el significado del cociente de la división habría permitido discutir la aplicación de la técnica para tratar de evitar errores semánticos, sin embargo en esta tarea dicha función no se hace presente, lo que representa una de las principales dificultades en el desarrollo del momento tecnológico durante la experimentación del REI. Cabe señalar que la descripción de la técnica se hizo presente en toda la gestión del momento tecnológico durante las diversas tareas planteadas, no obstante en varias de esas tareas, además de la descripción, Luis gestionó otro tipo de funciones de la tecnología, como la explicación de la técnica, donde además de describir lo que se hizo, los alumnos expresaban la comprensión de las causas de la técnica, es decir ¿por qué ésta hace bien lo que se espera que haga?, un ejemplo de este caso se muestra a continuación:

Luis. Bien vamos a revisar lo que hicieron en la tabla, Diego explícanos lo que hiciste.

(Se revisa la tabla que previamente se había dibujado y se retoma la indicación: Tomando en cuenta que el precio de los calcetines “Cotton” es de $625, completa la siguiente tabla).

Número de cajas	1.5			6
Precio por caja	937.5	1875	2812.5	

D. Bueno aquí dice que de 1.5 da 937.5 el precio o sea que es de una caja y media entonces si lo dividimos nos va a dar 625.

Luis. ¿Qué dividimos y por qué?

D. 937.5 entre 1.5 y nos da 625 y al multiplicarlo por tres nos da 1875 pero como aquí sólo nos da este valor (se refiere a 1875) entonces se divide entre 625 y nos da tres por lo que se pone aquí el tres (señala en la tabla dónde se ubicaría el 3), y acá 4.5 nos va a dar si dividimos 2812.5 entre 625 lo que nos da 4.5, en la última parte ahora si nos da el valor aquí (se refiere al 6) dice que 625X6 el resultado que nos da es 3750. La tabla queda así:

Número de cajas	1.5	3	4.5	6
Precio por caja	937.5	1875	2812.5	3750

Luis. ¿Te queda claro Michael? ¿Qué es lo que hizo Diego, Michael? Para poder encontrar los valores de la tabla. A ver César levantaste la mano ¿qué hizo Diego para sacar los valores de la tabla?

C. Sumó

Luis. ¿Qué sumó?

D. Los precios

Luis. Pero ahí nos dice un valor unitario

C. ¿Mande?

Luis. ¿Pero dónde está el valor unitario?

As. No responden

Luis. ¿O sumó qué?

As. Las cajas y los precios

Luis. A ver cómo, pásenle.

C. Es que en lugar de sumar, multiplicó el precio por el número de cajas.

En este fragmento se observa que, no sólo se plantea la descripción de la técnica. Primero Luis solicita a Diego que explique cómo le hizo (éste argumenta que realiza una división de 937.5 entre 1.5) pero al cuestionar enseguida ¿qué se divide y por qué?, Diego responde con una explicación paso a paso de la técnica en la que de modo implícito aparece el 625 como valor unitario. Cuando Luis pregunta sobre su significado, la comprensión de la técnica se hace presente al momento en que César explica que en lugar de sumar se multiplica el precio por el número de cajas, lo que llevaría en un momento dado a retomar la idea del valor unitario como operador, esta situación era la que Luis intentaba deducir con los alumnos al preguntar sobre dicha técnica.

En el caso de Luis la gestión de la tecnología llevaba a los alumnos de manera progresiva a profundizar más en la explicación de la técnica, pero además de ello a motivarla junto con los gestos que la componen, este hecho llevó a los alumnos a mostrar gradualmente el dominio, comprensión y aplicación de una técnica en particular, esto se hace presente en el siguiente fragmento:

> Luis. A ver el primer problema, ¿cuál es el costo de 4/5 de calcetines “Cotton” y de 4/5 de calcetines El Mexicano?, ¿cómo le hiciste Sherlyn?
>
> S. tomando en cuenta que el precio de los calcetines “Cotton” es de $625 entonces para saber se divide 625/5 y me da 125.
>
> Luis. ¿Por qué entre cinco?
>
> S. Por la fracción que son quintos
>
> Luis. Y luego ¿qué hiciste con los 125?
>
> S. Lo multipliqué por cuatro
>
> Luis. ¿Por qué por cuatro?
>
> S. Porque así nos dice la fracción.
>
> Luis. ¿Si están de acuerdo los demás?
>
> As. Sí
>
> Luis. ¿Y del mexicano no lo sacaste? ¿4/5 del Mexicano, se hace igual o se hace diferente?
>
> As. Diferente
>
> Luis. Porque diferente
>
> S. Por el precio, porque del Mexicano es 885.
>
> Luis. ¿Qué tendría de diferente?, ¿cuál es el precio del mexicano?
>
> As. 885

Luis. A ver hazlo Reyna

R. (Divide 885 entre 5 y le resulta 177 que multiplica por cuatro, para obtener finalmente 708)

Luis. ¿Sí, es cierto que es 708?

As. Sííí

D. Sí, porque dice que son quintos, entonces 5 es el denominador y así te dice en cuántas partes vas a dividir, entones dividí 625 entre 5 y me dio 125 que multiplico por cuatro, cuatro es el numerador que nos aparece en el problema y es el que te dice cuántas partes vas a agarrar de todas las partes en que se partió. Cuando multiplico por cuatro me da 500.

Luis. César, ¿por qué dividen entre cinco y multiplican por cuatro? En lugar de hacerlo al revés?

C. Porque si lo hacen al revés no nos saldría la cantidad, y el cinco es el denominador y es el número de partes en que se divide y el cuatro es el numerador y es el número de partes que se va a tomar.

Como se puede apreciar, la gestión del momento tecnológico inicia cuando Luis cuestiona a Sherlyn ¿por qué hacer una división entre cinco?, ella responde que esto se debe a la fracción planteada en la tarea, si bien esta alumna señala que para encontrar el costo de los 4/5 de caja de calcetines “El Mexicano” es diferente, su argumento distingue los precios de ambos tipos de calcetines más que a la técnica, que utiliza de igual manera en ambos casos (valor unitario como operador fraccionario). Lo que está haciendo Sherlyn es explicar la técnica.

Para profundizar en la comprensión de la técnica, Luis valida con el resto del grupo la motivación de la técnica al preguntar si la explicación de Sherlyn era correcta, ante ello César enuncia las etapas de la técnica al resolver la tarea de modo heurístico, es decir explicitando los principios y reglas que subyacen a la técnica, con lo que se identifica ¿para qué se hace tal procedimiento?, ¿cuál es su efecto y qué pasaría si no se hace de esa manera?, con este tipo de gestión Luis ha permitido experimentar un momento tecnológico que a decir de Castela y Romo (2011) derivan de una práctica matemática validada en un contexto empírico, también implícitamente se desprenden de una teoría basada en las fracciones y los números racionales positivos, de manera particular en las operaciones que le subyacen.[62]

[62] “La situación que permite entender mejor el sentido del producto de racionales es la partición de un todo plural, un todo que se compone de una colección de objetos homogéneos.” (Godino, 2004, p. 115). En el caso de la tarea planteada por Luis se trata de dos cantidades (625 y 885 pesos), identificar el precio de 4/5 de cada caja

Durante la experimentación de Luis, se observó la gestión de tecnologías cada vez más elaboradas y la interacción de las mismas durante el proceso de justificación de las técnicas, al parecer mientras más compleja era una tarea Luis buscaba la validación de una técnica o el surgimiento de otras diferentes, tal como se observa en el siguiente registro:

> Luis. Nancy haga el favor de leer la primera pregunta.
>
> N. Al día la fábrica vende 300 cajas. Si por cada 5 cajas de calcetines “Cotton” se venden 2 cajas de calcetines “El Mexicano” ¿Cuántas cajas de calcetines “Cotton” venden al día?
>
> Luis. Álvaro pásele y explíquenos.
>
> A. Es que yo lo convertí, lo multipliqué por seis (20X6 =120 y 30X6 =180)
>
> Luis. ¿Por qué por seis?
>
> A. Porque es más de la mitad de los otros calcetines, bueno de los calcetines “Cotton”
>
> Luis. A ver si dice que por cada cinco cajas de uno se venden dos del otro, ¿cuántas cajas deberían de ser de cada uno si se vendieron 300 cajas?, y ¿cuánto le salió de resultado?
>
> A.120 de uno y 180 del otro
>
> Luis. Y por qué multiplicó por 20 y por qué 30
>
> A. Porque eran dos cajas y de los otros eran tres y ya le agregue un cero y luego ya multipliqué.
>
> Luis. ¿Está correcto lo que hizo Álvaro?
>
> As. No.
>
> Luis. ¿Por qué está mal?
>
> César. Porque son 300 cajas y no es el procedimiento correcto
>
> Luis. Vamos a ver otro procedimiento pásele Sherlyn.
>
> S. Escribe lo siguiente:
>
> 5+2=77
>
> S. Primero sumé las cinco cajas de calcetines “Cotton” con las dos cajas de calcetines “El Mexicano”.
>
> As. Pero no son 77.
>
> S. (Borra un 7 para dejar 5+2=7) y luego al 300 lo dividí entre siete y sale 42.85, ese 42.85 lo multipliqué por cinco que eran los calcetines “Cotton” y ya me dio 214.25
>
> Luis. Entonces tú crees que fueron 214 calcetines “Cotton”… cajas y si entonces 42.85 son la cantidad total de cajas, ¿por qué te sale más?. A ver César ¿está bien Sherlyn?
>
> C. No maestra porque aquí le puso otro resultado
>
> Luis. A ver César explica lo que tú hiciste

---

implica descomponer las magnitudes en cinco subconjuntos de 125 y 177 respectivamente y multiplicarlos por cuatro para obtener el valor de la fracción.

C. Es que como son 300 cajas y son cinco cajas del “Cotton” y dos del Mexicano entonces la sumé y me da siete, 300 cajas que son entre siete me da 42.85.

Luis. ¿42.85 qué es?

C. Es un número…¿O cómo?

Luis. ¿Pero qué representa el número?

C. Ah.. O sea… una parte de… cómo del “Cotton” porque se divide entre siete que es el total, luego se multiplican 42.85 X 5 que es del “Cotton” que son 214.25.

Luis. A ver ¿si está bien Cesar? Este… Diego.

D. Cinco del “Cotton” más las dos del “Mexicano” me dan siete y dividir el total de cajas quedan 300 entre siete y el 42.85 que es el resultado representa una parte de las siete y aquí dice cinco de siete entonces se multiplica 42.85 por cinco y me va a dar 214.25.

Luis. ¿Está bien lo que hicieron César y Diego?, ¿Pero sólo me dieron una aproximación del “Cotton”, Y entonces ¿cuál sería el del Mexicano?

As. El resto

Luis. A ver pasen a comprobarlo con una operación

C. (Escribe 42.85 X 2 = 85.7)

Luis. Y si los sumamos ¿si nos da 300?

C. (Suma 214.25+85.70 = 299.95).

Luis. ¿Por qué crees que nos sale una cifra diferente Nancy?

C. Porque es un aproximado

Luis. Porque es un aproximado, ¿si están de acuerdo?. Haber César, Diego y Sherlyn, lo que hicieron fue sumar las cajas quedan 5 + 2 y dividieron el total de cajas del día entre el total de cajas y luego esa parte ese valor ¿qué sería?, ¿Cómo llamaríamos a este valor?, ¿qué sería el resultado del número total de cajas entre el número de cajas?

As. ¿La proporcionalidad?

Luis. ¿Sí será la proporcionalidad como dice Michael?, Bueno ésta después la vamos a ver entonces luego lo multiplica por cinco que es el número de cajas y luego por dos, ¿cierto?, ¿Sí entienden porque lo hicieron así?

A1. Multiplicaron las cajas

Luis. Si, multiplicaron las cajas

En este fragmento se puede ver que Álvaro describe la técnica y aunque mediante cuestionamientos Luis pretende facilitar la aplicación de la técnica con la intención de evitar errores en su empleo, es claro que el alumno no comprende la tarea ni el modo de emplear los datos numéricos en la multiplicación, no obstante si plantea la necesidad de que la suma de ambas operaciones le den un total de 300 por lo que busca un factor común (6) que multiplicado a ciertos números le permitan cumplir con esa condición aunque no tenga argumentos claros para justificar esa técnica.

Recordemos que en el momento anterior se presentó una discusión donde se planteaba la dificultad de obtener un dato preciso en función del contexto de la tarea (cajas de calcetines) al hablar de una venta de 300 cajas con una razón de 5 cajas de “Cotton” a 2 cajas “El Mexicano”, los alumnos argumentaron que no era posible establecer dicha relación porque el 300 no era múltiplo de siete y no saldría una cantidad exacta, no obstante Luis sugirió el uso de números decimales para la resolución. Ante dicha consideración los alumnos optaron por emplear una técnica basada en el uso de decimales como lo expresan Sherlyn y César, quienes implícitamente recurren a una regla de tres dividiendo 300 entre 7 y luego multiplicando por 5 y 2 respectivamente o bien al realizar una de las dos multiplicaciones igualan la cantidad faltante a 300 o expresan un aproximado al obtener 299.95. Las preguntas de Luis piden la explicación y la validación de la técnica al preguntar sobre el significado de los datos, además también se observa, aunque incipiente, que solicita la evaluación de la técnica cuando pregunta *¿Pero sólo me dieron una aproximación del “Cotton”, y entonces ¿cuál sería el del “Mexicano”?*

Una vez que se valida la técnica su evaluación se expresa al señalar que se trata de una aproximación con números decimales que se derivó de cierta dificultad en el contexto de la tarea cuyas magnitudes eran enteras. Esta evaluación permite comprender el campo de eficacia y los límites de la técnica en comparación de otras disponibles, como el uso de un modelo tabular que permitiera ver la razón que se establecería entre 5 y 2 cajas de diferente tipo.

A lo largo de la experimentación del REI, se hizo más explícita la gestión del discurso tecnológico por parte de Luis, al inicio las tareas se desarrollaron a partir de la descripción y explicación de las técnicas empleadas, no obstante, la interacción de Luis con los estudiantes para la gestión del momento tecnológico se volvió más profunda, casi siempre basada en una mayéutica socrática. Esto se muestra en el desarrollo del siguiente fragmento.

> Luis. Tomando en cuenta que la caja de calcetines “Cotton” cuesta $670 y la caja de calcetines “ El Mexicano” cuesta $915. ¿Qué cantidad de calcetines de cada clase debe de contener una caja que tenga un valor de $800?. Álvaro explícanos cómo le hiciste.

A. Primero dividí los 915 entre 8 porque es el costo de los calcetines del Mexicano y lo que me salió (114.3) lo multipliqué por siete y me salió 800.1

Luis. ¿Por qué lo dividiste entre ocho?

A. Porque por cuatro salía muy alto y le multipliqué por 2 el cuatro.

Luis. ¿Y el otro?¿Por qué lo multiplicas por siete?

A. Porque era el que más se acercaba al número.

Como se puede ver, durante la primera parte de la tarea, Luis pide la explicación de la técnica al preguntar la razón por la cual Álvaro utiliza la división y la multiplicación con ciertos números, esta gestión permite deducir que el alumno hace aproximaciones para acercarse a la cantidad planteada ($800), no obstante Luis deja de cuestionarlo para confrontar su técnica con la de otros estudiantes.

Luis. Nancy muéstranos ahora tú para compararlo con el de Álvaro.

N. (Escribe lo planteado en su cuaderno):

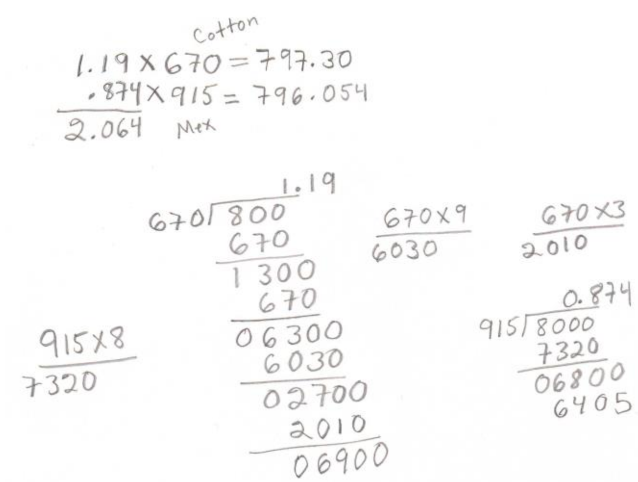


Imagen 70. Apoyo en el valor unitario. (Nancy)

N. El problema dice que son 800 Y pregunta ¿cuántas cajas son? dividí esos 800 entre el precio (670) y me dio 1.19 que es del “Cotton”, luego para el “Mexicano” dividí 800 entre 915 pero como no cabía agregue un cero y me salió 0.874, luego sumé lo que me salió del “Cotton” y lo que me salió del “Mexicano” (1.19 + 0.874) de eso el total fue 2.064, después para comprobar multipliqué 1.19 X 670 = 797.30 y para “El Mexicano” multipliqué 0.874 X 915 =799.71.

Luis. Entonces tú dices que si sale $800 una caja

N. Bueno es que todavía sigue pero como ya no me cabía lo deje así.

Luis. Haber termínalo

N. (coloca más cifras decimales a las divisiones que había hecho.)

> Luis. Si quieres hasta ahí.

En la presentación de otra técnica, Luis pide la explicación y la validación de la técnica cuando pregunta a Nancy si está de acuerdo en que una caja cuesta $800, con ello intenta que la alumna comprenda que su técnica sólo permite identificar el número de cajas del mismo tipo (cuyo valor sea de $800), en otros términos lo que Nancy realiza es una regla de tres con cajas de un mismo tipo de calcetines (1 caja de calcetines “Cotton” es a $670 ¿cuántas cajas de este tipo de calcetines serán de $800?). No obstante, la gestión que realiza Luis muestra dificultades para identificar el proceso que se ha seguido y más aún para evaluar si la técnica es eficiente para la tarea planteada, hecho que trata de superarse al solicitar a otro alumno la descripción de su técnica ante una tarea similar:

> Luis. Diego continúa leyendo la siguiente parte por favor.
>
> Diego. De forma individual se pide contesten las siguientes preguntas con base al primer problema ¿Se puede armar una caja con un valor menor de $670? ¿Por qué?
>
> As. Sííí
>
> Luis. A ver una caja que sea combinación de ambos calcetines que tenga un valor menor de 670, ¿se podrá? ¿Por qué?
>
> D. Se puede dividir y sacar cuánto es de cada uno, por ejemplo si te piden tanto de uno y tanto del otro y ya nomás ves cuánto es el total.
>
> Luis. A ver acuérdese que las cajas nuevas que estamos creando son combinación de una caja que vale $670 y una caja que vale $915 ¿sí se puede hacer una caja que esté combinada que valga menos de 670?
>
> D. Sí
>
> Luis. A ver pásale y ponlo ahí.

Mediante esta acción Luis pretende que los alumnos comprendan que se trata de cajas combinadas de calcetines “Cotton” y “El Mexicano”, pero además busca que identifiquen los precios de ambos tipos de cajas que determinan el rango del precio de las cajas combinadas, para ello pide a Diego que explique su técnica:

> D. Por ejemplo agarró la mitad de una caja de la más pequeña que es 335 que equivale al 50% del precio de la caja (Cotton) Y 305 que es un tercio (escribe 33%) del precio de la otra caja, al hacer la suma da 640.
>
> Luis. ¿Sí está bien lo que dice Diego?
>
> As. Sí

Luis. ¿Pero eso si es una caja o es una parte de una caja? Ah, ¿qué porcentaje debemos detener para que nos dé una caja?

D. 100%

Luis. ¿Y ese es un 100% Diego?

D. No

Luis. ¿Entonces es una caja?

D. No… 670 si, si usted quiere que la caja tenga 640 entonces si es menor que un entero.

Luis. No, pero yo quiero una caja, ¿se puede o no se puede? No le hace que sea 669, ¿sí se puede?

D. Si quiero una caja con un valor determinado….

As. Una regla de tres

As. 670 por 50 entre el precio de la caja

Luis. Pero tiene que dar el 100%

As. ¿Cómo le hago?

D. A ver es que dígame ¿cuál es el 100% que usted quiere?

Luis. Aquí la suma de esto (se refiere al 50%+33%) te da 83% te faltó un 17%

D. Este es el 33% no tiene relación con el otro, tiene relación respecto al precio de los otros calcetines (se refiere a los calcetines "El Mexicano")

Luis. Sí, pero si juntamos el 50% de una caja y el 33% de otra caja no completamos una caja

D. A ver si este es el 100% (escribe 640) Y lo dividimos entre 335 (realiza la división) y nos da un total de 1.9 veces y si esto lo convirtiéramos a porcentaje y Le sumamos lo que genera el otro de porcentaje entonces nos daría el 100%

Luis. ¿Por qué nos darían 100%?

D. Porque sería este nuestro entero (se refiere a 1.9) y si se tiene una parte y se le suma la otra nos da este total y esta se parece 100% porque cada uno tiene su valor en fracción y con esto si nos da el 100%.

En este fragmento se aprecia la función explicativa del discurso tecnológico al identificar que la técnica produce un efecto determinado asociado con el porcentaje, los cuestionamientos hechos por Luis permiten a Diego establecer proporciones de un tipo de cajas con otro (50%+33%), si bien la suma de estos porcentajes no lleva al 100% porque se pide una combinación con un valor menor ($640) al de las cajas más baratas ($670), Luis gestiona la evaluación de la técnica para dar cuenta de su pertinencia, eficacia y límites para el propósito de la tarea, ante las dificultades en la comprensión de ésta opta por cuestionar a los alumnos sobre el razonamiento que se está solicitando:

Luis. Fíjense bien, si decíamos que no podemos formar cajas combinadas menores de $670 porque no quedarían completas, entonces qué pasaría si queremos una caja que cueste más de $915?

As. Dividimos las dos y las sumamos

Luis. ¿Cuánto cuesta la caja más cara?

As. 915

Luis. ¿De qué es esa caja?

As. De calcetines “El Mexicano”

Luis. ¿Y si ya dijimos que no podemos armar cajas menores de 670 porque son incompletas que pasa si queremos cajas de más de 915?

Jesús. Tampoco se puede.

Luis. ¿Por qué no se puede Jesús?

J. Porque se pasa

Luis. ¿Cómo que se pasa?

J. Si de 915 y ese es el más caro.

Luis. Bien ¿si entendieron todos?

As. Sííí

A partir de las funciones del discurso tecnológico solicitados en esta tarea (que fueron desde la descripción, explicación y evaluación) los alumnos logran comprender el valor mínimo y el máximo que puede tener una caja combinada con ambos tipos de cajas (“Cotton” y “El Mexicano”), a pesar de que el contexto con magnitudes enteras implicadas en la situación provocó ciertas inquietudes en los alumnos porque sus técnicas no correspondían con la lógica social y funcional de la tarea (como el uso de decimales y porcentajes), la gestión tecnológica de Luis permitió que al final los alumnos dieran una respuesta acertada a los planteamientos.

En el caso de Luis se observa la gestión de un mayor número de funciones del momento tecnológico-teórico para el manejo de las técnicas empleadas por los alumnos de sexto grado, la descripción de la técnica aparece de manera recurrente pero sólo para el inicio del momento tecnológico ya que conforme se avanza en la discusión de las técnicas se gestiona su validación, explicación, motivación, facilitación en la aplicación de la técnica y sobre todo la evaluación de la misma, hecho del que se deduce la facilidad que tiene Luis para gestionar este momento en la experimentación del REI y la resolución de tareas con los alumnos.

7.3.4. La institucionalización. ¿evolución de la técnica?.

La institucionalización tiene como propósito preservar el conocimiento y garantizar su permanencia a través del tiempo, de manera particular en los salones de clase. La institucionalización opera con una versión de los saberes escolares que provienen de una fuente de conocimiento escolar como pueden ser los libros de texto y los programas de estudio en los cuales subyace un enfoque de enseñanza que se hace presente en los diversos problemas, ejercicios o actividades matemáticas desarrolladas por el profesor a través de la didáctica. (Castañeda, Rosas, Molina, 2012)

Como se ha señalado, desde la perspectiva de Brousseau (1988), la institucionalización constituye un momento esencial en la transformación de los conocimientos en saberes, es aquí donde el profesor necesita identificar aquello que han realizado los estudiantes para describir lo que ha pasado y dar un *estatus* al conocimiento, de manera que a partir de lo que hicieron alumnos y profesor con el objeto de estudio se pueda llegar a una doble consideración: como objeto de enseñanza por parte del profesor y como objeto de aprendizaje por parte del alumno.

En este sentido, cuando el alumno se enfrenta a una tarea encuentra un conocimiento, pero esto no es suficiente para lograr el aprendizaje, es necesario que esos conocimientos sean etiquetados como saberes socialmente reconocibles, que se presenten en un espacio teorizado de los fenómenos de enseñanza propios de la institución en la que ese saber "se estudia" y que se reconozcan los límites de su estudio. Bajo este argumento, enseguida se presentan aquellos fragmentos en los que Luis gestiona momentos de institucionalización que se hacen presentes no sólo al término de una tarea sino en diferentes espacios en los que se considera necesario hablar de la convencionalidad de un objeto matemático, tal como se muestra a continuación:

> Luis. ¿Cómo se llamará la relación que existe entre el costo de la caja y el número de cajas?
>
> N. ¿proporcionalidad?
>
> Luis. ¿Y qué será la proporcionalidad?

A1. La igualdad

Luis. ¿La igualdad de qué?

A1. Eh…de (no dice nada)

A2. La igualdad de la caja

Luis. ¿de la caja, igualdad de la caja?

César. Es como la regla de tres, mmm por ejemplo…

A1. Perros con perros gatos con Gatos.

Luis. A ver ¿cómo es eso?

A2. Dice que ordenar los perros con los perros y los gatos con los gatos

A1. En el problema el precio con los precios.

A3. Poner lo que se debe… por decir dinero con dinero

Luis. O sea que no podemos revolver el dinero, el costo, con el número de cajas.

Michael. O revolver el dinero con el número de personas.

Luis. ¿Eso es una proporcionalidad?

As. Sí, parecido.

Luis. A ver César ¿qué es la proporcionalidad?

C. ¿La proporcionalidad? Comparar, por ejemplo si tienes una caja y otra caja y una caja cuesta 625 por otra caja va aumentar el precio porque van a ser dos cajas entonces aumenta el precio por el número de cajas. Es como las multiplicaciones.

Luis. Ah, a ver la proporcionalidad es como las multiplicaciones ¿es cierto Nancy? A ver dígame qué es la proporcionalidad usted que lo dijo.

N. Son comparaciones por ejemplo en una caja su precio es de $625 por tres cajas son $1875.

Luis. Entonces ¿cuál es la función del valor proporcional que decías hace rato?, ¿cuál es su función en esta tabla?

N. que tengo que ir comparándolo para ver qué número puede llegar a lo que es el equivalente.

Puede verse que durante este momento de institucionalización Luis se apoya en el trabajo con el discurso tecnológico-teórico, porque al parecer hay una aproximación a la Teoría de las Razones y Proporciones desde la explicación y justificación que hacen los alumnos sobre el significado de la proporcionalidad, en este fragmento se observa el uso de elementos conceptuales de manera implícita como la multiplicación, el valor proporcional, la regla de tres y la variación proporcional (si aumenta el número de cajas aumenta el costo a pagar).

Si bien es cierto que Luis no establece un cierre donde puntualice formalmente el concepto de proporcionalidad y de aquellos que le circunscriben, recurre a lo que para ese grupo social significa tal concepto y a partir de los conocimientos planteados por los alumnos, cierra la tarea, esta idea muestra lo que Chevallard (1999) argumenta en el proceso de reconstrucción de una OM en la que es necesario ir institucionalizando progresivamente los elementos que deben considerarse como matemáticos por una comunidad de estudio, por una institución, para distinguirlo de aquellos que sirven sólo como instrumentos auxiliares de la construcción.

En otro tipo de institucionalización, Luis no hace referencia a la explicación de un concepto matemático sino a la relación que se establece entre las magnitudes implicadas en la tarea, al igual que en el ejemplo anterior se basa en los conocimientos de los alumnos para establecer un saber sobre una técnica empleada que valide los resultados discutidos en el momento tecnológico-teórico, el término del porcentaje es retomado para confirmar los rangos mínimo y máximo que pueden darse entre los precios de las cajas combinadas de calcetines:

> Luis. Muy bien entonces no podemos formar cajas que cuesten menos de 670 porque eso cuesta la caja más barata sino la caja quedaría incompleta, ahora ¿se puede armar una caja con un valor superior a $915?.[63]
>
> As. (No contestan)
>
> Luis. Fíjense bien, si decíamos que no podemos formar cajas combinadas menores de $670 porque no quedarían completas, entonces qué pasaría si queremos una caja que cueste más de $915?
>
> As. Dividimos las dos y las sumamos
>
> Luis. ¿Cuánto cuesta la caja más cara?
>
> As. 915
>
> Luis. ¿De qué es esa caja?
>
> As. De calcetines “El mexicano”
>
> Luis. ¿Y si ya dijimos que no podemos armar cajas menores de 670 porque son incompletas ¿qué pasa si queremos cajas de más de 915?
>
> Jesús. Tampoco se puede.
>
> Luis. ¿Por qué no se puede Jesús?
>
> J. Porque se pasa
>
> Luis. ¿Cómo que se pasa?
>
> J. Sí, de 915 y ese es el más caro.
>
> Luis. Bien ¿si entendieron todos?

[63] La tarea consistía en armar cajas combinadas con las cajas de diferente tipo, la más barata con un costo de $670 y la más cara con un precio de $915. La intención de Luis era que los alumnos identificaran el rango del precio que se tendría que pagar en cajas de calcetines combinadas.

> Luis. No podemos armar cajas más baratas de lo que cuesta la caja del “Cotton” que es de 670 y no podemos armar cajas más caras de lo que cuesta la caja del “Mexicano” que es de 915, acuérdense de lo que hizo Diego con los porcentajes, no alcanzábamos el 100%, faltaba. Entonces no es posible armar una caja que tenga un valor menor o mayor al precio de las cajas, por lo que tiene que estar siempre dentro del rango establecido, es decir entre 670 y 915 ya que 670 es una caja completa del calcetín más económico y un menor precio significa una caja de ese mismo calcetín pero incompleta. Lo mismo sucede con el de mayor costo pero si es más de 915 sería más de una unidad.

En el caso de este momento de institucionalización Luis, recurre a la mayéutica socrática para solicitar la justificación de los argumentos que presentan los alumnos yal igual que José pretende formalizar la relación que se establece entre las magnitudes, las respuestas acertadas de los alumnos le permiten llegar progresivamente a una conclusión que ha sido comprendida por el grupo en función de la tarea.

El siguiente fragmento corresponde al cierre de la experimentación del REI, donde Luis tiene como propósito que sus alumnos identifiquen la evolución de las técnicas que implementaron en las diversas tareas matemáticas asociadas a la proporcionalidad, en lo que sigue se muestra cómo se hace el cierre de dicho proceso de estudio, pero sobre todo cuál es el saber que como producto del REI resulta institucionalizado.

> Luis. Por último, ¿ustedes creen que pudiera haber una fórmula general para que pudiéramos conocer los porcentajes que deben incluir una caja de cada clase de calcetines para obtener determinado precio final?
>
> As. (se quedan pensando)
>
> Luis. Acuérdense de lo que hicieron Diego y Nancy con los porcentajes, ¿creen que podemos sacar una fórmula?
>
> As. ¿igual que en Geometría?
>
> Luis. Sí algo así. ¿A ver díganme sus respuestas?
>
> Israel. Multiplicando y dividiendo
>
> Luis. ¿Cómo? O ¿qué?
>
> I. Las cajas de Cotton y las mexicanas.
>
> Luis. ¿Alguien más?
>
> César. Multiplicando y dividiendo, sacando decimales y sumándolos y después dividirlo.
>
> Jocelyn. La regla de tres.
>
> Luis. ¿Por qué la regla de tres?
>
> Y. Porque ahí multiplicamos y dividimos las cajas

> Luis. Pero si quisiéramos una fórmula donde digamos qué es lo que vamos a dividir y qué es lo que vamos a multiplicar, ¿cómo la haríamos?

En la primera parte del fragmento se observa la intención de Luis por institucionalizar un modelo que vaya más allá del modelo aritmético y que haya sido producto del trabajo con el REI, para ello les cuestiona sobre la posibilidad de construir una fórmula general que permita conocer los porcentajes de cada caja con diferente tipo de calcetines en las cajas combinadas. Los alumnos intentan responder el cuestionamiento al describir una serie de técnicas con fundamento aritmético:

> A2. Se multiplican las cajas entre los calcetines.
>
> Óscar. Dividimos el costo por la cantidad para sacar el problema.
>
> Jesús. Dividir lo que hay en cada caja es igual al 100%
>
> Luis. Muy bien ahí tenemos varias formas de sacar los resultados, alguien nos puede dar otra, a ver Diego ¿tú que tienes?
>
> D. Dividir lo que va a pagar el cliente entre la caja que él más quiera y eso multiplicarlo por el precio de la caja y hacer lo mismo con el precio de la otra caja.
>
> Luis. Bien entonces para una fórmula se tiene que hacer lo que en todos los ejercicios de las mezclas, pero en la fórmula tenemos que sustituir los números por letras de manera que no importen los precios de los calcetines siempre que haya dos tipos distintos que mezclar para utilizarla por ejemplo podemos usar la fórmula a+b = c
>
> As. (Parecen no comprender)
>
> Luis. A ver por ejemplo a y b son las distintas clases de calcetines, a serían los calcetines "Cotton" y b "El Mexicano" y c sería la nueva mezcla. Con la fórmula se hacen diferentes operaciones para llegar a las cantidades que debe tener cada mezcla, en este caso la suma de dos elementos diferentes mezclados dan un tercer elemento. Vamos a verlo con un ejemplo si tenemos 2.4 cajas que son *a,* de los calcetines "Cotton" más 1.6 cajas de *b* que son los calcetines "El Mexicano", entonces vamos a encontrar que c, que es la mezcla o suma vale 4. (Escribe en el pizarrón 2.4 de a + 1.6 de b = 4 c. ¿Si entendemos?
>
> As. Más o menos
>
> As. Es que está muy difícil usar letras.
>
> Luis. ¿Qué se les hace difícil?
>
> As. No saber cuánto valen.
>
> As. Es que necesitamos la cantidad.
>
> Luis. Cuando usamos letras hacemos uso del Álgebra pero en lugar de números usamos letras como la a, la b y la c. Con esas letras se hacen operaciones como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y otras. Si saben hacer las operaciones en primaria no deben tener miedo al Álgebra porque es muy parecido.

En el caso de Luis, se observa la intención por institucionalizar un modelo algebraico basado en el uso de las combinaciones o mezclas de cajas de diferente tipo de calcetines, previamente trabajadas, no obstante también es perceptible la dificultad que tienen los alumnos para transitar de un modelo aritmético a un modelo algebraico, cuando hace la institucionalización de la fórmula $a+b=c$, más que hablar del precio de una mezcla que se había venido trabajando en tareas previas, se refiere sólo a la unión de dos tipos de cajas de calcetines para encontrar el resultado de dicha adición, este hecho simplifica la tarea del precio de la mezcla pues sólo muestra a los alumnos los valores de a y b para encontrar el valor de c.

Cabe señalar que el contexto de cajas de calcetines planteado en el REI tuvo ciertas dificultades en la resolución de tareas, principalmente en aquellas tareas relativas a la mezcla de cajas, donde los alumnos en algunos casos dudaban si la mezcla era del número de calcetines o de cajas, es tal vez debido a esta dificultad que se tuvo problemas también en la institucionalización, en tanto que ésta constituye una síntesis o generalización de las actividades y producciones de los alumnos para comprender un objeto que es normado y legitimado por el discurso del profesor.

En este último momento del REI de Luis se observa la relación que existe entre la acción institucionalizadora y la construcción de un conocimiento que ha tenido ciertas dificultades para concretarse en un saber, por lo que se vuelve necesario preguntar ¿si los tipos de tareas fueron suficientes para llegar a una institucionalización de este tipo (modelo algebraico)?, ¿si las técnicas previas fueron trabajadas de manera suficiente?, ¿si fueron pertinentes para el tipo de tareas planteadas? y sobre todo ¿hasta qué punto permitieron la evolución de ciertas técnicas hacia otras más elaboradas?.

Por último puede decirse que de los momentos gestionados por Luis a lo largo del REI, el que mejores resultados mostró fue el momento tecnológico-teórico, donde desplegó una gran variedad de funciones de la tecnología para describir, explicar, validar, motivar y hasta evaluar la técnica, mientras que el momento que más debilidades mostró fue la institucionalización, ello sobre todo por la dificultad de diversificar los dispositivos discursivos que se aproximaran a la organización matemática de estudio.

CONCLUSIONES

Dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas la línea de estudios sobre la formación de profesores es quizá una de las que actualmente se encuentra más consolidada, ya que existen ciertos desarrollos teóricos que han permitido mejorar los análisis sobre los procesos de formación de profesores, específicamente se han realizado muchos estudios sobre los tipos de conocimiento de los profesores de Matemáticas.

En este sentido puede verse que el campo de la Didáctica de las Matemáticas se torna cada vez más estructurado; su evolución en las últimas décadas lo ha convertido en una de las áreas de investigación con un gran número de estudios sobre los fenómenos de transmisión del saber matemático, los cuales han generado numerosas propuestas para transformar los currículos de diferentes partes del mundo. Sin embargo, el diseño de dispositivos para la formación de profesores es todavía una línea de investigación incipiente, sobre todo, cuando de formación inicial de profesores se trata. En este contexto la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) ha representado en los últimos años un soporte conceptual para este tipo de investigaciones, es precisamente en esta perspectiva en la que se ha centrado este trabajo, específicamente en dos dimensiones, la primera consideró al profesor en formación como aprendiz de matemáticas y la segunda lo consideró como eventual profesor.

A lo largo de la investigación se hizo un análisis de la formación inicial de los estudiantes normalistas tomando en cuenta cuestiones relativas a los saberes académicos, las concepciones personales sobre un saber matemático, en este caso la proporcionalidad y el conocimiento práctico reflejado en los diseños de las praxeologías didácticas. Con este análisis se identificó la dificultad que desde el plan de estudios vigente en las instituciones formadoras de docentes se tiene para especificar las competencias que un profesor que va a enseñar matemáticas debe tener, dificultad que se manifiesta institucionalmente a través de un “generalismo pedagógico” que establece un conjunto demasiado amplio de competencias explicitas de manera ambigua en el tipo de organizaciones matemático-didácticas que requiere un profesor en formación.

Otro de los objetivos de la investigación fue la revisión de la proporcionalidad en el texto del saber de las instituciones formadoras de docentes (Plan de estudios 2012). Para tal efecto se revisaron las OM y las OD incluidas en el programa de la asignatura de Aritmética: su aprendizaje y su enseñanza, por un lado se revisó la organización y secuencia con que se aborda dicho objeto del saber y por otro el número de tareas que se asignan en cada una de las organizaciones enunciadas.

Para tal análisis se tomó como referencia la noción de praxeología, específicamente el tipo de tareas, las técnicas, los discursos tecnológicos que se promueven en la justificación de las técnicas y por último las teorías que pudieran fundamentar el estudio de la proporcionalidad. Una vez revisado el texto del saber, se observó un desequilibrio en la programabilidad del tiempo didáctico dedicado al estudio de la proporcionalidad en tanto se incluyen sólo cuatro temáticas de estudio: razón y proporción, concepto de porcentaje y su representación gráfica, resolución de problemas de porcentaje y variación proporcional directa.

La extrema generalidad de competencias se hace visible en esta unidad del programa, en ella se expresa la necesidad de que los profesores en formación identifiquen las propuestas teórico-metodológicas para la enseñanza de la aritmética y su transposición en la escuela primaria con la generación de ambientes de aprendizaje favorables, además de la identificación de los obstáculos de enseñanza y de aprendizaje y los instrumentos de evaluación. Como se pudo ver, dichas propuestas se basan en el “monumentalismo” y el “generalismo”, ya que se anteponen praxeologías existentes y generalizadas sobre el estudio particular de las problemáticas de formación ante un saber determinado.

En cuanto al número de tareas que se asignan a cada temática, la mayoría de las tareas son para el estudio de las OM, en éstas el profesor en formación asume un rol de aprendiz de matemáticas con el que intenta establecer la relación entre los saberes aritméticos convencionales de la escuela normal y los de la escuela primaria, para tal propósito se plantean tareas que intentan que el estudiante obtenga el dominio matemático, no obstante en el programa es visible la reducción de momentos de institucionalización con los cuales los profesores en formación podrían reconocer y nombrar los objetos matemáticos desde la convencionalidad, aunque no desconocemos que dichos momentos pueden ser gestionados por el formador aun cuando no se incluyan en los programas.

El tipo de tareas que se incluyen a lo largo de las cuatro unidades temáticas se inscribe en la resolución de situaciones problemáticas bajo un contexto dado: la razón, la proporción y el porcentaje, el uso de modelos tabulares para encontrar una cantidad dada, la representación gráfica en rectas numéricas de razones y proporciones, la comparación de magnitudes, encontrar valores faltantes en razones equivalentes; expresión de razones en porcentajes y de éstos en números decimales. Para la resolución de dichas tareas se sugiere como técnica predominante la regla de tres.

Para la variación proporcional directa se plantean tareas del tipo, encontrar la relación entre dos cualidades de objetos (largo-ancho, agua-jugo, entre otros), generalmente se presentan a través de modelos tabulares y gráficos que permiten identificar la relación directa o inversamente proporcional, la complejización de estas tareas está dada por la inclusión de números decimales y fraccionarios, aunado a lo anterior, se incluyen tareas del tipo encontrar el valor faltante en un modelo tabular dadas ciertas magnitudes. Se puede afirmar que los programas plantean a los profesores tareas muy básicas parecidas a las del nivel de la escuela primaria y las técnicas sugeridas se enfocan sobre todo al manejo del valor unitario, de la constante de proporcionalidad y la regla de tres, mismas que corresponden al modelo epistemológico de referencia de la perspectiva clásica de la proporcionalidad.

En cuanto a las Organizaciones Didácticas (OD), no se presenta un discurso teórico que justifique el tipo de tareas y técnicas, si bien se habla de un enfoque basado en competencias y ocasionalmente del diseño de situaciones didácticas, no hay una postura definida para la aplicación de éstas últimas, de modo que el bloque tecnológico-teórico no permite el análisis sobre el hacer didáctico.

El tipo de tareas didácticas se orienta hacía los análisis sobre las técnicas, logros y dificultades que podrían tener los alumnos de la escuela primaria durante su resolución, además, se plantea una tarea en la que se pide el diseño de situaciones problemáticas similares a los de los textos oficiales, sin embargo no se plantea un momento para que el profesor en formación realice la experimentación de alguna situación didáctica de proporcionalidad. Para el caso del modelo algebraico, es hasta el segundo semestre cuando los profesores en formación identifican la relación de este concepto con otros propios del Álgebra, es el caso del concepto de función, sus representaciones y significados.

Cabe señalar que, en la manera como se plantea el modelo algebraico en el texto del saber también es observable el desequilibrio entre las OM y las OD, es decir, hay más tareas para el estudio de las OM que para las OD. Se puede decir que uno de los problemas a los que se enfrenta actualmente la formación de profesores es que además del desequilibrio entre las OM y las OD, éstas últimas no dejan de ser un discurso incipiente relacionado a cuestiones pedagógicas que se alejan de un contexto didáctico propio de un campo del saber, hecho que limita al estudio de cuestiones disciplinares y minimiza el papel del aprendiz de profesor en su proceso de formación inicial.

Si se considera que los “saberes a enseñar” devienen en “saberes a hacer” en los que se muestran componentes teóricos y prácticos, los dispositivos de formación precisan de dicha consideración para ser implementados, de tal forma el *REI-FP* que aquí se experimentó intentó por una parte dar respuesta a las dificultades encontradas en el texto del saber ante el desequilibrio de las OM y las OD incorporando tareas didácticas que paliaran tal desequilibrio, y por otro lado mostrar el desarrollo de éstas sobre un concepto matemático en un proceso que se hace presente en diversos momentos de estudio y ante una gran diversidad de praxeologías.

El dispositivo de formación permitió abordar cuestiones institucionales y estrategias que orientaron la práctica de los profesores en formación ante el estudio de la proporcionalidad. Desde la vivencia, el análisis, el diseño y la experimentación de un REI se permitió la movilización de saberes tanto matemáticos como didácticos.

En el primer módulo del REI el profesor en formación se posicionó como un aprendiz de matemáticas, se identificaron diversas técnicas y discursos tecnológicos con los cuales se llevó a cabo la reconstrucción de una praxeología vinculada a la proporcionalidad, el propósito de este módulo consistió en mostrar la evolución de técnicas en el tránsito de un modelo aritmético hasta un modelo algebraico, se esperaba que la secuencia de tareas llevara al profesor en formación al uso de una técnica en particular.

En el tipo de tareas relativas al valor faltante cuya técnica implícita era el valor unitario, se observó que los profesores en formación utilizan técnicas como la multiplicación y la división pero no identifican la relación entre éstas y las situaciones del razonamiento proporcional, esto se dedujo al analizar su discurso tecnológico, en él no asocian la funcionalidad de las operaciones utilizadas con el concepto de proporcionalidad. En las tareas donde se representa la variación proporcional mediante una gráfica, identificaron situaciones vinculadas al valor unitario con el uso de la constante de proporcionalidad y, si bien las técnicas (método de diferencias) de inicio no derivaron de un discurso tecnológico propio de la Teoría de Razones y Proporciones, progresivamente se observó el uso de la regla de tres como una técnica económica y eficiente para la resolución.

Para este mismo tipo de tareas pero con representación tabular, la regla de tres fue la técnica justificada desde un modelo clásico de la proporcionalidad, sobre todo en aquellas tareas donde el valor unitario no es explícito; por otra parte aunque los profesores en formación usaron la constante de proporcionalidad no resultó del todo eficiente por la dificultad para identificar los casos en los que funge como multiplicador o como divisor en la técnica.

Otro tipo de tareas relativas al valor faltante pero de mayor complejidad, fue la que se planteó al trabajar con tres magnitudes, se buscó transitar de la técnica del valor unitario hacia representaciones tabulares que llevaran a un modelo algebraico. Los resultados mostraron que para resolver tareas de este tipo la mayoría de los profesores en formación emplean técnicas aritméticas, el 87.5% resolvieron correctamente la tarea con este tipo de técnicas y sólo un 12.5% intentó el uso de un modelo algebraico para la resolución pero sin lograr resultados satisfactorios.

El último tipo de tareas tenía que ver con la proporcionalidad compuesta de tres magnitudes y las relaciones proporcionales podían ser expresadas a través de un sistema de ecuaciones, el objetivo era que los profesores en formación ubicaran el valor faltante en cualquiera de las incógnitas o términos. Los resultados mostraron que identificaron el valor unitario como técnica eficiente para este tipo de tareas, pero también que las tareas con tres magnitudes demandaban la necesidad de eficientar y economizar las técnicas que habían resultado idóneas, el propósito para este tipo de tareas se logró de manera parcial, apareció un modelo algebraico incipiente en sus primeras aproximaciones (ax+by=n).

La asociación del modelo aritmético con el algebraico permitió que el modelo inicial (ax+by=n) fuera reemplazado por el modelo ((ax+by)/x+y)=n, al comprender la necesidad de dividir el sistema de ecuaciones de primer grado. Para esta última tarea el 100% de los profesores en formación emplearon el modelo algebraico lo que indicó una evolución favorable en las técnicas utilizadas y aunque su discurso tecnológico no fue tan preciso se puede afirmar que en algunos casos es posible la evolución del bloque práctico-técnico sin que evolucione el bloque tecnológico-teórico aunque para otras situaciones esta condición se vuelva imprescindible.

Lo relevante en el M_1 fue por un lado la transición gradual del tipo de tareas que permitió a los profesores en formación evolucionar de técnicas aritméticas hacia técnicas algebraicas y por otra parte la identificación de técnicas y discursos tecnológicos propios de la proporcionalidad.

En el M_2 resultó indispensable el análisis de las organizaciones praxeológicas vividas así como los alcances y restricciones que una institución establece para el estudio de un saber, en ambos casos la identificación de las cuestiones planteadas, las tareas enunciadas, las técnicas demandadas, el discurso tecnológico que justifica y la teoría que sustenta la razón de ser de ese saber constituyen elementos necesarios para el diseño y posterior experimentación de OD en la escuela primaria por los profesores en formación.

Desde la perspectiva del profesor analista destaca la identificación de conceptos matemáticos implícitos en la “Situación Petróleo”, las técnicas a que dan lugar las tareas resueltas. En cuanto a los conceptos identificados destaca el de proporcionalidad, el factor constante, la variación proporcional directa y en algunos casos el de razón. Respecto al tipo de técnicas la mayoría señaló la regla de tres como aquella que mayor relación tenía con tareas de proporcionalidad, además del valor unitario, la constante de proporcionalidad y en menor medida la técnica algorítmica, esta situación muestra que aunque las características institucionales especifican ciertas cuestiones para ser “enseñadas”, los profesores en formación también recuperaron elementos “estudiados” desde el REI vivido.

En cuanto a la pertinencia de implementar el REI en la escuela primaria el 87.5% de los profesores en formación afirma su viabilidad, el 12.5% no lo considera conveniente por el manejo de la notación decimal y fraccionaria de algunas tareas así como por la búsqueda de técnicas algebraicas que desde su perspectiva no corresponden al nivel de educación primaria, lo que resulta relevante es que un alto porcentaje de estudiantes no se circunscribe a dichas restricciones y plantea tareas que pueden llevar a los niños hacia técnicas algebraicas

Respecto a las posibles técnicas que emplearían los niños de la escuela primaria, los profesores en formación caracterizan las técnicas a partir de su experiencia como alumnos o como eventuales profesores por lo que recuperan las técnicas informales que pueden visualizarse en sus alumnos y no aquellas que corresponden a la proporcionalidad en cuanto objeto de saber. Es así como los profesores en formación se asumen como profesores enseñantes que se encuentran limitados por el texto del saber de la escuela primaria ya que señalan que las principales técnicas que se harían presentes son la regla de tres y el valor unitario como operador multiplicativo. En su opinión, las ventajas de llevar este REI al contexto de la escuela primaria tienen que ver con identificar problemas de proporcionalidad, observar el proceso de resolución y las diferentes técnicas empleadas, entender un concepto de manera progresiva y encontrar sentido al Álgebra. Lo que permite deducir en cierta forma el impacto que desde la vivencia del REI tuvieron los profesores normalistas.

En cuanto a la revisión del texto del saber de la escuela primaria por parte de los profesores en formación, éste resultó sencillo de cierta manera, puesto que identificaron los conceptos, tareas y técnicas implicadas en una lección aunque tuvieron dificultades en otra más (la última lección formal ubicada en el libro de sexto grado cuyo concepto central corresponde al estudio de la razón y las técnicas implícitas corresponden al cálculo de fracciones equivalentes con común denominador); los profesores en formación enunciaron en su mayoría la comparación de fracciones, el mínimo común múltiplo y el porcentaje, lo que indica que las OM estudiadas en la escuela normal pueden resultar insuficientes para su identificación y transposición en la escuela primaria conforme aumenta el nivel de complejidad en el estudio de las nociones matemáticas.

Las principales dificultades que se presentaron en el M_2 tuvieron que ver con la identificación de algunas nociones vinculadas a la proporcionalidad así como la distinción entre tarea y técnica, este hecho subraya la necesidad de revisar desde la institución formadora los tipos de tareas y de técnicas que se incluyen en el texto del saber de la escuela primaria, pero sobre todo la vinculación entre conceptos y la naturaleza con que las técnicas pueden evolucionar a partir de esa estructura curricular.

Respecto de las organizaciones praxeológicas y los momentos de estudio que los profesores en formación gestionaron en la escuela primaria (M_3), se consideró la pertinencia de revisar los planes de clase diseñados por aquellos que estuvieran trabajando con sexto grado ya que éste es el grado escolar donde se aborda con mayor convencionalidad el estudio de la proporcionalidad. En ambos casos se observó que el diseño del REI seguía la misma secuencia de tareas planteada en el REI vivido, sólo se modificó la situación principal, en lugar de la “Situación Petróleo” PF5 planteó la “Situación Refrescos”, mientras que PF7 estableció la “Situación Cajas de calcetines”. Los dos estudiantes normalistas plasman una serie de tareas que conlleva la aparición de técnicas diferenciadas; PF5 planea cuatro tareas en las que se busca el valor unitario (con modelo tabular), la comparación de razones y la proporcionalidad con tres magnitudes, en tanto PF7 incluye, además de las anteriores, una tarea relacionada con el modelo algebraico. Con estas tareas se observa que los dos profesores en formación buscan permanecer dentro de los límites del texto del saber de la escuela primaria al elegir tareas semejantes a las planteadas en el currículo escolar.

En cuanto a las praxeologías didácticas, ambos profesores en formación plantean casi los mismos momentos de estudio: el primer encuentro, la constitución del entorno tecnológico-teórico y ocasionalmente la institucionalización, este último momento se caracteriza por las dificultades en la especificación del objeto de saber formalizado y en la descripción de la funcionalidad y eficacia de las técnicas.

La experimentación didáctica que hacen los profesores en formación constituye la actividad fundamental del M_4, en éste se identificaron las tareas, las técnicas y los elementos tecnológico-teóricos que los profesores en formación gestionaron, con ello se observó el tipo de OD reconstruida por los profesores en formación en su papel de aprendiz de profesor, gestión que derivó de la reconstrucción del REI elaborada en el M_3.

Ambos profesores en formación gestionaron el “primer momento” a través de la “devolución de la tarea” aunque con ciertas diferencias, José (PF5) no se preocupa por devolver el medio, lo que indica que no realiza acciones con las cuales los alumnos de sexto grado comprendan el significado de la tarea, Luis (PF7) por su parte cuestiona a los alumnos sobre la intención y la estructura conceptual de la tarea como preludio para la devolución.

En cuanto al momento exploratorio se refiere, fue visible como los profesores en formación asumieron dos tendencias, por un lado y la más persistente se dio en el caso de José, fue una gestión de poco acompañamiento en la que no intentaba que los alumnos comprendieran la tarea, más bien buscaba la resolución autónoma por parte de los alumnos. Desde la perspectiva de Luis se observaron diferentes aproximaciones, algunas en las que los alumnos de manera autónoma se acercan a la tarea para la búsqueda de la técnica, hasta aquellas donde la evocación, la aplicación y el control se hicieron presentes. A diferencia de Luis la postura de José se mostró un tanto alejada en la gestión de estos dos primeros momentos, lo que resulta coherente con las mínimas oportunidades que se tienen desde la formación inicial para el análisis y la experimentación de las OD aunque resulta contradictorio con los propósitos del REI-FP desarrollado.

En la gestión del momento tecnológico-teórico Luis buscó que surgieran tecnologías cada vez más formalizadas, mientras más compleja se volvía una tarea, sus cuestionamientos buscaban una validación con mayor rigor. Por su parte José gestiona también los momentos tecnológicos a partir de cuestionamientos con los cuales provoca la aparición de cuatro funciones de la tecnología: la descripción, la facilitación de su aplicación, la motivación y la validación de la técnica; al igual que Luis también se hacen presentes la explicación y la evaluación de la técnica aunque en menor medida que las anteriores. A partir de estos hallazgos se puede afirmar que la gestión del momento tecnológico-teórico es el de mayores fortalezas en la experimentación del REI-FP y aunque el texto del saber no incluye tareas en las que se requiera explicitar las funciones de la tecnología, los estudiantes normalistas justifican con un discurso tecnológico las técnicas empleadas a lo largo de la experimentación del REI.

El último momento didáctico observado fue la institucionalización, en ésta no hubo variantes significativas; la gestión de José se centra en retomar las técnicas de los alumnos para explicarlas y justificarlas sin explicitar un concepto o praxeología matemática formalizados, se podría decir que la evolución técnica y tecnológica que mostraron los alumnos derivó de la naturaleza de las tareas planteadas en el REI más que del momento de institucionalización. La gestión de Luis se apoya en el discurso tecnológico-teórico explicitado por los alumnos, quienes aluden a técnicas y justificaciones de la Teoría de las Razones y Proporciones, aunque tampoco Luis expresa formalmente el concepto de proporcionalidad y sus nociones, sí recupera los conocimientos externados por los alumnos para realizar una “institucionalización parcial”. Cabe señalar que Luis fue el único que planteó una tarea del tipo algebraico que consistía exclusivamente en la transición de una representación aritmética a una algebraica (a+b=c), sin embargo ante las dificultades mostradas por los alumnos la institucionalización se centró en “comentar”, las ventajas de generalización del Álgebra frente a la Aritmética. Se puede afirmar entonces que el momento con mayores dificultades fue el de la institucionalización, mismas que derivan de las pocas o nulas oportunidades que tienen los profesores en formación para establecer la vinculación entre las OM y las OD cuando la mayoría de las tareas de formación se centran en la resolución de tareas matemáticas.

La intención de este estudio era identificar las praxeologías de formación en torno a la proporcionalidad que resultaran efectivas al experimentar un REI para la formación de profesores en las escuelas normales, en este sentido y a partir de los resultados encontrados se puede afirmar que la implementación del REI-FP resultó factible y de utilidad en tanto que permitió la reconstrucción de Organizaciones Matemáticas vinculadas a una cuestión matemática como la proporcionalidad. Otro de los logros identificados radicó en la superación de los problemas de articulación del estudio de la proporcionalidad encontrados en el texto del saber tanto en la institución formadora de docentes como en la institución de la escuela primaria ya que mientras en éste el estudio se basaba en nociones aisladas y la poca explicitación de las técnicas pertenecientes a cierto tipo de tareas, el diseño y la gestión del REI permitió a los estudiantes comprender la forma en que esta desarticulación puede ser superada a partir de una situación problemática eje y una cuestión generatriz previamente determinada.

Desde esta perspectiva, un acierto más ante el REI-FP que aquí fue gestionado, lo constituyó la descripción y análisis de un MER matemático que dio cuenta de la factibilidad de la Teoría de Razones y Proporciones para comprender los nexos que se establecen entre las nociones matemáticas y que desde otra perspectiva sería difícil identificar dada la desarticulación y falta de secuencia entre los objetos de saber matemático propuestos en los programas educativos de la escuela primaria.

Otro de los aciertos palpables fue la experimentación de dos procesos de estudio del profesor en formación: como estudiante de matemáticas en el que tuvo la posibilidad de vivir un conjunto de praxeologías gradualmente más complejas y con las cuales logró la evolución técnica y tecnológica de la proporcionalidad “clásica” a la relación funcional; por otro lado como aprendiz de profesor en el que se diversificaron las tareas didácticas más allá de las explicitadas en el reducido espacio del texto del saber.

Ahora bien si desde la TAD uno de los elementos de mayor relevancia son las cuestiones problemáticas que puedan llevar a la (re)construcción de nuevas tareas, a la emergencia de nuevas técnicas y justificación tecnológica, una de las principales dificultades que se identificaron en la experimentación del REI-FP fue el diseño de un proceso de estudio que diera respuesta a la naturaleza de las OM pero también la identificación de una cuestión que justificara su pertinencia ante las restricciones de la Institución de la escuela primaria que le diera una razón de ser no sólo desde el contexto matemático sino también desde las necesidades didácticas de los profesores en formación.

En cuanto a las OD, uno de los principales obstáculos encontrados a lo largo del estudio fue la carencia de un Modelo Epistemológico de Referencia Didáctico que permitiera justificar el proceso de estudio de la proporcionalidad en la escuela primaria y de modo general al estudio de los conceptos propios del campo del saber matemático. Esta dificultad se vio manifiesta en el M_4 del REI-FP dónde los profesores en formación tuvieron dificultades desde el diseño hasta la experimentación del REI en la escuela primaria, al no identificar con precisión los momentos didácticos o las situaciones didácticas, que les permitiera puntualizar los contratos didácticos más factibles para el desarrollo de una clase escolar. En este sentido se podría decir que en el diseño mismo del REI-FP faltó mayor precisión para la integración de tareas didácticas que permitieran a los profesores en formación la elaboración de planes de clase bajo un MER didáctico estudiado a profundidad.

Un aspecto a considerar para la elaboración de futuros REI-FP, es que el desarrollo de éstos y de los REI en la escuela primaria requiere de un mayor tiempo escolar a los planteados en una clase convencional así como una organización diferente de los objetos de estudio, siempre tendientes a la articulación entre conceptos propios de la disciplina y los momentos didácticos en los que se ponen en juego ciertas praxeologías previamente programadas desde una cuestión generatriz.

El REI permitió enunciar las dificultades de gestionar momentos donde los profesores en formación actúen con un dominio didáctico fortalecido, hecho que también se deberá considerar para la elaboración de próximos REI-FP en el que se amplíe el número de tareas de este tipo, sobre todo aquellas que le permitan un mejor desempeño en el momento de la institucionalización, que fue el que mayores dificultades mostró en la práctica docente. La superación de esta dificultad lleva pues a la ruptura de los contratos didácticos vigentes en las escuelas formadoras de docentes pero también a la reconsideración de las restricciones matemáticas y didácticas de un sistema educativo que puede ser abierto a la experimentación de otras propuestas de intervención.

También se pueden especificar algunos alcances de la investigación así como las ventajas y limitaciones del enfoque teórico y metodológico empleados, pero lo que se destaca de manera particular es lo que este estudio pudiera ofrecer en términos prácticos y operativos para las instituciones formadoras de docentes.

En función de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, se encontró que las organizaciones praxeológicas de los profesores en formación están fuertemente determinadas por las restricciones institucionales, desde las técnicas y tecnologías expresadas en el M_1 (Vivir el REI) hasta los momentos de estudio desarrollados en el M_4 (Experimentación del REI). Los estudiantes normalistas muestran praxeologías muy cercanas al texto del saber.

Por otra parte cabe destacar que se observaron logros significativos con la experimentación del REI-FP, visibles en la evolución técnica y tecnológica de las praxeologías matemáticas, es decir, los profesores en formación identificaron la relación entre las diversas nociones vinculadas a la proporcionalidad con lo cual se vio reforzado el uso y el discurso de elementos propios de la Teoría de Razones y Proporciones inscrita en el Modelo Epistemológico de Referencia. En cuanto a las praxeologías didácticas, los alcances se hicieron visibles en el diseño de un REI para la escuela primaria, de igual forma durante la experimentación los profesores en formación mostraron dominio respecto de los momentos de estudio implicados en la gestión didáctica, principalmente se mostraron hábiles para gestionar el momento tecnológico-teórico.

Se puede decir que la diferencia entre las OM y las OD estuvo determinada por algunas restricciones institucionales que limitaron un alcance más equilibrado del REI-FP, la principal fue el tiempo didáctico para su implementación, ya que tuvo que diseñarse metodológicamente en función de los momentos en los que los profesores en formación se encontraban en la Escuela Normal, ello implicó que no pudiera ampliarse el número de tareas didácticas ni pudieran gestionarse discusiones colectivas (de validación) sobre los diseños del REI de la escuela primaria.

Finalmente, puede decirse que los resultados obtenidos en esta investigación permiten determinar las ventajas de que en las instituciones formadoras de docentes se implementen REI-FP en diversas áreas, sectores, cuestiones y temas matemáticos desde los primeros años de formación en la escuela normal estableciendo un equilibrio teórico y metodológico respecto a las OM y las OD que se encuentran en el currículo de las escuelas formadoras de docentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguayo, L. (2005). *La transposición del "saber didáctico". Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales* (Tesis Doctoral). Universidad Pedagógica Nacional. México, D.F.

Aguayo, L. M., Mendoza, J.M. (2015). Tecnologías didácticas de los profesores en formación. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* CIAEM XIV. 3-7 mayo, Chiapas, México.

Artaud, M. (2006). La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions, en Ruiz, L., Estepa, A., García, F. J. (Eds). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico*. pp. 241-259. España, Universidad de Jaén.

Atriano, R. A., Benítez, A., Ramírez L. V. (2013). El reto de las escuelas formadoras de docentes en el Estado de México ante la reforma educativa. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. México.

Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de trasmisión y apropiación del saber matemático escolar* (Tesis de doctorado). Universidad Nacional Autónoma de México. México.

Balderas, R. G., Block, D. y Guerra, M. T. (2011). La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros. *Memorias del XI Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE, A.C.

Balderas, R. G., Block, D. y Guerra, M. T. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué". Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática, 26*(2). pp. 7-32.

Barquero, B., Bosch, M, Gascón, J. (2010) Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. En Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Eds). Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. *II congrès international sur la TAD*. pp. 527-549.

Barquero, B. Bosch, M. y Gascón J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educación Matemática, 15*(1), pp.1-28.

Bauersfeld, H. y Skowronek, H. (1976). Research related to the mathematical learning process, in Athen & Kunle (eds), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education,* pp. 231-245.

Bkouche, R. (s.f). *Proportionnalité et règle de trois.* Recuperado el 20/10/2013 de http://michel.delord.free.fr/rb/rb-gien2006.pdf

Block, Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble?. La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México, D.F. SM de Ediciones, S.A. de C.V.

Blomhøj, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. *National Center for Mathematics Education.* pp. 145-159.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* (Memoria realizada para la obtención del título de doctor). Universidad de Zaragoza, Provincia de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 21*(2). pp. 237-304.

Boisnard, D., Houdebine, J., Julo, J., Kerboeuf, M.-P. & Merri M. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes*. Paris : Hachette.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias). Facultat de Ciències. Barcelona.

Bosch, M., Gascón, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories & empiries. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds*). Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage. pp. 23-40.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques 23*(1), pp. 79–135.

Bosch, M., Gascón, J. (2007a). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación", en Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Eds.). Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, IIº congrès international sur la TAD,* pp. 55-91

Bosch, M., Gascón, J. (2007b). 25 años de Transposición Didáctica. En Ruiz L., Estepa A. y García F. J. (Eds). *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 385-406, España.

Bosch, M., Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Brousseau, G. (1980). L' échec et le contrat. *Recherches 41*, pp. 177-182

Brousseau, G. (1982). *Préambule,* Documento presentado al Ministère de la Recherche, Talence, Francia.

Brousseau, G. (1986): Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B. *Trabajos de Matemática*, Nº 19.

Brousseau, G. (1988) Los diferentes roles del maestro. En Parra,C. y Saiz,I. (comps) *Didáctica de la Matemática. Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires, Paidós Educador, 1994.

Brousseau, G. (1994a). La Memoria del Sistema Educativo y la Memoria del Docente. *Publicación conjunta de la Facultad de Ciencias Exactas y naturales de la Universidad de Buenos Aires y del Servicio de Cooperación Lingüística y Educativa de la Embajada de Francia en la Argentina.*

Brousseau, G. (1994b). *Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques*. Washington: ICMI Study 94.

Brousseau, G. (1995) Glossaire de didactique des mathématiques, en *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours* CRPE, Copirelem, IREM d Áquitaine & LADIST.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balachef, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfiled. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Revista Educación Matemática 12*(1). Iberoamérica, México

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Carrillo, F. I. (2013). *Un estudio de la organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior* (Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima.

Castañeda, A., Rosas A., Molina, J. G. (2012). La institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas. Un estudio sobre el discurso del aula. *Perfiles educativos. 34*(135), pp. 26-40.

Castela, C. (2008). La noción de praxeología: un instrumento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico posiblemente útil para la socioepistemología. IUFM Haute-Normandie – Équipe Didirem Université Paris 7. En: P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22.* pp. 1195–1206 México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://clame.org.mx/documentos/alme22.pdf

Castela, C. & Romo, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques 31*(1), pp.123-162.

Ceballos, E. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja* (Informe de práctica presentado para optar por el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Cedillo, T. y Cruz, V. (2012). *Desarrollo del pensamiento algebraico*. México: Pearson.

Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A., Cruz, V., Ramírez, M. E. y Vega, E. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal: guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética*. México: Pearson/SEP.

Celis, A.B., Pérez, M.G., Torres, E. (2013). El uso de algunas herramientas que ofrece Internet, en la formación docente. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa.* COMIE. Guanajuato, México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE, Buenos Aires.

Chevallard, Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation en Arsac G., Chevallard, Y., Martinand A. *La transposition didactique à l'épreuve,* pp. 135-180 Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997) *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* España, Editorial ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (1997a) L'enseignement des SES est-il une anomalie didactique? Skholê. *Cahiers de la recherche et du développement, 6*, IUFM de l'Académie d'Aix-Marseille, pp. 25 - 37.

Chevallard, Y (1997b) Familière et problématique, la figure du professeur. Texte issu d'un cours donné à la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995). *A paru dans Recherches en Didactique des Mathématiques,17*(3), pp. 17-54.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado.* AIQUE Grupo Editor, Buenos Aires.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 19*(2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2001) Aspectos problemáticos de la formación docente. *Conférence donnée le 1er avril 2001 dans le cadre des XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM) tenues à l'Escuela de Magisterio de Huesca* (Université de Saragosse).

Chevallard, Y. (2002). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: raisons d'être, fonctions, devenir. Communication aux Journées de la commission inter-IREM Didactique (Dijon, 24-25 mai 2002). Paru dans les actes correspondants, IREM, Dijon, pp. 1-26.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En Bosch, M. (Ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*. pp. 21-30. Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F.J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*, Jaén: Universidad de Jaén. pp. 705-746.

Dalmau, J. (1938). *Aritmética Razonada y nociones de Álgebra*, Dalmau-Pla, Girona, 79ª ed.

Dorado, I., Díaz, J. L. (2014). Uso de la función exponencial para modelar crecimiento microbiano. *El cálculo y su enseñanza, 5(*5), pp. 75-90.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria* (Tesis Doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. Valencia, España.

Fernández, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: Traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas* (Tesis para obtener el grado de magíster en enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima-Perú.

Ferrer, M. (2000) *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana* (Tesis de doctorado). Instituto Superior Pedagógico "Frank País García", Santiago de Cuba.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis Doctoral). Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Vigo. Vigo, España.

Fonseca, C.; Casas, J.M.; Bosch, M.; Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander.

Fonseca, C. (2011). Recorridos de Estudio e Investigación: Una propuesta dentro de la teoría antropológica de lo didáctico para la creación de secuencias de enseñanza y de aprendizaje. *Paradigma. 32*(1). pp. 55-70.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* México: CINVESTAV, 2001.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén. Departamento de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Matemáticas y Sociales). Andalucía, España.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/1* (52), pp. 7-33.

Gascón, J. (1999). “Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas”, en Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, pp.129-150.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (2), pp. 129-159.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría, *Revista SUMA. (44),* pp. 25-34.

Gascón, J. Bosch M. (2007). La miseria del generalismo pedagógico, ante el problema de la formación del profesorado. En Ruiz-Higueras, L.; Estepa, A.; García, F. J. (Eds). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 201-240. Jaén: Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.

Gascón, J. (2011a). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didáctique des mathématiques, 31*(1), pp. 9-50.

Gascón, J. (2011b). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. 14* (2), pp. 203-231.

Gascón J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*. (3), pp. 69-87.

Géron, C., Stegen, P., Daro, S. (2005). *L´enseignement de la proportionnalité. Publiction destinée aux instituteurs du dernier cycle de l´école primaire et aux professeurs de mathématiques du premier degré de l´enseignement secondaire.* Recuperado el 10/09/2013 en http://www.enseignement.be/download.php?do_id=2712&do_check=

Gil, D., Beléndez, A., Martín, A. y Martínez, J. (1991). La formación del profesorado universitario de matemáticas científicas: contra algunas ideas y comportamientos de “sentido común”. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* (12), pp. 43-48.

Goetz, J. P. Y LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.

Godino, J. D. (2004*). Didáctica de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática*. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. España: Gami, S.L.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2003). *Matemáticas y su Didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada, España: Gami, S.L.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME 8 con el título, *"Didactic engineering as design-based research in mathematics education".* Turquía.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2013). *Ingeniería Didáctica basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo /2009 del artículo Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), pp. 127-135.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2008). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Hernández, S. (2013). Capital cultural en la formación inicial de la docencia en la Escuela Normal de Tlanepantla. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. Guanajuato, México.

Houdement, C. (1995). *Projets de formation des Mattress du premier degré en mathématiques: programmation et strategies* (Thése de doctorat). IREM VII, Paris.

Isoda, M., Olfos, R. (2009a). *La enseñanza de la multiplicación: el estudio de clases y las demandas curriculares.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile:Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M., Olfos, R. (2009b). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M. y Cedillo, T. (Eds.). (2012a). *Matemáticas para la Educación Normal, tomo V, Vol. 2.* México: Pearson/SEP

Isoda, M. y Cedillo, T. (Eds). (2012b). *Matemáticas para la Educación Normal, tomo VI, Vol. 2.* México: Pearson/SEP

Kuzniak, A. (1994). *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilices par les formateurs de maîtes du premier degré* (Thèse de doctorat). IREM VII. Paris.

Lamon, S.J. (2005) *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1988). *Fracciones.* Madrid: Síntesis.

Lorenzano, C. J. (2010). Concepción estructural del conocimiento científico, metodología de los programas investigativos y criterios para formular políticas de investigación. *Electroneurobiología. 18*(1), pp. 3-254.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo.

Martínez, C, Perea, E., Piña, M. Y., (2013). La actualización y capacitación en la fase de implantación de la reforma curricular: el caso de la licenciatura en Educación Primaria en la BENM. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa.* COMIE. Guanajuato, México.

Mellado, V. (2003). Cambio didáctico del profesorado de ciencias experimentales y filosofía de la ciencia. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), pp. 343-358.

Minor, J. M. (2013). La construcción de identidades en el hacer docente de los catedráticos de Educación Normal. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa.* COMIE. Guanajuato, México.

Obando, G., Vasco, C. E., Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y Aprendizaje de la Razón, la Proporción y la Proporcionalidad: Un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 17*(1), pp. 59-81.

Olbrich, M., Paredes, S. (2011) Dispositivos de formación profesional: diálogos entre el campo de la investigación y de la formación profesional. *VIII Encuentro de Cátedras de Pedagogía de Universidades Nacionales Argentinas. Memoria Académica.*Universidad Nacional de la Plata. Argentina.

Oliveira, C. (2010). Organizaciones matemáticas locales relativamente completas *Memoria de investigación.* Universidad de Vigo. España.

Oller, A. M, (2012). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, Departamento de Didáctica de las CCSS y de las CCEE. Valladolid.

Parra, V., Otero, M., Fanaro, M. (2010) "Fenómenos didácticos relativos a la evaluación en la universidad: Una descripción desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico", en Fioriti, G. (Comp.). *Actas del Segundo Congreso Internacional de Didácticas Específicas "Poder, disciplinamiento y evaluación de saberes"*, UNSAM, Septiembre-Octubre.

Parra, V., Otero, M., Fanaro, M. (2013). Recorridos de Estudio e Investigación co-disciplinares a la Microeconomía. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, pp. 17-35.

Perrin Glorian, M.J. (1993) Questions Didactiques soulevées à partir del' enseignement des mathématiques Dans des classes "faibles". *Recherches en Didactique des mathématiques, 13/1.2*, pp. 5-118.

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L., Fernández, F. (2003) *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer. Una empresa Docente*, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Portugais, J. (1995). Didactique des mathématiques et formation des enseignants. Suisse: Exploration Peter Lang.

Pugalee, D.K. (2010). Strategies and activities to develop proportional reasoning in the middle grades. *National Council of Teachers of Mathematics Southern Regional Conference*, New Orleans, LA.

Rivas, M. A., Godino, J. D., Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Bolema, 26(42B),* pp. 559-588.

Rodríguez, E., Bosch, M., Gascón J. (2006). Los recorridos de estudio e investigación en la reformulación didáctica del problema de la metacognición. En Ruiz-Higueras, L; Estepa, A.; García, F.J. (Eds.). (2007). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 481-506.

Rodríguez, M., Piña, C. y Soto, M. (2013). La construcción de un sujeto social: retos en la formación inicial de profesores. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa.* COMIE. Guanajuato, México.

Romo, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs: Mathematical education for undergraduate engineers* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot (Paris 7)

Ruiz, L., García, F, J. (2007). Didáctica de las matemáticas y formación de maestros: respuestas y desafíos (desde la TAD) en Brooner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G & Ladage, C. (Eds.) Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action.*II Congès International sur la TAD*. pp. 171-213.

Ruiz, M. E. (2007). La proporcionalidad como noción disponible del docente. *Reunión Anual REM*, Universidad Nacional del Comahue.

Ruiz, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza.* (Memoria de Tesis Doctoral). Facultad de formación de profesorado y educación. Departamento de Didácticas Específicas, Madrid.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. En Alagia, H., Bressan, A., Sadovsky, P., *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tesis Doctoral). Universitat Ramon Llull. Catalunya

SEP. (2011). *Documento base para la consulta nacional de la Reforma Curricular de la Educación Normal: Licenciatura en educación primaria, Licenciatura en educación preescolar y Licenciatura en educación preescolar intercultural bilingüe*. México. D.F.

SEP. (2012a). *Plan de estudios de la Licenciatura en Educación Primaria.* DGESPE, México, D.F.

SEP. (2012b). *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza. Licenciatura en Educación Primaria.* Programa del curso. DGESPE. México.

SEP. (2012c). *Álgebra: su aprendizaje y enseñanza. Licenciatura en Educación Primaria.* Programa del curso. DGESPE. México.

SEP. (2013a). *Desafíos Matemáticos. Quinto grado. Docente*. DGMIE/SEP, México, D.F.

SEP. (2013b). *Desafíos Matemáticos. Sexto grado. Docente.* DGMIE/SEP, México, D.F.

Shulman, L. S. (1986). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: Una Perspectiva contemporánea en Wittrock, M. C. *La Investigación de la Enseñanza I, Enfoques, teorías y métodos.* México:Paidós.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid. España.

Simon M. (1995) Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivista perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), pp. 114-145.

Souto, M. (1999). Los dispositivos pedagógicos desde una perspectiva técnica. En Souto, M, et-al. Grupos y dispositivos de Formación. *Serie Los Documentos 10*, Novedades Educativas. Bs. As.

Tortosa L., Santacruz, J. (1997). Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la forma escalonada reducida de una matriz. *Suma, 24*, pp. 39-45.

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada. España.

Valles, M. S. (1999). *Técnicas cualitativas de investigación social. Reflexión metodológica y práctica profesional*. Editorial Síntesis. S.A. Madrid.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), pp.133-170

Wozniak, F. (2010). Transposition didactique interne et dialectique des médias et des milieux. In: Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Eds.), *Diffuser les mathématiques* (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: IUFM de l'académie de Montpellier. pp. 859-878.

ANEXOS

ANEXO 1. DISEÑO DEL REI (PF5)

<table>
<tr><td>Asignatura</td><td>MATEMÁTICAS</td></tr>
<tr><td>Eje</td><td>Manejo de la información</td></tr>
<tr><td>Aprendizajes esperados</td><td>Resuelve una situación problema con base en conceptos y estrategias de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>Competencias que se favorecen</td><td>• Resolver problemas de manera autónoma
• Comunicar información matemática
• Validar procedimientos y resultados
• Manejar técnicas eficientemente</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>• Identificar y utilizar las posibles técnicas que pueden emplearse para encontrar el valor de una magnitud proporcional.
• Comprender las nociones y técnicas implícitas en la relación de proporcionalidad.
• Conocer la evolución de la técnica ante la manipulación de variables y consignas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PRIMERA SESIÓN:

• Entregar hoja de trabajo de la primera sesión y pegar hoja en cuaderno. En la primer sesión se maneja la siguiente situación problema, la cual se leerá y analizará de forma grupal:
En nuestro país se consumen grandes cantidades de refresco, principalmente refresco de cola (negro); entre los más consumidos encontramos la Coca y la Pepsi. Dichas marcas tienen algunas variaciones en sus precios; sin embargo, en la actualidad, año 2015, la botella de Coca tiene un precio de $25, mientras que la botella de Pepsi de $20.
• Resolver las siguientes preguntas de forma individual (de la forma en que ellos lo puedan realizar):
a) ¿Cuál es el costo de 4 botellas de Pepsi?
b) ¿Cuánto se debe pagar por ¾ de botella de Pepsi?
c) ¿Cuánto debe de pagar por 0.750 partes de una botella de Pepsi?
d) Si se quisiera comprar $25 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas le darían?</td></tr>
</table>

e) Y si se compraran $15 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas?
f) Y si sólo se compraran $12.50, ¿qué cantidad de botellas se darían?

- Reunirse en tercias y compartir sus procedimientos, con la finalidad de que elijan el más adecuado entre los tres (el cual deben conocer cada uno de los integrantes, junto con la explicación del por qué).
- Pasar al frente a algunos estudiantes para que expliquen sus procedimientos (seleccionar diferentes procedimientos en cada una de las preguntas).
- Institucionalizar información con ayuda de los procedimientos mencionados o con preguntas a los estudiantes.

SEGUNDA SESIÓN:

- Pegar hoja de la segunda sesión y de manera individual, resolver los siguientes problemas:
  a) Pablo desea hacer una fiesta pero al comprar todo lo que ocupaba para realizarla, le sobraron $4600 para comprar el refresco, ¿cuántas botellas de Coca ajustará?
  b) Antes de comprar los refrescos, su mamá le habló y le pidió que sólo comprara 123 botellas de Coca, ¿cuánto pagó?
- Reunirse en tercias y compartir sus procedimientos, con la finalidad de que elijan el más adecuado entre los tres (el cual deben conocer cada uno de los integrantes, junto con la explicación del por qué).
- Pasar al frente a algunos estudiantes para que expliquen sus procedimientos (seleccionar diferentes procedimientos en cada uno de los problemas).
- Institucionalizar información con ayuda de los procedimientos mencionados.
- De manera individual, leer los siguientes problemas y completar las tablas:

Miguel trabaja en una tienda, pero el dueño le pidió que llevara un registro de las botellas de Coca vendidas, por lo que realizó las siguientes tablas para facilitar su trabajo, ayúdale a completarlas:

No. de botellas	1	2	6	15	23	45	91
Precio							

No. de botellas							
Precio	25	75	125	200	250	325	500

La economía en México está pasando por un mal momento y la población ya no alcanza a comprar botellas completas, pero aun así siguen comprando; por lo que Miguel se vio en la necesidad de vender en vasos la Coca para seguir obteniendo ganancias, ayúdale a completar la siguiente tabla:

No. de botellas	0.1	0.25	0.5	0.75	0.8	1.5	2.25
Precio							

- Reunirse en tercias y compartir sus procedimientos, con la finalidad de que elijan el más adecuado entre los tres (el cual deben conocer cada uno de los integrantes, junto con la explicación del por qué).
- Pasar al frente a algunos estudiantes para que expliquen sus procedimientos (seleccionar diferentes procedimientos en cada uno de los problemas).
- Institucionalizar información con ayuda de los procedimientos mencionados o con preguntas a los estudiantes.

TERCERA SESIÓN:

- Pegar hoja de la tercer sesión en la libreta y de forma individual, resolver los siguientes problemas:
  a) En un cargamento que lleva Doña Lupita a su taquería, transporta 100 botellas de refresco; si por cada botella de Coca, hay 3 de Pepsi, ¿cuántas botellas hay de Pepsi y cuántas de Coca?
  b) Se realizó una encuesta acerca de las preferencias de las personas hacia las dos marcas de refresco de cola, obteniendo los siguientes resultados: 8 de cada 15 personas prefieren Pepsi y 7 de cada 11 prefieren Coca. ¿Qué marca de refresco de cola prefiere más la población?, ¿qué porcentaje representa la población que lo prefiere en cada caso?
  c) Ha estado disminuyendo el consumo de refresco debido al sobrepeso en la población, así que las dos marcas tuvieron que manejar ofertas para que las personas volvieran a comprar: Al comprar 5 botellas de Coca te regalan 1 más, y por comprar 15 botellas de Pepsi te regalan 4 botellas más. ¿Cuál promoción resulta mejor?
- Reunirse en tercias y compartir sus procedimientos, con la finalidad de que elijan el más adecuado entre los tres (el cual deben conocer cada uno de los integrantes, junto con la explicación del por qué).
- Pasar al frente a algunos estudiantes (principalmente los más rezagados) para que expliquen sus procedimientos (seleccionar diferentes procedimientos en

cada uno de los problemas).

- Institucionalizar información con ayuda de los procedimientos mencionados o con preguntas a los estudiantes.

CUARTA SESIÓN:

- Pegar hoja en cuaderno y resolver problema de forma individual:
  a) A Toñito y a José les gusta jugar a “Los científicos” así que decidieron hacer una mezcla, utilizando una botella de Coca ($25) y una de Pepsi ($20). Decidieron vender su mezcla ya que tenía un rico sabor, ¿cuánto costará toda la mezcla? ¿Y cuánto costará sólo una botella de esa mezcla?
  b) Si hubieran mezclado dos botellas de Coca y dos de Pepsi, ¿cuánto costaría toda la mezcla? ¿Y sólo una botella de esa mezcla?
  c) Y si juntaran dos de Coca y una de Pepsi, ¿cuánto costaría toda la mezcla y cuánto una botella?
  d) Y si juntaran 2 de Coca y 5 de Pepsi…
- Reunirse en tercias y compartir sus procedimientos, con la finalidad de que elijan el más adecuado entre los tres (el cual deben conocer cada uno de los integrantes, junto con la explicación del por qué).
- Pasar al frente a algunos estudiantes (principalmente los más rezagados) para que expliquen sus procedimientos (seleccionar diferentes procedimientos en cada uno de los problemas).
- Institucionalizar información con ayuda de los procedimientos mencionados o con preguntas a los estudiantes.

ANEXO 2. DISEÑO DEL REI (PF7)

Escuela Primaria “Gral. Pánfilo Natera”			
Núm. De alumnos	Grado y grupo	Fecha de realización	Materia
23	6°”C”	18 al 21 de mayo del 2015	Matemáticas
Aprendizajes esperados:			
-Identifican y utilizan posibles técnicas que pueden emplearse para encontrar el valor de una magnitud (costo-cantidad) proporcional. -Comprendan las nociones y técnicas implícitas en la relación de proporcional. -Identifican la evolución de la técnica ante la manipulación de variables y consignas.			

Primera sesión.

1. Se presenta el siguiente problema de forma grupal y se pide que contesten algunas preguntas.

En una fábrica textil se producen dos tipos diferentes de calcetines para exportar, que varían su calidad según el algodón que utilizan en su elaboración. Los calcetines “Cotton” cuestan $625 la caja precio a mayoristas y los calcetines “El Mexicano” cuestan $885 la caja precio a mayoristas, debe aclararse que la caja de ambas clases de calcetines contiene la misma cantidad. Tomando en cuenta los precios de las dos clases de calcetines:

¿Cuál es el costo de 3 cajas de calcetines “Cotton?, ¿cuál es el costo de 3 cajas de calcetines “El Mexicano”?, ¿cuál es más barato?, cuál es más caro?.

2. De forma individual se pide a los alumnos que llenen la siguiente tabla y contesten las siguientes preguntas:

Tomando en cuenta que el precio de los calcetines “Cotton “es de $625, completa la siguiente tabla.

Número de cajas	1.5			6
Precio por caja	937.5	1875	2812.5	

- ¿Cuál es el costo de caja de calcetines “Cotton”?, ¿y de calcetines “El Mexicano”?
- ¿Cuál es el costo de 0.700 partes de caja?

- ¿Cuántas cajas en cada caso si sólo se quieren comprar $700 de calcetines?

3. Se comparten procedimiento y se validan resultados
4. Se institucionaliza tomando en cuenta lo siguiente:
   - Existe un valor proporcional que hace que conforme aumenta el número de cajas, la cantidad a pagar también lo haga.
   - Si la cantidad de dinero disminuye, también disminuye la cantidad de cajas.

Segunda sesión.

1. De forma grupal se presenta el siguiente problema:

"Debido al aumento de impuestos, la fábrica de textiles tuvo que aumentar sus precios, por lo que ahora el costo de la caja de calcetines "Cotton " es de $670 y el costo de la caja de calcetines "El Mexicano" es de $915"

   - ¿Qué creen que sucederá ahora que cambiaron los costos?, ¿el valor proporcional será el mismo que en los costos anteriores?, ¿por qué?

2. Se pide que con base al problema resuelvan los siguientes planteamientos:
   - Al día la fábrica vende 300 cajas. Si por cada 5 cajas de calcetines "Cotton" se venden 2 cajas de calcetines "El Mexicano" ¿Cuántas cajas de calcetines "Cotton" venden al día?
   - Si al comprar 8 cajas de calcetines "Cotton" te regalan1 caja y al comprar 15 cajas de calcetines "El Mexicano" te regalan 2 cajas. ¿Cuál promoción conviene comprar más?

"Por temporada, la fábrica estará vendiendo cajas mixtas, que consiste en una mezcla de ambos tipos de calcetines según la petición del cliente, por lo que el precio varía según el contenido de cada caja"

   - Si se producen cajas con la combinación de una caja de cada clase de calcetín, ¿Qué precio tendrá esa caja?
   - Si se produce una caja, combinando dos cajas de calcetines "Cotton" y una " El Mexicano "¿Cuál será el costo de esta caja?

3. Se comparten y validan procedimientos y respuestas
4. Se institucionaliza retomando si es posible las conclusiones de la validación tomando en cuenta los siguientes puntos:

- Al cambiar el precio de las cajas de calcetines inmediatamente el total de dinero a pagar por n cajas cambia.
- Al realizar mezclas de ambos calcetines el precio varía según la calidad del contenido de la caja, es decir, si tiene un mayor porcentaje de calcetines de mayor precio y menor cantidad de calcetines de menor precio, el costo final se eleva, por el contrario disminuye.

Tercera sesión.

1. Se presenta de forma grupal el siguiente problema:

Tomando en cuenta que la caja de calcetines “Cotton” cuesta $670 y la caja de calcetines “El Mexicano” cuesta $915.

- ¿Qué cantidad de calcetines de cada clase debe de contener una caja que tenga un valor de $800?

2. De forma individual se pide contesten las siguientes preguntas con base al primer problema
    - ¿Se puede armar una caja con un valor menor de $670?, ¿Por qué?
    - ¿Se puede armar una caja con un valor superior a $915?, ¿Por qué?
    - ¿Qué cantidad de calcetines de cada clase debe de contener una caja que tenga un valor de x, es decir un valor cualquiera que sea?
3. Se comparten procedimientos y resultados, intentando que lleguen a un razonamiento algebraico inicial, haciendo preguntas.
    - Durante las sesiones de trabajo ¿qué relación han encontrado entre el precio y la cantidad de cajas?
    - ¿Qué pasa con el contenido de las cajas de calcetines cuando el precio que pagamos es mayor? ¿y qué pasa cuando es menor?
    - ¿Ustedes creen que pudiera haber una fórmula general para que pudiéramos conocer los porcentajes que deben de incluir una caja de cada clase de calcetines para obtener determinado precio final?, ¿cuál?
4. Se institucionaliza, tomando en cuenta lo siguiente:
    - Se llega a una conclusión de cuál sería el costo menor que pudiera tener una caja de calcetines y el costo mayor, argumentando el por qué ocurre esto.